Геометрија маса

Јована Перовић, Краљево; *Јелена Крмар,* Рума

„Геометрија маса произилази из тих схватања да се тачке у простору не разматрају као тачке саме по себи, већ им се приписују произвољно изабрани позитивни или негативни бројеви у својству њихових маса, тако да се тачке појављују са додељеним тачно одређеним коефицијентима.“-Г.Ј. „Геометрија маса“

Геометрија маса је област математике настала комбинацијом механике и геометрије. Бави се својствима центра масе (тежишта). Идеја о увођењу маса при решавању геометријских проблема потиче још од Архимеда (III п.н.е.). Користећи то, он је доказао да се медијане (тежишне дужи) троугла секу у једној тачки. Његови следбеници, људи који су се бавили сличним проблемима, били су познати математичари, између осталих и Пап, Чева, Менелај, Ван Обел, Гулдин и други. Ипак, геометрија маса се највише развила када је Август Фердинанд Мебијус 1827. поставио прве дефиниције и осмислио нарочит координатни систем (*барицентрични координатни систем*), заснован на елементима из ове области (више од две хиљаде година после Архимеда).

Основни појмови и теореме

Основни појам у геометрији маса је материјална тачка.

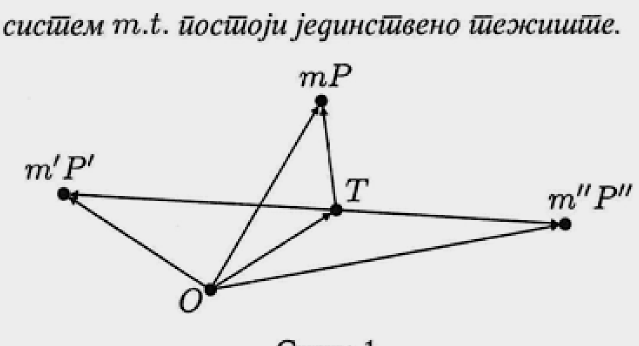
Дефиниција 1. Материјална тачка $(m.t.)$ је уређени пар (m, P) где је m реалан број, а P тачка. Кажемо још да тачка P има масу m. Негде се $m.t.$ обележава и као mP.

Ако тачке $P_1, P_2, \ldots, P_n$ имају масе $m_1, m_2, \ldots, m_n$, постоји систем $m.t.$ који се обично означава са $\{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \ldots, (m_n, P_n)\}$.

Дефиниција 2. За систем $m.t.$ $\{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \ldots, (m_n, P_n)\}$ центар маса (тежиште) је тачка T која задовољава једнакост:

$$m_1\overrightarrow{TP_1} + m_2\overrightarrow{TP_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{TP_n} = \overrightarrow{0}.$$

Теорема 1. *За сваки систем $m.t.$ постоји јединствено тежиште.*



Слика 1.

Доказ. Претпоставимо да за систем $m.t.$ $S = \{(m_1, P_1), (m_2, P_2), \ldots, (m_n, P_n)\}$, чија је маса различита од нуле, постоји тежиште T. Изаберимо још и произвољну тачку O (слика

1). На основу дефиниције за тежиште важи једнакост:

$$m_1\overrightarrow{TP_1} + m_2\overrightarrow{TP_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{TP_n} = \overrightarrow{0},$$

односно, на основу закона о сабирању вектора:

$$m_1(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OT}) + m_2(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OT}) + \cdots + m_n(\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OT}) = \overrightarrow{0},$$

одакле је

$$\overrightarrow{OP_1}m_1 + \overrightarrow{OP_2}m_2 + \cdots + \overrightarrow{OP_n}m_n - \overrightarrow{OT}(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) = \overrightarrow{0},$$

па је

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OP_1}m_1 + \overrightarrow{OP_2}m_2 + \cdots + \overrightarrow{OP_n}m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Десна страна израза одређује јединствен вектор који за сваки систем тачака увек постоји. Приметимо још да збир $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ мора бити различит од нуле. □

