

Ристо Малчески
Ратко Тошиќ
Јожеф Б.Варга
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 27
94 ГРУПИ ВАРИЈАЦИИ НА 94
ТЕМИ

Скопје, јули 2022

Рецензент

Д-р Алекса Малчески

СОДРЖИНА

Предговор	6
Теорија на броеви	
1. Задача 1	7
2. Задача 2	8
3. Задача 3	10
4. Задача 4	11
5. Задача 5	12
6. Задача 6	14
7. Задача 7	17
8. Задача 8	19
9. Задача 9	21
10. Задача 10	23
11. Задача 11	25
12. Задача 12	27
Алгебарски трансформации, равенки и неравенки	
1. Задача 1	29
2. Задача 2	33
3. Задача 3	35
4. Задача 4	38
5. Задача 5	40
6. Задача 6	41
7. Задача 7	42
8. Задача 8	44
9. Задача 9	45
10. Задача 10	47
11. Задача 11	48
12. Задача 12	50
13. Задача 13	51
Текстуални задачи	
1. Задача 1	52
2. Задача 2	53
3. Задача 3	55
4. Задача 4	57
5. Задача 5	60
6. Задача 6	62
7. Задача 7	63

8. Задача 8	64
9. Задача 9	66
10. Задача 10	68

Неравенства

1. Задача 1	69
2. Задача 2	71
3. Задача 3	73
4. Задача 4	77
5. Задача 5	81
6. Задача 6	83
7. Задача 7	86
8. Задача 8	88

Геометрија

1. Задача 1	89
2. Задача 2	96
3. Задача 3	100
4. Задача 4	103
5. Задача 5	105
6. Задача 6	107
7. Задача 7	109
8. Задача 8	113
9. Задача 9	115
10. Задача 10	117
11. Задача 11	119
12. Задача 12	122
13. Задача 13	126
14. Задача 14	128
15. Задача 15	132
16. Задача 16	135
17. Задача 17	137
18. Задача 18	139
19. Задача 19	142
20. Задача 20	144
21. Задача 21	146
22. Задача 22	149
23. Задача 23	152
24. Задача 24	154
25. Задача 25	156
26. Задача 26	159
27. Задача 27	161

28. Задача 28	165
29. Задача 29	168
30. Задача 30	172
31. Задача 31	176
32. Задача 32	179
33. Задача 33	181
34. Задача 34	183
35. Задача 35	185
36. Задача 36	187
37. Задача 37	189
38. Задача 38	191
39. Задача 39	193
40. Задача 40	197
41. Задача 41	199

Логика и комбинаторика

1. Задача 1	201
2. Задача 2	202
3. Задача 3	204
4. Задача 4	206
5. Задача 5	208
6. Задача 6	210
7. Задача 7	212
8. Задача 8	214
9. Задача 9	215
10. Задача 10	216

Литература	217
------------	-----

ПРЕДГОВОР

Пишувањето на оваа книга е инспирирано од зборовите на англискиот математичар В. В. Совгер, кој рекол: „Покорисно е да се реши една иста задача на три различни начини, отколку да се решат три задачи на еден ист начин. Со решавањето на една иста задача на повеќе начини, се согледува кој од нив е најкраток, најефектен и најелегантен. Така се гради стил и вештина за решавање на задачи.“

Во книгава се дадени 94 задачи за кои се понудени два или повеќе начини на решавање. Задачите се поделени во шест целини и тоа:

- Теорија на броеви (12 задачи),
- Алгебраски трансформации, равенки и неравенки (13 задачи),
- Текстуални задачи (10 задачи),
- Неравенства (8 задачи),
- Геометрија (41 задача) и
- Логика и комбинаторика (10 задачи).

Изборот на задачите е направен така што за нивно решавање се доволни предзнаењата кои ги имаат учениците од основното образование, за кои оваа книга и е наменета. Притоа, една од целите на авторите беше книгата да придонесе за развојот на квалитетите на мислењето, што е една од основните цели на наставата по математика. Ова посебно се однесува на учениците надарени за математика, кај кои од особена важност е развојот на сите квалитети на мислењето, а особено на еластичноста, длабочината, широчината и критичноста на мислењето, за што наоѓањето на различни начини за решавање на еден ист проблем има посебен придонес.

Како и секоја книга, така и во оваа збирка задачи можни се грешки и тоа како од технички така и од стручен карактер. За намалување на грешките особена заслуга има рецензентот д-р Алекса Малчески, чии забелешки и сугестии значително придонесоа за подобрување на книгата во целина, за што посебно сме благодарни. Се надеваме дека книгава ќе биде од корист како на учениците на кои им е наменета, така и на наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на напредувањето на учениците надарени за математика. Воедно, ќе им бидеме благодарни на сите оние кои ќе ни укажат на грешките кои ќе ги забележат, се со цел истите да бидат отстранети во следните изданија на книгава.

Скопје
јули, 2022 г.

Авторите

ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

Задача 1. Од цифрите 3; 4; 5; 7 ги формираме сите трицифрени броеви, кај кои секоја цифра се појавува најмногу еднаш. Од овие броеви ги избираме сите броеви кои се деливи со 3. Дали збирот на овие броеви е парен или е непарен?

Решение. Прв начин. Со дадените цифри може да се формираат следниве броеви: 345, ~~347~~, 354, 357, ~~374~~, 375, 435, ~~437~~, 453, ~~457~~, ~~473~~, ~~475~~, 534, 537, 543, ~~547~~, 573, ~~574~~, ~~734~~, 735, ~~743~~, ~~745~~, 753, ~~754~~, при што се прецртани броевите кои не се деливи со 3. Останаа 12 броја од кои 2 се парни и 10 се непарни. Значи, збир на разгледуваните броеви е парен

Втор начин. Број е делив со три ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3. Според тоа, ако некој број $\overline{abc}$ е делив со три (a , b и c се цифри од даденото множество), тогаш и бројот $\overline{bac}$ е делив со три. Значи, секој од броевите од бараното множество има свој пар (кој се добива со замена на првите две цифри) во кој третата цифра е иста. Затоа збирот на овие два броја ќе биде парен. Понатаму, паровите се дисјунктни, па затоа збирот на разгледуваните броеви ќе биде парен.

Задача 2. Сопственици на хотел на почетокот на туристичката сезона за 40000 денари купиле нови ќебиња, чаршави и навлаки за перници. Секое ќебе го платиле по 1200 денари, секој чаршав по 500 денари и секоја навлака по 250 денари. Ако се купени вкупно 100 артикли, колку се купени ќебиња, колку чаршави и колку навлаки за перници.

Решение. Прв начин. Нека се купени x ќебиња, y чаршави и z навлаки за перници. Јасно $x, y, z \in \mathbb{N}$ и притоа важи

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 1200x + 500y + 250z = 40000. \end{cases}$$

Од првата равенка следува $z = 100 - x - y$ и ако замениме во втората, по средувањето добиваме

$$19x + 5y = 300.$$

Од последната равенка добиваме

$$x = \frac{300 - 5y}{19} = \frac{5(60 - y)}{19}.$$

Бидејќи $x, y, z \in \mathbb{N}$, од последната равенка следува дека броителот на десната страна мора да е делив со именителот и како $\text{NZD}(5, 19) = 1$, добиваме дека изразот $60 - y$ мора да е содржател на бројот 19 и мора да важи $y < 60$. Затоа $60 - y = 19$ или $60 - y = 38$ или $60 - y = 57$.

Ако $60 - y = 19$, тогаш $y = 41$, па затоа $x = 5$ и $z = 54$, т.е. купени се 5 ќебиња, 41 чаршав и 54 навлаки за перници.

Ако $60 - y = 38$, тогаш $y = 22$, па затоа $x = 10$ и $z = 68$, т.е. купени се 10 ќебиња, 22 чаршави и 68 навлаки за перници.

Ако $60 - y = 57$, тогаш $y = 3$, па затоа $x = 15$ и $z = 82$, т.е. купени се 15 ќебиња, 3 чаршави и 82 навлаки за перници.

Втор начин. Нека се купени x ќебиња, y чаршави и z навлаки за перници. Јасно $x, y, z \in \mathbb{N}$ и притоа важи

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 1200x + 500y + 250z = 40000. \end{cases}$$

Од втората равенка ја изразуваме непознатата z и заменуваме во првата равенка. Последователно добиваме

$$z = 160 - \frac{24}{5}x - 2y,$$

$$x + y + 160 - \frac{24}{5}x - 2y = 100,$$

$$-\frac{19}{5}x - y = -60.$$

Според тоа, $y = 60 - \frac{19}{5}x$, па добиваме

$$z = 160 - \frac{24}{5}x - 2(60 - \frac{19}{5}x) = 40 + \frac{14}{5}x.$$

Бидејќи $x, y, z \in \mathbb{N}$ и $\text{NZD}(5, 19) = 1$ заклучуваме дека x треба да е содржател на 5 и мора да важи $x \leq 15$.

Ако $x = 5$, тогаш $y = 41$ и $z = 54$, т.е. купени се 5 кебиња, 41 чаршав и 54 навлаки за перници.

Ако $x = 10$, тогаш $y = 22$ и $z = 68$, т.е. купени се 10 кебиња, 22 чаршави и 68 навлаки за перници.

Ако $x = 15$, тогаш $y = 3$ и $z = 82$, т.е. купени се 15 кебиња, 3 чаршави и 82 навлаки за перници.

Задача 3. Определи ги сите природни броеви $n > 2$ за кои постои делител d на бројот n таков што

$$n = a^3 + d^3,$$

каде a е најмалиот делител на бројот n поголем од 1.

Решение. Прв начин. Ако претпоставиме дека n е непарен број, тогаш непарни се сите негови делители и нивните кубови, па добиваме дека $a^3 + d^3$ е парен број, што противречи на $n = a^3 + d^3$. Според тоа, n мора да е парен број.

За парни броеви најмал позитивен делител поголем од 1 е бројот 2, што значи дека $a = 2$. Ако d е делител на бројот n , тогаш е делител и на бројот $n - d^3 = a^3 = 8$, па затоа $d \mid 8$. Според тоа, единствени можности за бројот d се $d = 1, 2, 4, 8$. За $d = 1$ добиваме $n = 9$ и ова не е решение на задачата. За останатите можности $d = 2, 4, 8$ ги добиваме решенијата $n = 16, 72, 520$.

Втор начин. Јасно, бројот a е прост. Бидејќи a е делител на $a^3 = n - d^3$ и на n заклучуваме дека тој е делител на d^3 . Но, a е прост број, па затоа е делител на d . Од друга страна, d е делител на n и на $d^3 = n - a^3$, па затоа мора да е делител на a^3 . Бидејќи a е прост број и е делител на d , единствени можности се $d = a$, $d = a^2$ и $d = a^3$.

Ако $d = a$, тогаш $n = 2a^3$, па затоа n е парен и мора да е $a = 2$, $n = 16$.

Ако $d = a^2$, тогаш $n = a^3 + a^6 = a^3(1 + a^3)$. Но, броевите a^3 и $a^3 + 1$ се со различна парност, па затоа n е парен број и мора да важи $a = 2$, $n = 72$.

Ако $d = a^3$, тогаш $n = a^3 + a^9 = a^3(1 + a^6)$, па како и во претходниот случај заклучуваме дека $a = 2$, $n = 520$.

Задача 4. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$m(m-n)^2(m+n) = m^4 + mn^3 - 99n.$$

Решение. Прв начин. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенката

$$m(m^2 - 2mn + n^2)(m+n) = m(m^3 + n^3) - 99n,$$

$$m(m^2 - 2mn + n^2)(m+n) = m(m+n)(m^2 + mn + n^2) - 99n,$$

$$m(m+n)mn = 99n,$$

$$m^2(m+n) = 99.$$

Бројот 99 го разложуваме на прости множители и добиваме $99 = 3^2 \cdot 11$. Единствени негови делители кои воедно се и точни квадрати се броевите 1 и 9. Затоа имаме два случаја: ако $m = 1$, тогаш $m + n = 99$, односно $n = 88$, а ако $m = 3$, тогаш $m + n = 11$, т.е. $n = 8$.

Значи, решенија се: $(m, n) = (1, 98)$ и $(m, n) = (3, 8)$.

Втор начин. Дадената равенка посчедователно е еквивалентна на равенката:

$$m(m-n)(m^2 - n^2) = m(m^3 + n^3) - 99n,$$

$$m(m^3 + n^3 - mn^2 - m^2n) = m(m^3 + n^3) - 99n,$$

$$99n = m(m^2n + mn^2),$$

$$99 = m^2(m+n).$$

Понатаму на потополно ист начин како и во првиот начин на решавање добиваме $(m, n) = (1, 98)$ и $(m, n) = (3, 8)$..

Задача 5. Во множеството цели броеви реши го системот равенки

$$x - yz = 1, \quad xz + y = 2.$$

Решение. Прв начин. Ако $y = 0$, од правата равенка имаме $x = 1$, а од втората $xz = 2$. Со замена за $x = 1$ добиваме $z = 2$. Значи, едно решение е $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

Ако $y \neq 0$, од првата равенка добиваме $z = \frac{x-1}{y}$. Со замена во втората равенка последователно добиваме:

$$x \frac{x-1}{y} + y = 2,$$

$$x(x-1) + y^2 = 2y,$$

$$x(x-1) + y^2 - 2y + 1 = 1,$$

$$x(x-1) + (y-1)^2 = 1.$$

Ако $x = 0$ или $x = 1$, тогаш $x(x-1) = 0$. Ако x е негативен или поголем од 1, тогаш $x(x-1)$ е позитивен. Според тоа, производот $x(x-1)$ секогаш е ненегативен. Исто така важи $(y-1)^2 \geq 0$, па затоа равенството

$$x(x-1) + (y-1)^2 = 1$$

е можно само ако едниот собирок е еднаков на 0, а другиот е еднаков на 1. Исто така x и $x-1$ се со различна парност, па затоа $x(x-1)$ е парен број.

Според тоа, мора да важи $x(x-1) = 0$ и $(y-1)^2 = 1$, односно $x = 0$ или $x = 1$, а $y = 0$ или $y = 2$.

За $y = 0$, едно решение е добиено погоре.

Ако $y = 2$, со замена за можните вредности за x имаме: за $x = 1$, добиваме $z = \frac{1-1}{2} = 0$, а за $x = 0$, добиваме $z = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$, што не е можно бидејќи z треба да е цел број.

Конечно, единствени решенија на системот се $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ и $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

Втор начин. За произволни реални броеви важи

$$(x - yz)^2 + (xz + y)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + 1).$$

Ако ги квадрираме и собереме дадените равенки добиваме

$$(x - yz)^2 + (xz + y)^2 = 1^2 + 2^2 = 5,$$

од каде заклучуваме дека

$$(x^2 + y^2)(z^2 + 1) = 5.$$

Множителите на десната страна во последната равенка се ненегативни, а 5 е прост број, па затоа можни се само два случаја:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 + 1 = 5 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 5, \quad z^2 + 1 = 1.$$

Во првиот случај од равенката $x^2 + y^2 = 1$ следува дека еден од броевите x и y е еднаков на 0, а другиот е еднаков на ± 1 . Ако $x = 0$, со замена во првата равенка во условот добиваме $-2y = 1$ или $2y = 1$, што не е можно. Ако $y = 0$, со замена во првата равенка во условот добиваме $x = 1$. Заменуваме во втората равенка и наоѓаме $z = 2$, со што добиваме едно решение на дадениот систем. Во другиот случај имаме $z^2 + 1 = 1$, од каде наоѓаме $z = 0$. Со замена во првата равенка од условот наоѓаме $x = 1$, а со замена во втората наоѓаме $y = 2$.

Конечно, единствени решенија на системот се $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ и $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

Трет начин. Од првата равенка имаме $x = yz + 1$ и со замена во втората добиваме:

$$(yz + 1)z + y = 2,$$

$$yz^2 + z + y = 2,$$

$$y(z^2 + 1) = 2 - z,$$

$$y = \frac{2-z}{z^2+1}.$$

Ако $z \geq 3$, тогаш $z^2 + 1 \geq 3z + 1 > z - 2 > 0$, што значи дека $\frac{2-z}{z^2+1}$ не може да биде цел број. Слично, за $z \leq -2$ важи $z^2 + 1 \geq -2z + 1 > 2 - z > 0$, па затоа $\frac{2-z}{z^2+1}$ повторно не може да е цел број. Останува да ги провериме вредностите $z \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

За $z = -1$ со замена во $y = \frac{2-z}{z^2+1}$ добиваме $y = \frac{3}{2}$ и тоа не е цел број.

За $z = 0$ со замена во $y = \frac{2-z}{z^2+1}$ добиваме $y = 0$, па затоа $x = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

За $z = 1$ со замена во $y = \frac{2-z}{z^2+1}$ добиваме $y = \frac{1}{2}$ и тоа не е цел број.

За $z = 2$ со замена во $y = \frac{2-z}{z^2+1}$ добиваме $y = 0$, па затоа $x = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Конечно, единствени решенија на системот се $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ и $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

Задача 6. Определи ги сите парови цели броеви (m, n) такви што

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10.$$

Решение. Прв начин. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\begin{aligned}n^2 - 6n &= m^2 + m - 10, \\4n^2 - 24n &= 4m^2 + 4m - 40, \\4n^2 - 24n + 36 - 36 &= 4m^2 + 4m + 1 - 41, \\(2n - 6)^2 + 5 &= (2m + 1)^2, \\(2m + 1)^2 - (2n - 6)^2 &= 5, \\(2m + 1 - 2n + 6)(2m + 1 + 2n - 6) &= 5, \\(m - 2n + 7)(2m + 2n - 5) &= 5.\end{aligned}$$

Од последната равенка добиваме четири системи од по две линеарни равенки со по две непознати m и n , бидејќи бројот 5 како производ на два цели броја a и b може да се запише на четири начини и тоа:

$$1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1).$$

Сега, ако

$$\begin{cases} 2m - 2n + 7 = a, \\ 2m + 2n - 5 = b, \end{cases}$$

добиваме

$$m = \frac{a+b-2}{4}, \quad n = \frac{b-a+12}{4},$$

па ако замениме $(a, b) = (1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$ ги добиваме решенијата $(m, n) = (1, 4), (1, 2), (-2, 2), (-2, 4)$.

Втор начин. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned}n^2 - 6n + 9 &= m^2 + m - 1, \\(n - 3)^2 &= m^2 + m - 1.\end{aligned}$$

Нека претпоставиме дека $m > 0$. Тогаш

$$m^2 + m - 1 \geq m^2, \text{ а } m^2 + m - 1 < m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2.$$

Според тоа, ако $m > 0$, тогаш $m^2 + m - 1$ е точен квадрат ако и само ако $m^2 + m - 1 = m^2$, односно ако и само ако $m = 1$. Сега, од $(n - 3)^2 = 1$ добиваме $(m, n) = (1, 2)$ и $(m, n) = (1, 4)$.

Нека претпоставиме дека $m \leq 0$ и нека $m = -k$ каде $k \geq 0$. Тогаш ја добиваме равенката

$$(n-3)^2 = k^2 - k - 1.$$

Јасно, $k^2 - k - 1 < k^2$. За $k = 0$ и $k = -1$ добиваме $(n-3)^2 = -1$, што не е можно, а за $k \geq 2$ имаме

$$k^2 - k - 1 \geq k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2.$$

Според тоа, бројот $k^2 - k - 1$ е точен квадрат ако и само ако

$$k^2 - k - 1 = (k-1)^2,$$

од каде добиваме $k = 2$. Сега со замена на добиените вредности, како и погоре добиваме $(n-3)^2 = 1$, па затоа

$$(m, n) = (-2, 2) \text{ и } (m, n) = (-2, 4).$$

Трет начин. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$n^2 - 6n = m^2 + m - 10,$$

$$n^2 - 6n + 8 = m^2 + m - 2,$$

$$n^2 - 4n - 2n + 8 = m^2 - m + 2m - 2,$$

$$n(n-4) - 2(n-4) = m(m-1) + 2(m-1),$$

$$(n-4)(n-2) = (m-1)(m+2).$$

Ако двете страни на последната равенка се еднакви на 0, тогаш ги добиваме решенијата:

$$(m, n) \in \{(1, 4), (1, 2), (-2, 2), (-2, 4)\}.$$

Нека претпоставиме дека ниту едната страна на равенката не е еднаква на 0. Левата страна на равенката е негативна ако $n = 3$, а десната е негативна ако $m = 0$ или $m = -1$, но тоа не дава решение. Затоа може да претпоставиме дека двете страни на равенката се позитивни. Можни се два случаја.

Прв случај. Нека претпоставиме дека $m-1 < n-4$. Тогаш $m+2 < n-1$, т.е. $m+2 \leq n-2$. Ако броевите $n-4, n-2, m-1, m+2$ се позитивни, тогаш од последните неравенства следува

$$(m-1)(m+2) < (n-2)(n-4),$$

што е противречност. Ако $n-4, n-2, m-1, m+2$ се негативни, тогаш од истите неравенства следува

$$(m-1)(m+2) > (n-2)(n-4),$$

што повторно е противречност. Нека претпоставиме дека $m-1, m+2$ се негативни, а $n-2, n-4$ се позитивни. Ако $-m-2 < n-4$, тогаш важи $-m+1 < n-1$, па затоа $-m+1 \leq n-2$, од каде го добиваме неравенството

$$(m-1)(m+2) < (n-4)(n-2),$$

што е противречност. Ако $-m-2 \geq n-4$, тогаш $-m-1 \geq n-1 > n-2$, па затоа

$$(m-1)(m+2) > (n-4)(n-2),$$

што повторно е противречност.

Втор случај. Нека претпоставиме дека $m-1 \geq n-4$. Тогаш важи $m+2 \geq n-1 > n-2$. Аналогно како и во првиот случај ги разгледуваме случаите кога сите броеви се со ист знак и случајот кога броевите $n-2$ и $n-4$ се негативни, а броевите $m-1$ и $m+2$ се позитивни. Сите овие случаи доведуваат до противречност, па затоа равенката нема други решенија.

Задача 7. Определи ги сите парови (n, k) природни броеви за кои важи

$$n^2 + n = k^2 + 2k - 9.$$

Решение. Прв начин. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$n^2 + n + 10 = (k + 1)^2.$$

Понатаму, бидејќи за секој природен број n важи

$$n^2 < n^2 + n + 10 < n^2 + 8n + 10 < (n + 4)^2,$$

можни се следниве три случаи:

- $n^2 + n + 10 = (n + 1)^2$, од каде следува $n^2 + n + 10 = n^2 + 2n + 1$, односно $n = 9$. За $n = 9$, добиваме $k = 9$, т.е. едно решение е $(n, k) = (9, 9)$,
- $n^2 + n + 10 = (n + 2)^2$, од каде добиваме $n^2 + n + 10 = n^2 + 4n + 4$, т.е. $n = 2$. За $n = 2$, добиваме $k = 3$, т.е. второ решение е $(n, k) = (2, 3)$,
- $n^2 + n + 10 = (n + 3)^2$, од каде добиваме $n^2 + n + 10 = n^2 + 6n + 9$ и јасно во овој случај немаме решение на задачата.

Конечно, задачата има две решенија $(n, k) = (9, 9)$ и $(n, k) = (2, 3)$.

Втор начин. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$4n^2 + 4n = 4k^2 + 8k - 36,$$

$$4n^2 + 4n + 1 = 4k^2 + 8k + 4 - 39,$$

$$(2n + 1)^2 + 39 = (2k + 2)^2,$$

$$(2k + 2)^2 - (2n + 1)^2 = 39,$$

$$(2k - 2n + 1)(2k + 2n + 3) = 39.$$

Во последната равенка едниот множител на десната страна е позитивен, па затоа мора и другиот да е позитивен, па како множителите се различни од $39 = 1 \cdot 39 = 3 \cdot 13$, ги добиваме следниве два системи линеарни равенки:

$$\begin{cases} 2k - 2n + 1 = 1, \\ 2k + 2n + 3 = 39, \end{cases} \quad \begin{cases} 2k - 2n + 1 = 3, \\ 2k + 2n + 3 = 13, \end{cases}$$

чиј решенија соодветно се $(n, k) = (9, 9)$ и $(n, k) = (2, 3)$.

Трет начин. Како и во вториот начин на решавање добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката $(2n + 1)^2 + 39 = (2k + 2)^2$. Од последната равенка следува дека $2k + 2 > 2n + 1$, па затоа постојат природни броеви a и b такви што

$$2n + 1 = a \text{ и } 2k + 2 = a + b.$$

Со замена во горната равенка добиваме

$$a^2 + 39 = (a + b)^2$$

$$a^2 + 39 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$b(2a + b) = 39.$$

Сега, аналогно како во вториот начин имаме $b \in \{1, 3\}$. За $b = 1$ го добиваме решението $(n, k) = (9, 9)$, а за $b = 3$ го добиваме решението $(n, k) = (2, 3)$.

