Републички натпревар 2019

I година

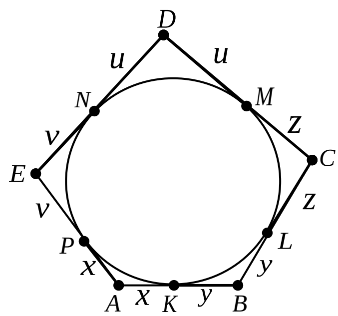
1. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што $\overline{AB}=4cm$, $\overline{BC}=6cm$, $\overline{CD}=8cm$, $\overline{DE}=7cm$ и $\overline{EA}=9cm$. Дали во овој петаголник може да се впише кружница? Одговорот да се образложи!

Решение. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што $\overline{AB}=4cm$, $\overline{BC}=6cm$, $\overline{CD}=8cm$, $\overline{DE}=7cm$ и $\overline{EA}=9cm$, во кој може да се впише кружница k. Допирните точки на AB,BC,CD,DE,EA со k ќе ги означиме со K,L,M,N,P соодветно (цртеж десно). Тогаш,

$$\overline{PA}=\overline{AK}=x,\ \overline{KB}=\overline{BL}=y,\ \overline{LC}=\overline{CM}=z,$$
$$\overline{MD}=\overline{DN}=u,\ \overline{NE}=\overline{EP}=v$$

и

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=6 \\ z+u=8 \\ u+v=7 \\ v+x=9 \end{cases}$$



Ако ги собереме равенките, добиваме

$$2(x+y+z+u+v)=34 \Rightarrow x+y+z+u+v=17.$$

Но, тогаш

$$17=x+y+z+u+v=y+(x+v)+(z+u)=y+9+8=y+17$$

од каде што добиваме дека $y=0$. Ако $y=0$, тогаш $K\equiv B\equiv L$, па како A,K,B се колинеарни и B,L,C се колинеарни добиваме дека A,B и C се колинеарни. Последното противречи на претпоставката дека $ABCDE$ е петаголник. Значи, во петаголникот не може да се впише кружница.

2. Во автобусите на една туристичка агенција, треба да се распоредат членовите на една туристичка група, така што во секој автобус да има ист број туристи. На почетокот во секој автобус влегле по 22 туристи при што останал несместен еден турист. Но, еден автобус заминал празен, па во останатите автобуси туристите се распределиле рамномерно. Колку туристи и колку автобуси биле на почетокот, ако во секој автобус влегле не повеќе од 32 туристи?

Решение. Нека k е бројот на автобуси кои што туристичката агенција ги пратила на почетокот. Од условот на задачата следува дека $k\geq 2$, а бројот на туристи е $22k+1$. Откако заминал еден автобус, туристите можеле да се сместат во $k-1$ автобус подеднакво. Значи, бројот $22k+1$ е делив со $k-1$. Задачата се сведува на тоа да се определат броевите k,n така што $k \geq 2$ и $n=\frac{22k+1}{k-1}$ е цел број, таков што $n \leq 32$.

Бројот $n=22+\frac{23}{k-1}$ е цел број ако и само ако $\frac{23}{k-1}$ е цел број. Но, тоа е можно само за $k=2$ и $k=24$. Ако $k=2$, тогаш $n=45$ што не е можно, бидејќи $n \leq 32$. Ако $k=24$, тогаш $n=23$. Значи, на почетокот имало 24 автобуси, а бројот на туристи бил $n(k-1)=23 \cdot 23=529$.

3. Ако меѓу секои две цифри на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива број кој е точен куб. Докажи!

Решение. Ако меѓу секои две цифри на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива бројот

$$1\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}1.$$

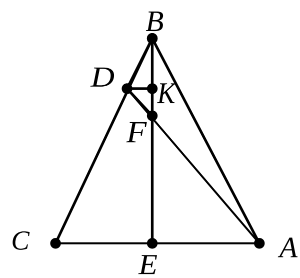
За овој број имаме

$$\begin{aligned}1\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}3\underbrace{00\ldots0}_{2019}1 &= 10^{3\cdot 2019+3}+3\cdot 10^{2\cdot 2019+2}+3\cdot 10^{2019+1}+1\\ &=(10^{2019+1})^3+3\cdot(10^{2019+1})^2\cdot 1+3\cdot 10^{2019+1}\cdot 1^2+1^3\\ &=(10^{2019+1}+1)^3.\end{aligned}$$

4. На страната BC од рамнокракиот триаголник ABC $(\overline{AB}=\overline{BC})$ е избрана точка D таква што $\overline{BD}:\overline{DC}=1:4$. Во кој однос правата AD ја дели висината BE сметајќи од темето B?