Теорема 2. *Ако у систему од n материјалних тачака, k тачака ($k \leqslant n$) заменимо њиховим тежиштем у коме је сконцентрисана сва њихова маса, добијени систем ће имати исто тежиште као и полазни.*

Доказ. Нека је:
T_n тежиште система $S_n = \{(m_1, P_1), \ldots, (m_n, P_n)\}$,
T_k тежиште система $S_k = \{(m_1, P_1), \ldots, (m_k, P_k)\}$,
T тежиште система $S = \{(m, T_k), (m_{k+1}, P_{k+1}), \ldots, (m_n, P_n)\}$, где је $m = m_1 + \cdots + m_k$.
Тада ће за тачку T_n у односу на произвољну тачку O, на основу теореме 1, важити:

$$\overrightarrow{OT_n} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + \cdots + m_n},$$

за тачку T_k:

$$\overrightarrow{OT_k} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + m_k\overrightarrow{OP_k}}{m_1 + \cdots + m_k},$$

и за тачку T:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{m\overrightarrow{OT_k} + m_{k+1}\overrightarrow{OP_{k+1}} + \cdots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m + m_{k+1} + \cdots + m_n}.$$

Из друге једнакости видимо да је

$$m_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + m_k\overrightarrow{OP_k} = (m_1 + \cdots + m_k)\overrightarrow{OT_k}$$

Када се то замени у трећој једнакости добије се једнакост еквивалентна првој, тј. $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_n}$, односно, $T \equiv T_n$. □

Теорема 3. *За систем од две m.t. (m_1, A) и (m_2, B) важи да се њихово тежиште T налази на правој AB, при чему је $\overrightarrow{TA} : \overrightarrow{BT} = m_2 : m_1$.*

Доказ. На основу дефиниције тежишта важи: $m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{0}$, $m_1\overrightarrow{TA} = m_2\overrightarrow{BT}$ и

$\overrightarrow{TA} : \overrightarrow{BT} = m_2 : m_1$. Из последње једнакости следи да су вектори $\overrightarrow{TA}$ и $\overrightarrow{BT}$ линеарно зависни, па су тачке A, B, T колинеарне. ☐

Последица 1. *Ако су масе m_1 и m_2 обе позитивни или обе негативни бројеви, онда се тежиште налази на дужи AB.*
Ако је једна маса позитиван, а друга негативан број, тежиште се налази ван дужи AB.

Теорема 4. *Ако се систем од n материјалних тачака $S = \{(m_1, P_1), \ldots, (m_n, P_n)\}$ налази у једној равни, онда се и центар масе тог система налази у истој равни.*

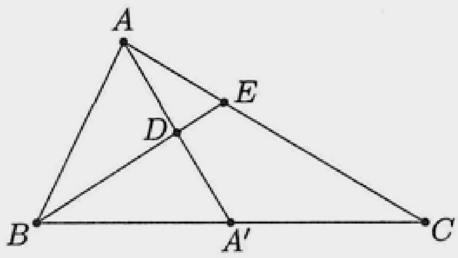
Доказ. За тежиште важи

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OP_1}m_1 + \overrightarrow{OP_2}m_2 + \cdots + \overrightarrow{OP_n}m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Вектор $\overrightarrow{OT}$ је линеарно зависан од вектора $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$. Пошто сви они леже у истој равни, онда је и вектор $\overrightarrow{OT}$ у истој равни. ☐

Идеја за решавање следећих проблема је да тачке које деле дужи у неком односу буду њихова тежишта. То постижемо додељивањем маса крајевима дужи. Масе морају бити обрнуто пропорционалне одговарајућим деловима те дужи. На овај начин се може врло једноставно одредити тежиште било ког многоугла и однос у ком је нека дуж подељена.

Пример 1. Кроз средину тежишне дужи AA' и теме B троугла ABC повучена је права. У ком односу она дели страницу AC?