Задача 8. Определи ги сите подредени тројки (a, b, c) природни броеви за кои важи $a \leq b \leq c$ и

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc}.$$

Решение. Прв начин. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$3abc = 7(bc + b + 1),$$

$$3abc = (7b + 7)c + 7.$$

Бидејќи левата страна на равенката е делива со c , мора да биде и десната, па затоа $c \mid 7$, од каде следува $c = 1$ или $c = 7$.

Ако $c = 1$, од $a \leq b \leq c$ следува $a = b = c = 1$, за што лесно се проверува дека не е решение на задачата. Според тоа, $c = 7$. Со замена во горната равенка, последователно добиваме

$$3ab \cdot 7 = (7b + 7) \cdot 7 + 7,$$

$$3ab = 7b + 8.$$

Од последното равенство следува дека $b \mid 8$, па затоа $b = 1, 2, 4$ или 8 .

Ако $b = 1$, добиваме $3a = 15$, т.е. $a = 5$, што не е мојжно заради $a \leq b$.

Ако $b = 2$, следува $6a = 22$ и последната равенка нема решение во множеството природни броеви.

Ако $b = 4$, добиваме $12a = 36$, т.е. $a = 3$.

Случајот $b = 8$ не е можен заради $c = 7$ и $b \leq c$.

Конечно, единствено решение е $(a, b, c) = (3, 4, 7)$.

Втор начин. Од $a \leq b \leq c$ следува

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}.$$

Ако $a \geq 4$, тогаш важи

$$\frac{3}{7} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64},$$

што не е точно. Според тоа, мора да важи $a \leq 3$.

Од друга страна имаме

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} = \frac{3}{7}, \text{ т.е. } a > \frac{7}{3},$$

па затоа мора да важи $a \geq 3$. Тоа значи дека единствена можност е $a = 3$.

Сега добиваме

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3bc}, \text{ т.е. } \frac{2}{7} = \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}.$$

Како и претходно за $b \geq 5$ имаме

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25},$$

што не е точно. Значи, мора да е $b \leq 4$. Исто така важи

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = \frac{2}{7}, \text{ т.е. } b > \frac{7}{2},$$

па затоа $b \geq 4$. Од претходно изнесеното следува дека единствена можност е $b = 4$, при што добиваме

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4c}, \text{ т.е. } c = 7.$$

Конечно, единствено решение е $(a, b, c) = (3, 4, 7)$.

Задача 9. Определи ги последните две цифри на бројот $\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^6}}}}}_{2019}$.

Решение. Прв начин. Да ги разгледаме степените на бројот 6^n , $n \geq 2$.
Имаме:

$$6^2 = 36, 6^3 = 216, 6^4 = 1296, 6^5 = \dots 76, 6^6 = \dots 56, 6^7 = \dots 36, 6^8 = \dots 16, \dots$$

Очигледно двоцифрените завршетоци на степените 6^n , $n \geq 2$ се еднакви на петте броја 36, 16, 96, 76, 56 кои се менуваат во овој редослед. Тоа значи дека секој петти степен има ист двоцифрен завршеток.

Степенот 6^n , $n \geq 2$ има определен двоцифрен завршеток во зависност од остатокот при делењето на бројот $n - 1$ со бројот 5. Имено:

- ако остатокот е 0, завршетокот е 56,
- ако остатокот е 1, завршетокот е 36,
- ако остатокот е 2, завршетокот е 16,
- ако остатокот е 3, завршетокот е 96,
- ако остатокот е 4, завршетокот е 76.

Бројот $6^{6^6} = 6^{46656}$ има двоцифрен завршеток 56, бидејќи бројот 46656 е

делив со 5. Понатаму, бројот $6^{6^{6^6}} = 6^{6^{46656}}$ исто така има двоцифрен завршеток 56 бидејќи експонентот намален за 1 е делив со 5. Од иста причина се додавањето на нови шестки секој следен експонент ќе има двоцифрен завршеток 56, па затоа двоцифрениот завршеток на бројот

$$\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^6}}}}}_{2019} \text{ е } 56.$$

Втор начин. Да ги разгледаме степените на бројот 6^n , $n \geq 2$. Имаме:

$$6^2 = 36, 6^3 = 216, 6^4 = 1296, 6^5 = \dots 76, 6^6 = \dots 56, 6^7 = \dots 36, 6^8 = \dots 16, \dots$$

Очигледно двоцифрените завршетоци на степените 6^n , $n \geq 2$ се еднакви на петте броја 36, 16, 96, 76, 56 кои се менуваат во овој редослед. Тоа значи дека секој петти степен има ист двоцифрен завршеток.

Степенот 6^n , $n \geq 2$ има определен двоцифрен завршеток во зависност од остатокот при делењето на бројот n со бројот 5. Имаме:

- ако $n \equiv 2 \pmod{5}$, тогаш $6^n \equiv 36 \pmod{100}$,
- ако $n \equiv 3 \pmod{5}$, тогаш $6^n \equiv 16 \pmod{100}$,
- ако $n \equiv 4 \pmod{5}$, тогаш $6^n \equiv 96 \pmod{100}$,

- ако $n \equiv 0(\text{mod } 5)$, тогаш $6^n \equiv 76(\text{mod } 100)$,
- ако $n \equiv 1(\text{mod } 5)$, тогаш $6^n \equiv 56(\text{mod } 100)$,

Понатаму, бидејќи $6 \equiv 1(\text{mod } 5)$, од својствата на конгруенциите следува

дека $\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^6}}}}}_{2019} \equiv 1(\text{mod } 5)$. Конечно од претходните разгледувања следува дека

$\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^6}}}}}_{2019} \equiv 56(\text{mod } 100)$, т.е. двоцифрениот завршеток на бројот $\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^6}}}}}_{2019}$ е еднаков на 56.

Задача 10. Дадени се прост број p и природен број $n \geq p-1$. Ако бројот $np+1$ е точен квадрат на некој природен број, докажи дека бројот $n+1$ е збир на квадрати на некои p природни броеви.

Решение. Прв начин. Нека a е природен број таков што $np+1=a^2$. Јасно, $a > 1$. Тогаш $a^2-1=np$, т.е. $(a-1)(a+1)=np$. Бидејќи p е прост број, важи $p|a-1$ или $p|a+1$.

Нека $p|a-1$, односно $a=kp+1$ за некој природен број k . Тогаш

$$\begin{aligned} 1+np &= (kp+1)^2, \\ 1+np &= k^2 p^2 + 2kp + 1, \\ n &= k^2 p + 2k. \end{aligned}$$

Сега, имаме

$$n+1 = k^2 p + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 + (p-1)k^2 = (k+1)^2 + (p-1)k^2.$$

Нека $p|a+1$, односно $a=kp-1$ за некој природен број k . Аналогно како погоре, добиваме

$$n+1 = (k-1)^2 + (p-1)k^2.$$

Останува да провериме дали $k-1$ е природен број, односно дали важи $k \geq 2$. Ако претпоставиме дека $k=1$, добиваме дека $n+1=p-1$, односно $n=p-2$, што противречи на претпоставката дека $n \geq p-1$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека тврдењето важи за секои n и p кои ги задоволуваат условите на задачата.

Втор начин. Од $a^2-1=np$, т.е. од $(a-1)(a+1)=np$ следува дека $p|a-1$ или $p|a+1$.

Ако $p|a-1$, тогаш $\frac{a-1}{p}$ и $\frac{a+p-1}{p}$ се природни броеви. Тогаш

$$\begin{aligned} (p-1) \cdot \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + \left(\frac{a+p-1}{p}\right)^2 &= (p-1) \cdot \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + \left(1 + \frac{a-1}{p}\right)^2 \\ &= (p-1) \cdot \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + 2 \frac{a-1}{p} + 1 \\ &= p \cdot \left(\frac{a-1}{p}\right)^2 + 2 \frac{a-1}{p} + 1 \\ &= p \cdot \frac{a^2-2a+1}{p^2} + 2 \frac{a-1}{p} + 1 \\ &= \frac{a^2-1}{p} + 1 = \frac{np}{p} + 1 = n+1, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Ако $p \mid a+1$, тогаш $\frac{a+1}{p}$ и $\frac{a-p+1}{p}$ се природни броеви, бидејќи ако $a-p+1=0$, тогаш добиваме $n=p-2$, што противречи на условот на задачата. Тогаш

$$\begin{aligned}(p-1) \cdot \left(\frac{a+1}{p}\right)^2 + \left(\frac{a-p+1}{p}\right)^2 &= (p-1) \cdot \left(\frac{a+1}{p}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{p} - 1\right)^2 \\&= (p-1) \cdot \left(\frac{a+1}{p}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{p}\right)^2 - 2 \frac{a+1}{p} + 1 \\&= p \cdot \left(\frac{a+1}{p}\right)^2 - 2 \frac{a+1}{p} + 1 \\&= p \cdot \frac{a^2+2a+1}{p^2} - 2 \frac{a+1}{p} + 1 \\&= \frac{a^2-1}{p} + 1 = \frac{np}{p} + 1 = n+1,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Задача 11. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ точно еден од броевите

$$A_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 \text{ и } B_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$$

е делив со 5.

Решение. Прв начин. Секој природен број може да се запише во видот $n = 4k + r$, каде $k \in \mathbb{N}$ и $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Тогаш

$$A_n = 2^{8n+2r+1} - 2^{4k+r+1} + 1 \text{ и } B_n = 2^{8k+2r+1} + 2^{4k+r+1} + 1.$$

Нека $r = 0$. Тогаш

$$A_n = 2^{8n+1} - 2^{4k+1} + 1 = 2^{4k+1}(2^{4k} - 1) + 1 \text{ и}$$

$$B_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 = 2^{4k+1}(2^{4k} + 1) + 1.$$

Цифратата на единиците на степен на бројот 2 е еднаква на цифрата 6, ако степенот е од видот $4k$, на цифрата 2 ако степенот е од видот $4k + 1$, на цифрата 4 ако степенот е од видот $4k + 2$ и на цифрата 8 ако степенот е од видот $4k + 3$. Според тоа, цифрата на единиците на бројот A_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $2(6 - 1) + 1 = 11$, па затоа A_n не е делив со 5. Цифрата на единиците на бројот B_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $2(6 \cdot 1 + 1) + 1 = 15$, па затоа тој е делив со 5.

Нека $r = 1$. Тогаш

$$A_n = 2^{8n+3} - 2^{4k+2} + 1 = 2^{4k+2}(2^{4k+1} - 1) + 1 \text{ и}$$

$$B_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 = 2^{4k+2}(2^{4k+1} + 1) + 1.$$

На сличен начин заклучуваме дека цифрата на единиците на бројот A_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $4(2 - 1) + 1 = 5$, па затоа A_n е делив со 5. Цифрата на единиците на бројот B_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $4(2 + 1) + 1 = 13$, па затоа тој не е делив со 5.

Нека $r = 2$. Тогаш

$$A_n = 2^{8n+5} - 2^{4k+3} + 1 = 2^{4k+3}(2^{4k+2} - 1) + 1 \text{ и}$$

$$B_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 = 2^{4k+3}(2^{4k+2} + 1) + 1.$$

Цифрата на единиците на бројот A_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $8(4 - 1) + 1 = 25$, па затоа A_n е делив со 5. Цифрата на единиците на бројот B_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $8(4 + 1) + 1 = 41$, па затоа тој не е делив со 5.

Нека $r = 3$. Тогаш

$$A_n = 2^{8n+7} - 2^{4k+4} + 1 = 2^{4k+4}(2^{4k+3} - 1) + 1 \text{ и}$$

$$B_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 = 2^{4k+4}(2^{4k+3} + 1) + 1.$$

Цифрата на единиците на бројот A_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $6(8-1)+1=43$, па затоа A_n не е делив со 5. Цифрата на единиците на бројот B_n е еднаква на цифрата на единиците на бројот $6(8+1)+1=55$, па затоа тој не е делив со 5.

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned} A_n B_n &= (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \\ &= (2^{2n+1} + 1)^2 - 2^{2n+2} \\ &= 2^{4n+2} + 2^{2n+2} + 1 - 2^{2n+2} \\ &= 2^{4n+2} + 1. \end{aligned}$$

Имаме $16 \equiv 1 \pmod{5}$, па затоа од својствата на конгруенциите следува дека

$$A_n B_n = 2^{4n+2} + 1 = 4 \cdot 16^n + 1 \equiv 4 \cdot 1^n + 1 = 5 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Последното значи дека барем еден од броевите A_n и B_n е делив со 5. Нека претпоставиме дека и двата броја се деливи со 5. Тогаш разликата

$$B_n - A_n = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) - (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1) = 2^{2n+2}$$

треба да е делива со 5, што не е можно бидејќи степен на бројот 2 не е делив со 5.

Задача 12. За природните броеви a, b и простиот број p важи $a^2 + p^2 = b^2$. Докажи дека $2(b + p)$ е квадрат на природен број.

Решение. Прв начин. Последователно имаме

$$a^2 + p^2 = b^2,$$

$$p^2 = b^2 - a^2,$$

$$p^2 = (b - a)(b + a).$$

Бидејќи a и b се природни броеви, броевите $b - a$ и $b + a$ се различни природни делители на p^2 . Но, бројот p^2 има само три природни делители $1, p, p^2$, па затоа $b - a = 1$, $b + a = p^2$. Последните равенства ги зобираме и добиваме $2b = 1 + p^2$. Конечно,

$$2(b + p) = 2b + 2p = 1 + p^2 + 2p = (p + 1)^2,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ако $p = 2$, тогаш $a^2 + 4 = b^2$. Квадратите 1^2 и 2^2 се разликуваат за 3, а разликата на било кои два квадрати е најмалку 5, па затоа не е можно да е $p = 2$. Според тоа, можеме да претпоставиме дека p е непарен прост број.

Броевите a, b и p формираат Питагорова тројка, па затоа постојат природни броеви d, m и n такви што

$$a = 2mnd, \quad p = d(m^2 - n^2), \quad b = d(m^2 + n^2).$$

Бидејќи p е прост број имаме $d = 1$, па затоа

$$a = 2mn, \quad p = m^2 - n^2, \quad b = m^2 + n^2.$$

Според тоа,

$$2(b + p) = 2(m^2 - n^2 + m^2 + n^2) = 4m^2 = (2m)^2,$$

што и требаше да се докаже.

Трет начин. Ќе докажеме дека двата броја b и p мора да се непарни.

Ако $p = 2$, тогаш $a^2 + 4 = b^2$. Квадратите 1^2 и 2^2 се разликуваат за 3, а разликата на било кои два квадрати е најмалку 5, па затоа не е можно да е $p = 2$. Според тоа, можеме да претпоставиме дека p е непарен прост број.

Ако b е парен број, тогаш a мора да е непарен, па затоа при делење со 4 бројот b^2 ќе дава остаток 0, а бројот $a^2 + p^2$ ќе дава остаток 2, што е противречност. Значи, b е непарен број.

Од условот имаме $a^2 = b^2 - p^2$, т.е. $a^2 = (b - p)(b + p)$. Важи

$$\text{NZD}(b - p, b + p) = \text{NZD}(2p, b + p). \quad (1)$$

Понатаму, ако p е делител на b , тогаш од $a^2 + p^2 = b^2$ следува дека p е делител на a , па затоа $a = pk, b = pt$ и добиваме $k^2 + 1 = t^2$, што не е можно бидејќи разликата на квадратите на било кои два природни броја е поголема од 1. Значи p не е делител на b , па како бројот $b + p$ е парен, од (1) следува дека $\text{NZD}(b - p, b + p) = 2$. Според тоа, $b - p = 2x$ и $b + p = 2y$, каде $\text{NZD}(x, y) = 1$ и $a^2 = 4xy$, т.е. $xy = (\frac{a}{2})^2$. Бидејќи производот на два заемно прости броја е точен квадрат ако и само ако и двата броја се точни квадрати, добиваме дека y е точен квадрат. Но, тогаш од $2(b + p) = 4y$ следува дека $2(b + p)$ точен квадрат.

АЛГЕБАРСКИ ТРАНСФОРМАЦИИ, РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

Задача 1. Дешифрирајте го равенството

$$(1) \quad \overline{FORTY} + \overline{TEN} + \overline{TEN} = \overline{SIXTY}$$

т.е. заменете ги буквите со цифри, различни букви со различни цифри, така да ова собирање биде точно.

Решение. Пред да преминеме на решавање на поставената задача да забележиме дека равенството (1) всушност е записот на равенството $40+10+10=60$ на англиски јазик. Заради подобра прегледност, даденото собирање ќе го запишеме на следниот начин

$$(2) \quad \begin{array}{r} \text{forty} \\ \text{ten} \\ + \quad \text{ten} \\ \hline \text{sixty} \end{array}$$

Прв начин. i) Од (2) следува дека во последната колона мора да биде $y+n+n < 10$, бидејќи во спротивно во претпоследната колона ќе добиеме или $t+e+e+1=t$ или $t+e+e+1=10+t$ т.е. или $2e=-1$ или $2e=9$, а ниту едното ниту другото не е можно. Според тоа, $y+n+n=y$, од што следува дека $n=0$. Понатаму, не може да биде $t+e+e=t$ бидејќи тоа би значело дека $e=0=n$, што противречи на условот на задачата. Значи, $t+e+e=t+10$ од што следува $e=5$.

ii) Мора да биде $r+t+t+1 \geq 10$, бидејќи втората цифра од лево во збирот е i , а не е o . Според тоа, збирот $o+1$ или $o+2$, (заради можноста $r+t+t+1 \geq 20$), е исто така е поголем од 10, бидејќи првата цифра од лево во збирот е s , а не е f . Ако $o < 8$, тогаш $o+1 < 10$ и $o+2 < 10$, што не е можно. Ако $o=8$, тогаш $o+1 < 10$ и $o+2=10$, па затоа $i=0=n$, што не е можно. Значи, единствено останува можноста $o=9$.

iii) Ако $10 \leq r+t+t+1 < 20$, тогаш $o+1=9+1=10$, па затоа $i=0=n$, што не е можно. Значи, мора да е $r+t+t+1 > 20$, па е $o+2=9+2=11$, т.е. $i=1$.

iv) Јасно, $r+t+t+1 \neq 20$, бидејќи во спротивно ќе имаме $x=0=n$, што не е можно. Исто така, $r+t+t+1 \neq 21$ бидејќи во спротивно добиваме $x=1=i$, што повторно не е можно. Бидејќи цифрата 9 веќе е „зафатена“ добиваме дека најголемата вредност на изразот $r+t+t+1$ е 24 и тоа за

$t=8$ и $r=7$. Значи, збирот $r+t+t+1$ може да биде еднаков на 22, 23 или 24.

Нека $r+2t=21$. Ако $t=6$, тогаш $r=9=o$, што не е можно. Ако $t=7$, тогаш $r=7=t$, што повторно не е можно. Ако $t=8$, тогаш $r=5=e$, што не е можно. Значи, $r+2t \neq 21$.

Ако $r+2t=22$, тогаш можни се два случаи $t=7, r=8$ или $t=8, r=6$. Сега добиваме дека $x=3$ и како $f+1=s$, добиваме дека f и s се две последователни цифри. Меѓутоа за $r+2t=22$ веќе се “зафатени” цифрите 0,1,3,5,7,8,9 или 0,1,3,5,6,8,9, па и во двата случаи не е можно f и s да се две последователни цифри. Значи $r+2t \neq 22$.

И така, останува $r+2t=23$. Притоа единствена можност е $t=8, r=7$. Во овој случај $x=4$, па “зафатени” се цифрите 0,1,4,5,7,8,9. Така за f и s единствен можен пар вредности се 2 и 3, соодветно. Преостанатата цифра е 6 и таа ќе биде на местото на y .

v) Ако најдените вредности ги замениме во (1) добиваме

$$29786 + 850 + 850 = 31486.$$

Втор начин. i) Во собирањето (2) во колоната на единиците збирот $y+n+n$ има цифра на единици y па затоа или $n+n=0$ или $n+n=10$, т.е. или $n=0$ или $n=5$.

ii) Тогаш во колоната на десетките збирот $t+e+e$ или $t+e+e+1$ завршува на цифрата t . Ова е можно ако $2e=0$ или 10, или ако $2e+1=0$ или 10. Последното не е можно, бидејќи $2e \neq -1$ и $2e \neq 9$. Според тоа, $n=0$ и $e=5$.

iii) Во колоната на десетилјадите како собинок се јавува само f а збирот е s . Значи, од колоната на илјади мора да се добие една единица која се пренесува, т.е. $f+1=s$.

iv) Во колоната на илјадите цифрата o преминува во цифрата i . Бидејќи $n=0$, мора да е $i \neq 0$, па затоа $i=1$. Но, тоа е можно само ако $o=9$ и од колоната на стотките на колоната на илјадите се пренесува цифрата 2. Не може да биде $i=2$, бидејќи и во случај кога $o=9$ при собирањето во колоната на стотките треба да се памти 3 за пренос, што е причина и зошто не може да е $o=8$. Значи, $o=9$ и $i=1$.

Така, од досегашните разгледувања имаме

$$\begin{array}{r} f9rty \\ t50 \\ + \quad t50 \\ \hline s1xty \end{array}$$

и $f+1=s$.

iv) Во колоната на стотките важи $r+t+t+1=20+x$, каде $x \geq 2$, бидејќи цифрите 0 и 1 се веќе зафатени. За r, t и x преостануваат цифрите 2, 3, 4, 6, 7, 8.

За $t \leq 6$ равенството $r+2t+1=20+x$ не е можно, бидејќи за $t=6$, $r=8$ (најголемата можна вредност за r) имаме $r+2t+1=21 < 22 \leq 20+x$. Според тоа, $t=7$ или 8.

v) Ако $t=7$, тогаш равенството $r+2t+1=20+x$ ќе важи само за $r=8$ и $x=3$. Ако $t=8$, тогаш равенството $r+2t+1=20+x$ ќе важи за $r=6, x=3$ или $r=7, x=4$.

vi) Да ја составиме таблицата на добиените резултати.

	f	o	r	t	y	e	n	s	i	x
(1)		9	8	7		5	0		1	3
(2)		9	6	8		5	0		1	3
(3)		9	7	8		5	0		1	4

при што $f+1=s$. За f, y, s преостанати се цифрите:

- во случајот (1): 2, 4, 6,
- во случајот (2): 2, 4, 7, и
- во случајот (3): 2, 3, 6.

Бидејќи $f+1=s$, т.е. f и s може да е само третиот случај и притоа имаме $f=2, s=3, y=6$. Но, тогаш $t=8, r=7, x=4$. Ако ги замениме најдените вредности добиваме

$$29786 + 850 + 850 = 31486.$$

Трет начин. Бидејќи двете последни цифри во првиот собирок и збирот се поклопуваат, заклучуваме дека бројот $\overline{ten} + \overline{ten}$ мора да завршува на две нули, а тоа е можно само ако $\overline{en} = 50$, т.е. $n=0$ и $e=5$. Можноста $\overline{ten} = \overline{t00}$ отпаѓа бидејќи различните букви означуваат различни цифри.

Од третата колона (колоната на стотките) во четвртата колона (колоната на илјадитите) преминуваат најмногу две единици, бидејќи бројот на собирците е три. Притоа бројот во четвртата колона мора да е поголем од 10, бидејќи единица се пренесува во колоната на десет-илја-дите, а цифрата 0 веќе е зафатена. Според тоа, $o=9$ и $i=1$. Но, за да може две единици да се пренесат од третата во четвртата колона, мора $r+2t+1 > 21$, (единица се пренесува од втората колона, бидејќи $2e=10$, а освен тоа, цифрите 0 и 1 се веќе зафатени). Затоа, $t > 6$. Ако $t=7$, тогаш $r=8$ и $x=3$. Но, тогаш

равенството $f+1=s$ не е можно, бидејќи не се преостанати две последователни цифри. Значи, $t=8, r=7, x=4, f=2, s=3$ и $y=6$, (тоа е единствената преостаната цифра). За $r=6$, повторно се добива $x=3$, што веќе видовме дека не е можно бидејќи не ни преостануваат две соседни цифри.

Конечно, имаме

$$29786 + 850 + 850 = 31486.$$

Четврт начин. Лесно се констатира дека $n=0$ и $e=5$, (види ги претходните три начини на решавање). Сега $i \neq 0$, а за $i=2$ дури и при $o=9$ во колоната на стотките треба да памтиме три, што не е можно, па затоа $i=1$. Но, тогаш $o=9$ па од досега изнесеното имаме

$$\begin{array}{r} f9rty \\ t50 \\ + \quad t50 \\ \hline s1xty \end{array}$$

Одма е јасно дека мора да биде $f+1=s$, при што од колоната на стотките мора да се памти два.

Но за $f=7$ и $s=8$ збирот во колоната на стотките би бил најмногу $4+6+6+1=17 < 20$, па тој случај отпаѓа. За $f=6$ и $s=7$ во колоната на стотките може да се добие или $8+8+4+1=21$ или $8+8+3+1=20$, но тогаш или $x=1$ или $x=0$ што повторно не е можно.

Исто така, лесно се проверува дека за $f=3$ и $s=4$ во сите случаи x се поклопува со една од цифрите: s, f, i, n .