Решение. Пресекот на BE и AD да го означиме со F. Нека $K \in BE$ е таква што $DK \parallel CA$. Според тоа, $\triangle BCE \sim \triangle BDK$ и

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{5},$$



односно

$$\overline{BK}=\frac{1}{5}\overline{BE} \text{ и } \overline{KD}=\frac{1}{5}\overline{CE}.$$

Бидејќи триаголниците DKF и AEF имаат еднакви агли, тие се слични, па според тоа

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{KF}}{\overline{FE}}=\frac{1}{5}.$$

Ако воведеме ознака $\overline{KF}=x$, тогаш $\overline{FE}=5x$, па од равенството

$$\overline{BK}+\overline{KF}+\overline{FE}=\overline{BE},$$

добиваме $\overline{BK}=\frac{3}{2}x$. Бидејќи

$$\overline{BF}=\overline{BK}+\overline{KF}=\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x,$$

од равенството $\overline{FE}=5x$ добиваме $\overline{BF}:\overline{FE}=\frac{5}{2}x:5x=1:2$.

II година

1. Докажи дека

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3}\,.$$

Решение. Левата страна на равенството кое треба да го докажеме е еднаква на

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}&=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)}\\&=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\;.\\&=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}(\sqrt[3]{2}+1)\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}})^2&=(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^2\\&=(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)\\&=\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-1\\&=2\cdot 2-1=3.\end{aligned}$$

Последното равенство го коренуваме и го добиваме бараното равенство.

2. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt{ax^2+ax+2}=ax+2$$

има решение.

Решение. Ако $ax+2<0$, тогаш равенката нема решение, а ако $ax+2\geq 0$, тогаш таа е еквивалентна со равенката $(a^2-a)x^2+3ax+2=0$.

Можни се следниве случаи:

i) Коефициентот пред x^2 е еднаков на 0 и соодветната линеарна равенка има корен за кој важи $ax+2\geq 0$. За $a=0$ добиваме $2=0$, што не е можно. За $a=1$ добиваме $x=-\frac{2}{3}$ и како $ax+2=-\frac{2}{3}+2\geq 0$, заклучуваме дека $a=1$ е решение на задачата.

ii) Коефициентот пред x^2 не е нула, ($a\neq 0,1$) и соодветната квадратна равенка има единствено решение кое го задоволува условот $ax+2\geq 0$. Тогаш, за равенката да има единствено решение, треба

$$D=9a^2-8(a^2-a)=a^2+8a=0\,.$$

Добиваме $a=0$ или $a=-8$. Но, $a\neq 0$, па останува $a=-8$, при што добиваме $x=\frac{1}{6}$ и $ax+2=-8\cdot\frac{1}{6}+2\geq 0$, што значи дека $a=-8$ е решение на задачата.

iii) Коефициентот пред x^2 не е нула ($a\neq 0,1$), а соодветната квадратна равенка има два корена x_1 и x_2 такви што $ax_1+2<0$ и $ax_2+2\geq 0$. Последното значи дека бројот $-\frac{2}{a}$ се наоѓа меѓу корените на равенката, при што може да се совпадне со поголемиот корен. Ако $-\frac{2}{a}=x_2$, добиваме

$$(a^2-a)(-\tfrac{2}{a})^2+3a(-\tfrac{2}{a})+2=0,$$

од каде следува $a=0$, што е противречност. Значи, $-\frac{2}{a}$ не се совпаѓа со ниту еден од корените. Оттука следува дека е исполнето неравенството

$$(a^2-a)((a^2-a)(-\tfrac{2}{a})^2+3a(-\tfrac{2}{a})+2)<0,$$

кое гарантира постоење на два корена. По упростување на последното неравенство добиваме $a\geq 1$.

