Самоил Малчески, Скопје

НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ И ПРИМЕНА

Нека $a,b>0$. Броевите

$$A=A(a,b)=\frac{a+b}{2},\ G=G(a,b)=\sqrt{ab},$$

$$H=H(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b} \text{ и } K=K(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

ги нарекуваме *аритметичка, геометриска, хармониска* и *квадратна средина*, соодветно за броевите a и b. Ако $m=\min\{a,b\}$ и $M=\max\{a,b\}$, тогаш се точни неравенствата $m\leq H\leq G\leq A\leq K\leq M$, т.е. неравенствата

$$m\leq\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leq M \qquad (1)$$

при што знаци за равенство важат ако и само ако $a=b$. Лесно се докажуваат првото и последното неравенство во (1), а доказите на останатите неравенства може да се видат во [3]. Ќе разгледаме неколку задачи во кои се применуваат неравенствата (1).

Задача 1. Нека $a,b,c>0$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca. \qquad (2)$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}=ab,\quad \frac{b^2+c^2}{2}\geq bc \text{ и } \frac{c^2+a^2}{2}\geq ca.$$

Понатаму, ако ги собереме добиените неравенства, го добиваме неравенството (2). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Втор начин. Имаме

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)+(c-a)^2\geq 0,$$

од каде го добиваме неравенството (2). ■

Забелешка 1. Вториот доказ на неравенството (2) покажува дека тоа всушност важи за секои реални броеви a,b и c.

Задача 2. Докажи дека за секои реални броеви a,b и c важи

$$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c).$$

Решение. Ако два пати го искористиме неравенството (2) добиваме

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4&=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\&=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)\\&=abc(a+b+c),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Нека $x,y,z>0$. Докажи дека

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина счедува

$$x+y\ge 2\sqrt{xy}\,,\ \ y+z\ge 2\sqrt{yz}\ \text{ и }\ z+x\ge 2\sqrt{zx}\,.$$

Сега, ако ги помножиме овие неравенства, го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. ■

Задача 4. Докажи дека

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{100}{151}.$$

Решение. Неравенството $H\le A$ е еквивалентно на неравенството

$$\frac{4}{a+b}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Сега со примена на последното неравенство, добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}&=(\frac{1}{51}+\frac{1}{100})+(\frac{1}{52}+\frac{1}{99})+...+(\frac{1}{75}+\frac{1}{76})\\&>\frac{4}{51+100}+\frac{4}{52+99}+...+\frac{4}{75+76}\\&=(75-50)\cdot\frac{4}{151}=\frac{100}{151},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 5. Нека $x,y,z>0$. Докажи ги неравенствата:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{z}+\sqrt{x}). \qquad (3)$$

$$\frac{(z+x)(x+y)}{(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}+\frac{(x+y)(y+z)}{(\sqrt{z}+\sqrt{x})^2}+\frac{(y+z)(z+x)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\ge x+y+z. \qquad (4)$$

Решение. Од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(z+x)(x+y)=x^2+yz+xy+xz\geq 2\sqrt{x^2yz}+x(y+z)$$
$$=x(y+2\sqrt{yz}+z)=x(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$$

од каде добиваме

$$(z+x)(x+y)\geq x(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\,. \qquad (5)$$

Аналогно се докажува дека

$$(y+z)(z+x)\geq z(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2, \qquad (6)$$

$$(x+y)(y+z)\geq y(\sqrt{z}+\sqrt{x})^2\,. \qquad (7)$$

Ако ги помножиме неравенствата (5), (6) и (7), го добиваме неравенството

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\geq xyz(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2(\sqrt{z}+\sqrt{x})^2\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството (3). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

Понатаму, неравенствата (5), (6) и (7) се еквивалентни со неравенствата

$$\frac{(z+x)(x+y)}{(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}\geq x\,,\ \frac{(y+z)(z+x)}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}\geq z \text{ и } \frac{(x+y)(y+z)}{(\sqrt{z}+\sqrt{x})^2}\geq y\,,$$

соодветно. Ги собираме последните три неравенства и го добиваме неравенството (4). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. ■

Задача 6. Нека $a,b>0$ се такви што $a+b\geq 1$. Докажи дека $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$.

