

**XII ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА
УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2025**

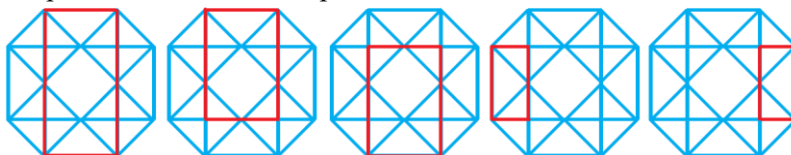
IV одделение

1. На цртежот десно има различни фигури. Одреди го бројот на правоаголници што не се квадрати.

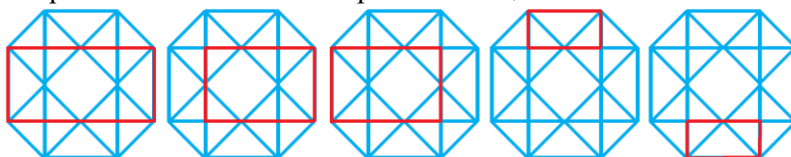


Решение. На цртежот има

- 5 вертикално поставени правоаголници:



- 5 хоризонтално поставени правоаголници:



- 3 косо поставени правоаголници од лево кон десно



- 3 косо поставени правоаголници од десно кон лево



Значи, на цртежот има вкупно 16 правоаголници кои не се квадрати.

2. Даден е изразот $36 + 144 : 9 - 3 \cdot 2$. Стави загради во него така што новодобиениот израз ќе има вредност еднаква на 60.

Решение. Ќе дадеме две решенија на задачата. Имаме:

$$(36 + 144) : (9 - 3 \cdot 2) = 180 : (9 - 6) = 180 : 3 = 60,$$

$$(36 + 144) : (9 - 3) \cdot 2 = 180 : 6 \cdot 2 = 30 \cdot 2 = 60.$$

3. Операта „Норма“ од Винченцо Белини има два чина. Прикажувањето на операта започнало во 19 часот, а завршило во 21:45. Колку минути траел

секој од двата чина, ако 15-минутната пауза меѓу чиновите завршила во 20:32?

Решение. Со одземање на 20:32 од 21:45 добиваме дека вториот чин траел 1 час и 13 минути, или 73 минути. Од 20:32 одземаме 15 минути и добиваме дека првиот чин завршил во 20:17. Ако од 20:17 го одземеме времето на почнување 19:00, добиваме дека првиот чин траел 1 час и 17 минути, односно 77 минути.

4. Васко и Раде треба да ги монтираат светилките во една зграда. Секој од нив треба да монтира по 600 светилки. Првиот ден Васко монтирал 243 светилки, а Раде 180 светилки. Станувајќи сè поизморен, секој следен ден Васко монтирал $\frac{2}{3}$ од бројот на светилки што ги монтирал претходниот ден, а Раде монтирал 19 светилки помалку од бројот на светилки што ги монтирал претходниот ден. Кој од двајцата ќе ги монтира сите светилки за пократко време? По колку светилки треба да монтира секој од нив последниот ден?

Решение. Динамиката со која Васко монтира светилки е дадена во следнава табела:

Ден	1. ден	2. ден	3. ден	4. ден	5. ден
Светилки	243	$\frac{2}{3} \cdot 243 = 162$	$\frac{2}{3} \cdot 162 = 108$	$\frac{2}{3} \cdot 108 = 72$	$\frac{2}{3} \cdot 72 = 48$
Остаток	357	195	87	15	0

Значи, Васко светилките ќе ги монтира за 5 дена и последниот ден ќе монтира 15 светилки.

Динамиката со која Раде монтира светилки е дадена во следнава табела:

Ден	1. ден	2. ден	3. ден	4. ден
Светилки	180	$180 - 19 = 161$	$161 - 19 = 142$	$142 - 19 = 123$
Остаток	420	259	117	0

Значи, Раде светилките ќе ги монтира за 4 дена и последниот ден ќе монтира 117 светилки.

Според тоа, Раде ќе ги монтира светилките за пократко време.

