Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2017/18 година

ФЕРМА[1]-ТОРИЧЕЛИЈЕВА[2] ТАЧКА ТРОУГЛА

Немања Матић, Жагубица

У геометријској терминологији тачке које су у одређеном смислу органски повезане с троуглом зову се *центри троугла*. Такве су, на пример, центар описане кружнице, центар уписане кружнице, ортоцентар, тежиште, центри споља уписаних кружница итд. Многи од центара троугла били су познати још у античкој математици. Међутим, не мали број је откривен у сасвим блиској прошлости. Професор Кларк Кимберлинг са Универзитета у Евансвилу, Индијана, САД, води сајт [3] под именом "Енциклопедија центара троугла". Енциклопедија садржи све до сада познате центре троугла. Веровали или не, до 28. маја 2017. до 21 сат, 16 минута и 16 секунди евидентирано је 13 631 (!) центара троугла.

Једној таквој тачки посвећен је овај чланак.

Инспирисан познатим проблемом Штајнеровог стабла, Ферма је, као специјалан случај, поставио задатак:

Проблем 1. *У равни датог троугла* ABC *одредити тачку* X, *такву да је збир* $XA + XB + XC$ *минималан.*

Осим аутора, проблем је решио и Торичели користећи следеће тврђење.

Теорема 1. *Нека су* A_1, B_1, C_1 *тачке у спољашњости* ΔABC, *такве да су троуглови* BA_1C, CB_1A, AC_1B *једнакостранични. Тада се кружнице описане око троуглова* BA_1C, CB_1A, AC_1B *секу у једној тачки.*

Доказ. Нека су k_1, k_2, k_3 кружнице редом описане око троуглова BCA_1, CAB_1, ABC_1 (сл. 1). Означимо са F тачку пресека кружница k_1 и k_2, различиту од C. Показаћемо да и кружница k_3 пролази кроз F.

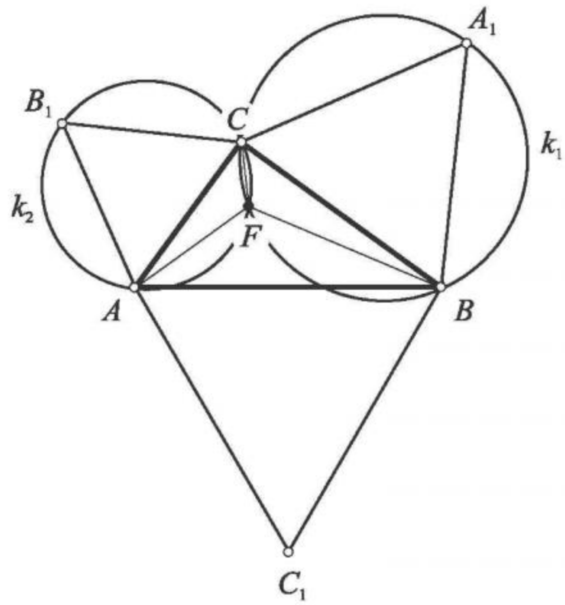
Четвороугао BA_1CF је очигледно тетиван и како је $\measuredangle BA_1C = 60^0$,

[1] Пјер Ферма (Pierre de Fermat) (1607-1665) - француски математичар. Дао значајан допринос теорији бројева, аналитичкој геометрији, теорији вероватноће.

[2] Евангелиста Торичели (Evangelista Torricelli) (1608-1647) - италијански физичар и математичар. Измислио живин барометар. Открио тзв. Торичелијев закон у теорији флуида. У математици познат по открићу Торичелијеве трубе (данас више позната као Габриелов рог) чија је површина бесконачна, а запремина коначна.

следи $\measuredangle CFB = 120^0$. Слично, из тетивног четвороугла CB_1AF добијамо да је и $\measuredangle AFC = 120^0$. Отуда је и

$$\measuredangle BFA = 120^0. \tag{1}$$



Сл. 1.

Како је $\measuredangle AC_1B = 60^0$, због (1) је и четвороугао AC_1BF тетиван. Кружница описана око њега је управо k_3, па $F \in k_3$, што је и требало да се докаже.