Само за $f=2, s=3$ и $r=7, t=8$ се добива вредност за x која не се поклопува со останатите цифри, а тоа е $x=4$. Според тоа, $y=6$, па конечно единствено решение е

$$29786 + 850 + 850 = 31486.$$

Задача 2. Нека a, b, c позитивни реални броеви такви што

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b}.$$

Докажи дека $a = b = c$.

Решение. Прв начин. Нека $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b} = k$. Тогаш

$$a + b = k(b + c) = k^2(c + a) = k^3(a + b).$$

Значи, $a + b = k^3(a + b)$ и како $a + b > 0$, добиваме $k^3 = 1$. Според тоа, $k = 1$ и затоа $a + b = b + c = c + a$, од каде следува $a = b = c$.

Втор начин. Од $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b}$ следува

$$\frac{a+b}{b+c} - 1 = \frac{b+c}{c+a} - 1 = \frac{c+a}{a+b} - 1, \text{ т.е. } \frac{a-c}{b+c} = \frac{b-a}{c+a} = \frac{c-b}{a+b}.$$

Именителите на дробките во последните три равенства се позитивни, а броителите во овие дробки не може да се истовремено да се сите три позитивни или сите три негативни. Единствена можност овие три дробки да се еднакви меѓу себе е $a - b = b - c = c - a = 0$, односно $a = b = c$.

Трет начин. Од $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b}$ следува

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b} = \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{3(a+b+c)}{3(a+b+c)} = 1.$$

Сега, $\frac{a+b}{b+c} = 1$, од каде добиваме $a = c$, а од $\frac{b+c}{c+a} = 1$ следува $a = b$. Конечно, $a = b = c$.

Четврт начин. Од равенството $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a}$ последователно добиваме

$$\begin{aligned} (a+b)(c+a) &= (b+c)^2 \\ ac + a^2 + ab &= b^2 + bc + c^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Понатаму, од равенството $\frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b}$ последователно добиваме

$$\begin{aligned} (b+c)(a+b) &= (c+a)^2 \\ ab + b^2 + bc &= a^2 + ac + c^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Сега, ако од равенството (2) го одземеме равенството (1) последователно добиваме

$$\begin{aligned} b^2 + bc - ac - a^2 &= a^2 + ac - b^2 - bc \\ 2(b^2 + bc - ac - a^2) &= 0 \\ (b-a)(b+a) + c(b-a) &= 0 \\ (b-a)(a+b+c) &= 0. \end{aligned}$$

Понатаму, бидејќи $a + b + c > 0$, од последното равенство следува $b - a = 0$, односно $a = b$. Сега, ако во равенството

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a}$$

ставиме $a = b$, добиваме

$$\frac{2b}{b+c} = \frac{b+c}{c+b} = 1,$$

од каде следува $2b = b + c$, т.е. $b = c$. Конечно, $a = b = c$.

Задача 3. Да се докаже равенството:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}. \quad (1)$$

Решение. Прв начин. Равенството (1) е еквивалентно со равенството

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 = \sqrt[3]{2} - 1. \quad (2)$$

Ако прво се искористи идентитетот

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

а потоа идентитетот

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

добиваме

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 &= \left[\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right]^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3 - 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^3 + \\ &\quad + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot \left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2\right) + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right) + \left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 \\ &= \frac{1}{9} - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{9^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2^2}{9^3}} - \frac{2}{9} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9^3}} - 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{9^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{9^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{9^3}} - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{32}{9^3}} + \frac{4}{9} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{3}{9} \sqrt[3]{2} + \frac{3}{9} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{9} \sqrt[3]{4} - \frac{12}{9} + \frac{6}{9} \sqrt[3]{2} + \frac{6}{9} \sqrt[3]{2} - \frac{6}{9} \sqrt[3]{4} \\ &= -\frac{9}{9} + \frac{9}{9} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} - 1. \end{aligned}$$

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3 &= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^3 \\ &= \frac{(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3}{9} \\ &= \frac{[(1 - \sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{4}]^3}{9} = \dots = \sqrt[3]{2} - 1. \end{aligned}$$

Трет начин. Нека е $x = \sqrt[3]{2}$. Тогаш равенството (1) последователно е еквивалентно со равенствата

$$\sqrt[3]{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{x}{\sqrt[3]{9}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{9}},$$

$$9x-9 = [(1-x) + x^2]^3.$$

Понатаму, $x = \sqrt[3]{2}$, $x^3 = 2$, $x^6 = 4$, при што лесно се проверува дека е исполнето последното равенство. Со тоа е докажано равенството (1).

Четврт начин. Ако ги искористиме формулите

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad (3)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad (4)$$

тогаш десната страна на равенството (1) ја трансформираме во:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} &= \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} + 1} \stackrel{(3)}{=} \frac{(\sqrt[3]{2})^3 + 1^3}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{3}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} + 1)} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \\ &= \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}(\sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[3]{\frac{3}{(\sqrt[3]{2} + 1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3}{3(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1}} \\ &\stackrel{(4)}{=} \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2^3} - 1^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}. \end{aligned}$$

Забелешка 1. Слично се докажува дека се точни и следните равенства:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{2}{9}} - \sqrt[3]{\frac{4}{9}} + \sqrt[3]{\frac{8}{9}} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{16} - 2}, \\ \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{8}{9}} + \sqrt[3]{\frac{16}{9}} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{128} - 4}. \end{aligned}$$

Петти начин. Нека е $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$ и $y = \sqrt[3]{2}$. Тогаш $y^3 = 2$ и $x = \sqrt[3]{y - 1}$. Сега имаме

$$y^3 = 2 \Leftrightarrow 1 = y^3 - 1 \Leftrightarrow 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1), \quad (5)$$

па од $y^3 + 1 = 3$ добиваме

$$y^2 + y + 1 = \frac{1}{3}(3y^2 + 3y + 3) = \frac{1}{3}(3y^2 + 3y + y^3 + 1) = \frac{1}{3}(y + 1)^3. \quad (6)$$

Сега од (5) и (6) добиваме:

$$x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2 + y + 1} = \frac{3}{(y + 1)^3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y + 1}. \quad (7)$$

Исто така:

$$3 = y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1),$$

а оттука

$$\frac{1}{y + 1} = \frac{y^2 - y + 1}{3}. \quad (8)$$

Конечно од (7) и (8) следува:

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}(y^2 - y + 1) = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}((\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1) = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3}),$$

односно

$$x = \sqrt[3]{\frac{12}{27}} - \sqrt[3]{\frac{6}{27}} + \sqrt[3]{\frac{3}{27}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}},$$

т.е.

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}},$$

а ова е равенството (1).

Разгледувата задача го има следново обопштување.

Задача 3'. Докажи дека

$$\sqrt[3]{\frac{2^{n-1}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2^n}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2^{n+1}}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}^{3n-2} - 2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Решение. Равенството (9) ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n=1$ тврдењето е точно (види ги претходните решенија).

Нека тврдењето е точно за некое $n = k \geq 1$. Тогаш за $n = k+1$ добиваме

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}^{3k-2} - 2^{k-1}} &= \sqrt[3]{\frac{2^{k-1}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2^k}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2^{k+1}}{9}} \quad / \cdot \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2}^{3k-2} - 2 \cdot 2^{k-1}} &= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2^{k-1}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2^k}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2^{k+1}}{9}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}^{3k+1} - 2^k} = \sqrt[3]{\frac{2^k}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2^{k+1}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2^{k+2}}{9}},$$

т.е. равенството важи и за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Ако x природен број и $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4}$, пресметај ги $x + \frac{1}{x}$, $x - \frac{1}{x}$ и x .

Решение. Прв начин. Имаме:

$$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4} + 2 = (\frac{5}{2})^2.$$

Бидејќи x е позитивен број, од последното равенство следува

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}. \quad (1)$$

Слично, бидејќи x е природен број, од

$$(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4} - 2 = (\frac{3}{2})^2,$$

следува

$$x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Конечно, ако ги собереме (1) и (2) добиваме $2x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$, односно $x = 2$.

Втор начин. Равенството $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4}$ последователно е еквивалентно со равенствата

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0,$$

$$4x^4 - x^2 - 16x^2 + 4 = 0,$$

$$x^2(4x^2 - 1) - 4(4x^2 - 1) = 0,$$

$$(x^2 - 4)(4x^2 - 1) = 0,$$

$$(x - 2)(x + 2)(2x - 1)(2x + 1) = 0.$$

Производот на броеви е еднаков на нула, ако некој од собирците е еднаков на нула, па од последното равенство следува

$$x - 2 = 0, x + 2 = 0, 2x - 1 = 0 \text{ или } 2x + 1 = 0.$$

Но, x природен број, па затоа единствено решение е $x = 2$. Оттука следува

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ и } x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Трет начин. Бидејќи x природен број, добиваме $\text{NZD}(x^4 + 1, x^2) = 1$, што значи дека дробката $\frac{x^4 + 1}{x^2}$ е нескратлива. Сега, даденото равенство го запишуваме во видот $\frac{x^4 + 1}{x^2} = \frac{17}{4}$ и како левата страна е нескратлива дробка, од последното равенство следува

$$x^4 + 1 = 17 \text{ и } x^2 = 4. \quad (1)$$

Но, x природен број, па од равенствата (1) следува $x = 2$. Конечно,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ и } x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Четврт начин. Бидејќи x природен број, важи $x^2 \geq 1$. Според тоа, $0 < \frac{1}{x^2} \leq 1$, односно $-1 \leq -\frac{1}{x^2} < 0$. Според тоа,

$$\frac{17}{4} - 1 \leq x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} < \frac{17}{4},$$

односно $\frac{13}{4} \leq x^2 < \frac{17}{4}$. Но, x природен број, па затоа од последните неравенства следува $3 \leq x^2 \leq 4$, од каде добиваме $x = 2$. Конечно,

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ и } x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Задача 5. Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq -1$, $bd \neq 0$, определи ја вредноста на изразот:

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d}.$$

Решение. Прв начин. Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq -1$, тогаш постои $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ таков што $a = kc$, $b = kd$. Затоа

$$\begin{aligned} \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} &= \frac{c(1+k)d(1+k)}{c(1+k)+d(1+k)} - \frac{kckd}{k(c+d)} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{cd(1+k)}{c+d} - \frac{kcd}{c+d} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{cd(1+k-k-1)}{cd} = 0. \end{aligned}$$

Втор начин. Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq -1$, следува тогаш постои $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ таков што $a = kb$, $c = kd$. Затоа

$$\begin{aligned} \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} &= \frac{(kb+kd)(b+d)}{kb+b+kd+d} - \frac{kb^2}{kb+b} - \frac{kd^2}{kd+d} \\ &= \frac{k(b+d)^2}{(k+1)(b+d)} - \frac{kb^2}{b(k+1)} - \frac{kd^2}{d(k+1)} \\ &= \frac{k(b+d)}{k+1} - \frac{kb}{k+1} - \frac{kd}{k+1} \\ &= \frac{kb+kd-kb-kd}{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Трет начин. Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq -1$, тогаш $ad = bc$. Да ги помножиме броителот и именителот на првите две дропки во дадениот израз со d , а потоа го искористиме равенството $ad = bc$, добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} &= \frac{(ad+cd)(b+d)}{ad+bd+cd+d^2} - \frac{abd}{ad+bd} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{(bc+cd)(b+d)}{bc+bd+cd+d^2} - \frac{bbc}{bc+bd} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{c(b+c)(b+d)}{b(c+d)+d(c+d)} - \frac{bc}{c+d} - \frac{cd}{c+d} \\ &= \frac{c(b+c)(b+d)}{(c+d)(b+d)} - \frac{bc+cd}{c+d} \\ &= \frac{c(b+d)}{c+d} - \frac{c(b+d)}{c+d} = 0. \end{aligned}$$

Задача 6. Нека a, b, c, d се ненулти реални броеви такви што

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0 \text{ и } a + b + c + d + abcd = 0.$$

Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Решение. Прв начин. Имаме

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{cd - ab}{abcd} \cdot \frac{d + c}{cd} = \frac{cd^2 + c^2d - abd - abc}{abc^2d^2}. \quad (1)$$

Од условот

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0,$$

добиваме $bcd + acd + abd + abc = 0$, односно

$$bcd + acd = -abd - abc, \quad (2)$$

а од условот

$$a + b + c + d + abcd = 0,$$

добиваме

$$a + b + c + d = -abcd. \quad (3)$$

Сега, од (1), (2) и (3) следува

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) &= \frac{cd^2 + c^2d - abd - abc}{abc^2d^2} \\ &= \frac{cd^2 + c^2d + bcd + acd}{abc^2d^2} \\ &= \frac{cd(a + b + c + d)}{abc^2d^2} \\ &= \frac{a + b + c + d}{abcd} = \frac{-abcd}{abcd} = -1. \end{aligned}$$

Втор начин. Ако равенството $a + b + c + d + abcd = 0$ го поделиме со $abcd \neq 0$ последователно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc} + 1 &= 0, \\ \frac{1}{cd}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right) &= -1. \end{aligned} \quad (4)$$

Понатаму, од условот $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ следува

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c} - \frac{1}{d},$$

па ако замениме во равенството (4) последователно добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{cd}\left(-\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right) &= -1, \\ \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right) &= -1, \end{aligned}$$

што и требаше да се определи.

Задача 7. Ако $x + y = 6$ и $x^3 + y^3 = 90$, пресметај ја вредноста на изразот $x^2 + y^2$.

Решение. Прв начин. Имаме:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y),$$

$$6^3 = 90 + 3xy \cdot 6$$

$$18xy = 126$$

$$xy = 7.$$

Според тоа,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \cdot 7 = 22.$$

Втор начин. Имаме:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

$$90 = 6(x^2 - xy + y^2),$$

$$15 = x^2 - xy + y^2,$$

$$15 = (x + y)^2 - 3xy,$$

$$15 = 6^2 - 3xy,$$

$$3xy = 21,$$

$$xy = 7.$$

Според тоа,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \cdot 7 = 22.$$

Трет начин. Ќе го реџиме системот равенки: :

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^3 + y^3 = 90. \end{cases}$$

Имаме

$$\begin{cases} y = 6 - x, \\ x^3 + (6 - x)^3 = 90, \end{cases}$$

од каде со средувањето на втората равенка последователно добиваме:

$$x^3 + 216 - 108x + 18x^2 - x^3 = 90,$$

$$18x^2 - 108x + 126 = 0,$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0,$$

$$(x-3)^2 = 2,$$

$$x-3 = \pm\sqrt{2}.$$

Според тоа,

$$x_1 = 3 + \sqrt{2} \text{ и тогаш } y_1 = 6 - x_1 = 3 - \sqrt{2},$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{2} \text{ и тогаш } y_2 = 6 - x_2 = 3 + \sqrt{2}.$$

Во двата случаја бараниот збир на квадрати е:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (3 + \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{2} + 2 + 9 - 6\sqrt{2} + 2 \\ &= 22. \end{aligned}$$

Задача 8. Ако е $2x - y = 4$ и $x + \frac{y}{2} = 1$, определи ја вредноста на изразот $4x^2 + y^2$.

Решение. Прв начин. Да го решиме дадениот систем равенки, на пример со методот на спротивни коефициенти. Имаме:

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + \frac{y}{2} = 1 \end{cases} & \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} & \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} & \begin{cases} 3 - y = 4 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} & \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}$$

Со замена на добиените вредности наоѓаме:

$$4x^2 + y^2 = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2 = 4 \cdot \frac{9}{4} + 1 = 9 + 1 = 10$$

Втор начин. Второто равенство го множиме со 2, а потоа двете ги квадрираме и добиваме:

$$(2x - y)^2 = 4^2 \text{ и } (2x + y)^2 = 2^2$$

односно

$$4x^2 - 8xy + y^2 = 16 \text{ и } 4x^2 + 8xy + y^2 = 4.$$

Последните равенства ги собираме и добиениеното равенство го делиме со 2, по што последователно добиваме:

$$\frac{4x^2 - 8xy + y^2 + 4x^2 + 8xy + y^2}{2} = \frac{16 + 4}{2},$$

$$4x^2 + y^2 = 10.$$

Задача 9. За реалните броеви $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ важи

$$20^3 x_1 + 21^3 x_2 + \dots + 49^3 x_{30} = 13,$$

$$21^3 x_1 + 22^3 x_2 + \dots + 50^3 x_{30} = 1,$$

$$22^3 x_1 + 23^3 x_2 + \dots + 51^3 x_{30} = 19.$$

Пресметај го збирот

$$21x_1 + 22x_2 + \dots + 50x_{30}.$$

Решение. Прв начин. За секои реални броеви a и b важи:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

па ако $a - b = 1$, тогаш важи

$$a^3 - b^3 = a^2 + ab + b^2.$$

Затоа со одземање на првата од втората равенка добиваме

$$(21^2 + 21 \cdot 20 + 20^2)x_1 + (22^2 + 22 \cdot 21 + 21^2)x_2 + \dots + (50^2 + 50 \cdot 49 + 49^2)x_{30} = -12$$

Слично, со одземање на втората од третата равенка добиваме

$$(22^2 + 22 \cdot 21 + 21^2)x_1 + (23^2 + 23 \cdot 22 + 22^2)x_2 + \dots + (51^2 + 51 \cdot 50 + 50^2)x_{30} = 18$$

Сега, ако искористиме дека за секој реален број a важи

$$(a+1)^2 + (a+1)a + a^2 - (a^2 + a(a-1) + (a-1)^2) = 6a,$$

со одземање на горните две равенки добиваме

$$6(21x_1 + 22x_2 + \dots + 50x_{30}) = 30,$$

од каде наоѓаме

$$21x_1 + 22x_2 + \dots + 50x_{30} = 5.$$

Втор начин. За секои реални броеви a и b важи:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Ако искористиме дека за броевите $a = c - 1$ и $b = c + 1$ (за некој реален број c), добиваме

$$\begin{aligned} (c+1)^3 + (c-1)^3 &= 2c((c-1)^2 - (c-1)(c+1) + (c+1)^2) \\ &= 2c(c^2 - 2c + 1 - c^2 + 1 + c^2 + 2c + 1) \\ &= 2c(c^2 + 3) \\ &= 2c^3 + 6c. \end{aligned}$$

Ако ги собереме првата и третата равенка добиваме

$$(2 \cdot 21^3 + 6 \cdot 21)x_1 + (2 \cdot 22^3 + 6 \cdot 22)x_2 + \dots + (2 \cdot 50^3 + 6 \cdot 50)x_{30} = 32.$$

Ако втората равенка ја помножиме со 2 и ја одземеме од претходно добиената равенка, наоѓаме

$$6 \cdot (21x_1 + 22x_2 + \dots + 50)x_{30} = 30 ,$$

од каде следува

$$21x_1 + 22x_2 + \dots + 50x_{30} = 5 .$$

Задача 10. За кои реални броеви x вредноста на изразот

$$\frac{(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})-3}{(x+\frac{1}{x})^2-(x^2+\frac{1}{x^2})+1}$$

е поголема од 1.

Решение. Прв начин. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})-3}{(x+\frac{1}{x})^2-(x^2+\frac{1}{x^2})+1} &= \frac{x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}-x^3-\frac{1}{x^3}-3}{x^2+2+\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{x^2}+1} \\ &= \frac{3x+\frac{3}{x}-3}{3} = x + \frac{1}{x} - 1.\end{aligned}$$

Според тоа, треба да ја решиме неравенката $x + \frac{1}{x} - 1 > 1$, т.е. неравенката

$x + \frac{1}{x} > 2$. Од последната неравенка добиваме $\frac{x^2-2x+1}{x} > 0$, т.е. $\frac{(x-1)^2}{x} > 0$.

Бидејќи броителот е секогаш поголем или еднаков на 0, оваа дробка е позитивна ако именителот е поголем од 0, а броителот е раличен од 0. Според тоа, решение на дадената неравенка е множеството $(0, \infty) \setminus \{1\}$.

Втор начин. Ја воведуваме замената $x + \frac{1}{x} = t$. Тогаш

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1}{x^3} &= (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = t^3 - 3t, \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = t^2 - 2.\end{aligned}$$

Затоа,

$$\frac{(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})-3}{(x+\frac{1}{x})^2-(x^2+\frac{1}{x^2})+1} = \frac{t^3-(t^3-3t)-3}{t^2-(t^2-2)+1} = \frac{3t-3}{3} = t-1 = x + \frac{1}{x} - 1.$$

Понатаму, задачата се решава исто како во рвиот начин на решавање.

Задача 11. Нека a, b, c се различни позитивни реални броеви такви што

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \neq 0.$$

Докажи дека барем еден од броевите

$$\frac{a+b}{a+b-c}, \quad \frac{b+c}{b+c-a}, \quad \frac{c+a}{c+a-b}$$

припаѓа на интервалот $(1, 2)$ и дека барем еден од овие броеви на припаѓа на овој интервал.

Решение. Прв начин. Да забележиме дека всушност треба да докажеме дека барем еден од броевите

$$\frac{a+b-c}{a+b} = 1 - \frac{c}{a+b}, \quad \frac{b+c-a}{b+c} = 1 - \frac{a}{b+c}, \quad \frac{c+a-b}{c+a} = 1 - \frac{b}{c+a}$$

припаѓа на интервалот $(\frac{1}{2}, 1)$ и дека барем еден од овие броеви не припаѓа на овој интервал. Последното значи дека барем еден од броевите

$$\frac{c}{a+b}, \quad \frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}$$

припаѓа на интервалот $(0, \frac{1}{2})$ и дека барем еден од овие броеви не припаѓа на овој интервал.

Бидејќи a, b, c се различни позитивни реални броеви, добиваме дека $a > 0, b > 0, c > 0$. Нека претпоставиме дека сите три броја се поголеми или еднакви на $\frac{1}{2}$. Тоа значи дека

$$2c \geq a + b, \quad 2b \geq c + a, \quad 2a \geq b + c.$$

Последните равенства ги собираме и добиваме

$$2(a + b + c) \geq 2(a + b + c),$$

а тоа е можно само ако во сите три неравенства важи знак за равенство, односно ако

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2}.$$

Од последните равенства следува $a = b = c$, што противречи на условот на задачата. Значи, барем една од наведените дробки е помала од $\frac{1}{2}$. Слично, претпоставката дека сите дробки се помали од $\frac{1}{2}$ доведува до противречност, бидејќи тогаш мора да важи

$$2(a + b + c) < 2(a + b + c).$$

Тоа значи дека барем една од наведените дробки мора да е поголема или еднаква на $\frac{1}{2}$.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање заклучуваме дека всушност треба да докажеме дека барем еден од броевите

$$\frac{c}{a+b}, \quad \frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}$$

припаѓа на интервалот $(0, \frac{1}{2})$ и дека барем еден од овие броеви не припаѓа на овој интервал.

Бидејќи a, b, c се различни позитивни реални броеви, добиваме дека $a > 0, b > 0, c > 0$. Броевите a, b, c се меѓусебно различни, а дробките кои ги разгледуваме се симетрични по променливите a, b, c , па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a < b < c$. Тогаш

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2},$$

а исто така важи и

$$\frac{c}{a+b} > \frac{c}{c+c} = \frac{1}{2}.$$

Задача 12. Реши ја неравенката

$$\left(1 - \frac{4x^3 - x}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0.$$

Решение. Прв начин. Последователно ги добиваме следниве еквивалентни неравенки:

$$\left(1 - \frac{4x^3 - x}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0,$$

$$\left(1 + \frac{x(4x^2 - 1)}{x(2x - 1)}\right)^{-3} > 0,$$

$$\left(1 + \frac{x(2x - 1)(2x + 1)}{x(2x - 1)}\right)^{-3} > 0,$$

а оттука $x(2x - 1) \neq 0$, односно $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$. Понатаму, имаме

$$(2x + 2)^{-3} > 0$$

$$\frac{1}{(2x + 2)^3} > 0$$

$$2x + 2 > 0,$$

$$x > -1.$$

Конечно, решение на неравенката е $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

Втор начин. Последователно ги добиваме следниве еквивалентни неравенки:

$$\left(1 - \frac{4x^3 - x}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0,$$

$$\left(\frac{x - 2x^2 - 4x^3 + x}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0,$$

$$\left(\frac{2x - 2x^2 - 4x^3}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0,$$

$$\left(\frac{2x(1 - x - 2x^2)}{x(1 - 2x)}\right)^{-3} > 0,$$

$$\left(\frac{2x(1 + x - 2x(1 + x))}{x(1 - 2x)}\right)^{-3} > 0,$$

$$\left(\frac{2x(1 + x)(1 - 2x)}{x(1 - 2x)}\right)^{-3} > 0.$$

Сега, како и во првиот начин на решавање по скратувањето со $x(1 - 2x)$, при услов $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ добиваме $(2x + 2)^{-3} > 0$, односно $2x + 2 > 0$, од каде наоѓаме $x > -1$.

Конечно, решение на неравенката е $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

Задача 13. Ако $f(x-3) = 2x - 4$, определи ја функцијата $f(x)$.