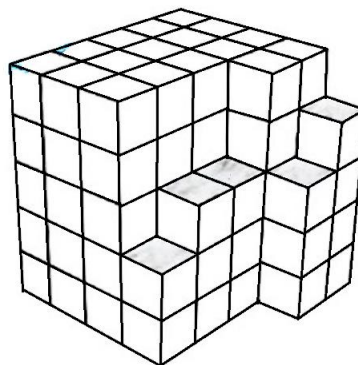
V одделение

1. Даден е бројот 581909786. Со бришење на кои било пет цифри останува четирицифрен број, во кој првата цифра може да биде и 0. Избриши пет цифри така што новодобиениот број да биде:
- а) најмал можен број б) најголем можен број.

Решение. а) Цифрите ги бришиме така што на почетокот редоследно остануваат најмалите можни цифри. Со бришење на цифрите 5, 8, 1 и 9 добиваме 09786, па сега најмалиот број го добиваме ако ја избришиме уште цифрата 9 и тоа е бројот 0786.

б) Цифрите ги бришиме така што на почетокот редоследно остануваат најголемите можни цифри. Со бришење на цифрите 5, 8 и 1 добиваме 909786. Сега е јасно дека треба уште да ги избришеме цифрите 0 и 7, по што го добиваме бројот 9986

2. Коцка со страна долга 5 *cm* е составена од помали коцки со страна долга 1 *cm*. Од неа се отстранети извесен број мали коцки само од предниот (видлив) дел, при што е добиена формата прикажана на цртежот. Колку мали коцки се отстранети од големата коцка? Колкав процент од големата коцка е отстранет?



Решение. Големата коцка е составена од $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ мали коцки. Гледајќи од долу кон горе отстранети се:

- од првиот ред 3 мали коцки,
- од вториот ред 3 мали коцки,
- од третиот ред 4 мали коцки,
- од четвртиот ред 7 мали коцки,
- од петтиот ред 8 мали коцки.

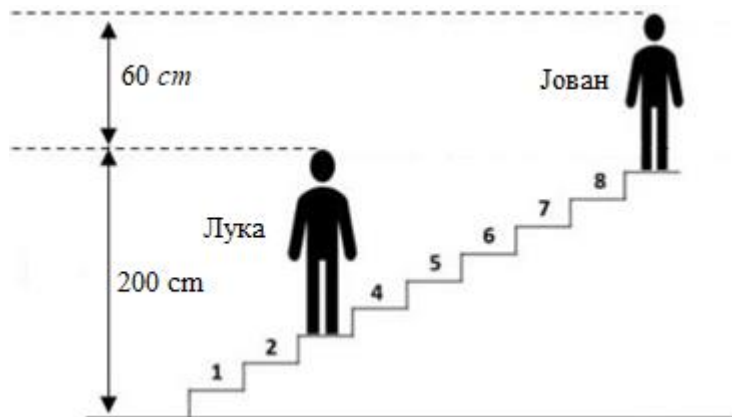
Значи, од големата коцка се отстранети $3 + 3 + 4 + 7 + 8 = 25$ мали коцки, односно $\frac{25}{125} \cdot 100\% = 20\%$.

3. Ема има три вида миленици: мачиња, кучиња и папагали. Таа вели: „Сите мои миленици, освен 3, се мачиња. Сите мои миленици, освен 4, се кучиња. Сите мои миленици, освен 5, се папагали.“ Колку мачиња, кучиња и папагали има Ема?

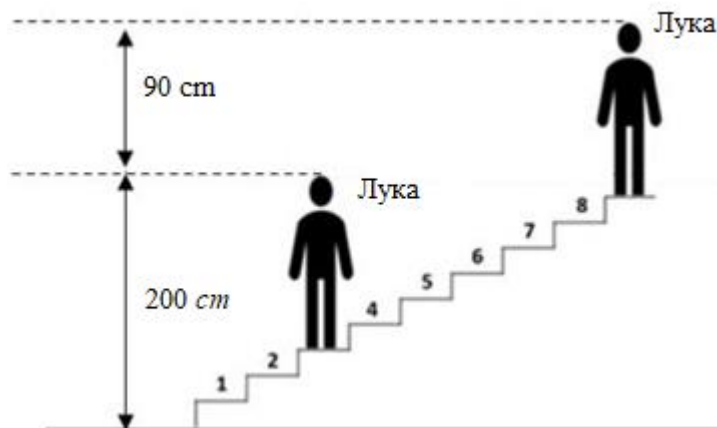
Решение. Бидејќи сите освен 3 се мачиња, бројот на кучињата и папагалите е 3. Слично добиваме дека бројот на мачињата и папагалите е 4, а бројот на мачињата и кучињата е 5. Во збирот $3 + 4 + 5 = 12$ секое милениче е броено два пати, што значи дека Ема има 6 миленичиња. Според тоа, Ема има $6 - 3 = 3$ мачиња, $6 - 4 = 2$ кучиња и $6 - 5 = 1$ папагал.