□

Напомена. У доказу теореме 1 прећутно је узето да тачка F лежи у унутрашњости ΔABC. Међутим, то није обавезно. Положај тачке F зависи од величине највећег угла ΔABC. Ако је то $\measuredangle BCA$, тада важи:

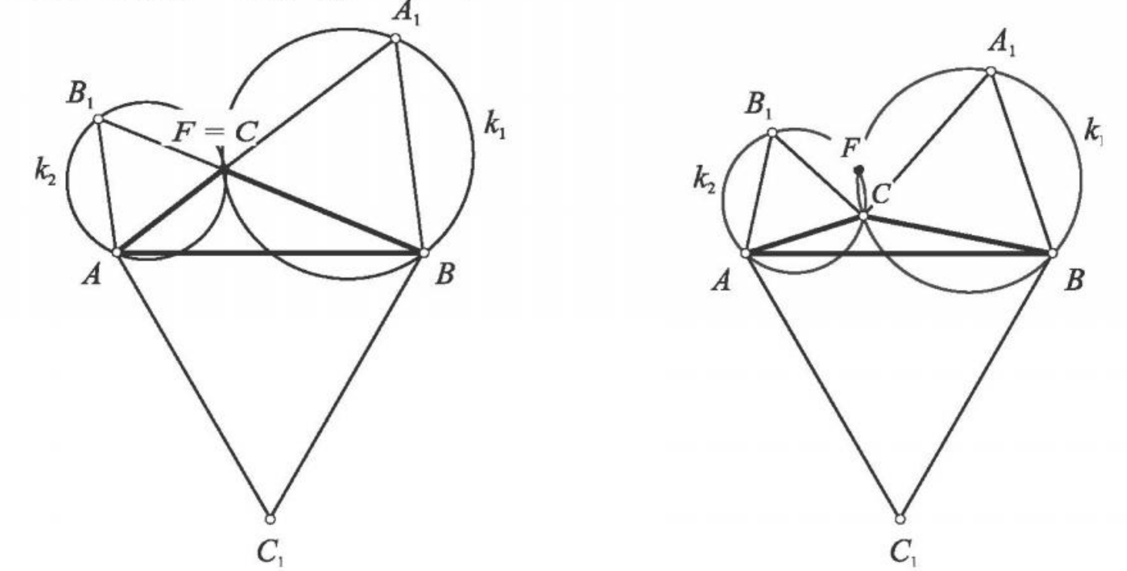
Лема 1. *За тачку F из теореме* 1 *важи следеће*:
(*а*) *F је у унутрашњости ΔABC ако и само ако је $\measuredangle BCA < 120^0$* (сл. 1);
(*б*) *$F \equiv C$ ако и само ако је $\measuredangle BCA = 120^0$* (сл. 2(а));
(*в*) *F је у спољашњости ΔABC ако и само ако је $\measuredangle BCA > 120^0$* (сл. 2(б)).

□

Доказ леме остављамо, као вежбу, читаоцима.

Кружнице k_1, k_2, k_3 из теореме 1 зову се *Торичелијеве кружнице*, а њихов пресек, тачка F – *Ферма-Торичелијева тачка*. У неким записима стоји само Фермаова, а у неким само Торичелијева тачка. У Кимберлинго-вој енциклопедији та тачка се води под ознаком X(13).