Решение. Од $a+b\geq 1$ следува $a^2+2ab+b^2\geq 1$. Понатаму, од неравенствопто меѓу аритметичката и геометриската средина имаме $a^2+b^2\geq 2ab$ и ако ги соберем последните две неравенства добиваме

$$2a^2+2b^2\geq 1\text{, т.е. } a^2+b^2\geq\frac{1}{2}\,.$$

Ако последното неравенство го квадрираме добиваме

$$(a^2+b^2)^2\geq\frac{1}{4}\text{, т.е. } a^4+b^4+2a^2b^2\geq\frac{1}{4}\,.$$

Ако ова неравенство го собереме со неравенството $a^4+b^4\geq 2a^2b^2$, го добиваме неравенството $2(a^4+b^4)\geq\frac{1}{4}$, кое е еквивалентно со бараното неравенство. Знач за равенство важи ако и само ако се исполнети условите $a+b=1$ и $a=b$, т.е. ако и само ако $a=b=\frac{1}{2}$. ■

Задача 7. Нека $a,b,c>0$. Докажи дека

$$6abc \le ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \le 2(a^3+b^3+c^3).$$

Решение. Прво ќе го докажеме левото неравенство. Неравенството $2ab \le a^2+b^2$ го множиме со c и добиваме $2abc \le c(a^2+b^2)$. Слично ги добиваме неравенствата $2abc \le b(c^2+a^2)$ и $2abc \le a(b^2+c^2)$. Последните три неравенства ги собираме и добиваме

$$\begin{aligned} 6abc &\le a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2)+b(c^2+a^2) \\ &= ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2 \\ &= ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

За да го докажеме десното неравенство, прво ќе забележиме дека неравенството $2ab \le a^2+b^2$ е еквивалентно со неравенството $ab \le a^2+b^2-ab$. Последното неравенство го множиме со $a+b$ и последователно добиваме

$$\begin{aligned} &ab(a+b) \le (a+b)(a^2+b^2-ab) \\ &ab(a+b) \le a^3+b^3. \end{aligned}$$

На потполно идентичен начин добиваме дека важи:

$$bc(b+c) \le b^3+c^3 \text{ и } ca(c+a) \le c^3+a^3.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \le 2(a^3+b^3+c^3),$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 8. Докажи дека за секој реален број a важи

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} &= \frac{a^2+2+1}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{\sqrt{a^2+2}^2}{\sqrt{a^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} \\ &= \sqrt{a^2+2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} > 2\sqrt{\sqrt{a^2+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}} = 2. \end{aligned}$$

Во неравенството не важи знак за равенство, бидејќи во спротивно ќе добиеме дека

$$\sqrt{a^2+2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}, \text{ т.е. } a^2+2=1,$$

што не е можно, бидејќи за секој реален број a важи $a^2+2\geq 2>1$. ■

Задача 9. Нека $a,b,c>0$. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}}+\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{ab}}+\sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}}\geq 3+\frac{a}{\sqrt{bc}}+\frac{b}{\sqrt{ca}}+\frac{c}{\sqrt{ab}}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)&=b^2+ab+bc+ca=b^2+b(a+c)+ac\\&=b^2+2b\sqrt{ac}+(\sqrt{ac})^2=(b+\sqrt{ac})^2,\end{aligned}$$

од каде последователно добиваме

$$\sqrt{(a+b)(b+c)}\geq b+\sqrt{ac},$$
$$\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}}\geq 1+\frac{b}{\sqrt{ac}}.$$

Слично добиваме

$$\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{ab}}\geq 1+\frac{c}{\sqrt{ab}} \text{ и } \sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}}\geq 1+\frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

Сега, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 10. Нека $a,b,c>0$. Докажи дека

$$\frac{a^3\sqrt{a}}{a^2+bc}+\frac{b^3\sqrt{b}}{b^2+ca}+\frac{c^3\sqrt{c}}{c^2+ab}\geq a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}-\frac{3}{2}\sqrt{abc}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{a^3}{a^2+bc}=a-\frac{abc}{a^2+bc}=a-\frac{1}{\frac{a}{bc}+\frac{1}{a}}. \tag{8}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\frac{a}{bc}+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}\cdot\frac{1}{a}}=\frac{2}{\sqrt{bc}}, \text{ т.е. } \frac{1}{\frac{a}{bc}+\frac{1}{a}}\leq\frac{\sqrt{bc}}{2}.$$

Последното неравенство го множиме со -1 и добиваме

$$-\frac{1}{\frac{a}{bc}+\frac{1}{a}}\geq-\frac{\sqrt{bc}}{2}. \tag{9}$$

Сега од (8) и (9) следува

$$\frac{a^3}{a^2+bc}=a-\frac{1}{\frac{a}{bc}+\frac{1}{a}}\ge a-\frac{\sqrt{bc}}{2}.$$

Последното неравенство го множиме со $\sqrt{a}$ и добиваме

$$\frac{a^3\sqrt{a}}{a^2+bc}\ge a\sqrt{a}-\frac{\sqrt{abc}}{2}.$$

На потполно идентичен начин се добиваат неравенствата

$$\frac{b^3\sqrt{b}}{b^2+ca}\ge b\sqrt{b}-\frac{\sqrt{abc}}{2} \text{ и } \frac{c^3\sqrt{c}}{c^2+ab}\ge c\sqrt{c}-\frac{\sqrt{abc}}{2}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 11. Нека $a,b\in(0,1)$. Докажи дека

$$\sqrt{ab}+\sqrt{(1-a)(1-b)}\le 1.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2} \text{ и } \sqrt{(1-a)(1-b)}\le\frac{1-a+1-b}{2},$$