Слика 2.

Решење. Поставимо масе $2, 1, 1$ редом у темена A, B и C. Тада је A' тежиште система $\{(1, B), (1, C)\}$. Тежиште система $\{(2, A), (2, A')\}$ је тачка D, која је истовремено и тежиште троугла. Пошто $E \in BD$ следи да је тачка D тежиште система $\{(2, A), (1, C)\}$. На основу теореме 3 важи да је $AE : EC = m_C : m_A = 1 : 2$.

Докази неких познатих теорема преко центра маса

Теореме које следе могу се доказати и на другачији начин (нпр. преко сличности, вектора, итд.). Овде ћемо их доказати коришћењем геометирије маса да бисмо показали равноправност ове са другим техникама.

Теорема 5 (Ван Обелова теорема). *Нека су тачке A, B и C темена троугла и AA_1, BB_1 и CC_1 дужи такве да тачке A_1, B_1 и C_1 редом припадају страницама BC, CA и AB,* *и све се секу у једној тачки* M. *Ако важи* $AC_1 : C_1B = p$ *и* $AB_1 : B_1C = q$, *онда је и* $AM : MA_1 = p + q$.

Доказ. Доделимо масе $1, p$ и q редом тачкама A, B и C. Тада су A_1, B_1 и C_1 редом центри маса система $\{(p, B), (q, C)\}$, $\{(1, A), (q, C)\}$ и $\{(1, A), (p, B)\}$, јер важи: $AC_1 : C_1B = p : 1$ и $AB_1 : B_1C = q : 1$. M је центар масе система $\{(1, A), (p, B), (q, C)\}$ и из тога следи да је $AM : MA_1 = (p + q) : 1$. □

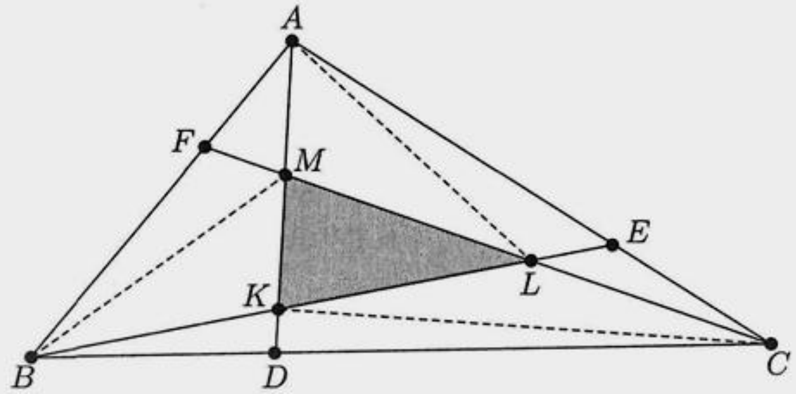
Пример 2. Нека су тачке D, E, F редом на страницама BC, CA, AB троугла ABC тако да важи: $BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 2$. Тачке K, L, M су редом пресеци дужи BE и AD, BE и CF, AD и CF. Доказати да важи:

$$BL : LE = CM : MF = AK : KD = 6 : 1,$$

$$BK : KE = CL : LF = AM : MD = 3 : 4,$$

$$BK : KL : LE = CL : LM : MF = AM : MK : KD = 3 : 3 : 1$$

и да је површина $\triangle KLM$ седам пута мања од површине $\triangle ABC$.



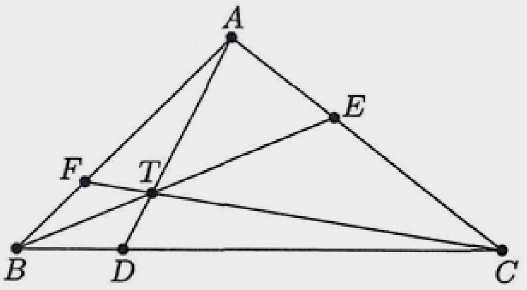
Слика 3.