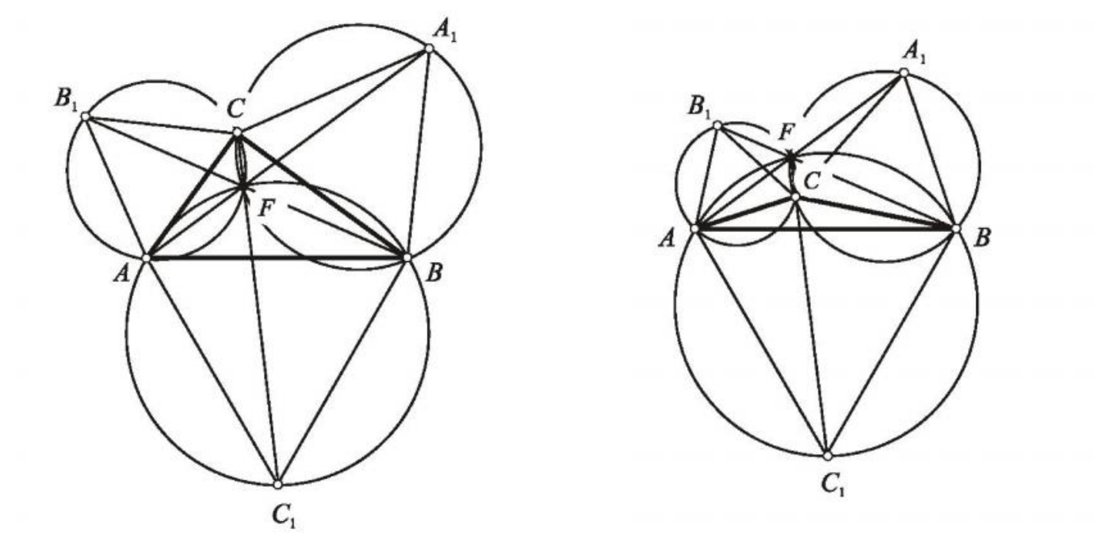
Интересантно је да се у тачки F секу не само кружнице k_1, k_2, k_3, већ и дужи AA_1, BB_1, CC_1, тј. $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{F\}$. У случају (б) из леме 1 (сл, 2(а)), очигледно је $F = C$.



(а) (б)

Сл. 2.

Случајеви (а) и (в) из леме 1 приказани су на сликама 3 (а) и (б), редом.



(а) (б)

Сл. 3.

Користећи периферијске углове кружница, показује се да је у првом случају $\measuredangle AFA_1 = \measuredangle BFB_1 = \measuredangle CFC_1 = 180^0$. У другом случају је $\measuredangle AFA_1 = \measuredangle BFB_1 = \measuredangle C_1CF = 180^0$.

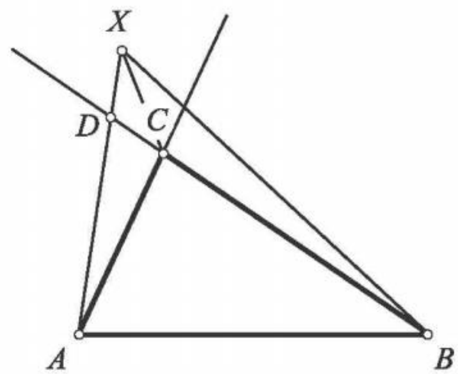
Осим тога је и $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Детаље препуштамо читаоцима.

Вратимо се Фермаовом проблему. У "потрази" за тачком X, прво ћемо сузити област претраге равни ABC. Наиме, важи тврђење

Лема 2. *Тачка X из проблема* 1 *не припада спољашњости* ΔABC.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да X припада спољашњости ΔABC. Карактеристични су следећи случајеви.

(а) *X припада неком од углова унакрсних угловима* ΔABC (*укључујући њихове краке*). Рецимо да је то угао унакрсан углу BCA (сл. 4).



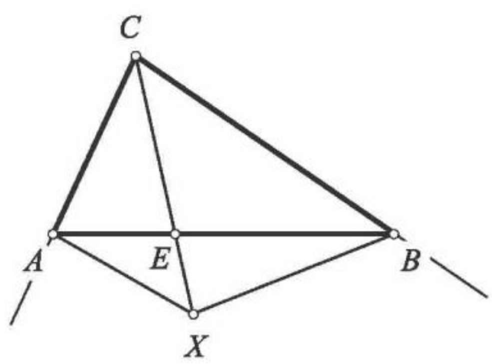
Сл. 4.

Нека се дуж XA и продужетак странице BC секу у тачки D. Како је свака страница троугла мања од збира друге две, следи

$$CA + CB < (DA + DC) + CB = DA + DB$$
$$< DA + (XD + XB) = XA + XB,$$

односно $CA + CB < XA + XB$. Отуда је $CA + CB + CC < XA + XB + XC$, што је контрадикција с претпоставком да је збир $XA + XB + XC$ минималан.

(б) *X припада некој од бесконачних области које се "наслањају" на странице* ΔABC. Нека је то страница AB и нека се дужи XC и AB секу у тачки E (сл. 5).