Конечно, решение на задачата е $a=-8$ и $a\geq 1$.

3. На произволен начин од множеството $\{1,2,\ldots,25\}$ се избрани 17 различни броеви. Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два различни броја чиј производ е точен квадрат.

Решение. Да ги разгледаме множествата

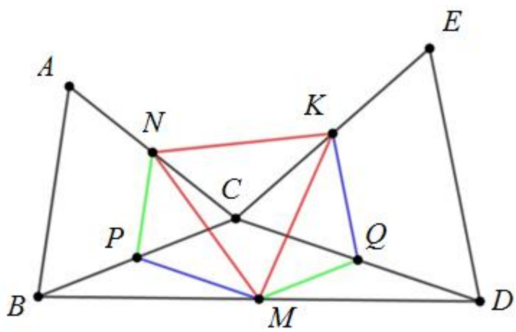
$$\{1,4,9,16,25\},\{2,8,18\},\{3,12\},\{5,20\},\{6,24\},\{7\},$$
$$\{10\},\{11\},\{13\},\{14\},\{15\},\{17\},\{19\},\{21\},\{22\},\{23\}.$$

Тие се дисјунктни и нивната унија е множеството $\{1,2,\ldots,25\}$. Бидејќи се избрани 17 различни броеви, а множества се 16, според принципот на Дирихле, постојат барем два броја кои се елементи на исто множество. Тоа значи дека меѓу избраните броеви постојат два различни броја чиј производ е полн квадрат.

4. Дадени се два рамнострани триаголници ABC и CDE кои се наоѓаат од иста страна на правата AE и имаат само една заедничка точка, точката C. Притоа точките A, C и D не се колинеарни исто така и точките B, C и E не се колинеарни. Нека M е средина на BD, N е средина на AC и нека K е средина на CE. Докажи дека $\triangle MNK$ е рамностран.

Решение. Нека P и Q се средини на BC и CD соодветно. Бидејќи P и N се средини на BC и AC, соодветно, следува

$$\overline{PN}=\frac{\overline{AB}}{2}=\overline{PC} \quad (1)$$



Бидејќи M и Q се средини на BD и CD следува

$$\overline{MQ}=\frac{\overline{BC}}{2}=\overline{PC} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $\overline{PN}=\overline{MQ}$. Аналогно се докажува дека $\overline{PM}=\overline{QK}$. Имаме

$$\measuredangle MPN=\measuredangle MPC+\measuredangle CPN=\measuredangle MQC+60^\circ=\measuredangle MQC+\measuredangle CQK=\measuredangle KQM$$

Следува дека $\triangle MPN\cong\triangle KQM$. Значи $\overline{MN}=\overline{MK}$. Нека $\measuredangle BCD=\alpha$. Тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle NMK&=\measuredangle PMQ-\measuredangle PMN-\measuredangle QMK=\alpha-180^\circ+\measuredangle NPM\\&=\alpha-180^\circ+\measuredangle NPC+\measuredangle CPM\\&=\alpha-180^\circ+60^\circ+(180^\circ-\alpha)=60^\circ\end{aligned}$$

Следува $\triangle MNK$ е рамностран.

III година

1. Реши ја неравенката

$$4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\le 8.$$

Решение. Ако означиме $4^{\sin^2\pi x}=y$, тогаш

$$4^{\cos^2\pi x}=4^{1-\sin^2\pi x}=\frac{4}{4^{\sin^2\pi x}}=\frac{4}{y},$$

па неравенката го добива обликот $y+3\cdot\frac{4}{y}\le 8,\ y>0.$ Оттука следува дека

$$y^2-8y+12\le 0,\ y>0,$$

од каде што добиваме

$$2\le y\le 6,\ \text{т.е. } 2\le 4^{\sin^2\pi x}\le 6. \tag{1}$$

Бидејќи $0\le\sin^2\pi x\le 1$, следува дека

$$1\le 4^{\sin^2\pi x}\le 4. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $2\le 4^{\sin^2\pi x}\le 4$, од каде што следува дека $\frac{1}{2}\le\sin^2\pi x\le 1$ т.е $\frac{\sqrt{2}}{2}\le|\sin\pi x|\le 1$. Последната равенка е еквивалентна со неравенките $\sin\pi x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\pi x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$, од каде $\frac{4k+1}{4}\le x\le\frac{4k+3}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. Реши ја равенката