4. Лука стои на третото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата височина заедно со скалите е еднаква на 2 m . Јован, кој е 30 cm понизок од Лука, стои на деветтото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата височина заедно со скалите е еднаква на 2 m и 60 cm . Колку е висок Лука, а колку е висок Јован ако сите скалила се со иста височина?

Решение. Кога Јован е на третото, а Лука е на деветтото скалило разликата меѓу височините на Јован и Лука е $2\text{ m } 60\text{ cm} - 2\text{ m} = 60\text{ cm}$.



Бидејќи Лука е 30 cm повисок од Јован, кога тој стои на третото скалило и на деветото скалило, т.е. кога е застане на местото на Лука, разликата меѓу двете височини ќе биде $60 + 30 = 90\text{ cm}$.



Значи, $9 - 3 = 6$ скалила се високи 90 cm , па затоа едно скалило е високо $90 : 6 = 15\text{ cm}$. Конечно, Лука е висок $200 - 3 \cdot 15 = 155\text{ cm}$, а Јован е висок $155 - 30 = 125\text{ cm}$.

VI одделение

1. Средната возраст на единаесетте фудбалери на теренот од некој тим била 26 години. За време на натпреварот еден фудбалер се повредил и ја напуштил играта. Средната возраст на десетте фудбалери кои останале на теренот пред влегувањето на замената била 25 години. Колку години има фудбалерот што ја напуштил играта?

Решение. Пред играта да ја напушти повредениот играч сите играчи заедно имале $11 \cdot 26 = 286$ години. Откако повредениот играл ја напуштил играта, играчите кои останале на теренот вкупно имале $10 \cdot 25 = 250$ години. Значи, играчот кој ја напуштил играта имал $286 - 250 = 36$ години.

2. Кој број треба да се одземе од броителот и од именителот на дробката $\frac{2024}{2025}$ за да се добие дробка еднаква на дробката $\frac{12}{15}$?

Решение. Нека бараниот број е x . Тогаш $\frac{2024-x}{2025-x} = \frac{12}{15}$. Решението на последната равенка е $x = 2020$. Притоа се добива $\frac{2024-2020}{2025-2020} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

3. Даден е четириаголник означен како на цртежот. Одреди ја вредноста на аголот x

Решение. При ознаките како на цртежот имаме:

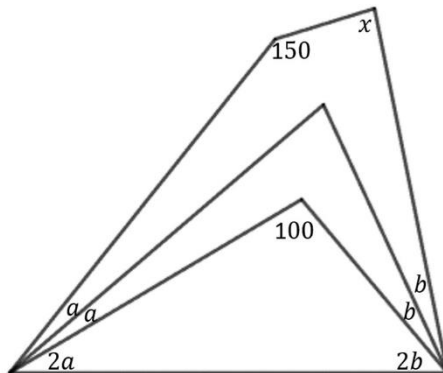
$$2a + 2b + 100^\circ = 180^\circ,$$

$$2a + 2b = 80^\circ,$$

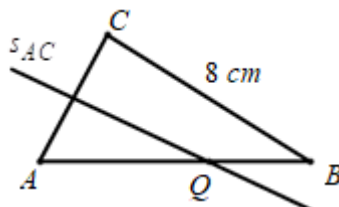
$$4a + 4b + 150^\circ + x = 360^\circ$$

$$x = 210^\circ - 2(2a + 2b),$$

$$x = 210^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 50^\circ.$$

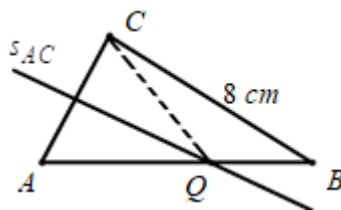


4. Во триаголникот ABC симетралата на страната AC ја сече страната AB во точката Q . Пресметај го периметарот на триаголникот QBC ако должините на AB и BC изнесуваат 13 cm и 8 cm соодветно.