Сл. 5.

Користећи неједнакост страница троугла и чињеницу да је $EC < XC$, добијамо

$$EA + EB + EC = AB + EC < (XA + XB) + XC,$$

односно $EA + EB + EC < XA + XB + XC$. Поново контрадикција с претпоставком о тачки X.

Тиме је лема доказана.

□

Напомена. Из леме 2 следи да тачку X треба "тражити" искључиво на страницама или у унутрашњости ΔABC.

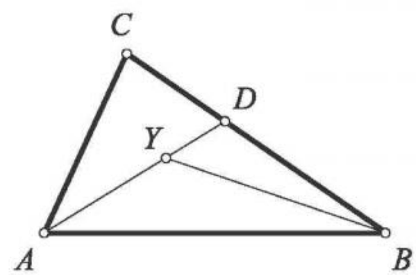
За даља разматрања биће од користи и следећа тврђења.

Лема 3. *За сваку тачку Y која припада некој од страница ΔABC или његовој унутрашњости важи*

$$YA + YB \leq CA + CB,$$

при чему једнакост важи само за $Y = C$.

Доказ. Нека Y припада унутрашњости ΔABC и нека права AY сече страницу BC у тачки D (сл. 6).



Сл. 6.

Користећи неједнакости страница троугла, добијамо

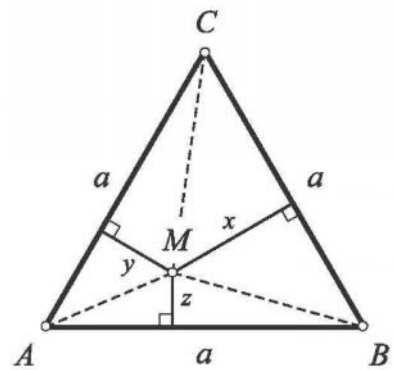
$$\begin{aligned} YA + YB &< YA + (YD + DB) = DA + DB \\ &< (DC + CA) + DB = CA + CB\,. \qquad (2) \end{aligned}$$

Тако је $YA + YB < CA + CB$. На сличан начин добија се иста неједнакост уколико Y припада некој од страница ΔABC и притом је $Y \neq C$. На пример, ако $Y \in BC$, $Y \neq C$, тада је $Y = D$ и доказ иде као горе.

Како за $Y = C$ тривијално следи $YA + YB = CA + CB$, лема је доказана. □

Лема 4. (Вивијани[3]) *Нека је ΔABC једнакостраничан и нека је M тачка која припада његовој унутрашњости или некој од страница. Тада збир растојања тачке M од страница ΔABC не зависи од њеног положаја и једнак је висини ΔABC.*

Доказ. Нека су a и h редом страница и висина ΔABC. Нека су, даље, x, y, z нормална растојања тачке M од страница BC, CA, AB, редом (сл. 7).



Сл. 7.

Ако са P_{ABC}, P_{MBC}, P_{MCA}, P_{MAB} означимо површине троуглова ABC, MBC, MCA, MAB, редом, тада је

$$P_{ABC} = P_{MBC} + P_{MCA} + P_{MAB},$$

односно

$$\frac{ah}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2}.$$

Деобом леве и десне стране са $\frac{a}{2}$ добијамо $h = x + y + z$, што је и требало да се докаже.

□

Решење проблема 1. Показаћемо да је тражена тачка X Ферма-Торичелијева тачка уколико су сви углови ΔABC мањи или једнаки 120^0. Уколико је неки угао већи од 120^0, X је теме тог угла.