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}=2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

Решение. Ќе воведеме смена $x=t^{12}$, $t\ge 0$, при што $\sqrt[12]{x}=t$, $\sqrt[4]{x}=t^3$ и $\sqrt[6]{x}=t^2$. Почетната равенка може да се запише во обликот

$$2^t + 2^{t^3} = 2 \cdot 2^{t^2}.$$

Бидејќи 2^t и 2^{t^3}, t и t^3 се ненегативни реални броеви, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$2^t + 2^{t^3} \geq 2\sqrt{2^t \cdot 2^{t^3}} = 2 \cdot 2^{\frac{t+t^3}{2}} \geq 2 \cdot 2^{t^2}.$$

Равенство е исполнето ако и само ако $2^t = 2^{t^3}$ и $t = t^3$. Во двата случаи добиваме дека решенија се $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = -1$. Јасно е дека t_3 не може да биде решение.

Значи, решенија на почетната равенка се $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

3. Во триаголникот ABC, исполнето е равенството $c^2 = 4ab\cos\alpha\cos\beta$. Докажи дека триаголникот е рамнокрак.

Решение. Според косинусната теорема за триаголникот ABC исполнето е равенството

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Бидејќи

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{, т.е. } \cos\gamma = \cos(180^\circ - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta),$$

заменувајќи во последното равенство добиваме:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha + \beta) = a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Од условот на задачата имаме $c^2 = 4ab\cos\alpha\cos\beta$, па заменувајќи во последното равенство добиваме

$$a^2 + b^2 = 2ab(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2ab\cos(\alpha - \beta),$$

односно

$$(a-b)^2 = 2ab(\cos(\alpha - \beta) - 1).$$

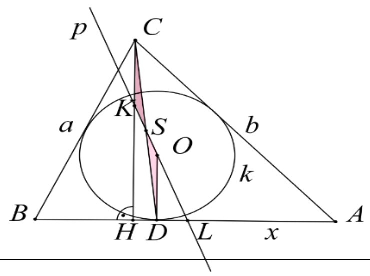
Бидејќи левата страната е ненегативна, а десната страна е непозитивна, равенството е исполнето ако и само ако

$$\cos(\alpha - \beta) - 1 = 0 \text{, т.е. } \alpha = \beta,$$

што значи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

4. Во триаголникот ABC е впишана кружница со центар во точката O, која страната AB ја допира во точката D. Нека S е средина на отсечката CD. Докажи дека правата OS ја преполовува страната AB.

Решение. Нека CH е висина на $\triangle ABC$ и правата $OS \equiv p$ ги сече страната AB и висината CH во точките L и K, соодветно. Треба да докажеме дека $\overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Од условот на задачата следува $\triangle SOD \cong \triangle SKC$ (признак ACA).



Оттука следува дека $\overline{CK}=r,\ \overline{KH}=h-r$, каде што со r е означен радиусот на кружницата, а со h должината на висината CH. Од сличноста на триаголниците LHK и LDO следува

$$\overline{LH}:\overline{LD}=\overline{HK}:\overline{DO} \tag{1}$$

Означуваме $x=\overline{AL}, b_1=\overline{AH}$. Тогаш од $\overline{AD}=s-a$ (s е полупериметарот на $\triangle ABC$) имаме: $\overline{HL}=b_1-x, \overline{LD}=s-a-x$, па (1) добива облик

$$\frac{b_1-x}{s-a-x}=\frac{h-r}{r}=\frac{h}{r}-1. \tag{2}$$

За односот $\frac{h}{r}$, од познатите формули за плоштина на триаголник: $P=\frac{hc}{2}$ и $P=rs$ добиваме:

$$\frac{h}{r}=\frac{\frac{2P}{c}}{\frac{P}{s}}=\frac{2s}{c} \tag{3}$$

Ако (3) го замениме со (2) добиваме $\frac{b_1-x}{s-a-x}=\frac{2s}{c}-1=\frac{2s-c}{c}=\frac{a+b}{c}$, од каде што

$$\begin{aligned}
&(b_1-x)c=(a+b)(s-a-x)\\
&b_1c-cx=(a+b)(s-a)-(a+b)x\\
&(a+b-c)x=(a+b)(s-a)-b_1c
\end{aligned}$$