Решение. Прв начин. Нека $f(x) = kx + n$, $k \neq 0$. Тогаш

$$k(x-3) + n = 2x - 4,$$

$$kx - 3k + n = 2x - 4,$$

$$(k-2)x - 3k + n + 4 = 0.$$

Според тоа,

$$k-2=0, \quad -3k+n+4=0,$$

$$k=2, \quad -3 \cdot 2 + n + 4 = 0,$$

$$k=2, \quad n=2.$$

Конечно, бараната функција е $f(x) = 2x + 2$.

Втор начин. Воведуваме смена $x-3=t$, од каде следува $x=t+3$. Сега, со замена во $f(x-3) = 2x - 4$, добиваме $f(t) = 2(t+3) - 4$, односно $f(t) = 2t + 2$. Според тоа, бараната функција е $f(x) = 2x + 2$.

Трет начин. Имаме:

$$f(x-3) = 2x - 4,$$

$$f(x-3) = 2(x-3) + 2,$$

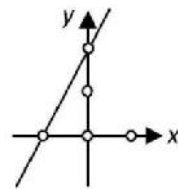
од каде следува $f(x) = 2x + 2$.

Четврт начин. За две произволни вредности на променливата x , на пример за $x=3$ и $x=4$, добиваме $f(0)=2$ и $f(1)=4$. Сега, со замена во $f(x) = kx + n$, го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} n = 2, \\ k + n = 4. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $k=2, n=2$, па затоа бараната функција е $f(x) = 2x + 2$.

Петти начин. За $x=3$ имаме $f(0)=2$, а за $x=2$ добиваме $f(-1)=0$. Според тоа, пресечните точки на графикот на функцијата $f(x)$ со координатните оски се точките $(-1,0)$ и $(0,2)$. Значи, отсекоците на координатните оски се $a=-1$ и $b=2$. Значи, графикот на линеарната



функција, т.е. равенката на правата е $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, односно $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$. Конечно, бараната функција е $y = 2x + 2$.

ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Ана и Ване стојат заедно покрај железничка пруга и чекаат да помине воз кој се движи со постојана брзина. Во моментот кога прениот крај на возот доаѓа до нив, Ана тргнува со постојана брзина во насока на движењето на возот, а Ване со иста брзина во спротивна насока. Секој од нив застанува во моментоткога задниот дел на возот ќе помине покрај него. Ана вкупно поминала 45 метри, а Ване 30 метри. Колку е долг возот?

Решение. Прв начин. Ана поминала $45 - 30 = 15$ метри повеќе од Ване, а додека Ана ги поминала тие 15 метри возот поминал $45 + 30 = 75$ метри. Според тоа, брзината на возот е $\frac{75}{15} = 5$ пати поголема од брзината на движењето на секое од децата. Да забележиме дека додека Ване изодел 30 метри, возот за тоа време поминал $30 \cdot 5 = 150$ метри. Бидејќи Ване почнал да оди од моментот кога предниот крај на вагонот поминал покрај него, а застанал во моментот кога задниот крај на возот поминал покрај него, а одела во спротивна насока од насоката на движење на возот, вкупната должина на возот е $150 + 30 = 180$ метри.

Втор начин. Во моментот кога задниот дел на возот ќе помине покрај Ване, секое дете поминало по 30 метри, што значи дека двете деца заедно поминале 60 метри. Од друга страна, бидејќи двете деца почнале да одат во ист момент, во моментот кога задниот дел на возот ќе помине покрај Ване, пред Ана поминале $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ од возот. Според тоа, меѓу нив е $\frac{1}{3}$ од возот, а должината на оваа третина е 60 метри. Значи, возот е долг $3 \cdot 60 = 180$ метри.

Трет начин. Со l да ја означиме должината на возот, со v неговата брзина и со h брзината на одењето на децата. Ана поминала 45 метри за $\frac{45}{h}$ време. Од друга страна, возот за тоа време поминал $l + 45$ метри со брзина v , па затоа важи

$$\frac{l+45}{v} = \frac{45}{h}, \text{ односно } \frac{v}{h} = \frac{l+45}{45}.$$

Слично, Ване поминал 30 метри за време $\frac{30}{h}$, а возот за тоа време поминал $l - 30$ метри, па затоа важи

$$\frac{l-30}{v} = \frac{30}{h}, \text{ односно } \frac{v}{h} = \frac{l-30}{30}.$$

Според тоа, $\frac{l+45}{45} = \frac{l-30}{30}$, од каде добиваме $l = 180$ метри.

Задача 2. Филип одлучил да ја обои оградата заедно со Пабло и Андреј. Процениле дека кога секој сам би работел на Пабло му се потребни 3 часа повеќе отколку на Филип, а на Андреј му се потребни 2 часа помалку отколку на Филип. Работејќи сите тројца заедно, секој со своето темпо, оградата ја обоиле за 4 часа, Колку часови му се потребни на секој од нив самостојно да ја обои оградата?

Решение. Прв начин. Нека на Филип му се потребни x часа за самостојно да ја обои оградата. Тогаш на Пабло му се потребни $x + 3$, а на Андреј му се потребни $x - 2$ часа за самостојно да ја обои оградата. Бидејќи на Андреј му се потребни $x - 2$ часа, заклучуваме дека x мора да е поголем од 2. Сега, за еден час Филип ќе обои $\frac{1}{x}$ делови од оградата, Пабло ќе обои $\frac{1}{x+3}$ делови од оградата, Андреј ќе обои $\frac{1}{x-2}$ делови од оградата, а сите заедно ќе обојат $\frac{1}{4}$ од оградата. Затоа

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{4}.$$

Последната равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{x+3},$$

$$\frac{2x-2}{x(x-2)} = \frac{x-1}{4(x+3)},$$

$$\frac{2(x-1)}{x(x-2)} = \frac{x-1}{4(x+3)}.$$

Бидејќи $x > 2$, добиваме дека $x - 1 \neq 0$, па ако последната равенка ја поделиме со $x - 1$ ја добиваме равенката

$$\frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{4(x+3)}.$$

Сега, последователно добиваме:

$$8(x+3) = x(x-2),$$

$$8x + 24 = x^2 - 2x,$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0,$$

$$x^2 - 12x + 2x - 24 = 0,$$

$$x(x-12) + 2(x-12) = 0,$$

$$(x-12)(x+2) = 0.$$

Производ на два броја е еднаков на нула ако барем еден од множителите е еднаков на нула, па од последната равенка добиваме $x - 12 = 0$ или $x + 2 = 0$, односно $x = 12$ или $x = -2$. Но, $x > 2$, па затоа единствено решение е $x = 12$.

Конечно, на Филип му се потребни 12 часови, на Пабло 15 часови и на Андреј 10 часови за самостојно да ја обои оградата.

Втор начин. Како и при првиот начин на решавање на добиваме равенката

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{4},$$

од каде следува

$$4(x+3)(x-2) + 4x(x-2) + 4x(x+3) = x(x+3)(x-2)$$

$$4(x^2 + x - 6) + 4x^2 - 8x + 4x^2 + 12x = x(x^2 + x - 6)$$

$$x^3 - 11x^2 - 14x + 24 = 0,$$

$$x^3 - x^2 - 10x^2 + 10x - 24x + 24 = 0,$$

$$x^2(x-1) - 10x(x-1) - 24(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x^2 - 10x - 24) = 0$$

$$(x-1)(x+2)(x-12) = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 12.$$

Но, според условот на задачата $x > 2$, па затоа единствено решение е $x = 12$.

Конечно, на Филип му се потребни 12 часови, на Пабло 15 часови и на Андреј 10 часови за самостојно да ја обои оградата.

Задача 3. Околу тркалезна маса се наоѓаат десет столици редоследно означени со броевите од 1 до 10 (при што столиците 1 и 10 се соседни) и на секоја столица седи по еден витез. Секој витез на почетокот има парен број златници. Истовремено секој витез ги поклонил половината од своите златници на својот лев сосед и половината од своите златници на својот десен сосед. После тоа витезот на столицата 1 има 22 златници, а секој следен витез има по два златника повеќе се до витезот 10 кој има 40 златници.

Колку златници на почетокот имал витезот кој на крајот имал 36 златници?

Решение. Прв начин. Витезот кој на крајот имал 36 златници седи на столицата 8. Нека $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{10}$ се броевите на златниците кои на почетокот ги имаат витезите кои седат на столиците 1, 2 ..., 10. Треба да го определима $2x_8$. Имаме:

$$x_{10} + x_1 = 22,$$

$$x_1 + x_2 = 24,$$

$$x_2 + x_3 = 26,$$

$$x_3 + x_4 = 28,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_8 + x_{10} = 38,$$

$$x_9 + x_1 = 40.$$

Според тоа,

$$x_{10} = 38 - x_8,$$

$$x_2 = 22 - x_{10} = 22 - (38 - x_8) = x_8 - 16,$$

$$x_4 = 26 - x_2 = 26 - (x_8 - 16) = 42 - x_8,$$

$$x_6 = 30 - x_4 = 30 - (42 - x_8) = x_8 - 12,$$

$$x_8 = 34 - x_6 = 34 - (x_8 - 12) = 46 - x_8.$$

Од последната равенка наоѓаме

$$2x_8 = 46,$$

што значи дека витезот кој на крајот имал 36 на почетокот имал 46 златници.

Втор начин. Витезот кој на крајот имал 36 златници седи на столицата 8. Нека $2x$ е бројот на златниците кои тој витез ги имал на почетокот.

Деветтиот витез на крајот имал 38 златници, што е збирот на половините од броевите златници на осмиот и десеттиот витез на почетокот. Според тоа, десеттиот витез на почетокот имал $2(38 - x)$ златници.

Првиот витез на крајот имал 22 златника што е збир на половините од броевите златници на вториот и десеттиот витез на почетокот, што значи дека вториот витез на почетокот имал $2(22 - (38 - x))$ златници.

Ако продолжиме да заклучуваме на овој начин, добиваме дека на почетокот осмиот витез имал

$$2(34 - (30 - (26 - (22 - (38 - x))))))$$

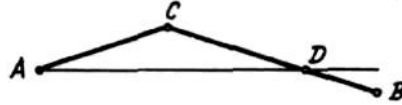
златници. Но, осмиот витез на почетокот имал $2x$ златници, па затоа

$$2x = 2(34 - (30 - (26 - (22 - (38 - x))))),$$

од каде добиваме $2x = 2(46 - 2x)$, т.е. $2x = 46$. Значи, витезот кој на крајот имал 36 златници на почетокот имал 46 златници.

Задача 4. Возејќи меѓу местата A и B автобус минува преку едно брдо. На узбрдицата (кога го искачува брдото) автобусот се движи со брзина од 25 km/h , а на низбрдицата (кога се симнува од брдото) автобусот се движи со брзина од 50 km/h . Патот од A до B автобусот го минува за $3,5$ часа, а патот од B до A го минува за 4 часа. Определи ја должината на патот меѓу местата A и B . Колку е оддалечена од местото A највисоката точка на патот?

Решение. На цртежот десно е дадена шемата на надолжниот пресек на профилот на патот на автобусот.



Прв начин. Нека $\overline{AC} = x \text{ km}$ и $\overline{CB} = y \text{ km}$. Тогаш времето за кое автобусот го минува патот од кога оди од A во B е еднакво на $\frac{x}{25} + \frac{y}{50}$, па затоа $\frac{x}{25} + \frac{y}{50} = 3,5$. Слично, времето за кое автобусот го минува патот од B во A е еднакво на $\frac{y}{25} + \frac{x}{50}$, па затоа $\frac{y}{25} + \frac{x}{50} = 4$. Така го добивме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} \frac{x}{25} + \frac{y}{50} = 3,5 \\ \frac{y}{25} + \frac{x}{50} = 4. \end{cases}$$

Решение на последниот систем е $x = 50 \text{ km}$, $y = 75 \text{ km}$. Според тоа, патот од A до B е долг $50 + 75 = 125 \text{ km}$, а растојанието од A до највисоката точка од патот е еднакво на 50 km .

Втор начин. Нека D е точка од отсечката CB таква што $\overline{CD} = \overline{AC}$. Тогаш патот $\overline{AC} + \overline{CD}$, кога оди од A во B , автобусот го поминува за исто време како и патот $\overline{DC} + \overline{CA}$ кога оди од B во A . Разликата од $4 - 3,5 = 0,5$ часа е затоа што на патот од A во B делот $\overline{DB}$ се минува со брзина од 50 km/h , а на патот од B во A истиот тој пат се минува со брзина од 25 km/h . За да се помине овој пат во првиот случај се потребни $\frac{\overline{DB}}{50}$ часови, а во вториот случај се потребни $\frac{\overline{DB}}{25}$ часови. Според тоа, имаме $\frac{\overline{DB}}{25} - \frac{\overline{DB}}{50} = 0,5$, од каде добиваме $\overline{DB} = 25 \text{ km}$.

Кога го искачува брдото автобусот за 1 час минува 25 km , а кога го симнува тој за 1 час минува 50 km , што значи дека кога го зимнува брдото

автобусот за $0,5$ часа минува 25 km . Според тоа, при минување на растојанието $\overline{AC} + \overline{CD}$ автобусот за $1,5$ часа просечно минува 50 km . Тоа значи, дека просечната брзина на патот $\overline{AC} + \overline{CD}$ е еднаква на $50:1,5 = \frac{100}{3}\text{ km/h}$. Но, овој пат автобусот го минува за 3 часа, па затоа $\overline{AC} + \overline{CD} = \frac{100}{3} \cdot 3 = 100\text{ km}$. Значи,

$$\overline{CD} = \overline{AC} = 100:2 = 50\text{ km}, \quad \overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} = 50 + 25 = 75\text{ km}$$

и целиот пат е долг $50+75 = 125\text{ km}$.

Трет начин. Кога оди од A во B автобусот го минува делот од патот ACD за истото време за кое при враќањето го минува патот DCA . Значи, разликата од $4 - 3,5 = 0,5$ часа се јавува на делот од патот DB (односно BD), кој автобусот при одење го минува со брзина од 50 km/h , а при враќање со брзина од 25 km/h , т.е. со двапати помала брзина. Според тоа, ако при одење автобусот патот BD го минува за време t , тогаш при враќање истиот пат го минува за време $2t$, па затоа $2t - t = 0,5$, т.е. $t = 0,5\text{ h}$. Тоа значи дека $\overline{DB} = 50 \cdot 0,5 = 25\text{ km}$. Останатиот дел од патот, т.е. растојанието од A до D автобусот го минува за $3,5 - 0,5 = 3\text{ h}$. Но, $\overline{AC} = \overline{CD}$, па затоа ако автобусот патот AC го минува за $2t$ часа, тогаш патот CD го минува за t часа. Оттука, $2t + t = 3$, односно $t = 1\text{ h}$. Според тоа, $\overline{AC} = 2 \cdot 25 = 50\text{ km}$ и $\overline{CD} = 1 \cdot 50\text{ km}$. Конечно, должината на патот од A до B е еднаква на

$$\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = 50 + 50 + 25 = 125\text{ km}.$$

Четврт начин. Автобусот во двете насоки патува $3,5 + 4 = 7,5\text{ h}$. Притоа должината на целиот пат кој автобусот го минува узбрдо е еднаква на должина на целиот пат кој автобусот бо минува низбрдо. Но, од $50:25 = 2$ следува дека автобусот узбрдо се движи два пати поспоро. Затоа на сите узбрдици автобусот минува двапати подолго време отколку на сите низбрдици. Значи, ако на низбрдиците автобусот минува t часови, тој на узбрдиците минува $2t$ часови. Според тоа, $t + 2t = 7,5$, па затоа $t = 2,5\text{ h}$. Сега, двократната должина на патот од A до B е еднаква на $50 \cdot 2,5 + 25 \cdot 5 = 250\text{ km}$, што значи дека должината на патот од A до B е еднаква на $250:2 = 125\text{ km}$.

Дополнителните $4 - 3,5 = 0,5\text{ h}$ кога автобусот оди од B во A (во споредба со движењето од A во B) се затоа што должината на узбрдицата

од B до A е поголема од дожината на узбрдицата од A до B и тоа за растојанието DB . Но, автобусот узбрдо го минува патот DB за $\frac{\overline{DB}}{25}$ часа, а истиот пат низбрдо го минува за $\frac{\overline{DB}}{50}$ часа. Затоа $\frac{\overline{DB}}{25} - \frac{\overline{DB}}{50} = 0,5$, од каде наоѓаме $\overline{DB} = 25 \text{ km}$. Конечно,

$$\overline{AC} = \overline{CD} = (125 - 25) : 2 = 50 \text{ km}.$$

Задача 5. Едно семејство има четири члена. Ако на Марија и ја удвостручат степендијата, тогаш приходот на семејството се зголемува за 7%. Ако на мајката и ја удвостручат платата, тогаш приходот на семејството се зголемува за 20%, а ако на таткото му ја удвостручат платата, тогаш приходот на семејството се зголемува за 30%. За колку проценти ќе се зголеми приходот на семејството ако на дедото му ја удвостручат пензијата?

Решение. Прв начин. Со s, m, t, d и P соодветно да ги означиме степендијата на Марија, платата на мајката, платата на таткото, пензијата на дедото и приходот на целото семејство. Имаме:

$$s + m + t + d = P. \quad (*)$$

Од условот на задачата следува

$$2s + m + t + d = 1,07P \quad (1)$$

$$s + 2m + t + d = 1,2P \quad (2)$$

$$s + m + 2t + d = 1,3P \quad (3)$$

Сега задачата се сведува на наоѓање на x за кој важи

$$s + m + t + 2d = xP. \quad (4)$$

Ако ги собереме равенките (1)-(4) и ја искористиме (*), добиваме

$$5(s + m + t + d) = (3,57 + x)P,$$

$$5P = (3,57 + x)P$$

$$3,57 + x = 5$$

$$x = 1,43.$$

Според тоа, ако се удвостручи пензијата на дедото, тогаш приходот на семејството ќе се зголеми за $(1,43 - 1) \cdot 100 = 43\%$.

Втор начин. Бидејќи со удвостручување на степендијата на Марија приходот на семејството се зголемува за 7%, заклучуваме дека степендијата на Марија е 7% од семејниот приход. На ист начин заклучуваме дека платата на мајката е 20% од семејниот приход, а платата на таткото е 30% од семејниот приход. Според тоа, пензијата на дедото изнесува $100 - (7 + 20 + 30) = 43\%$ од семејниот приход, па затоа ако истата се удвостручи, тогаш приходот на семејството ќе се зголеми за 43%.

Трет начин. Ако приходите на сите членови на семејството се удвостручат, тогаш приходот на семејството ќе се зголеми за 100%. Во овие 100% имаме 7% на Марија, 20% на мајката, 30% на таткото и

$$100 - (7 + 20 + 30) = 43\%$$

на дедото.

Четврт начин. Ќе ги користиме истите ознаки како во првиот начин на решавање. Имаме

$$s + m + t + d = P . \quad (*)$$

Бидејќи $s = 0,07P$, $m = 0,2P$, $t = 0,3P$ и $d = xP$, со замена во (*) добиваме

$$0,07P + 0,2P + 0,3P + xP = P ,$$

$$0,57 + x = 1$$

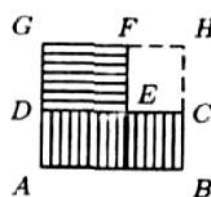
$$x = 0,43.$$

Според тоа, пензијата на дедото е 43% од приходот на семејството, па со нејзиното удвостручување семејниот приход ќе се зголеми за 43%.

Задача 6. Купувач купил 138 m црн и син штоф за сума од 540 рубљи. Колку метри купил од едниот, а колку од другиот штоф, ако метар син штоф чинел 5 рубљи, а метар црн штоф чинел 3 рубљи?

Решение. Прв начин. Нека претпоставиме дека целиот штоф кој гомкупл купувачот бил црн. Тогаш купувачот ќе плател $138 \cdot 3 = 414$ рубљи. Тоа е за $540 - 414 = 126$ рубљи помалку отколку што тој навистина платил. Разликата од 126 рубљи се добива за доплатата за синиот штоф. Бидејќи едно метро син штоф чини $5 - 3 = 2$ рубљи повеќе од едно метро црн штоф, заклучуваме дека купувачот купил $126 : 2 = 63\text{ m}$ син штоф. Според тоа, купувачот купил $138 - 63 = 75\text{ m}$ црн штоф.

Втор начин. Нека отсечката AB е цена на едно метро син штоф (5 рубљи), а отсечката BC е бројот на сите купени метра син штоф (цртеж десно). Тогаш плоштината на правоаголникот $ABCD$ е еднаква на сумата која е платена за целиот син штоф.



Понатаму, нека отсечката DE е цената на еден метар црн штоф (3 рубљи), а отсечката EF е бројт на сите купени метра црн штоф. Тогаш плоштината на правоаголникот $DEFG$ е еднаква на сумата која е платена за целиот црн штоф. Според тоа, за да ја решиме задачата треба да ги определиме должините на отсечките BC и EF .

Шрафираната фигура $ABCEFG$ можеме да ја дополниме со правоаголникот $ECHF$ до правоаголникот $ABHG$, чија плоштина можеме да ја пресметаме. Имено, очигледно

$$P_{ECHF} = P_{ABHG} - P_{ABCEFG} = 5 \cdot 138 - 540 = 150,$$

па затоа

$$\overline{EF} = 150 : 2 = 75\text{ m} \text{ и } \overline{BC} = \overline{AG} - \overline{EF} = 138 - 75 = 63\text{ m}.$$

Значи, купувачот купил 75 m црн штоф и 63 m син штоф.

Трет начин. Нека купувачот купил x метри син штоф. Тогаш тој купил $138 - x$ метри црн штоф. Сега, од условот на задачата следува равенката $5x + 3(138 - x) = 540$, чие решение е $x = 63$. Според тоа, купувачот купил 63 m син и $138 - 63 = 75\text{ m}$ црн штоф.

Забелешка. Задачата е дадена во новелата „Инструктор“ на славниот руски писател А. П. Чехов.

Задача 7. По долго патување Итар Пејо, Насрадин Оџа и Еро стигнале во една меана. Седнале на масата и порачале ќовтиња. Тие биле многу уморни, па заспале на масата. Меанџијата ги донесол ќевтињата во една чинија и ги ставил на масата. Прв се разбудил Итар Пејо, ги пребројал ќовтињата и изел третина од вкупниот број ќовтиња, по што заспал. Потоа се разбудил Насрадин Оџа, ги пребројал ќовтињата, изел третина од нив и повторно заспал. На крајот се разбудил Еро, ги пребројал ќовтињата и откако изел третина од нив во чинијата останале 8 ќовтиња. Колку ќовтиња донел меанџијата?

Решение. Прв начин. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Бидејќи кога ќе се разбудел секој јадел по третина од ќовтињата кои ги затекнал во чинијата, заклучуваме дека секој јадел половина од ќовтињата кои ги оставал во чинијата. Еро во чинијата оставил 8 ќовтиња, што значи дека тој изел $8:2=4$ ќовтиња. Значи, Насрадин Оџа во чинијата оставил $8+4=12$ ќовтиња, што значи дека тој изел $12:2=6$ ќовтиња. Според тоа, Итар Пејо во чинијата оставил $12+6=18$ ќовтиња, што значи дека тој изел $18:2=9$ ќовтиња. Конечно, тој затекнал $18+9=27$ ќовтиња и тоа е бројот на ќовтињата кои менаџијата ги донел во чинијата.

Втор начин. Со x да го означиме бараниот број ќовтиња. Итар Пејо изел $\frac{x}{3}$, а останале $x - \frac{x}{3}$ ќовтиња. Насрадин Оџа изел $\frac{1}{3}(x - \frac{x}{3})$, по што останале $x - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3})$. Понатаму, Еро изел $\frac{1}{3}(x - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3}))$, по што останале $x - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3}) - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3}))$, односно 8 ќовтиња. Според тоа,

$$x - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3}) - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3})) = 8,$$

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{1}{3}(x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} + \frac{x}{9}) = 8,$$

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{9} - \frac{x}{27} = 8,$$

$$\frac{8x}{27} = 8,$$

$$x = 27.$$

Значи, меанџијата донесол 27 ќовтиња.

Трет начин. Итар Пејо изел третина од ќовтињата, што значи дека останале две третини, т.е. изел $\frac{x}{3}$ и останале $\frac{2x}{3}$. Насрадин оџа изел $\frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{3}$ и останале $\frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{3}$. Еро изел $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{3}$ и останале $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{3}$. Затоа $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{3} = 8$, од каде наоѓаме $x = 27$, т.е. меанџијата донесол 27 ќовтиња.

Задача 8. Најди четири последователни природни броеви чиј производ е еднаков на 1974024.