Решение. Бидејќи симетралата s_{AC} ја сече страната AB во точката Q важи $\overline{QC} = \overline{QA}$. Значи,

$$\begin{aligned} L_{QBC} &= \overline{QB} + \overline{BC} + \overline{QC} \\ &= \overline{QB} + \overline{BC} + \overline{QA} \\ &= \overline{AB} + \overline{BC} \\ &= 13 + 8 = 21 \text{ cm} \end{aligned}$$



VII одделение

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A = \frac{1}{17} \cdot \left(\frac{2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}} ; \frac{5\frac{3}{5} + 1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5} - 4\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} - \frac{1}{5} \right).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{17} \cdot \left(\frac{2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}} ; \frac{5\frac{3}{5} + 1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5} - 4\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{17} \cdot \left(\frac{\frac{5}{2} + \frac{10}{3}}{\frac{7}{2} - \frac{7}{3}} ; \frac{\frac{28}{5} + \frac{4}{3}}{\frac{33}{5} - \frac{13}{3}} \right) \cdot \left(\frac{\frac{20}{20} - \frac{4}{20}}{\frac{8}{56} - \frac{7}{56}} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{17} \cdot \left(\frac{\frac{15+20}{6}}{\frac{21-14}{6}} ; \frac{\frac{84+20}{15}}{\frac{99-65}{15}} \right) \cdot \left(\frac{56}{20} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{17} \cdot \left(\frac{35}{7} ; \frac{104}{34} \right) \cdot \left(\frac{14}{5} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{17} \cdot 5 \cdot \frac{34}{104} \cdot \frac{13}{5} = \frac{1}{17} \cdot \frac{2 \cdot 17}{8 \cdot 13} \cdot 13 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Дарко сакал да си купи велосипед кој чинел 4200 денари. Тој во својата каса имал заштедено $\frac{3}{7}$ од сумата која му е потребна. Од дедо му добил 1000 денари како подарок за неговиот роденден, а татко му му рекол дека ќе учествува во купувањето на велосипедот со 27% од сумата. Уште колку денари му недостигаат на Дарко за да го купи велосипедот?

Решение. Дарко во касата имал $\frac{3}{7} \cdot 4200 = 1800$ денари, а учеството на татко му е $27\% \cdot 4200 = \frac{27}{100} \cdot 4200 = 1134$ денари. Според тоа, на Дарко му недостасуваат $4200 - (1800 + 1000 + 1134) = 266$ денари.

3. Колку броеви од видот $\overline{1a67b}$ се деливи со 18?

Решение. Еден број е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Од деливоста со 2 следува дека цифрата b може да биде 0, 2, 4, 6 или 8. Понатаму, од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите треба да биде делив со 9. Според тоа,

- ако $b = 0$, тогаш $a + 14$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 4$,
 - ако $b = 2$, тогаш $a + 16$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 2$,
 - ако $b = 4$, тогаш $a + 18$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 0$ или 9,
 - ако $b = 6$, тогаш $a + 20$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 7$,
 - ако $b = 8$, тогаш $a + 22$ треба да е делив со 9, од каде добиваме $a = 5$.
- Конечно, 6 броја од дадениот вид се деливи со 18.

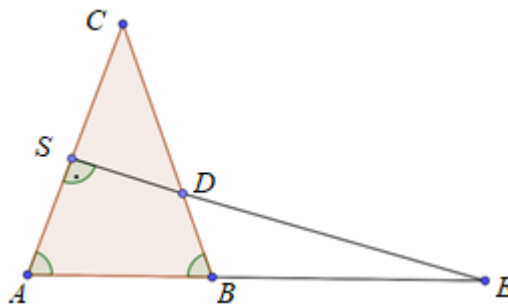
4. Во рамнокракиот триаголник ABC аголот при врвот C е двапати помал од аголот при основата. Ако симетралата на кракот AC го сече другиот крак во точката D , а правата AB ја сече во точката E , определи ги внатрешните агли на триаголникот BED .

Решение. Нека аголот при врвот го означиме со α . Тогаш аголот при основата е 2α , па затоа

$$\alpha + 2 \cdot 2\alpha = 180^\circ,$$

т.е. $\alpha = 36^\circ$. Понатаму, триаголникот AES е правоаголен, па затоа

$$\angle E = 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ \text{ и } \angle D = 2\alpha - \angle E = 2 \cdot 36^\circ - 18^\circ = 54^\circ.$$



VIII одделение

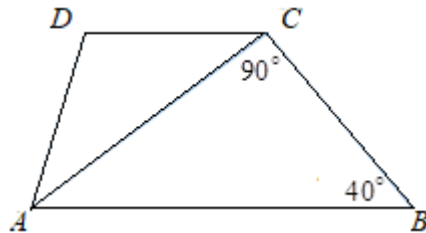
1. Баба Роса и нејзината внука Елена заедно имаат 91 година. Пред 3 години баба Роса била 4 пати постара од внуката Елена. Колку години има баба Роса, а колку внуката Елена?