Решење. Поставимо редом масе 1, 4 и 2 у темена A, B и C (слика 3). Тада су тачке D и E редом центри маса система $\{(4, B), (2, C)\}$ и $\{(1, A), (2, C)\}$ са масама (редом) 6 и 3. Из тога следи да је K центар масе система $\{(1, A), (4, B), (2, C)\}$ и да дели дужи BE и AD редом у односима $3 : 4$ и $6 : 1$. На сличан начин се доказују и остали односи ако за тежиште узмемо тачку L или M. Пошто важи: $BK : KE = 3 : 4$ и $BL : LE = 6 : 1$, следи да је $BK : KL : LE = 3 : 3 : 1$. Нека је P површина $\triangle KLM$. Из једнакости дужи AM и MK следи да су површине троуглова KLM и AML једнаке (имају једнаке основице и заједничку висину). Како су и дужи ML и LC једнаке, то су и површине троуглова KLM, AML и ALC једнаке. На сличан начин се показује да су и површине троуглова CLK, CKB, BKM и BMA једнаке површини троугла KLM. Дакле, $\triangle ABC$ се састоји из седам мањих троуглова површина P, тј. површина $\triangle KLM$ је седам пута мања од површине $\triangle ABC$.

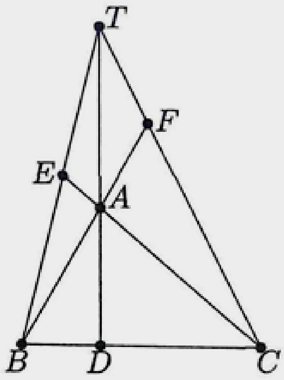
Италијанског инжењера хидраулике Ђованија Чеву интересовало је следеће питање: ако су на страницама BC, CA и AB троугла ABC изабране редом тачке A_1, B_1 и C_1, може ли се без икаквих доцртавања и мерења унутар троугла, већ само на основу мерења на његовој контури, закључити да ли се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки? У теореми коју је доказао 1678. године, користећи својства центра маса, Чева је дао одговор на ово питање.

Теорема 6 (Чевина теорема). *Нека су тачке D, E и F редом изабране на страницама BC, CA, AB троугла ABC или на њиховим продужецима. Праве AD, BE, CF су конкурентне ако и само ако важи услов (Чевин услов):*

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=1.$$



Слика 4.



Слика 5.

Доказ. Претпоставимо најпре да су праве AD, BE, CF конкурентне. Нека важе односи: $\overrightarrow{BD}:\overrightarrow{DC}=p:1$ и $\overrightarrow{CE}:\overrightarrow{EA}=q:1$. Поставимо редом масе pq, 1 и p у темена A, B и C. Тада су тачке D и E редом тежишта система $\{(1,B),(p,C)\}$ и $\{(p,C),(pq,A)\}$. У пресеку правих BE и AD се налази тежиште T система $\{(pq,A),(1,B),(p,C)\}$. Како права CF садржи тежиште T, то је тачка F тежиште система $\{(pq,A),(1,B)\}$. Одавде следи да је $\overrightarrow{AF}:\overrightarrow{FB}=1:pq$. Дакле,

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\frac{p}{1}\cdot\frac{q}{1}\cdot\frac{1}{pq}=1.$$

Докажимо сада обрнуто тврђење, да из претпоставке $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=1$, следи да су праве AD, BE, CF конкурентне. Претпоставимо супротно, да се не секу у једној тачки. Тада постоји тачка F', различита од F, на правој AB таква да је тачка T на правој CF'. На основу првог смера важи $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF'}}{\overrightarrow{F'B}}=1$, а на основу претпоставке важи $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=1$. Из последњих једнакости следи да је $\frac{\overrightarrow{AF'}}{\overrightarrow{F'B}}=\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}$. Пошто су тачке A, F', F и B колинеарне, то се тачке F' и F поклапају, што је контрадикција.