Решение. Прв начин. Ако со x го означиме најмалиот од природните броеви ја добиваме равенката:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=1974024.$$

Да ја означиме аритметичката средина на бараните броеви со t . Според тоа, имаме $\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)}{4}=t$, од каде наоѓаме $x=t-\frac{3}{2}$. Сега ако замениме во равенката

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=1974024$$

добиваме

$$(t-\frac{3}{2})(t-\frac{1}{2})(t+\frac{1}{2})(t+\frac{3}{2})=1974024$$

од каде ја наоѓаме равенката

$$(t^2-\frac{9}{4})(t^2-\frac{1}{4})=1974024$$

која е еквивалентна на равенката

$$16t^4-40t^2-31584375=0.$$

Сега имаме само парни степени и ако ставиме $t^2=z$ ја добиваме равенката

$$16z^2-40z-31584375=0.$$

Понатаму, ако ја искористиме формулата за бином на квадрат последователно наоѓаме

$$(4z)^2-2\cdot 4z\cdot 5+5^2-5^2-31584375=0,$$

$$(4z-5)^2=31584400.$$

$$(4z-5)^2-5620^2=0,$$

$$(4z-5-5620)(4z-5+5620)=0,$$

$$(4z-5625)(4z+5615)=0,$$

$$z=\frac{5625}{4} \text{ или } z=-\frac{5615}{4}.$$

Сега, z да е позитивен број, па затоа $z=\frac{5625}{4}$, односно $t^2=\frac{5625}{4}$, од каде последователно добиваме

$$t^2-(\frac{75}{2})^2=0$$

$$(t-\frac{75}{2})(t+\frac{75}{2})=0$$

$$t=\frac{75}{2} \text{ или } t=-\frac{75}{2}.$$

Бројот $-\frac{75}{2}$ отпаѓа, па значи бараните броеви се:

$$\frac{75}{2} - \frac{3}{2}, \frac{75}{2} - \frac{1}{2}, \frac{75}{2} + \frac{1}{2}, \frac{75}{2} + \frac{3}{2},$$

односно 36, 37, 38 и 39.

Втор начин. Ако искористиме дека

$$30^4 = 810000 < 1974024 < 2560000 = 40^4,$$

заклучуваме дека бараните броеви се меѓу 30 и 40. Понатаму, бидејќи меѓу броевите не смее да има број чија цифра на единиците е 5, треба да помножиме

$$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 = 1113024,$$

па ова не е решение на задачата, а

$$36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 = 1974024,$$

т.е. бараните броеви се 36, 37, 38 и 39.

Трет начин. Да го разложиме дадениот број на множители

$$1974024 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37.$$

Бројот 37 е прост број, па или тој е еден од бараните броеви или е „вистински“ делител на еден од бараните броеви. Очигледно, тој не е „вистински“ делител на ниту еден од бараните броеви, бидејќи во тој случај еден од четирите последователни природни броеви ќе биде поголем или еднаков на $2 \cdot 37 = 74$, па затоа производот ќе биде поголем или еднаков на

$$71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 = 27615024.$$

Значи, еден од множителите е 37. Но, $3 \cdot 13 = 39$, $2 \cdot 19 = 38$ и $2^2 \cdot 3^2 = 36$, т.е. едно решение се броевите 36, 37, 38 и 39. Решението е единствено, бидејќи разложувањето на прости множители е единствено, со точност до размена на редоследот на множителите.

Задача 9. Базен може да се наполни од две славини. Ако двете славини се отворени 2 часа, ќе недостасуваат 4200 литри вода за да базенот биде полн до врвот, а ако двете славини се отворени 5 часа, базенот ќе биде полн до врвот и уште 3000 литри вода ќе претече надвор од базенот. Од првата славина во базенот за 2 часа се влева онолку вода колку што во базенот од втората славина се влева за 3 часа. Колку литри вода собира во базенот и колку време е потребно за секоја славина самостојно да го наполни базенот? (Брзините со кои славините го полнат базенот се константни.)

Решение. Прв начин. Нека базенот собира B литри вода, x е бројот на потребните часови за кои првата славина сама го полни базенот, а y е бројот на потребните часови за кои втората славина сама го полни базенот. Односот на времињата на полнење (кога двете славини се отворени) е еднаков на односот на количеството вода во базенот. Затоа важи

$$\frac{B-4200}{B+3000} = \frac{2}{5},$$

од каде добиваме $B = 9000$ литри.

Сега добиваме дека за еден час славините заедно полнат

$$\frac{9000-4200}{2} = 2400 \text{ литри.}$$

Според условот на задачата односот на потребните времиња секоја славина сама да го наполни базенот е $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, па затоа $y = \frac{3}{2}x$. Првата славина

за еден час полни $\frac{1}{x}$ делови од базенот, односно $\frac{B}{x}$ литри, а втората славина за еден час полни $\frac{1}{y}$ делови од базенот, односно $\frac{B}{y}$ литри. Бидејќи

двете славини за еден час полнат 2400 литри, добиваме $B(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = 2400$,

па затоа $9000 \cdot (\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}) = 2400$, од каде добиваме $x = \frac{25}{4} = 6,25$ часа.

Според тоа, $y = \frac{3}{2} \cdot 6,25 = 9,375$ часа.

Втор начин. Нека базенот собира B литри вода, x е бројот на потребните часови за кои првата славина сама го полни базенот, а y е бројот на потребните часови за кои втората славина сама го полни базенот. Според условот на задачата односот на потребните времиња секоја славина сама да го наполни базенот е $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, па затоа $y = \frac{3}{2}x$. Првата славина за еден час полни $\frac{1}{x}$ делови од базенот, а втората славина за еден час полни $\frac{1}{y}$ делови

од базенот. Двете славини заедно за еден час полнат $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ делови од базенот. Сега, во случај кога славините се отворени 2 часа добиваме

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{4200}{B}, \quad (1)$$

а кога се отворени 5 часа добиваме

$$5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{3000}{B}. \quad (2)$$

Ако ги поделиме последните две равенки, по средувањето ја добиваме равенката

$$\frac{B-4200}{B+3000} = \frac{2}{5},$$

од каде добиваме $B = 9000$ литри.

Ако сега во равенката (1) ставиме $y = \frac{3}{2}x$ и $B = 9000$ ја добиваме равенката

$$2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}\right) = \frac{8}{15},$$

од каде следува $x = \frac{25}{4} = 6,25$ часа. Според тоа, $y = \frac{3}{2} \cdot 6,25 = 9,375$ часа.

Задача 10. Филип седум дена последователно решавал по еден математички тест. На секој тест остварил различен број бодови, најмалку 91, а најмногу 100. По секој тест просекот на неговите дотогашни резултати бил природен број, а на седмиот тест остварил 95 бодови. Колку бодови Филип освоил на сите седум тестови? Колку бодови освоил на шестиот тест?

Решение. Прв начин. Просекот на бодовите кои Филип ги освоил сите седум дена е цел број па затоа постои природен број k таков што вкупниот број бодови кои ги освоил Филип е еднаков на $7k$. Понатаму, сите резултати се меѓусебно различни, па вкупниот број освоени бодови е поголем или еднаков на

$$91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 = 658 = 7 \cdot 94,$$

а е помал или еднаков на

$$94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 679 = 7 \cdot 97.$$

Според тоа, бројот k е еднаков на некој од броевите 94, 95, 96 или 97. Понатаму, Филип во првите шест дена освоил $7k - 95$ бодови и овој број е делив со 6. Единствена можност е $k = 95$. Значи, Филип во седумте дена освоил $7 \cdot 95 = 665$ бодови. Нека Филип шестиот ден освоил x бодови. Тогаш во првите пет дена освоил $5 \cdot 95 - x$ бодови. Овој број мора да е делив со 5, па како бројот 95 е делив со 5, заклучуваме дека x мора да е делив со 5. Меѓу броевите 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99 и 100 единствено броевите 95 и 100 се деливи со 5. Но, Филип седмиот ден освоил 95 бодови и како сите резултати се меѓусебно различни, заклучуваме дека шестиот ден тој освоил 100 бодови.

Втор начин. Бројот на бодовите кои Филип ги освоил во првите шест дена мора да е делив со 6, па затоа постои број m таков што во првите шест дена Филип освоил $6m$ бодови. Понатаму, сите резултати се меѓусебно различни, па добиваме

$$\begin{aligned} 6 \cdot 93 &= 558 < 563 \\ &= 91 + 92 + 93 + 94 + 96 + 97 \\ &\leq 6m \\ &\leq 94 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 \\ &= 584 < 588 \\ &= 6 \cdot 98. \end{aligned}$$

Според тоа, бројот m е еднаков на еден од броевите 94, 95, 96, 97. Бидејќи Филип во сите седум дена освоил $6m + 95$ бодови и овој број мора да е делив со 7, заклучуваме дека единствена можност е $m = 95$. Понатаму, задачата ја решаваме како при првиот начин на решавање.

НЕРАВЕНСТВА

Задача 1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}. \quad (1)$$

Решение. Прв начин. Ако на двете страни на неравенството (1) го додадеме изразот $\frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} &\geq \frac{3a+2b-c}{4} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} \\ \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4}\right) &\geq a+b. \end{aligned}$$

Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина бидејќи

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = a \quad \text{и} \quad \frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = b,$$

што значи дека е точно неравенството (1).

Втор начин. Од Енгеловиот принцип на минимум, кој гласи:

Ако x и y се позитивни броеви и u и v се реални броеви, тогаш

$$\frac{u^2}{x} + \frac{v^2}{y} \geq \frac{(u+v)^2}{x+y}$$

(види [1] и [2]), при $u = a, v = b, x = a+b$ и $y = b+c$ добиваме

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{(a+b)^2}{a+2b+c} = a+b - \frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}. \quad (2)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a+2b+c}{2} = \frac{(a+b)+(b+c)}{2} \geq \sqrt{(a+b)(b+c)},$$

па затоа $(a+2b+c)^2 \geq 4(a+b)(b+c)$, т.е.

$$-\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \geq -\frac{a+2b+c}{4}.$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (2) следува

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq a+b - \frac{a+2b+c}{4} = \frac{3a+2b-c}{4},$$

т.е. точно е неравенството (1).

Трет начин. За позитивните реални броеви a и b последователно се точни еквивалентните неравенства:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$4a^2 \geq 3a^2 + 3ab - b^2 - ab$$

$$4a^2 \geq 3a(a+b) - b(a+b)$$

$$4a^2 \geq (a+b)(3a-b)$$

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$$

и аналогно $\frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3b-c}{4}$. Конечно, ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството (1).

Четврт начин. Неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$4a^2(b+c) + 4b^2(a+b) \geq (a+b)(b+c)(3a+2b-c)$$

$$a^2b - ab^2 + a^2c + ac^2 - b^2c + bc^2 + 2b^3 - 4abc \geq 0$$

$$b(a-c)^2 + (a+c-2b)(ac-b^2) \geq 0. \quad (3)$$

Ако $(a+c-2b)(ac-b^2) \geq 0$, тогаш точно е неравенството (3), што значи дека е точно и неравенството (1). Ќе докажеме дека неравенството (3) е точно и кога $(a+c-2b)(ac-b^2) < 0$. Можни се два случаја:

Прв случај. Ако $a+c-2b > 0$ и $ac-b^2 < 0$, тогаш $b < \sqrt{ac}$ и $\frac{a+c}{2} > b$, т.е. $G = \sqrt{ac} < b < \frac{a+c}{2} = A$. Бидејќи $a+c = 2A$ и $ac = G^2$, неравенството (3) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2A^2b - Ab^2 + AG^2 - 3bG^2 + b^3 \geq 0$$

$$Ab(A-b) + b(A^2 - G^2) + G^2(A-b) + b(b^2 - G^2) \geq 0.$$

Јасно, од $G < b < A$ следува точноста на последното неравенство, што значи дека е точно неравенството (3), т.е. точно е неравенството (1).

Втор случај. Ако $a+c-2b < 0$ и $ac-b^2 > 0$, тогаш $\frac{a+c}{2} < b < \sqrt{ac}$, што противречи на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, па затоа овој случај не е возможен.

Задача 2. Нека a и b се ненегативни броеви за кои важи $a^2 + b^2 = 4$. Докажи дека важи неравенството

$$\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1. \quad (1)$$

Решение. Прв начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на два позитивни броја (натаму ќе го означуваме со $A \geq G$), имаме дека $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$, т.е. $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Оттука и од условот $a^2 + b^2 = 4$, следува дека $ab \leq 2$, т.е. $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$, односно

$$\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Од исти причини, т.е. од неравенството $A \geq G$, имаме дека

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (3)$$

Тогаш од (2) и (3) добиваме:

$$\frac{ab}{a+b+2} \geq \frac{2\sqrt{ab}+2}{ab} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{ab}\right) \geq 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} + 1$$

Се разбира, овде земаме дека $ab \neq 0$, зашто за $a = 0$ или $b = 0$ даденото неравенство (1) е очигледно точно ($0 < \sqrt{2} - 1$).

Од последното неравенство $\frac{a+b+2}{ab} \geq \sqrt{2} + 1$ следува дека $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ а заради $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$, го добиваме она што требаше да се покаже, т.е. неравенството (1). Во (1) важи равенство ако и само ако $a = b = \sqrt{2}$.

Втор начин. Од неравенството (3) следува дека $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$. Од ова неравенство добиваме: $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}+2}$. Ставајќи смена $\sqrt{ab} = t$, имаме:

$\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{t^2}{2t+2}$. Притоа, заради неравенството $a^2 + b^2 \geq 2ab$ имаме дека важи $0 \leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$, односно $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Сега, доволно е да се покаже дека важи неравенството $\frac{t^2}{2t+2} \leq \sqrt{2} - 1$. Средувајќи го последното неравенство добиваме: $t^2 \leq (\sqrt{2} - 1)(2t + 2)$, а од него пак, $t^2 - 2(\sqrt{2} - 1)t - 2(\sqrt{2} - 1) \leq 0$, т.е. $(t - \sqrt{2})(t - \sqrt{2} + 2) \leq 0$. Последното неравенство е очигледно точно заради условот $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Следствено, важи неравенството (1). Во (1) важи равенство ако и само ако $t = \sqrt{2}$, т.е. $ab = 2$. Заради условот $a^2 + b^2 = 4$, т.е. $(a - b)^2 + 2ab = 4$, следува дека $a = b = \sqrt{2}$.

Трет начин. Заради условот $4 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, т.е. $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$ добиваме дека

$$\begin{aligned}\frac{ab}{a+b+2} &= \sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b+2} = \sqrt{ab} \left(\frac{a+b+2}{\sqrt{ab}} \right)^{-1} \\ &= \sqrt{ab} \left(\frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \right)^{-1} \\ &= \sqrt{ab} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{4}$$

(Притоа претпоставуваме дека $ab > 0$, зашто за $a = 0$ или $b = 0$ даденото неравенство (1) е очигледно точно). Врз основа на неравенството $A \geq G$ имаме:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}, \text{ т.е. } \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2.$$

Од последното неравенство и неравенството $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$ следува дека

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq 2 + \frac{2}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \right)^{-1} \leq \left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^{-1}.$$

Одовде, од (4) и од неравенството $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$ добиваме дека

$$\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^{-1} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} - 1, \text{ т.е. } \frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1.$$

Равенство важи ако и само ако $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 2$ и $\sqrt{ab} = \sqrt{2}$, т.е. $a = b = \sqrt{2}$.

Задача 3. Докажи дека:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \quad (a, b, c > 0) \quad (1)$$

Ова неравенство во математичката литература е познато како Nessbit-ово неравенство.

Решение. Прв начин. Имаме

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad / \cdot 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$2a(a+c)(a+b) + 2b(b+c)(a+b) + 2c(b+c)(a+c) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a),$$

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - a^2b - a^2c - b^2a - b^2c - c^2a - c^2b \geq 0,$$

$$a^2(a-b) + a^2(a-c) - b^2(a-b) + b^2(b-c) - c^2(a-c) - c^2(b-c) \geq 0,$$

$$(a^2 - b^2)(a-b) + (a^2 - c^2)(a-c) + (b^2 - c^2)(b-c) \geq 0,$$

$$(a-b)^2(a+b) + (a-c)^2(a+c) + (b-c)^2(b+c) \geq 0.$$

Очигледно, последното неравенство е точно, па точно е и почетното неравенство (1) кое е еквивалентно со него. Равенство важи само кога $a = b = c$.

Втор начин. Во доказот 1 добивме дека неравенството

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \quad (a, b, c > 0)$$

е еквивалентно со неравенството

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \quad (2)$$

Сега ќе покажеме дека е точно помошното неравенство

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2, \quad (x, y > 0) \quad (3)$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) \geq 0,$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2 - xy) \geq 0,$$

$$(x+y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0,$$

$$(x+y)(x-y)^2 \geq 0.$$

Последното неравенство од претходната низа на еквивалентни неравенства е точно, при што равенство важи ако $x = y$. Според тоа, неравенството (3) е точно равенство. Во неравенство (3) на местото на x и y редоследно замениме a и b , b и c односно c и a соодветно, при што ги добиваме следните три неравенства:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2,$$

$$b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2,$$

$$c^3 + a^3 \geq c^2 a + ca^2,$$

кои се точни. Ако ги собереме ја добиваме точноста на неравенството (2). Тоа значи, дека е точно и неравенството (1). Равенството е исполнето само ако $a = b = c$.

Трет начин. Во вој доказ ќе го користиме помошното неравенство

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2, (u, v > 0) \quad (4)$$

Значи, неравенството (4) е точно и равенство е исполнето ако $u = v$. Според неравенството (4) неравенствата

$$\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} \geq 2, \quad \frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} \geq 2, \quad \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c} \geq 2,$$

кога $a, b, c > 0$ се точни равенства. Со собирање на овие неравенства добиваме:

$$\left(\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+c}\right) + \left(\frac{a+b}{a+c} + \frac{a+c}{a+b}\right) + \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+b}{b+c}\right) \geq 6,$$

$$\frac{2a+b+c}{b+c} + \frac{2b+a+c}{a+c} + \frac{2c+b+a}{a+b} \geq 6,$$

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + 1 + 1 + 1 \geq 6,$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Четврт начин. Ако на левата страна на неравенството (1) додадеме 3 добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 &= \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \\ &= \frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (c+a)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right). \end{aligned}$$

Користејќи го неравенството помеѓу геометриска и аритметичка средина ($A \geq G$) за три реални позитивни броеви x, y и z која гласи:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

добиваме

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{1}{2} 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{b+c} \frac{1}{c+a} \frac{1}{a+b}},$$

односно

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{9}{2} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \frac{1}{b+c} \frac{1}{c+a} \frac{1}{a+b},$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{9}{2},$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Петти начин. Користејќи го неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина ($A \geq H$) за три позитивни реални броеви, добиваме:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}. \quad (5)$$

Заради неравенството (5) имаме

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \\ &\geq (a+b+c) \frac{9}{2(a+b+c)} - 3 \\ &= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Шести начин. Ќе воведеме смени $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$. Од последните равенства, добиваме

$$a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{x+z-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}, \quad x, y, z > 0.$$

Сега,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{1}{2} \left(\frac{y+z-x}{2} + \frac{x+z-y}{2} + \frac{x+y-z}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) - 3 \right] \\ &\stackrel{(4)}{\geq} \frac{1}{2} (2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Забелешка. Во пракса понекогаш се зема и следната смена:

$$b + c = 2x, \quad c + a = 2y, \quad a + b = 2z,$$

од каде добиваме

$$a + b + c = x + y + z, \quad a = y + z - x, \quad b = x + z - y, \quad c = x + y - z.$$

Понатаму доказот би бил како и во доказот 6.

Седми начин. Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството:

$$\left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \right) \geq 0. \quad (6)$$

Ќе ставиме $A = 2(b+c)(c+a)(a+b)$. Сега имаме

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} &= \frac{(2a-b-c)(a+c)(a+b)}{A} \\ &= \frac{(a^2-b^2)(a+c)+(a^2-c^2)(a+b)}{A}, \\ \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} &= \frac{(b^2-a^2)(b+c)+(b^2-c^2)(b+a)}{A}, \\ \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} &= \frac{(c^2-a^2)(c+b)+(c^2-b^2)(c+a)}{A}. \end{aligned}$$

Сега левата страна на неравенството (6) можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A}[(a^2 - b^2)(a + c) + (a^2 - c^2)(a + b) + \\ & + (b^2 - a^2)(b + c) + (b^2 - c^2)(b + a) + \\ & + (c^2 - a^2)(c + b) + (c^2 - b^2)(c + a)] \end{aligned}$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)(a + c) + (b^2 - a^2)(b + c) &= a^3 + a^2c - ab^2 - b^2c + b^3 - a^2b + b^2c - a^2c \\ &= a(a^2 - b^2) - b(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a - b) \\ &= (a - b)^2(a + b) > 0 \end{aligned}$$

Слично,

$$\begin{aligned} (b^2 - c^2)(b + a) + (c^2 - b^2)(c + a) &= (b - c)^2(b + c) > 0, \\ (a^2 - c^2)(a + b) + (c^2 - a^2)(c + b) &= (a - c)^2(a + c) > 0 \end{aligned}$$

Од овде следува

$$\frac{1}{A}[(a - b)^2(a + b) + (a - c)^2(a + c) + (b - c)^2(b + c)] \geq 0,$$

што значи дека неравенството (6) е точно а со тоа и неравенството (1) е точно.

Задача 4. Докажи дека

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

Решение. Прв начин. Воведуваме ознаки $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ и $b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$. Според тоа треба да докажеме дека

$$a + b < 2\sqrt[3]{3} \quad (1)$$

Ако замениме во изразот $a^3 + b^3$ добиваме

$$a^3 + b^3 = (\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}})^3 + (\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}})^3 = 3 + \sqrt[3]{3} + 3 - \sqrt[3]{3} = 6. \quad (2)$$

За $a \neq b$, од $(a-b)^2 > 0$ добиваме

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 > ab. \quad (3)$$

Ако ги искористиме претходните неравенства, непосредно добиваме

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) > ab(a+b) \Leftrightarrow 3(a^3 + b^3) > 3ab(a+b) \quad (4)$$

и

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) < a^3 + b^3 + 3(a^3 + b^3) = 4(a^3 + b^3) = 4 \cdot 6 = 24$$

(заради (2)). Од $(a+b)^3 < 24$ добиваме

$$a + b < \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3},$$

т.е. неравенството (1) е точно.

Втор начин. Ќе покажеме дека

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}. \quad (5)$$

каде a и b се различни позитивни реални броеви. Од очигледното неравенство

$$0 > -(a-b)^2(a+b).$$

последователно ги добиваме еквивалентните неравенства

$$0 > -3(a-b)^2(a+b) \Leftrightarrow$$

$$0 > -3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3 \Leftrightarrow$$

$$4a^3 + 4b^3 > a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^3+b^3}{2} > \frac{(a+b)^3}{8} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} > \frac{a+b}{2}.$$

Значи, неравенството (5) е точно. Ако во неравенството (5) замениме

$$a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} \text{ и } b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$$

последователно добиваме

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}})^3 + (\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}})^3}{2}} > \frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{3} > \frac{\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2 \cdot \sqrt[3]{3}.$$

Значи, почетното неравенство е точно.

Трет начин. Воведуваме ознаки $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$, $b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ и $c = \sqrt[3]{3}$.

Треба да покажеме дека $a + b < 2c$, т.е.

$$a + b - 2c < 0. \quad (6)$$

Неравенството (6) е еквивалентно со неравенството

$$(a - c) + (b - c) < 0.$$

Последното неравенство е еквивалентно со

$$\frac{a^3 - c^3}{a^2 + ac + c^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} < 0.$$

Ако во левата страна на последното неравенство замениме

$$a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}, b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} \text{ и } c = \sqrt[3]{3}$$

добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - c^3}{a^2 + ac + c^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} &= \frac{(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}})^3 - (\sqrt[3]{3})^3}{a^2 + ac + c^2} + \frac{(\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}})^3 - (\sqrt[3]{3})^3}{b^2 + bc + c^2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3}}{a^2 + ac + c^2} - \frac{\sqrt[3]{3}}{b^2 + bc + c^2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3}(b^2 + bc + c^2) - \sqrt[3]{3}(a^2 + ac + c^2)}{(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2)} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3}[b^2 - a^2 + (b - a)c]}{(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2)} < 0. \end{aligned}$$

Последното неравенство е исполнето бидејќи

$$b - a < 0, \text{ т.е. } b^2 - a^2 < 0, \quad a^2 + ac + c^2 > 0 \text{ и } b^2 + bc + c^2 > 0.$$

Значи неравенството (6) е точно, т.е. $a + b - 2c < 0$. Ако во последното

неравенство замениме $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$, $b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ и $c = \sqrt[3]{3}$ добиваме

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$$

што требаше да се докаже.

Обопштување. Претходно докажаното неравенство има едноставно обопштување, а тоа е неравенството

$$\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}} + \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}} < 2 \cdot \sqrt[n]{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Ќе покажеме дека неравенството (7) е точно за секој природен број n .