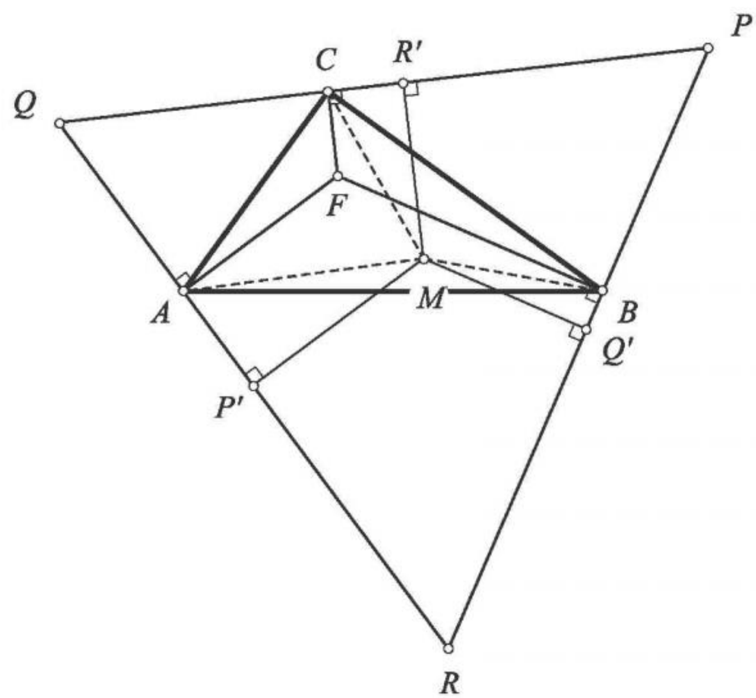
У сваком случају, због леме 2, тражена тачка је на страницама или у унутрашњости ΔABC.

(а) $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C < 120^0$. Нека је F Ферма-Торичелијева тачка ΔABC. Према леми 1 (а), F је у унутрашњости ΔABC и притом је

[3] Винћенцо Вивијани (Vincenzo Viviani, 1622-1703) - италијански математичар, ученик Торичелија и следбеник Галилеја.

$$\measuredangle BFC = \measuredangle CFA = \measuredangle AFB = 120^0. \qquad (3)$$

Уочимо нормале у тачкама A, B, C на праве FA, FB, FC, редом, и обележимо њихове пресечне тачке са P, Q, R, као на сл. 8.



Сл. 8.

Тада је, због (3),

$$\measuredangle RPQ = \measuredangle PQR = \measuredangle QRP = 60^0,$$

тј. ΔPQR је једнакостранични.

На основу леме 4 је

$$FA + FB + FC = h, \qquad (4)$$

где је h висина једнакостраничног ΔPQR. Нека је M, $M \neq F$, произвољна тачка на станицама или у унутрашњости ΔABC и нека су P', Q', R' њене нормалне пројекције на праве QR, RP, PQ, редом. Тада је, такође по леми 4, $MP' + MQ' + MR' = h$. Како је $MP' < MA$, $MQ' < MB$, $MR' < MC$, следи

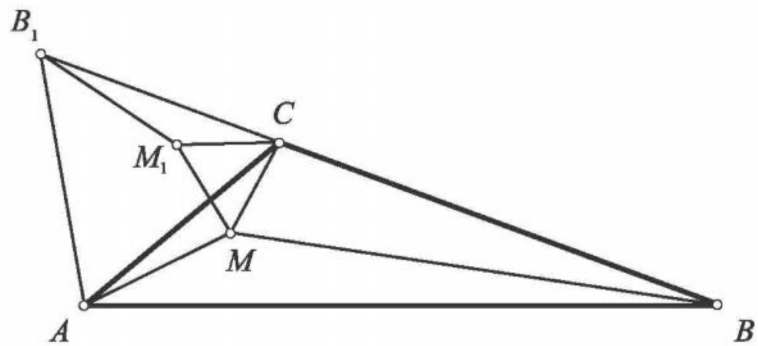
$$MA + MB + MC > MP' + MQ' + MR' = h. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) закључујемо да, у овом случају, од свих тачака на страницама или у унутрашњости ΔABC најмањи збир растојања до темена троугла има Ферма-Торичелијева тачка F.

На основу леме 2 је $F = X$.

(б) *Један од уілова* ΔABC *једнак је* 120^0. Нека је $\measuredangle C = 120^0$. Показаћемо да је тада $C = X$.

Нека је M, $M \neq C$, произвољна тачка на некој од станица или у унутрашњости ΔABC (сл. 9).



Сл. 9.