Постоји случај када је услов задовољен, а праве су паралелне (када је збир маса једнак нули). Међутим, тај случај нећемо разматрати зато што не може да се докаже преко особина центра маса. ☐

Старогрчки математичар Менелај је доказао теорему врло сличну претходној, а која говори о колинеарности тачака на правама којима припадају странице троугла.

Теорема 7 (Менелајева теорема). *Нека су у троуглу ABC тачке D, E и F изабране редом на страницама (или на њиховим продужецима) BC, CA, AB. Тачке су колинеарне ако и само ако важи једнакост*

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1.$$

Доказ. Претпоставимо да су тачке D, E и F колинеарне. Разликујемо два случаја: када права одређена тачкама D, E, F сече две странице и продужетак треће и када та права сече сва три продужетка страница.

1. случај. Нека је F центар масе система $\{(m_A, A), (m_B, B)\}$ и нека је C центар масе система $\{(m_D, D), (m_B, B)\}$. Тада се у пресеку правих AC и DF (слика 6) налази тежиште система $\{(m_A, A), (m_B, B), (m_D, D)\}$ и важе једнакости:

(1) $m_B\overrightarrow{CB} + m_D\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$;

(2) $m_A\overrightarrow{FA} + m_B\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{0}$;

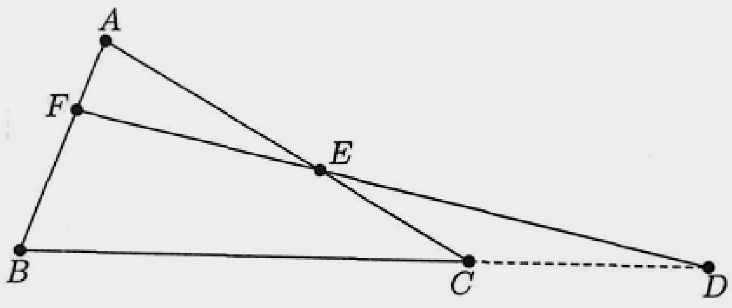
(3) $m_A\overrightarrow{EA} + (m_B + m_D)\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$.

Из једнакости (1) следи: $\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CD}} = \dfrac{m_D}{m_B}, \dfrac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CD}} + \dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{CD}} = \dfrac{m_D}{m_B} + \dfrac{1}{1}, \dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} = -\dfrac{m_B + m_D}{m_B}$.

Слично, из друге две једнакости следи: $\dfrac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = \dfrac{m_B}{m_A}$ и $\dfrac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = \dfrac{m_A}{m_B + m_D}$.

Кад последње три једнакости помножимо, добијамо:

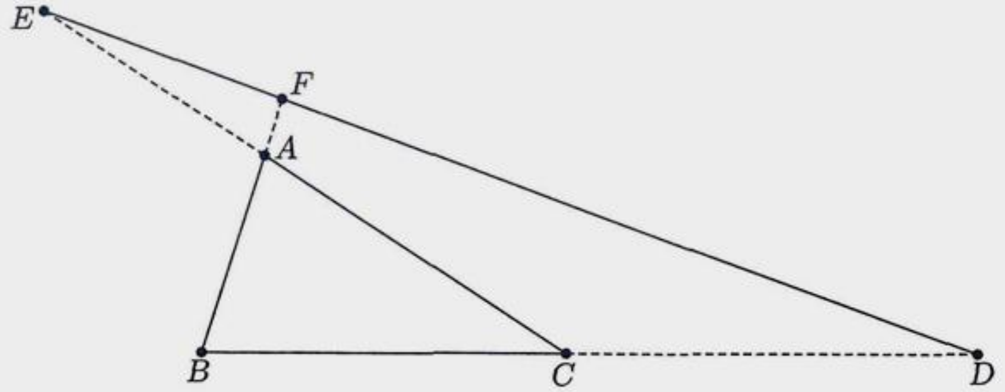
$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -\frac{m_B + m_D}{m_B} \cdot \frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{m_A}{m_B + m_D} = -1.$$



Слика 6.