Решение. Нека бабата има x , а внуката има y години. Од условот на задачата следува $x + y = 91$ и $x - 3 = 4(y - 3)$. Ако од првата равенка ја

одземеме втората равенка, добиваме $y + 3 = 91 - 4(y - 3)$, од каде добиваме $y = 20$. Сега, со замена во првата равенка наоѓаме $x = 71$.

2. Дијагоналата AC на траpezот $ABCD$ е нормална на кракот BC , а остриот агол во темето B има 40° . Определи ги останатите агли во траpezот, ако е познато дека помалата основа е еднаква на другиот крак.

Решение. Од триаголникот ABC добиваме $\angle BAC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Понатаму, $\angle ACD = \angle BAC = 50^\circ$, како наизменични агли на трансферзала. Но, триаголникот ACD е рамнокрак и затоа $\angle CAD = \angle ACD = 50^\circ$. Сега, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 100^\circ$, $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 140^\circ$ и $\angle CDA = 180^\circ - \angle ACD - \angle CAD = 80^\circ$. Конечно, аглиите на траpezот $ABCD$ се еднакви $100^\circ, 40^\circ, 140^\circ, 80^\circ$.



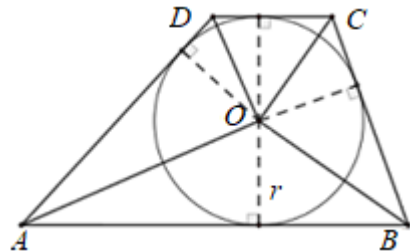
3. Збирот на броителот и именителот на една дробка е 296. По скратувањето на таа дробка се добива допката $\frac{12}{25}$. Определи ја таа дробка?

Решение. Пред скратувањето дробката е од видот $\frac{12a}{25a}$. Според тоа, $12a + 25a = 296$, од каде добиваме $37a = 296$, т.е. $a = 8$. Значи, бараната дробка е $\frac{12 \cdot 8}{25 \cdot 8} = \frac{96}{200}$.

4. Во траpez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) впишана е кружница со радиус 6 cm . Периметарот на траpezот е 24 cm . Пресметај ја плоштината на овој траpez?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CDO} + P_{ADO} \\ &= \frac{\overline{AB} \cdot r}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot r}{2} + \frac{\overline{CD} \cdot r}{2} + \frac{\overline{DA} \cdot r}{2} \\ &= \frac{(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \cdot r}{2} \\ &= \frac{24 \cdot 6}{2} = 72 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



IX одделение

1. Кој е најголемиот двоцифрен број кој станува за 75% поголем кога неговите цифри ќе си ги заменат местата?

Решение. Нека $n = 10a + b$ е бараниот број. Со замена на цифрите се добива бројот $N = 10b + a$. Јасно, $n > 0$ и $N = n + \frac{75}{100}n = n + \frac{3}{4}n = \frac{7}{4}n$.

Според тоа,

$$10b + a = \frac{7}{4}(10a + b),$$

$$40b + 4a = 70a + 7b,$$

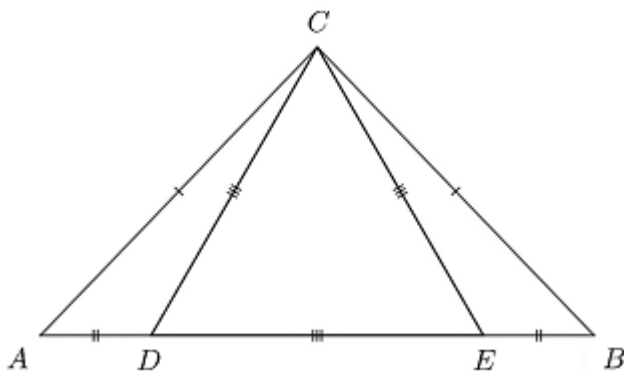
$$b = 2a.$$

Бидејќи b е цифра, добиваме $b < 10$, па затоа $a < 5$. Јасно, најголемиот број се добива за $a = 4$ и притоа $b = 8$. Конечно, бараниот број е 48.