Доказ. Воведуваме ознаки $a = \sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n}}$, $b = \sqrt[n]{n - \sqrt[n]{n}}$, т.е.

$$a^n = n + \sqrt[n]{n}, \quad (8)$$

$$b^n = n - \sqrt[n]{n}. \quad (9)$$

Ако ги собереме (8) и (9) добиваме

$$a^n + b^n = 2n,$$

т.е.

$$\frac{a^n + b^n}{2} = n. \quad (10)$$

Од (7), при воведените ознаки имаме

$$a + b < 2\sqrt[n]{n},$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt[n]{n},$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < n$$

и ако го искористиме равенството (10) добиваме дека е доволно да го докажеме неравенството

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}. \quad (11)$$

Ќе докажеме дека неравенството (11) важи за секои позитивни реални брови a и b .

Доказот ќе го изведеме со помош на математичка индукција. Јасно е дека за $n=1$ неравенството (11) е точно. За $n=2$ неравенството (11) се сведува на неравенството меѓу аритметиката и квадратната средина на два позитивни реални броја, во случај кога $a \neq b$, па затоа важи

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Значи, за $n=2$ неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за $n=k$, т.е. дека

$$\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k,$$

при што равенство е исполнето ако и само ако $a=b$. Ако последното неравенство го помножиме со $\frac{a+b}{2}$ добиваме

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + a^k b + a b^k + b^{k+1}}{4}. \quad (12)$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} a^{k+1} + b^{k+1} - a^k b - ab^k &= (a^k - b^k)(a - b) \\ &= (a - b)^2 (a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}) \geq 0, \end{aligned}$$

па затоа

$$a^k b + ab^k \leq a^{k+1} + b^{k+1}$$

Од последното неравенство и од неравенството (12) следува

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$$

што значи дека неравенството (11) важи и за $n = k + 1$, со што доказот е завршен. Со тоа е докажано и неравенството (7).

Задача 5. Докажи дека за ненегативни броеви a, b, c важи неравенството

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc.$$

Решение. Прв начин. Од $a, b, c \geq 0$ последователно добиваме

$$(a-b)^2 \geq 0,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

$$c(a^2 + b^2) \geq 2abc.$$

Аналогно се докажува дека

$$a(b^2 + c^2) \geq 2abc,$$

$$b(a^2 + c^2) \geq 2abc.$$

Сега, од последните три неравенства следува

$$\begin{aligned} ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) &= ba^2 + ab^2 + bc^2 + cb^2 + ac^2 + ca^2 \\ &= a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) \\ &\geq 2abc + 2abc + 2abc = 6abc. \end{aligned}$$

Втор начин. Даденото неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc,$$

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ac^2 - 6abc \geq 0,$$

$$(a^2b - 2abc + bc^2) + (ab^2 - 2abc + ac^2) + (b^2c - 2abc + ca^2) \geq 0,$$

$$b(a^2 - 2ac + c^2) + a(b^2 - 2bc + c^2) + c(b^2 - 2ab + a^2) \geq 0,$$

$$b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(b-a)^2 \geq 0. \quad (1)$$

Бидејќи $a, b, c \geq 0$, добиваме дека $b(a-c)^2 \geq 0$, $a(b-c)^2 \geq 0$, $c(b-a)^2 \geq 0$.

Според тоа, точно е неравенството (1), што значи дека е точно и даденото неравенство.

Трет начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за два броја следува

$$\begin{aligned} ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) &= a^2b + ab^2 + bc^2 + cb^2 + ac^2 + ca^2 \\ &= (a^2b + bc^2) + (b^2c + ca^2) + (c^2a + ab^2) \\ &\geq 2\sqrt{a^2bbc^2} + 2\sqrt{bcc a^2} + 2\sqrt{c^2aab^2} \\ &= 2abc + 2abc + 2abc = 6abc. \end{aligned}$$

Четврт начин. Прво од неравенството меѓу аритметичката и геометричката средина за два броја, а потоа од истото неравенство за три броја, добиваме

$$\begin{aligned}ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) &= (a^2b + a^2c) + (ab^2 + b^2c) + (bc^2 + c^2a) \\&\geq 2\sqrt{a^4bc} + 2\sqrt{b^4ca} + 2\sqrt{c^4ab} \\&= 2\sqrt{abc}(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) \\&= 2\sqrt{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt{a^3}\sqrt{b^3}\sqrt{c^3}} \\&= 6\sqrt{abc} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^3b^3c^3}} = 6\sqrt{abc}\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \\&= 6\sqrt{abc}\sqrt[3]{(abc)^3} = 6\sqrt{abc}\sqrt{abc} = 6abc.\end{aligned}$$

Петти начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометричката средина за шест броја добиваме

$$\begin{aligned}ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) &= a^2b + ab^2 + bc^2 + cb^2 + ac^2 + ca^2 \\&\geq 6\sqrt[6]{a^2bab^2bc^2cb^2ac^2ca^2} \\&= 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 6abc.\end{aligned}$$

Задача 6. Нека a, b е позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{2b+a} + \frac{b}{2a+b} \geq \frac{2}{3}.$$

Решение. Прв начин. За секои реални броеви a, b важи $(a-b)^2 \geq 0$, па затоа

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b+a} + \frac{b}{2a+b} &= \frac{1}{3} \left(\frac{3a}{2b+a} + \frac{3b}{2a+b} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{a+2b+2(a-b)}{2b+a} + \frac{b+2a+2(b-a)}{2a+b} \right) \\ &= \frac{1}{3} (2 + 2(a-b) \left(\frac{1}{2b+a} - \frac{1}{2a+b} \right)) \\ &= \frac{1}{3} (2 + 2(a-b)^2 \frac{1}{(2b+a)(2a+b)}) \\ &\geq \frac{1}{3} (2 + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{(2b+a)(2a+b)}) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Втор начин. За секои реални броеви a, b важи $a^2 + b^2 \geq 2ab$, па затоа

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b+a} + \frac{b}{2a+b} &= \frac{a(2a+b) + b(2b+a)}{(2b+a)(2a+b)} \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2ab}{2a^2 + 2b^2 + 5ab} \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2 + 5ab - 3ab}{2a^2 + 2b^2 + 5ab} \\ &= 1 - \frac{3ab}{2(a^2 + b^2) + 5ab} \\ &\geq 1 - \frac{3ab}{2 \cdot 2ab + 5ab} \\ &= 1 - \frac{3ab}{9ab} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Трет начин. Нека $\frac{a}{b} = x$, $\frac{b}{a} = y$. Тогаш $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. При воведените ознаки даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{2 + \frac{a}{b}} + \frac{\frac{b}{a}}{2 + \frac{b}{a}} &\geq \frac{2}{3}, \\ \frac{x}{2+x} + \frac{y}{2+y} &\geq \frac{2}{3}, \\ \frac{x(2+y) + y(2+x)}{(2+x)(2+y)} &\geq \frac{2}{3}, \\ \frac{2(x+y) + 2xy}{4 + 2(x+y) + xy} &\geq \frac{2}{3}, \\ \frac{2(x+y) + 2}{5 + 2(x+y)} &\geq \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$6(x+y)+6 \geq 10+4(x+y)$$

$$x+y \geq 2.$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и равенството $xy=1$ следува

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{1} = 2,$$

што значи дека последното неравенство е точно, па затоа е точно и даденото неравенство.

Четврт начин. Нека $x = 2b + a$, $y = 2a + b$. Тогаш $3a + 3b = x + y$, односно $a + b = \frac{1}{3}(x + y)$. Значи,

$$a = y - (a + b) = y - \frac{1}{3}(x + y) = \frac{1}{3}(2y - x),$$

$$b = x - (a + b) = x - \frac{1}{3}(x + y) = \frac{1}{3}(2x - y).$$

Сега, ако ги искористиме воведените замени и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b+a} + \frac{b}{2a+b} &= \frac{\frac{1}{3}(2y-x)}{x} + \frac{\frac{1}{3}(2x-y)}{y} \\ &= \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) - 2\right) \\ &\geq \frac{1}{3}\left(2 \cdot \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} - 2\right) \\ &= \frac{1}{3}(4 - 2) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Петти начин. Според Енгеловиот принцип за минимум за секои позитивни реални броеви a, b, x, y важи

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Навистина, неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$(a^2y + b^2x)(x+y) \geq (a+b)^2xy,$$

т.е. со неравенството $(ay - bx)^2 \geq 0$, кое очигледно е исполнето. Знак за равенство важи ако и само ако $ay - bx = 0$, т.е. ако и само ако важи $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Ако во неравенството (1) ставиме $x = a(2b + a)$, $y = b(2a + b)$ и искористиме дека за позитивните реални броеви a, b важи $(a+b)^2 \geq 4ab$, добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a}{2b+a} + \frac{b}{2a+b} &= \frac{a^2}{a(2b+a)} + \frac{b^2}{b(2a+b)} \\&= \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \\&= \frac{(a+b)^2}{a(2b+a)+b(2a+b)} \\&= \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+4ab} \\&= \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+\frac{1}{2}\cdot 4ab} \\&\geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+\frac{1}{2}\cdot (a+b)^2} \\&= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Задача 7. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\left(\frac{12x^2+27y^2+12x+36y+29}{4x^2+9y^2+4x+12y+9}\right)^2.$$

За кои реални броеви x и y се достигнува таа вредност?

Решение. Прв начин. Имаме:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9 &= 4x^2 + 4x + 1 + 9^2 + 12y + 4 + 4 \\ &= (2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 12x^2 + 27y^2 + 12x + 36y + 29 &= 12x^2 + 12x + 3 + 27y^2 + 36y + 12 + 14 \\ &= 3(4x^2 + 4x + 1) + 3(9y^2 + 12y + 4) + 14 \\ &= 3(2x+1)^2 + 3(3y+2)^2 + 12 + 2 \\ &= 3((2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4) + 2, \end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned} \left(\frac{12x^2+27y^2+12x+36y+29}{4x^2+9y^2+4x+12y+9}\right)^2 &= \left(\frac{3((2x+1)^2+(3y+2)^2+4)+2}{(2x+1)^2+(3y+2)^2+4}\right)^2 \\ &= \left(3 + \frac{2}{(2x+1)^2+(3y+2)^2+4}\right)^2. \end{aligned}$$

Бидејќи $(2x+1)^2 \geq 0$ и $(3y+2)^2 \geq 0$, за секои x, y важи:

$$(2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4 \geq 4, \quad (1)$$

односно

$$\frac{2}{(2x+1)^2+(3y+2)^2+4} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned} 3 + \frac{2}{(2x+1)^2+(3y+2)^2+4} &\leq 3 + \frac{1}{2}, \\ \left(3 + \frac{2}{(2x+1)^2+(3y+2)^2+4}\right)^2 &\leq \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}. \end{aligned}$$

Според тоа, најголемата можна вредност на дадениот израз е еднаква на $\frac{49}{4}$ и истата се достигнува кога во (1) важи знак за равенство, односно кога

$$(2x+1)^2 + (3y+2)^2 = 0.$$

Но, збир на два квадрати е еднаков на 0 ако и само ако собирците се еднакви на 0, па затоа најголемата можна вредност се достигнува за $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{2}{3}$.

Втор начин. Имаме:

$$A = \left(\frac{12x^2 + 27y^2 + 12x + 36y + 29}{4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9} \right)^2 = \left(\frac{3(4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9) + 2}{4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9} \right)^2.$$

Воведуваме замена $t = 4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9$, по што изразот го добива видот

$$A = \left(\frac{3t+2}{t} \right)^2 = \left(3 + \frac{2}{t} \right)^2.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} t &= 4x^2 + 9y^2 + 4x + 12y + 9 \\ &= (4x^2 + 4x + 1) + (9y^2 + 12y + 4) + 4 \\ &= (2x+1)^2 + (3y+2)^2 + 4. \end{aligned}$$

Бидејќи $(2x+1)^2 \geq 0$ и $(3y+2)^2 \geq 0$, за секои x, y важи $t \geq 0 + 0 + 4 = 4$.

Затоа $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{4}$, односно $\frac{2}{t} \leq \frac{1}{2}$ и $3 + \frac{2}{t} \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. Според тоа,

$$A = \left(3 + \frac{2}{t} \right)^2 \leq \left(\frac{7}{2} \right)^2 = \frac{49}{4},$$

што значи дека бараната максимална вредност е $\frac{49}{4}$. Понатаму, истата се достигнува за најмалата вредност на променливата t , односно за $t = 4$ и тоа е кога $2x+1=0$ и $3y+2=0$, т.е. $x = -\frac{1}{2}$ и $y = -\frac{2}{3}$.

Задача 8. Докажи дека

$$a + b < c + h,$$

каде a и b се катетите, c е хипотенузата и h е висината повлечена кон хипотенузата на произволен правоаголен триаголник.

Решение. Прв начин. За произволен правоаголен триаголник важи $ab = ch$, па затоа

$$\begin{aligned} a + b &= \sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ch} = \sqrt{c^2 + 2ch} \\ &< \sqrt{c^2 + 2ch + h^2} = \sqrt{(c + h)^2} \\ &= c + h. \end{aligned}$$

Втор начин. Од равенството $ab = ch$ следува $h = \frac{ab}{c}$, па затоа доволно е да докажеме дека $c + \frac{ab}{c} > a + b$. Последното неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned} c^2 + ab &> ac + bc, \\ c^2 - bc + ab - ac &> 0, \\ c(c - b) - a(c - b) &> 0, \\ (c - b)(c - a) &> 0. \end{aligned}$$

Но, $c > b$ и $c > a$, па затоа е точно последното во низата еквивалентни неравенства, што значи дека е точно и даденото неравенство.

Трет начин. Ако искористиме дека за радиусот r на впишаната кружница во правоаголен триаголник важи $2r = a + b - c$ и $2r < h$, добиваме

$$a + b = c + 2r < c + h,$$

што и требаше да се докаже.

Четврт начин. Без ограничување на општоста може да земем дека $a \leq b$. Тогаш $h < a \leq b < c$. Понатаму,

$$\begin{aligned} ab &= ch, \\ hb + (a - h)b &= hb + (c - b)h, \\ (a - h)b &= (c - b)h, \end{aligned}$$

па бидејќи $h < b$, од последното равенство последователно добиваме

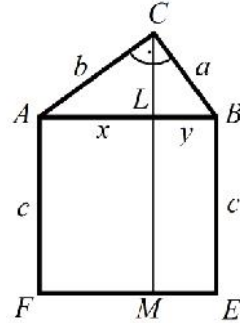
$$\begin{aligned} a - h &< c - b, \\ a + b &< c + h, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

ГЕОМЕТРИЈА

Задача 1 (Питагорова теорема). Ако a и b се должините на катетите на правоаголен триаголник, а c е должината на неговата хипотенуза, тогаш $a^2 + b^2 = c^2$,

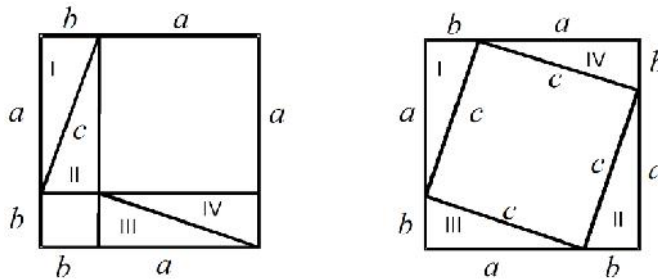
Решение. Прв начин (Евклид). Над хипотенузата AB од надворешната страна на $\triangle ABC$ конструираме квадрат $ABEF$ (цртеж десно). Ја повлекуваме висината CL чие продолжение ја сече страната FE во точката M . Лесно се докажува дека $\triangle ALC \sim \triangle CLB \sim \triangle ACB$, од каде при ознаките на цртежот следува дека $x = \frac{b^2}{c}$ и $y = \frac{a^2}{c}$. Затоа, $P_{FMLA} = cx = c \frac{b^2}{c} = b^2$,



$P_{MEBL} = cy = c \frac{a^2}{c} = a^2$ и $P_{FEBA} = c^2$. Но,

$$P_{FEBA} = P_{FMLA} + P_{MEBL}, \text{ т.е. } c^2 = a^2 + b^2.$$

Втор начин (Питагора). Цртаме квадрат со должина на страна $a + b$ и истиот го делиме на квадрати со страни a и b и четири складни правоаголници со должини на катети a и b и хипотенуза c (цртеж долу лево). Потоа правоаголните триаголници I, II, III и IV ги поставуваме како на цртежот десно, со што во средината се добива ромб (зошто?). Но збирот на остриите агли кај правоаголен триаголник е еднаков на 90° , па затоа аглите на овој ромб се еднакви на 90° , што значи дека тој е квадрат.



Од левиот цртеж следува дека плоштината на квадратот е еднаква на $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, а од десниот цртеж следува дека таа е еднаква на

$$c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab,$$

па затоа

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab, \text{ т.е. } a^2 + b^2 = c^2.$$

Трет начин (Бхаскари). Четири правоаголни триаголници со должини на катети a и b и должина на хипотенуза c ги поставуваме како на цртежот десно, со што ги добиваме квадратите $ABDE$ и $CHGF$. Од една страна добиваме дека

$$P_{ABCD} = c^2, \text{ а од друга страна имаме}$$

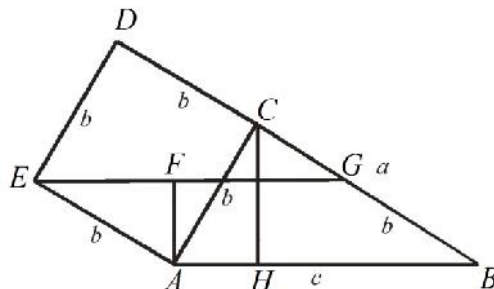
$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{CHGF} + P_{ABC} + P_{BDH} + P_{DEG} + P_{EAF} \\ &= (a-b)^2 + 4 \frac{ab}{2} \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

па затоа важи

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Четврт начин (О. Вернер).

Конструираме правоаголен $\triangle ABC$ и над AC цртаме квадрат $ACDE$ (цртеж десно). Нека $EG \parallel AB$ и да ги повлечеме нормалите CH и AF на AB . Бидејќи $EA \parallel BD$ добиваме дека



$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AF} &= P_{AEGB} = \overline{AE} \cdot \overline{AC} \\ &= b^2 = P_{AEDC}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } b^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AF}.$$

Понатаму, бидејќи $\overline{EA} = \overline{AC}$ и $\angle AEF = \angle ACH$, како агли со нормални краци, добиваме дека триаголниците EAF и ACH се складни, па затоа $\overline{AF} = \overline{AH}$. Значи, $b^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$.

На сличен начин, повторувајќи ја постапката со конструкција на квадрат над страната CB добиваме $a^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH}$.

Конечно, од последните две равенства следува

$$a^2 + b^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH} + \overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AB}(\overline{AH} + \overline{BH}) = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = c^2.$$

Петти начин. Нека е даден правоаголен $\triangle ABC$ со катети a и b и хипотенуза c (цртеж десно). Нека $\triangle DBC$ е оносиметричен во однос на $\triangle ABC$. Тогаш $\triangle DAB$ е рамнокрак правоаголен со краци c , основа $2b$ и висина a . Имаме, $P_{DAB} = ab$. Полупериметарот на овој триаголник е

$$s = \frac{2b+2c}{2} = b+c,$$

па од Хероновата формула следува

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{s(s-2b)(s-c)(s-c)} = \sqrt{(b+c)(c-b)b^2} \\ &= b\sqrt{c^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Според тоа, $ab = b\sqrt{c^2 - b^2}$, од каде добиваме

$$a^2 = c^2 - b^2, \text{ т.е. } a^2 + b^2 = c^2.$$

Шести начин. При тандардните ознаки за страните на $\triangle ABC$, нека CD е висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB на $\triangle ABC$.

Бидејќи $\triangle CBD$ и $\triangle ABC$ се слични важи $\frac{P_{CBD}}{P_{ABC}} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$, а бидејќи $\triangle ACD$ и

$\triangle ABC$ се слични важи $\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$. Според тоа,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{P_{CBD}}{P_{ABC}} + \frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{P_{CBD} + P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{P_{ABC}}{P_{ABC}} = 1,$$

од каде $a^2 + b^2 = c^2$.

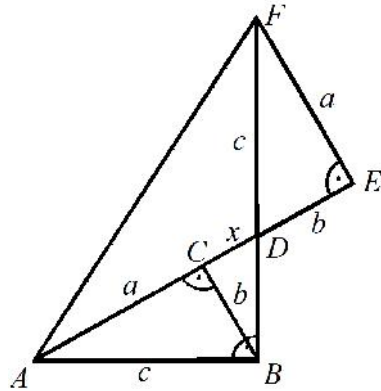
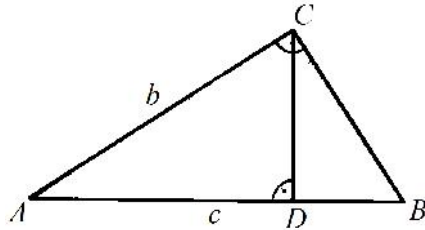
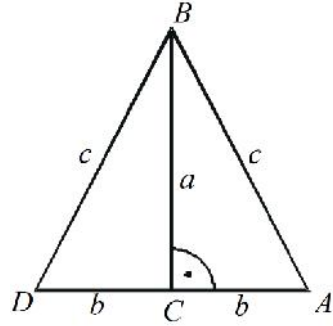
Седми начин. Ја продолжуваме страната AC преку темето C и во темето B повлекуваме нормала, при што во пресекот со правата AC ја наоѓаме точката D . Потоа конструираме триаголник DFE складен со триаголникот ABC (цртеж десно). Понатаму триаголниците FDE и BDC се слични, од каде добиваме $b^2 = ax$. Сега за плоштината на триаголникот ADF имаме

$$P = \frac{\overline{FD} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{c^2}{2},$$

$$P = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{(a+x)a}{2} = \frac{(a+\frac{b^2}{a})a}{2} = \frac{a^2+b^2}{2},$$

па затоа

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{2}, \text{ т.е. } a^2 + b^2 = c^2.$$



Осми начин (Џон Кавамура). Нека е даден триаголникот ABC и да конструираме триаголник DCF складен со триаголникот ABC (цртеж десно). Бидејќи $FD \parallel CB$ имаме

$\angle NMC = \angle CBN$ и $\angle MDN = \angle NCA$, што значи дека триаголниците CBN и DMN се слични. Но,

$$\angle MDN + \angle CBN = 90^\circ,$$

па затоа $\angle MND = 90^\circ$. Според тоа, $AB \perp CD$. Значи дијагоналите на четириаголникот $ACBD$ се заемно нормални, па затоа од

$$\frac{c^2}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = P_{ACBD} = P_{CBD} + P_{ACD} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CF}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{FD}}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \text{ т.е.}$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Деветти начин (Џејмс Гарфиелд). Прекну точката A ја продолжуваме страната AC и цртаме триаголник ADF складен на триаголникот BAC (цртеж десно). Плоштината на триаголникот ABD можеме да ја пресметаме на два начина и тоа

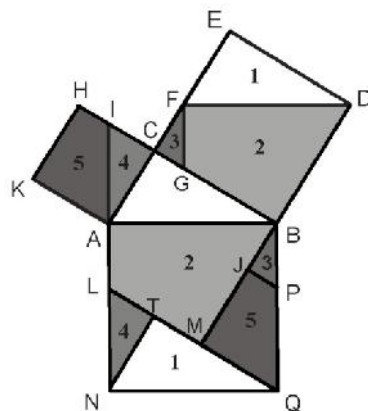
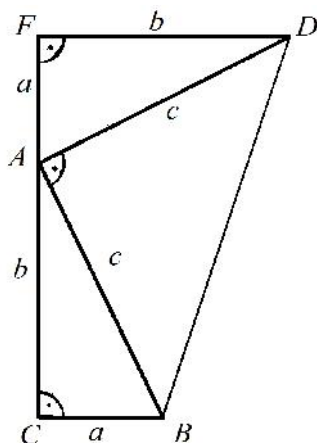
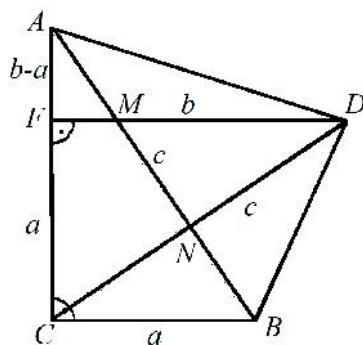
$$P_{ABD} = \frac{c^2}{2}, \quad (1)$$

и

$$\begin{aligned} P_{ABD} &= P_{FDBC} - P_{ABC} - P_{ADF} \\ &= \frac{(a+b)(a+b)}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува $a^2 + b^2 = c^2$.