2. случај. Нека је C центар масе система $\{(m_B, B), (m_D, D)\}$ и F центар масе система $\{(m_E, E), (m_D, D)\}$. Тада је A центар масе система $\{(m_E, E), (m_B, B), (m_D, D)\}$ (слика 7). Аналогно првом случају, добија се да важи:

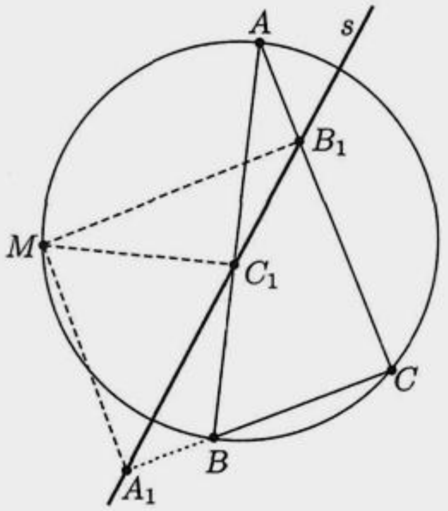
$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -\frac{m_B + m_D}{m_B} \cdot \frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{m_A}{m_B + m_D} = -1.$$



Слика 7.

Докажимо обрнуто тврђење, да из последње једнакости следи да су тачке D, E и F колинеарне. Претпоставимо супротно, тј. да D, E и F нису колинеарне. Тада постоји тачка F' на правој AB таква да су D, E и F' колинеарне. На основу првог смера важи $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF'}}{\overrightarrow{F'B}} = -1$, а на основу претпоставке $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1$. Одавде следи да је $\frac{\overrightarrow{AF'}}{\overrightarrow{F'B}} = \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}$. Пошто су A, B, F и F' колинеарне то је $F \equiv F'$. Контрадикција! □

Теорема 8 (Симпсонова теорема). *Из произвољне тачке M која се налази на кружници повучене су нормале на све три праве одређене страницама троугла ABC који је уписан у ту кружницу. Доказати да су подножја тих нормала (A_1, B_1 и C_1) колинеарне тачке.*



Слика 8.

Доказ. Ако бисмо доказали да важи $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1$, доказали бисмо и да важи колинеарност.

Уведимо ознаке: $\sphericalangle MBA = \alpha$, $\sphericalangle MBC = \beta$, $\sphericalangle MCB = \gamma$. Тада је $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MCA = \alpha$ и $\sphericalangle MCB = \sphericalangle MAB = \gamma$ (периферијски углови над истим луком). Поставићемо масу $\operatorname{ctg}\gamma$ у тачку B и масу $\operatorname{ctg}\beta$ у тачку C. Тада је A_1 центар масе тог система и тада је $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma}$. Поставимо масу $\operatorname{ctg}\alpha$ у тачку A. Пошто је маса у тачки B једнака $\operatorname{ctg}\gamma$, то је C_1 центар масе система $\{(\operatorname{ctg}\alpha, A), (\operatorname{ctg}\gamma, B)\}$ и важи однос: $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha}$. Нека је тачка A' централно симетрична тачки A у односу на тачку B_1 и поставимо масу $\operatorname{ctg}\alpha$ у A'. Тада је B_1 центар масе система $\{(\operatorname{ctg}\alpha, A'), (\operatorname{ctg}\beta, C)\}$ и важи однос: $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A'}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$. Пошто је B_1 средиште дужи AA', то је $\overrightarrow{B_1A'} = -\overrightarrow{B_1A}$, онда је $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$. Сада се лако добија да је

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma} \cdot \frac{-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha} = -1.$$

Из последње једнакости, на основу Менелајеве теореме, следи да су тачке A_1, B_1 и C_1 колинеарне. $\square$

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008.09 година