2. На основата AB на рамнокракиот $\triangle ABC$ се избрани точки D и E (во тој редослед од темето A кон темето B), така што $\overline{AD} = \overline{BE}$ и $\angle DCE = 60^\circ$. Ако периметарот на $\triangle DEC$ е 30 cm, а збирот од периметрите на $\triangle ADC$ и $\triangle BCE$ е 60 cm, пресметај го периметарот на $\triangle ABC$.

Решение. Од условот на задачата следува $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BE}$ и $\angle DAC = \angle EBC$, што според признакот SAC значи $\triangle DAC \cong \triangle EBC$. Според тоа, $\overline{DC} = \overline{EC}$ и како $\angle DCE = 60^\circ$ заклучуваме дека $\triangle DCE$ е рамностран. Значи, $\overline{DC} = \overline{EC} = \overline{DE} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ cm.

Од претходните разгледувања и од условот на задачата за периметарот на рамнокракиот триаголник ABC добиваме:



$$\begin{aligned} L_{ABC} &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= (\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{AC}) + (\overline{BE} + \overline{EC} + \overline{BC}) - \overline{DE} \\ &= 60 - 10 = 50 \text{ cm} \end{aligned}$$

3. Нека x, y, z се ненулти реални броеви такви што

$$x + y + z = 0 \text{ и } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

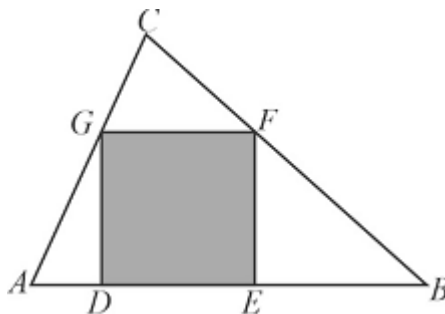
Решение. Од $x + y + z = 0$ следува $x + y = -z, y + z = -x, x + z = -y$. Сега

од $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1$ и од претходните равенства добиваме:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) &= \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1 \\ &= \frac{x+z}{y} + \frac{y+x}{z} + \frac{y+z}{x} + 1 \\ &= \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} + \frac{-x}{x} + 1 \\ &= -1 - 1 - 1 + 1 = -2, \end{aligned}$$

односно $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -1$

4. Во триаголникот ABC е впишан квадрат $DEFG$ како на цртежот. Ако $\overline{AD} + \overline{EB} = 16 \text{ cm}$ и плоштината на триаголникот GCF е 16 cm^2 , пресметај ја плоштината на квадратот $DEFG$.



Решение. Нека со a ја означиме страната на квадратот $DEFG$, а со h должината на висината спуштена од темето C кон страната AB . Тогаш $h = \overline{CH}$ и $\overline{CK} = h - a$, каде што K е пресечна точка на h со страната на квадратот FG . Од сличноста на триаголниците GCF и ACB имаме

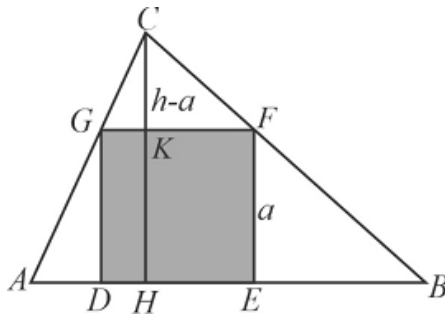
$$\begin{aligned} \frac{\overline{GF}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{CK}}{\overline{CH}} \\ \frac{a}{a + \overline{AD} + \overline{EB}} &= \frac{h - a}{h}, \\ ah &= (h - a)(a + 16), \end{aligned}$$

$$a^2 + 16a = 16h. \quad (1)$$

Плоштината на триаголникот GCF

е $P = \frac{\overline{GF} \cdot \overline{CK}}{2}$, од каде добиваме

$$\frac{a(h-a)}{2} = 16, \text{ односно } 32 = ah - a^2. \text{ Значи}$$



$$h = \frac{a^2 + 32}{a}. \quad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува:

$$a^2 + 16a = 16 \frac{a^2 + 32}{a},$$

$$a^3 + 16a^2 = 16a^2 + 512,$$

$$a^3 = 512,$$

$$a = 8.$$

Конечно, плоштината на квадратот $DEFG$ е $P = a^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$.