односно

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2} \text{ и } \sqrt{(1-a)(1-b)}\le 1-\frac{a+b}{2}.$$

Конечно, со собирање на последните две неравенства го добиваме бараното ннеравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. ■

Задача 12. Нека $x>1$. Докажи дека

$$\frac{x+1}{x-1}>\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Бидејќи $x>1$ од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\ge 2\sqrt{\frac{2}{x-1}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}>\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, бидејќи за секој $x>1$ важи $\frac{1}{\sqrt{x-1}}>\frac{1}{\sqrt{x}}$ во даденото неравенство не важи знак за равенство. ■

Нека $a_i>0$, $i=1,2,...,n$. Броевите

$$K_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}},\ A_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},\ G_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \text{ и } H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

ги нарекуваме квадратна, аритметичка, геометриска и хармониска средина за броевите $a_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Нека

$$m = \min\{a_i, i = 1, 2, ..., n\} \text{ и } M = \max\{a_i, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Може да се докажќе дека се точни следниве неравнества

$$m \leq H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n \leq M. \tag{10}$$

Во натамошните разгледувања користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за два броја истото ќе го докажеме за четири и три броја. Доказите на неравенствата (10) се посложени и истите миже да се најдат во [2].

Задача 13. Нека $a, b, c, d > 0$. Докажи дека

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4} \text{ и } \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}.$$

Решение. Имаме $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ и $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$, па затоа

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b, c = d$ и $\sqrt{ab} = \sqrt{cd}$, од што следува $a = b = c = d$. Понатаму, за броевите $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ добиваме

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d}} = \frac{1}{\sqrt[4]{abcd}}, \text{ т.е. } \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$, т.е. ако и само ако $a = b = c = d$. ■

Задача 14. Нека $a, b, c > 0$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \text{ и } \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

Решение. Ако за броевите a, b, c и $d = \frac{a+b+c}{3}$ го искористиме првото неравенство во задача 13 последователно добиваме

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}},$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}},$$

$$(\frac{a+b+c}{3})^4 \ge abc\cdot\frac{a+b+c}{3},$$
$$(\frac{a+b+c}{3})^3 \ge abc,$$
$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Понатаму, за броевите $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ добиваме

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}, \text{ т.е. } \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 15. Нека $a,b,c>0$. Докажи дека

$$(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}) \ge \frac{9}{2}.$$

Решение. Од задача 14 следува

$$a+b+c = \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2} \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

и

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{c+d}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Според тоа,

$$(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}) \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{9}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a+b=b+c=c+a$, т.е. ако и само ако $a=b=c$. ■

Задача 16. Определи ја најголемата можна вредност на функцијата

$$y=\frac{x}{4+x^2},\ x\ge 0.$$

Решение. Имаме, $4+x^2 \ge 2\sqrt{4x^2}$, т.е. $4+x^2\ge 4x$, од каде следува $\frac{x}{4+x^2}\le\frac{1}{4}$. Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $4=x^2$ и како $x\ge 0$, добиваме дека знак за равенство важи за $x=2$. Според тоа, најголемата вредност на функцијата $y=\frac{x}{4+x^2}, x\ge 0$ е $y_{\max}=\frac{1}{4}$ и таа се достигнува за $x=2$. ■

Задачи за самостојна работа

1. Ако $a>0$, тогаш $a+1\geq 2\sqrt{a}$. Докажи!
2. Ако $a,b>0$, тогаш $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$. Докажи!
3. Ако $a,b>0$, тогаш $ab\leq\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$. Докажи!
4. Докажи дека за секој реален број a важи $\frac{a^2}{1+a^4}\leq\frac{1}{2}$. Кога важи знак за равенство?
5. Докажи го неравенството
$$\frac{1}{501}+\frac{1}{502}+\frac{1}{503}+...+\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}>\frac{13}{20}.$$
6. Нека $a,b,c>0$. Докажи дека
$$ab+bc+ca\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$
7. Нека $a,b>0$. Докажи дека
$$a^2+b^2+1\geq ab+a+b.$$
8. Нека $0<b<a$. Докажи дека
$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}.$$
9. Ако $abc>0$, докажи дека
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$
10. Определи ја најмалата можна вредност на функцијата
$$y=x+\frac{9}{x},\ x>0.$$

Литература

1. Гроздев, С. (2021). Две елементарни неравенства и нивна примена, https://matematickitalent.mk
2. Малчески, Р. (2019). Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Армаганка, Скопје
3. Малчески, Р. (2021). Неравенства меѓу средините, https://matematickitalent.mk