Десетти начин. На страните на триаголникот ABC ги конструираме квадратите $BCED$, $ACHK$ и $ABQN$, а потоа ја продолжуваме страната NA до пресекот I со страната CH . Конструираме прави $FD \parallel AB$, $FG \parallel NA$, $QL \parallel BC$, $NT \parallel AC$, $BM \parallel AC$, точка P на BQ таква што $\overline{BP} = \overline{FG}$ и $PJ \parallel BC$, цртеж десно. Лесно се докажува дека триаголниците и четири-



аголниците означени со еднакви броеви се складни. Затоа важи

$$\begin{aligned} P_{ABQN} &= P_{ABML} + P_{BPJ} + P_{TQN} + P_{JPQM} + P_{LTN} \\ &= P_{FDBG} + P_{FCG} + P_{EDF} + P_{HIAK} + P_{ICA} \\ &= P_{CBDE} + P_{CAKH} \end{aligned}$$

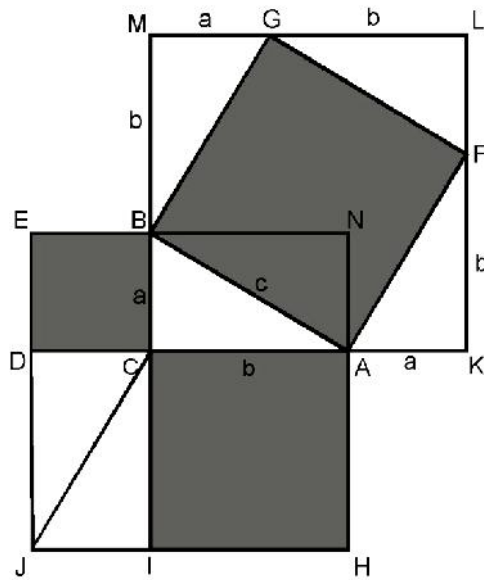
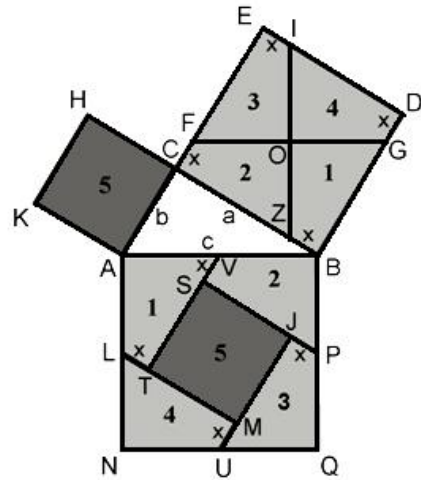
односно $a^2 + b^2 = c^2$.

Единаесетти начин (Хенри Перигајл). Лесно се покажува дека на цртежот десно четириаголниците $LMUN$, $VTLA$, $PSVB$, $UJPQ$, $GBZO$, $ZCFO$, $FEIO$ и $IDGO$ се складни и дека четириаголниците $TMJS$ и $ACKH$ се складни. Оттука следува дека

$$\begin{aligned} P_{NQBA} &= P_{LMUN} + P_{VTLA} + P_{PSVB} + \\ &\quad + P_{UJPQ} + P_{TMJS} \\ &= P_{GBZO} + P_{ZCFO} + P_{FEIO} + \\ &\quad + P_{IDGO} + P_{KHCA} \\ &= P_{CBDE} + P_{KHCA} \end{aligned}$$

односно $a^2 + b^2 = c^2$.

Дванаесетти начин. Нека $a \leq b < c$ се страните на правоаголниот триаголник ABC (цртеж десно). Го дополнуваме квадратот $BAFG$ конструиран над хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC со складните триаголници BAC , FAK , GFL и BGM . Добиената фигура е квадрат со $a+b$ (зошто?). Унијата на квадратите конструирани над катетите ја дополнуваме со складните триаголници JDC , CIJ , BNA и CAB со што се добива квадратот $JHNE$ со должина на страна $a+b$. Затоа,



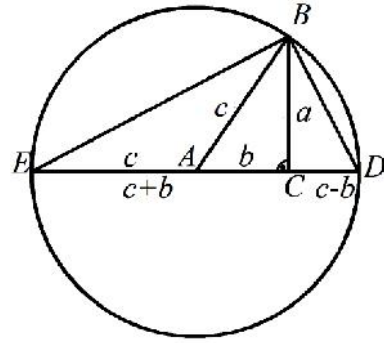
$$P_{JHNE} = P_{CKLM},$$

т.е.

$$4P_{ABC} + P_{AFBG} = 4P_{ABC} + P_{BCDE} + P_{ACIH},$$

од каде следува $a^2 + b^2 = c^2$.

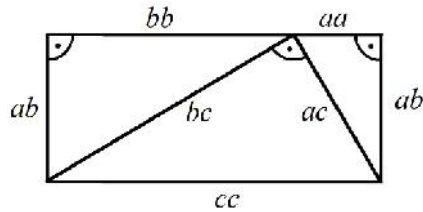
Тринаесетти начин. Нека е даден правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C . Конструираме кружница со центар во A и радиус $r = \overline{AB}$ (цртеж десно). Ја продолжуваме катетата AC до пресекот E со кружницата. Триаголникот EDB е правоаголен со прав агол во темето B (периферен агол над дијаметарот ED). Тогаш $\triangle ECB \sim \triangle BCD$, па затоа



$$\overline{BC}^2 = \overline{EC} \cdot \overline{CD},$$

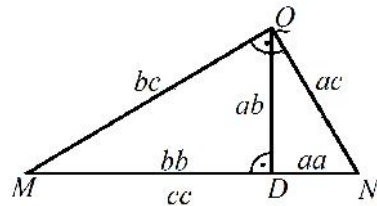
што значи $a^2 = (c-b)(c+b)$, односно $a^2 + b^2 = c^2$.

Четиринаесетти начин (Џефри Марџу). За правоаголниот триаголник со катети a и b и хипотенуза c конструираме сличен триаголник со коефициент на сличност c , а потоа над катетата со должина ac кон-



струираме сличен триаголник на почетниот триаголник со коефициент на сличност a , а над катетата со должина bc конструираме сличен триаголник со коефициент на сличност b (цртеж десно). Добиената фигура е правоаголник (зошто?), чија една страна е со должина ab , а другата страна има должина $cc = c^2$, односно $aa + bb = a^2 + b^2$, па затоа $a^2 + b^2 = c^2$.

Петнаесетти начин (Биркоф). За правоаголниот триаголник со катети a и b и хипотенуза c конструираме сличен триаголник MNQ со коефициент на сличност c , а потоа во овој триаголник ја повлекуваме висината QD и добиваме



триаголник NQD кој е сличен на почетниот триаголник со коефициент на сличност a и триаголник QMD кој е сличен на почетниот триаголник со

коэффициент на сличност b (види цртеж). Конечно, од $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN}$ следува $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Шеснаесетти начин. Плоштината на триаголникот на цртежот десно можеме да ја пресметаме на два начина:

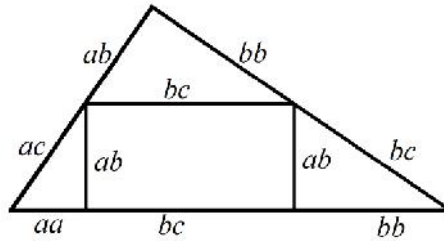
$$\begin{aligned} P &= \frac{(ac+ab)(bb+bc)}{2} \\ &= \frac{acb^2+abc^2+ab^3+acb^2}{2} \\ &= acb^2 + ab \frac{c^2+b^2}{2} \end{aligned}$$

и

$$P = ab \frac{a^2}{2} + abb^2 + acb^2$$

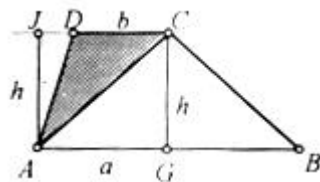
па затоа последователно добиваме

$$acb^2 + ab \frac{c^2+b^2}{2} = ab \frac{a^2}{2} + abb^2 + acb^2, \text{ т.е. } c^2 = a^2 + b^2. \blacksquare$$



Задача 2. Докажи дека плоштината на трапезот е еднаква на произ-водот од полузбирот на основите a и b со висината h , т.е. $P = \frac{a+b}{2} h$.

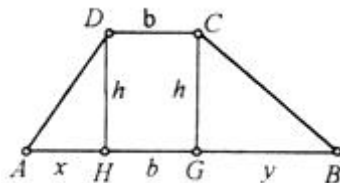
Решение. Прв начин. Со дијагоналата AC трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$ и висина $\overline{CG} = h$ го разбиваме на два триаголника: ABC со основа a и висина h и CDA со основа b и висина h (цртеж десно). Тогаш



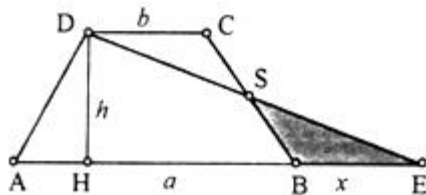
$$P_{CDA} = \frac{bh}{2}, P_{ABC} = \frac{ah}{2}, P = P_{ABC} + P_{CDA} = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a+b}{2} h.$$

Втор начин. Со висните $\overline{DH} = h$ и $\overline{CG} = h$, трапезот $ABCD$ е поделен на два триаголника и еден правоаголник (цртеж долу), па имаме

$$\begin{aligned} P &= P_{AND} + P_{HGCD} + P_{GBC} \\ &= \frac{xh}{2} + bh + \frac{yh}{2} \\ &= \frac{(x+2b+y)h}{2} \\ &= \frac{(x+b+y+b)h}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} h. \end{aligned}$$

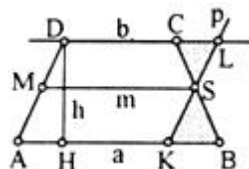


Трет начин. Нека S е средина-та на кракот BC на трапезот $ABCD$, а E е пресекокот на правите DS и AB (цртеж десно). Триагол-ниците SBE и SCD се складни според признакот ACA ($\angle B = \angle C$, $\overline{SB} = \overline{SC}$ и $\angle BSE = \angle CSD$), па затоа нивните плоштини се еднакви, односно $P_{SBE} = P_{SCD}$. Тогаш, ако земеме предвид дека $x = b$, добиваме



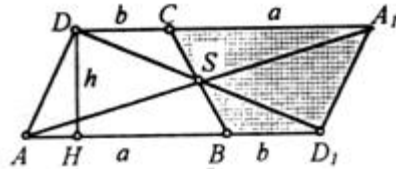
$$P = P_{AED} = \frac{a+x}{2} h = \frac{a+b}{2} h.$$

Четврт начин. Нека M и S се средините на краците AD и BC на трапезот $ABCD$. Тогаш $\overline{MS} = m = \frac{a+b}{2}$ е средна линија на овој трапез. Низ S повлекуваме права p паралелна со кракот AD и во пресеците со правите AB и CD ги добиваме точките K и L , соодвет-но (цртеж десно). Бидејќи триаголниците SBK и SCL се складни, според признакот ACA ($\angle B = \angle C$, $\overline{SB} = \overline{SC}$ и $\angle BSK = \angle CSL$), добиваме дека нив-



ните плоштини се еднакви, односно $P_{SBK} = P_{SCL}$. Следствено, плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на плоштината на паралелограмот $AKLD$ ($AK \parallel DL$ и $KL \parallel AD$ по конструкција), односно $P = mh = \frac{a+b}{2}h$.

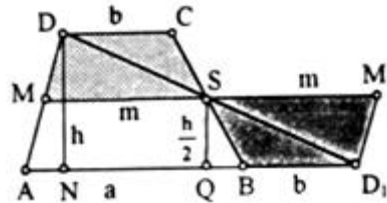
Петти начин. Трапезот $ABCD$ го пресликуваме со централна симетрија во однос на средината S на кракот BC на трапезот. Бидејќи $AD \parallel A_1D_1$ и $AD_1 \parallel A_1D$, четириаголникот AD_1A_1D



е паралелограм (цртеж десно), со основа $\overline{AD_1} = a + b$ и висина $\overline{DH} = h$. Затоа неговата плоштина е еднаква на $(a + b)h$.

Но, трапезот A_1CBD_1 е централносиметрична слика на трапезот $ABCD$, па затоа овие два трапеzi се складни, што значи дека имаат еднакви плоштини. Оттука следува дека $2P = (a + b)h$, односно $P = \frac{a+b}{2}h$.

Шести начин. Нека MS е средна линија на трапезот $ABCD$. Тогаш четириаголниците $ABSM$ и $MSCD$ се трапеzi. Четириаголникот $MSCD$ го пресликуваме со централна симетрија во однос на средината S на кракот BC на трапезот и го добиваме трапезот M_1SBD_1 (цртеж десно), кој е складен со четириаголникот $MSCD$. Значи, $P_{M_1SBD_1} = P_{MSCD}$. Сега, плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на плоштината на паралелограмот MM_1D_1A ,



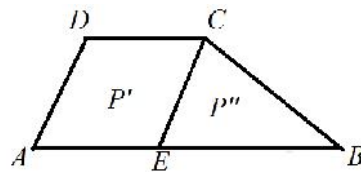
чија основа е $\overline{AD_1} = a + b$ и висина $\overline{SQ} = \frac{h}{2}$. Затоа $P = \frac{a+b}{2}h$.

Седми начин. Со правата $CE \parallel AD$ трапезот $ABCD$ го разложуваме на паралелограм $AECD$ со плоштина P' и триаголник EBC со плоштина P'' . Двета фигури имаат еднакви висини и како паралелограмот има основа b , триаголникот има основа $a - b$, важи

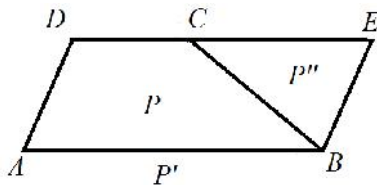
$$P' = bh \text{ и } P'' = \frac{(a-b)h}{2}.$$

Конечно, за плоштината на трапезот добиваме

$$P = P' + P'' = bh + \frac{(a-b)h}{2} = \frac{a+b}{2}h.$$

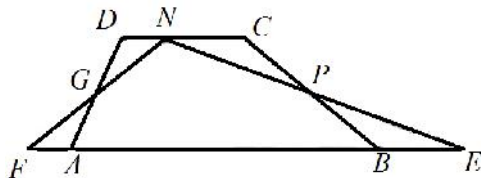


Осми начин. Ако повлечема права $BE \parallel AD$ до пресекот со правата DC , добиваме паралелограм $ABED$. Тогаш плоштината на трапезот ќе биде еднаква на разликата на плоштините на паралелограмот $ABED$ и триаголникот BEC . Според тоа,



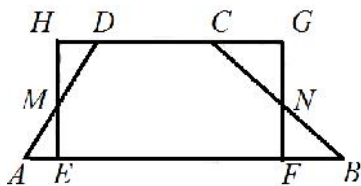
$$P = P' - P'' = ah - \frac{(a-b)h}{2} = \frac{a+b}{2}h.$$

Деветти начин. Нека N е произволна точка основата CD , а G и P се средините на краците AD и BC , соодветно. Правите NG и NP ја сечат правата AB во точките F и E , соодветно. Тогаш $\triangle FAG \cong \triangle NDG$ и $\triangle EBF \cong \triangle DCF$ и како $\overline{FE} = a + b$, добиваме



$$P_{ABCD} = P_{FEN} = \frac{a+b}{2}h.$$

Десетти начин. Нека M и N се соодветно средините на краците AD и BC на трапезот $ABCD$. Низ точките M и N повлекуваме нормали на основите и во пресекот со правите на кои лежат основите ги добиваме точките E, F, G, H . Јасно,

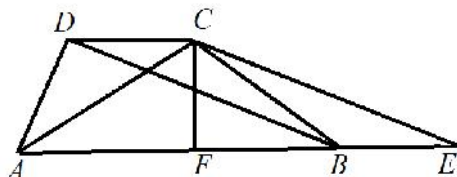


четириаголникот $EFGH$ е правоаголник со страни $\frac{a+b}{2}$ и h . Понатаму, $\triangle AEM \cong \triangle DHM$ и $\triangle BFN \cong \triangle CGN$, па затоа

$$P_{ABCD} = P_{EFGH} = \frac{a+b}{2}h.$$

Единаесетти начин. Нека $CE \parallel AD$. Тогаш триаголниците ACD и BEC имаат еднакви основи и висини. Јасно, триаголникот AEC има основа $a + b$ и висина h . Затоа

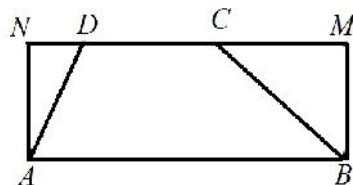
$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ACD} + P_{ABC} \\ &= P_{ABC} + P_{BEC} \\ &= P_{AEC} = \frac{a+b}{2}h. \end{aligned}$$



Дванаесетти начин. Трапезот $ABCD$ го дополнуваме со триаголници ADN со плоштина P' и BMC со плоштина P'' , до правоаголник $ABMN$ со плоштина P''' .

Сега за площината P на трапезот $ABCD$ добиваме

$$\begin{aligned} P &= P''' - P'' - P' = ah - \frac{xh}{2} - \frac{yh}{2} \\ &= ah - \frac{(x+y)h}{2} = ah - \frac{(a-b)h}{2} \\ &= \frac{a+b}{2}h. \end{aligned}$$

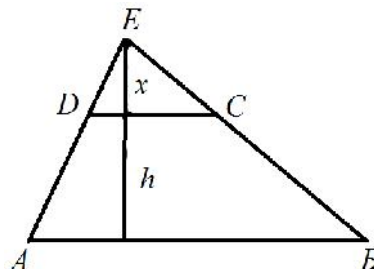


Тринаесетти начин. Трапезот $ABCD$ го дополнуваме до триаголникот ABE (цртеж десно). Притоа важи

$$(h+x):x = a:b, \text{ т.е. } ax = (h+x)b.$$

Сега,

$$\begin{aligned} P &= P_{ABE} - P_{DCE} = \frac{a(h+x)}{2} - \frac{bx}{2} \\ &= \frac{ah}{2} + \frac{b(h+x)}{2} - \frac{bx}{2} = \frac{a+b}{2}h. \end{aligned}$$



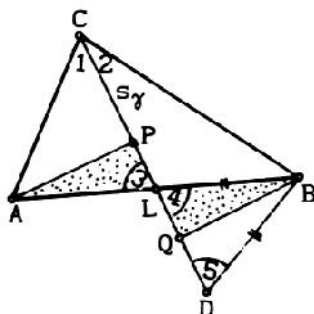
Задача 3. За секој триаголник симетралата на кој било внатрешен агол ја дели спротивната страна на отсечки пропорционални на налегнатите страни на тој агол.

Решение. Нека симетралата s_γ на внатрешниот агол γ на триаголникот ABC ја сече страната AB во точката L (цртеж десно). Треба да докажеме дека

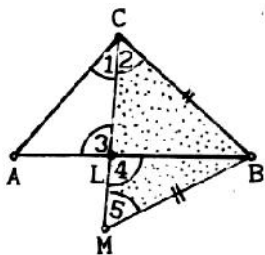
$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}.$$

Прв начин. На симетралата s_γ ја избираме точката D , такла што $\overline{BD} = \overline{BL}$. Тогаш $\angle 4 = \angle 5$, а бидејќи $\angle 4 = \angle 3$ (како накрсни агли) следува $\angle 3 = \angle 5$. Имајќи предвид дека $\angle 1 = \angle 2$ заклучуваме дека $\triangle ALC \sim \triangle BDC$. Затоа $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{BD}$, од каде што, поради $\overline{BD} = \overline{BL}$, конечно добиваме

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}.$$



Втор начин. Од темињата A и B ги повлекуваме нормалите на симетралата s_γ и нивните подножја ги означуваме со P и Q (цртеж горе десно). Тогаш очигледно $\triangle APL \sim \triangle BQL$ и $\triangle APC \sim \triangle BQC$, а оттука следува $\overline{AL} : \overline{BL} = \overline{AP} : \overline{BQ}$ и $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{BQ}$, па затоа $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.

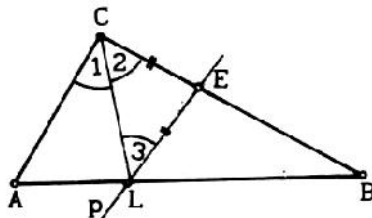


Трет начин. На симетралата s_γ ја избираме точката M таква што $\overline{BM} = \overline{BC}$ (цртеж лево). Оттука $\angle 2 = \angle 5$, како агли при основата на рамнокракиот триаголник CMB , па бидејќи $\angle 2 = \angle 1$, добиваме $\angle 1 = \angle 5$. Понатаму, $\angle 3 = \angle 4$, од каде што следува дека $\triangle ALC \sim \triangle BLM$, па затоа $\overline{AC} : \overline{AL} = \overline{BM} : \overline{BL}$. Но, $\overline{BM} = \overline{BC}$, па добиваме $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.

Четврт начин. Низ точката L ја повлекуваме правата p паралелна со страната AC , и нејзиниот пресек со страната BC да го означиме со E (цртеж десно). Тогаш очигледно $\triangle ABC \sim \triangle LBE$, па затоа

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{LE} : \overline{BE} \quad (1)$$

Понатаму, од $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$ (како наизменични) следува $\angle 2 = \angle 3$, т.е.



$\triangle CLE$ е рамнокрак, па следува $\overline{LE} = \overline{CE}$. Со замена во (1) добиваме

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{CE} : \overline{BE}. \quad (2)$$

Но, според Талесовата теорема имаме

$$\overline{AL} : \overline{LB} = \overline{CE} : \overline{BE}. \quad (3)$$

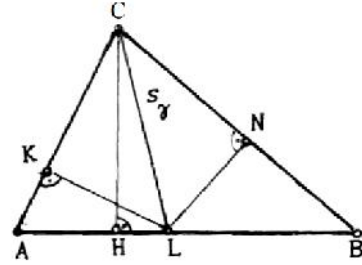
Конечно, од (2) и (3) следува $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.

Петти начин. Симетралата s_γ го дели $\triangle ABC$ на два триаголника ACL и BLC (цртеж десно). Нивните плоштини се

$$P_{ACL} = \frac{1}{2} \overline{AL} \cdot \overline{CH} \text{ и } P_{BCL} = \frac{1}{2} \overline{LB} \cdot \overline{CH},$$

па затоа

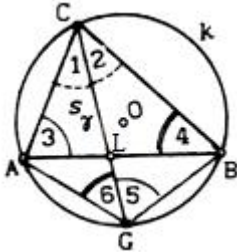
$$P_{ACL} : P_{BCL} = \overline{AL} : \overline{LB}. \quad (1)$$



Од друга страна, пак, за истите плоштини добиваме $P_{ACL} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{LK}$ и $P_{BCL} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{LN}$. Но, $\overline{LK} = \overline{LN}$ (својство на симетралата на даден агол), па затоа

$$P_{ACL} : P_{BCL} = \overline{AC} : \overline{BC}. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.



Шести начин. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а G е пресечната точка на таа кружница со симетралата s_γ (цртеж лево). Тогаш од $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 6 = \angle 4$ (како перифериски агли над ист лак) следува дека $\triangle ACG \sim \triangle LCB$, а оттука $\overline{AC} : \overline{AG} = \overline{LC} : \overline{LB}$, т.е

$$\overline{AC} \cdot \overline{LB} = \overline{LC} \cdot \overline{AG}. \quad (1)$$

Слично, од $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 5$ следува дека $\triangle ALC \sim \triangle GBC$, а оттука $\overline{AL} : \overline{LC} = \overline{GB} : \overline{BC}$, т.е

$$\overline{AL} \cdot \overline{BC} = \overline{LC} \cdot \overline{GB}. \quad (2)$$

Бидејќи $\overline{AG} = \overline{BG}$, како тетиви над еднакви перифериски агли, од (1) и (2) добиваме $\overline{AC} \cdot \overline{LB} = \overline{AL} \cdot \overline{BC}$, односно $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.

Седми начин. Низ точката L повлекуваме две прави $p \parallel AC$ и $g \parallel BC$. Тие ги сечат страните BC и AC во точките E и F соодветно (цртеж долу десно). Лесно се докажува дека четириаголникот $LECF$ е ромб, т.е.

$$\overline{LE} = \overline{LF}. \quad (1)$$

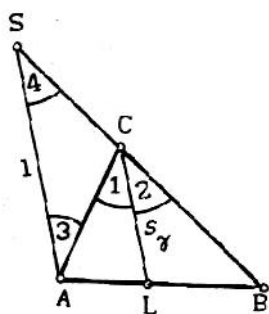
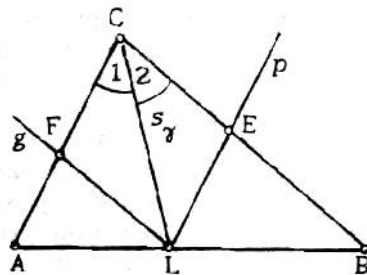
Очигледна е и сличноста на триаголниците ABC , ALF и LBE . Од $\triangle ALF \sim \triangle LBE$ следува дека $\overline{AL} : \overline{LB} = \overline{LF} : \overline{BE}$, од каде ако се земе предвид (1) добиваме

$$\overline{AL} : \overline{LB} = \overline{LE} : \overline{BE}. \quad (2)$$

Од $\triangle ABC \sim \triangle LBE$ следува дека

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{LE} : \overline{BE}. \quad (3)$$

Конечно, од (2) и (3) добиваме $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.