Од косинусната теорема за $\triangle ABC$ и правоаголниот $\triangle AHC$ следува

$$\frac{b_1}{b}=\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ т.е. } b_1c=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Тогаш, од

$$\begin{aligned}
(a+b-c)x&=(a+b)\frac{b+c-a}{2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\\
&=\frac{1}{2}(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab-b^2-c^2+a^2)\\
&=\frac{c}{2}(a+b-c)
\end{aligned}$$

Следува дека $x=\frac{c}{2}$.

IV година

1. За четири броја a,b,c,d е исполнето: $d>c,\ a+b=c+d,\ a+d<b+c$. Подреди ги по големина овие четири броеви.

Решение. Од $a+d<b+c$, следува $a+d+b<2b+c$. Бидејќи $a+b=c+d$ следува $c+2d<2b+c$, односно $d<b$.

Слично, од $a+d<b+c$, следува $a+d+c<b+2c$. Бидејќи $a+b=c+d$ следува $2a+b<b+2c$, односно $a<c$.

Конечно, од условот имаме $c<d$ и како $d<b$ и $a<c$, добиваме $a<c<d<b$.

2. Докажи дека за секој природен број $n>1$ е точно неравенството

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>((n+1)!)^n .$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n=2$, имаме $48=2!\cdot 4!>(3!)^2=36$, т.е. неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за природниот број n. Тогаш

$$\begin{aligned}2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!\cdot(2(n+1))! &> ((n+1)!)^n\cdot(2n+2)!\\ &=((n+1)!)^n\cdot(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n+2)\\ &>((n+1)!)^{n+1}(n+2)^{n+1}=((n+2)!)^{n+1}\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој рироден број n.

3. Нека (a_n) е низа од реални броеви таква што $|a_{n+1}-a_n|\le 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и нека (b_n) е низа дефинирана со $b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Докажи дека $|b_{n+1}-b_n|\le\frac{1}{2}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Имаме $|a_{n+1}-a_n|\le 1$, па од неравенството на триаголник следува $|a_m-a_n|\le|m-n|$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Затоа,

$$\begin{aligned}|b_{n+1}-b_n| &= \left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|\\ &=\frac{|na_{n+1}-a_1-a_2-\ldots-a_n|}{n(n+1)}\\ &=\frac{|a_{n+1}-a_1+a_{n+1}-a_2+\ldots+a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\\ &\le\frac{|a_{n+1}-a_1|+|a_{n+1}-a_2|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\\ &\le\frac{n+(n-1)+\ldots+1}{n(n+1)}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. Нека

$$a_1=\frac{2}{3}\text{ и }a_{n+1}=\frac{a_n}{4}+\sqrt{\frac{24a_n+9}{253}}-\frac{9}{48}$$

за секој природен број n. Пресметај го збирот $a_1+a_2+a_3+\ldots$.

Решение. Нека $b_n=\sqrt{24a_n+9}$. Тогаш имаме $a_n=\frac{b_n^2-9}{24}$, па почетната рекурентна релација го добива обликот

$$\frac{b_{n+1}^2-9}{24}=\frac{b_n^2-9}{24}+\frac{b_n}{16}-\frac{9}{48}\text{, т.е. }(2b_{n+1})^2=(b_n+3)^2 .$$

Бидејќи $b_n\ge 0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, следува дека $2b_{n+1}=b_n+3$. Последното равенство го запишуваме во видот

$$2(b_{n+1}-3)=b_n-3.$$

Ставаме $c_n = b_n - 3$ и добиваме

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n \text{ и } c_1 = b_1 - 3 = \sqrt{24a_1 + 9} - 3 = 2 .$$

Значи,

$$c_n = \frac{1}{2^{n-2}} \text{, па } b_n = \frac{1}{2^{n-2}} + 3 \text{ и } a_n = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2^{2n-4}} + \frac{1}{2^n} .$$

Конечно,

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \frac{1}{24}(4 + 1 + \frac{1}{4} + ...) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...) = \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{11}{9} .$$