Посматрајмо ротацију ρ око темена C за 60^0. Нека је $\rho(A) = B_1$ и $\rho(M) = M_1$. Тада је

$$MA = M_1B_1 \tag{6}$$

и $MC = M_1C$. Како је ΔMCM_1 једнакостранични, то је

$$MC = MM_1. \tag{7}$$

С обзиром на (6) и (7) добијамо да је

$$MA + MB + MC = M_1B_1 + MB + MM_1, \tag{8}$$

а то је дужина изломљене линије B_1M_1MB.

С друге стране је $\measuredangle B_1CB = \measuredangle B_1CA + \measuredangle ACB = 60^0 + 120^0 = 180^0$, те су тачке B_1, C, B колинеарне и притом је $B_1 - C - B$. Како је и ΔACB_1 једнакостранични, имамо да је

$$CA + CB + CC = CA + CB = CB_1 + CB = B_1B. \tag{9}$$

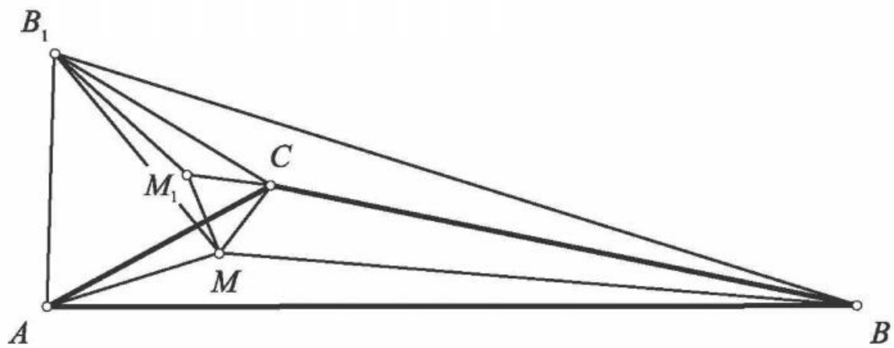
Из (8) и (9) следи $CA + CB + CC < MA + MB + MC$, односно $C = X$. Како је C Ферма-Торичелијева тачка за ΔABC (лема 1(б)), добијамо да је, као у претходном случају, $F = C = X$.

(в) *Један од углова већи је од* 120^0. Нека је $\measuredangle C > 120^0$. Показаћемо да је тада $C = X$.

Због леме 2, довољно је да покажемо да за сваку тачку M, $M \neq C$, која припада некој од страница ΔABC или његовој унутрашњости важи

$$CA + CB + CC = CA + CB < MA + MB + MC. \qquad (10)$$

Ако су BA_1C и CB_1A једнакостранични троуглови из теореме 1, тада M припада унутрашњости бар једног од углова BA_1C и CB_1A. Рецимо да је то $\measuredangle CB_1A$ (сл. 10).



Сл. 10.

Као у претходном случају, нека је $\rho(M) = M_1$, где је ρ ротација око темена C за 60^0; притом је $\rho(A) = B_1$.

Тада је, као у случају (б), збир $MA + MB + MC$ једнак дужини изломљене линије B_1M_1MB, тј. $MA + MB + MC = B_1M_1 + M_1M + MB$. Како је $B_1M_1 + M_1M \geq B_1M$ (једнакост важи само у случају кад су тачке B_1, M_1 и M колинеарне уз распоред $B_1 - M_1 - M$), имамо да је

$$MA + MB + MC \geq B_1M + MB. \qquad (11)$$

Из претпоставки да је $\measuredangle BCA > 120^0$ и да M припада унутрашњости $\measuredangle CB_1A$ и чињенице да је $\measuredangle ACB_1 = 60^0$ следи $\measuredangle BCB_1 < 180^0$. То повлачи да теме C припада унутрашњости ΔMBB_1. На основу леме 3 је

$$B_1M + MB > B_1C + CB. \qquad (12)$$

Како је $B_1C = CA$, из (11) и (12) добијамо

$$MA + MB + MC > CA + CB = CA + CB + CC,$$

што је и требало да се покаже.

Тиме је решење Фермаовог проблема 1 комплетирано.

□

Литература

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Viviani%27s_theorem

[3] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[4] https://sr.wikipedia.org/sr/Еванђелиста_Торичели

[5] Стојановић В., *Троугао плус*, 7 Лектира математископа, Математископ, Београд 2005.