Осми начин. Низ темето A на $\triangle ABC$ повлекуваме права $l \parallel s_\gamma$ која продолжението на страната BC го сече во точката S (цртеж лево). Тогаш $\angle 1 = \angle 3$, како наизменични и $\angle 2 = \angle 4$, како согласни, па затоа $\angle 3 = \angle 4$, што значи дека триаголникот ASC е рамнокрак. Затоа важи

$$\overline{AC} = \overline{SC}. \quad (1)$$

Според Талесовата теорема имаме

$$\overline{SC} : \overline{CB} = \overline{AL} : \overline{LB}. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AL} : \overline{LB}$.

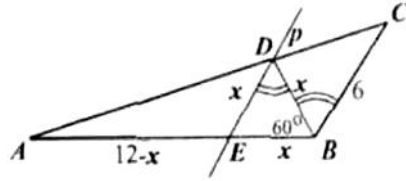
Задача 4. Пресметај ја должината BD на симетралата на аголот β во триаголникот ABC , ако: $a = 6\text{ cm}$, $c = 12\text{ cm}$ и $\beta = 120^\circ$.

Решение. Прв начин. Нека $\overline{BD} = x$ е симетралата на аголот β на $\triangle ABC$. Низ точката D повлекуваме права $p \parallel BC$ и нека $p \cap AB = \{E\}$. Ќе докажеме дека $\triangle BDE$ е рамностран. Навистина:

$$\angle DBE = \frac{1}{2}120^\circ = 60^\circ \text{ и}$$

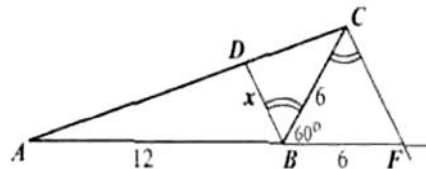
$$\angle BDE = \angle DBC = 60^\circ \text{ (наизменични).}$$

Според тоа, $\triangle BDE$ е рамностран, па следува $\overline{ED} = \overline{EB} = x$. Понатаму, очигледно $\triangle AED \sim \triangle ABC$, па затоа $\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{AB} : \overline{BC}$, од каде следува $(12 - x) : x = 12 : 6$, односно $x = 4$. Значи, $\overline{BD} = 4\text{ cm}$.



Црт. 1

Втор начин. Нека $\overline{BD} = x$ е симетралата на аголот β на $\triangle ABC$ и нека $CF \parallel BD$ (цртеж 2). Лесно се заклучува дека $\triangle BFC$ е рамностран, бидејќи има два агли по 60° , и дека $\triangle ABD \sim \triangle AFC$, од каде $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AF} : \overline{FC}$.

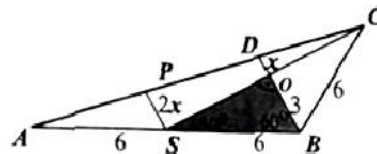


Црт. 2

Значи, $12 : x = (12 + 6) : 6$, т.е. $x = 4$. Конечно, $\overline{BD} = 4\text{ cm}$.

Трет начин. Нека S е средината на страната AB . Тогаш $\overline{AS} = \overline{SB} = 3\text{ cm}$, па следува дека триаголникот CSB е рамнокрак, со агли при основата CS од 30° (цртеж 3). Бидејќи BD е симетрала на аголот β , следува дека триаголникот SBO е правоаголен, па затоа

$$\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{SB} = 3, \quad (1)$$



Црт. 3

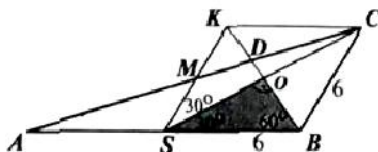
(катетата наспроти агол од 30° е еднаква на половина од хипотенузата). Низ S повлекуваме права $SP \parallel BD$. Бидејќи O е средина на отсечката CS , следува дека $\overline{OD} = x$ е средна линија во триаголникот SCP . Затоа $\overline{SP} = 2x$. Од друга страна, SP е сред-

на линија во триаголникот ABD , бидејќи S е средина на AB , па затоа $\overline{BD} = 2\overline{SP} = 4x$. Според тоа,

$$\overline{BO} = \overline{BD} - \overline{OD} = 4x - x = 3x. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $x = 1$. Значи, $\overline{BD} = 4 \text{ cm}$.

Четврт начин. Нека S е средина на страната AB . Тогаш триаголникот CSB е рамнокрак, со агли при основата од 30° (цртеж 4). Нека K е симетричната точка на точката B во однос на правата CS . Тогаш четириаголникот $SBCK$ е ромб чии дијагонали се половат во пресечната точка O . Притоа, бидејќи $\angle BSK = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ = \angle BCK$, триаголниците SBK и BCK се рамно-страни, со страна 6 cm . Значи, $\overline{BK} = 6 \text{ cm}$, а $\overline{OK} = 3 \text{ cm}$. Бидејќи S е средина на отсечката AB и $SK \parallel BC$, заклучуваме дека SM е средна линија во триаголникот ABC , т.е. $\overline{SM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3 \text{ cm}$. Но, $\overline{SK} = 6 \text{ cm}$, па значи M е средина на отсечката SK . Според тоа, отсечката CM е тежишна линија во триаголникот SCK . Исто така, и KO е тежишна линија во истиот триаголник, па затоа нивната пресечна точка D е тежиште на триаголникот SCK . Според тоа, $\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OK} = 1 \text{ cm}$, $\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BK} = 3 \text{ cm}$ и затоа важи $\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 4 \text{ cm}$.

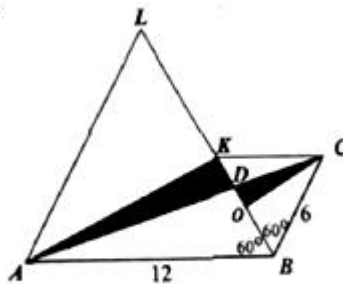


Црт. 4

Петти начин. Нека BD е симетралата на аголот β на $\triangle ABC$. Тогаш $\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$. Конструираме два рамно-страни триаголника ABL со страна 12 cm , и BCK со страна 6 cm (цртеж 5). Нивните висини се однесуваат како $2:1$, односно $\overline{AK} : \overline{CO} = 2:1$. Правоаголните триаголници AKD и COD се слични, па затоа

$$\overline{KD} : \overline{OD} = \overline{AK} : \overline{CO} = 2:1.$$

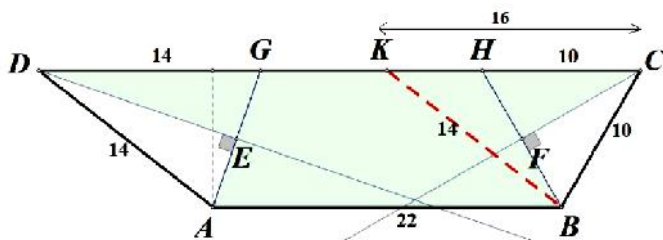
Оттука следува $\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OK} = 1 \text{ cm}$ и $\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 4 \text{ cm}$.



Црт. 5

Задача 5. Во траpezот $ABCD$ важи $AB \parallel CD$, $\overline{AB} = 22$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{CD} = 38$ и $\overline{DA} = 14$. Аглите во темињата A и B се тапи. Симетралите на аглите во темињата A и D се сечат во точката E , а симетралите на аглите во темињата B и C се сечат во точката F . Определи ја плоштината на шестаголникот $ABFCDE$.

Решение. Прв начин. Да означиме $\angle DAB = 2\alpha$. Тогаш $\angle DAE = \alpha$. Понатаму, $\angle ADC = 180^\circ - 2\alpha$, односно $\angle ADE = 90^\circ - \alpha$. Според тоа, $\angle AED = 90^\circ$. Аналогно се докажува дека $\angle BFC = 90^\circ$.



Нека G е пресек на CD и AE (симетралата на аголот во темето A) и H е пресек на CD и BF . За триаголникот AGD правата DE е истовремено висина и симетрала на аголот аголот во темето D , па затоа овој триаголник е рамнокрак. Аналогно се заклучува дека и триаголникот HBC е рамнокрак. Затоа плоштината на триаголникот DEG е еднаква на половина од плоштината на триаголникот AGD , а плоштината на триаголникот BFC е еднаква на половина од плоштината на триаголникот HBC . Оттука следува дека плоштината на шестаголникот $ABFCDE$ е еднаква на

$$\begin{aligned} P_{ABFCDE} &= P_{ABCD} - \frac{1}{2}P_{BCH} - \frac{1}{2}P_{ADG} \\ &= \frac{22+38}{2}h - \frac{1}{2} \cdot \frac{10h}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{14h}{2} = 24h. \end{aligned}$$

За да ја определиме висина h ќе го користиме триаголникот BCK , каде $BK \parallel AD$ (види цртеж). Притоа е јасно дека должините на страните на триаголникот BCK се 10, 16 и 14, па затоа ако ја искористиме Хероновата формула за неговата плоштина добиваме

$$P_{BCK} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 6} = 40\sqrt{3}.$$

Според тоа, $\frac{16h}{2} = 40\sqrt{3}$, од каде добиваме $h = 5\sqrt{3}$. Конечно,

$$P_{ABFCDE} = 24h = 24 \cdot 5\sqrt{3} = 120\sqrt{3}.$$

Втор начин. Ќе ги користиме цртежот и ознаките како и во првиот начин на решавање.

Како и во првиот начин ан решавање докажуваме дека триаголниците AGD и HBC се рамнокраки, односно дека E и F се соодветно средини на отсечките AG и HB . Од тоа следува дека EF е средната линија на трапезот $ABGH$, па затоа нејзината должина е $\overline{EF} = \frac{22+(38-10-14)}{2} = 18$. Висината на почетниот трапез ја пресметуваме како и во првиот начин на решавање

$$\frac{16h}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 6} = 40\sqrt{3},$$

$$h = 5\sqrt{3}.$$

Бараната плоштина на шестаголникот $ABFCDE$ ја пресметуваме како збир на плоштините на трапезите $ABFE$ и $CDEF$. Имаме:

$$\begin{aligned} P_{ABFCDE} &= P_{ABFE} + P_{CDEF} \\ &= \frac{22+18}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{38+18}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ &= 50\sqrt{3} + 70\sqrt{3} = 120\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Задача 6. Во рамнокрак триаголник ABC важи $\angle BAC = \angle ABD = 20^\circ$, $AB = AC$ и $D \in AC$. Докажи го равенството

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{BC} - \frac{1}{AB}.$$

Решение. Прв начин. Да ги воведеме следниве ознаки:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = b, \overline{BC} = a \text{ и } \overline{BD} = c.$$

Тогаш даденото равенство го добива обликот

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Ако двете страни на последното равенство ги помножиме со abc добиваме

$$ab = bc - ac.$$

(*)

Во рамнокракиот триаголник ABC је важи

$$\angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ.$$

Триаголникот ABD исто така е рамнокрак, па е

$$\overline{AD} = \overline{BD} = c \text{ и } \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = b - c.$$

На отсечката BD да определиме точка E таква да важи $\overline{BE} = \overline{BC} = a$ (цртеж 1). Триаголникот BCE е рамностран, бидејќи

$$\overline{BE} = \overline{BC} \text{ и } \angle CBE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

Во $\triangle CDE$ важи

$$\angle DCE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ, \angle CED = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle CDE = 180^\circ - (120^\circ + 20^\circ) = 40^\circ \text{ и } DE = BD - BE = c - a.$$

Да ја продолжиме страната AC до тачка G така да $\overline{CG} = \overline{BC} = a$. Триаголникот BCG е рамнокрак, што значи дека

$$\angle CBG = \angle BGC = \frac{1}{2} \angle BCA = 40^\circ.$$

Но, $\angle BDC = 40^\circ$ и оттука заклучуваме дека $\triangle BDG$ е рамнокрак. Затоа $\overline{BG} = \overline{BD} = c$. Триаголниците ABG и CDE имаат еднакви агли, па затоа се слични. Од сличноста следува

$$\overline{AB} : \overline{BG} = \overline{CE} : \overline{DE}, \text{ т.е. } b : c = a : (c - a).$$

Одовде добиваме

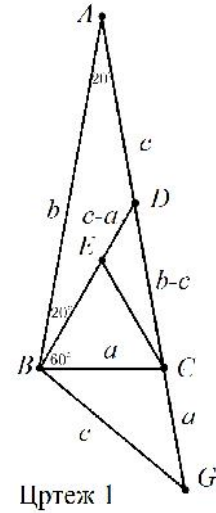
$$b(c - a) = ac$$

или

$$bc - ab = ac,$$

односно

$$bc - ac = ab,$$



Цртеж 1

што значи дека важи (*).

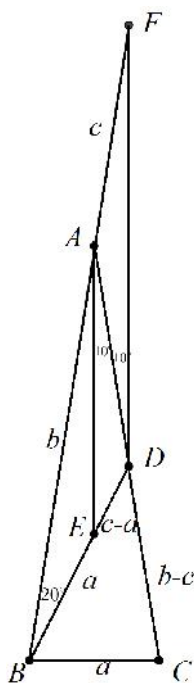
Втор начин. Тачку E одредимо као у претходното решение, а потоа да ја продолжиме страната BA до тачка F така да важи $\overline{AF} = \overline{AD} = c$ (цртеж 2). Триаголникот ADF е рамнокрак, па затоа важи

$$\angle AFD = \angle ADF = \frac{1}{2} \angle BAC = 10^\circ.$$

Триаголниците AEC и BDF се слични, бидејќи имаат еднакви агли. Затоа

$$\overline{CE} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BF}, \text{ т.е. } a : c = b : (b + c).$$

Од последното равенство, после скратувањето го добиваме бараното равенство (*).



Цртеж 3

односно

Оттука

или

т.е.

Трет начин. Точките E и F да ги определиме како во второто решение (цртеж 3). Бидејќи

$$\angle ADF = \angle DAE = 10^\circ,$$

добиваме дека $AE \parallel FD$. Со примена на Талесовата теорема наоѓаме

$$\overline{DE} : \overline{FA} = \overline{EB} : \overline{AB}, \text{ т.е.}$$

$$(c - a) : c = a : b.$$

Конечно, од последното равенство лесно следува равенството (*).

Четврт начин. Прво како во првото решение ја определуваме точката E , а потоа ја продолжуваме отсечката BD до тачка P така да

$$\overline{DP} = \overline{DC} = b - c,$$

цртеж 4. Тогаш важи

$$\angle CPD = \angle DCP = \frac{1}{2} \angle BDC = 20^\circ.$$

Триаголниците CDE и CPE се слични, па затоа

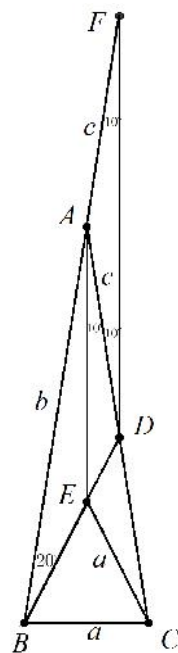
$$\overline{CE} : \overline{DE} = \overline{EP} : \overline{CE},$$

$$a : (c - a) = (b - a) : a.$$

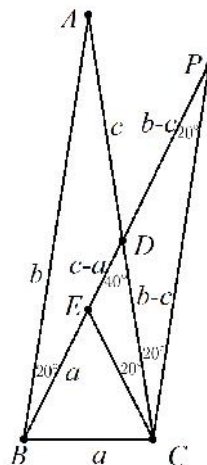
$$a^2 = (b - a)(c - a),$$

$$0 = bc - ab - ac,$$

$$ab = bc - ac.$$



Цртеж 2



Цртеж 4

Задача 7. Даден е рамнокракиот триаголник ABC со краци CA и CB и агол меѓу нив 20° . Нека D е точка од кракот CA така што $\angle ABD = 60^\circ$, а E е точка од кракот CB така што $\angle BAE = 50^\circ$ (цртеж 1). Пресметај го аголот BDE .

Решение. Да ја означиме должината на краците на дадениот триаголник со a , а должината на основата со c . Од условот во задачата следува дека

$$\angle CAB = \angle CBA = 80^\circ, \angle CAE = 30^\circ, \angle CBD = 20^\circ,$$

$$\angle ADB = 40^\circ, \angle AEB = 50^\circ, \angle BDC = 140^\circ.$$

Оттука следува дека триаголниците BCD и EAB се рамнокраки, па $\overline{BE} = \overline{BA} = c$ и нека $\overline{DC} = \overline{DB} = d$. Овие ознаки ќе го имаат истото значење во сите решенија.

Прв начин. Нека F е точка од кракот CB така што DF и AB се паралелни и нека пресечната точка на AF и DB е G (цртеж 2). Тогаш четириаголникот $ABFD$ е рамнокрак трапез па $\angle BAG = \angle ABG = 60^\circ$, односно триаголникот ABG е рамностран, како и триаголникот GFD . Значи $\overline{BG} = \overline{BA} = \overline{BE} = c$ и оттука следува дека триаголникот EGB е рамнокрак. Тогаш

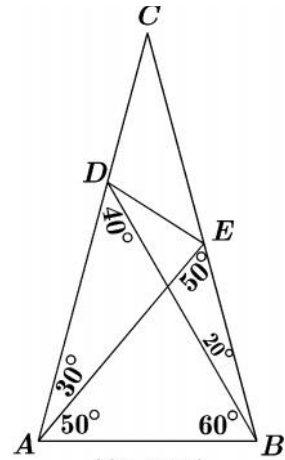
$$\angle BGE = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ \text{ и}$$

$$\angle FGE = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ.$$

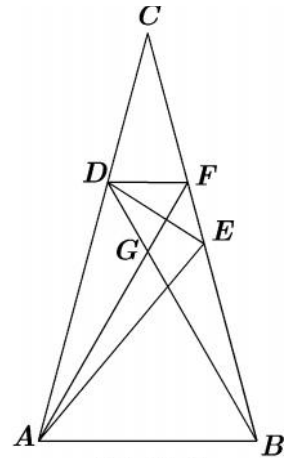
Од $\angle FGE = \angle GFE = 40^\circ$ следува $\overline{EG} = \overline{EF}$, а бидејќи триаголникот GFD е рамностран имаме $\overline{DG} = \overline{DE}$. Затоа четириаголникот $GEFD$ е делтоид, па DE го преполовува аголот GDF , односно $\angle BDE = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$.

Втор начин. Нека F е точка од кракот CA така што $\angle ABF = 20^\circ$ (цртеж 3). Тогаш триаголникот ABF е рамнокрак па $\overline{BF} = c$. Бидејќи и $\overline{BE} = c$, триаголникот EFB е рамнокрак, а од

$$\angle FBE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$$



Цртеж 1



Цртеж 2

следува дека тој е рамнострани. Од друга страна имаме

$$\angle DBF = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ,$$

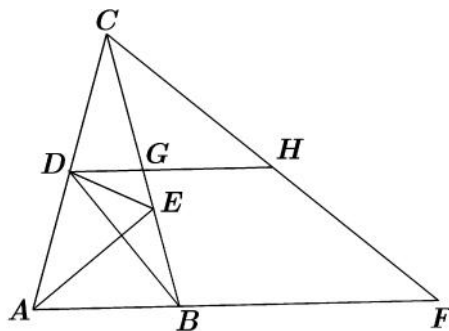
па затоа и триаголникот BDF е рамнокрак, односно $\overline{DF} = c$. Тогаш, триаголникот EDF е рамнокрак,

$$\angle FDE = \frac{60^\circ + 80^\circ}{2} = 70^\circ$$

и затоа

$$\angle BDE = \angle FDE - \angle FDB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

Трет начин. Нека F е точка на полуправата AB така што $\overline{BF} = a$, H е точка од CF така што DH и AB се паралелни и нека G е пресечната



Цртеж 4

точка на DH и CB (цртеж 4). Тогаш, од рамнокракиот триаголник FCB следува

$$\angle BFC = \angle BCF = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Бидејќи

$$\angle AFC = \angle ADB = 40^\circ \text{ и}$$

$$\angle FAC = \angle DAB = 80^\circ,$$

следува дека триаголниците AFC и

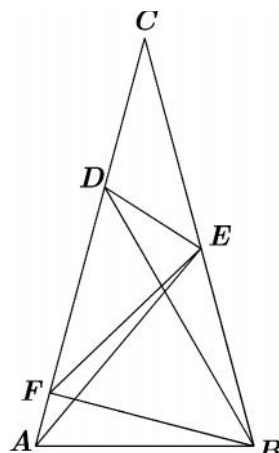
ADB се слични, па $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$, односно $\frac{c+a}{a} = \frac{a-d}{c}$. Тогаш $\frac{c+a-a}{a} = \frac{a-d-c}{c}$ односно $\frac{a-d-c}{c} = \frac{c}{a}$. Оттука имаме

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{BE}} = \frac{a-d-c}{c} = \frac{c}{a} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DB}}.$$

Од $\frac{\overline{EG}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DB}}$ следува дека DE е симетрала на аголот $\angle BDG = 60^\circ$ и затоа $\angle BDE = 30^\circ$.

Четврт начин. Нека кружницата $k(B, \overline{BD})$ го сече кракот CB во точка G , а полуправата BA во точка F (цртеж 5). Тогаш триаголникот BDF е рамнострани и оттука следува $\angle FDA = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$, а триаголникот BGD е рамнокрак и

$$\angle BDG = \angle BGD = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$



Цртеж 3

Имаме

$$\overline{CD} = \overline{DF}, \angle FDA = \angle DCG = 20^\circ \text{ и}$$

$$\overline{CG} = \overline{BC} - \overline{BG} = \overline{AC} - \overline{CD} = \overline{DA}$$

па триаголниците CDG и DFA се складни и оттука $\overline{DG} = \overline{FA}$. Бидејќи

$$\overline{FA} = \overline{FB} - \overline{AB} = \overline{GB} - \overline{EB} = \overline{GE},$$

следува дека триаголникот GDE е рамнокрак, така што

$$\angle GDE = \angle GED = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Тогаш,

$$\angle BDE = \angle BDG - \angle EDG = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ.$$

Петти начин. Нека F е точка така што четириаголникот $ABFD$ е паралелограм, G е пресечната точка на CB и DF и нека H е точка од FB така што EH е паралелна со AB (цртеж 6). Тогаш

$$\angle FBG = \angle FBA - \angle GBA = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ,$$

па BG е симетрала на аголот FBD . Триаголникот BHE е рамнокрак и оттука следува $\overline{BH} = \overline{BE}$. Бидејќи $\overline{BE} = \overline{BA}$, триаголникот ABH е рамнокрак па

$$\angle AHB = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Од $\angle AHB = \angle AGB = 40^\circ$ следува дека четириаголникот $ABHG$ е тетивен. Затоа

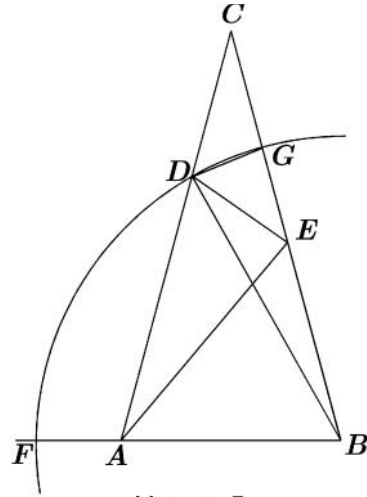
$\angle AGH = 180^\circ - \angle ABH = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, а бидејќи и

$$\angle GHA = \angle GBA = 80^\circ$$

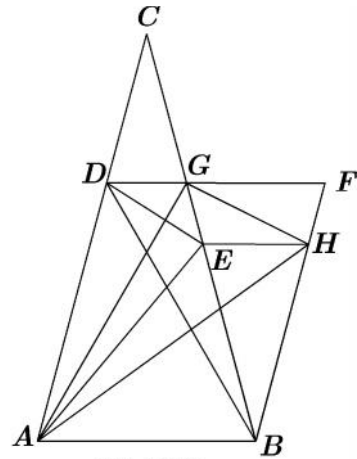
добиваме дека триаголникот AHG е рамнокрак. Тогаш

$$\angle EGH = \angle AGH - \angle AGE = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ,$$

односно GH е симетрала на аголот EGH . Бидејќи $FGEH$ е рамнокрак трапез и GH е негова дијагонала, следува дека и дијагоналата FE ќе го преполовува аголот GFH . Значи, за триаголникот BFD имаме BE е симетрала на аголот FBD и FE е симетрала на аголот BFD тогаш DE е симетрала на аголот $\angle BDF = 60^\circ$ и оттука следува дека $\angle BDE = 30^\circ$.



Цртеж 5



Цртеж 6

Шести начин. Нека $ABA_3 \dots A_{18}$ е правилен 18 – аголник со центар C (цртеж 7). Нека A_3A_{15} ја сече CB во X . Имаме

$$\begin{aligned}\angle XA_3B &= \angle A_{15}A_3B \\ &= \frac{1}{2} \angle A_{15}CB \\ &= \frac{1}{2} 100^\circ = 50^\circ.\end{aligned}$$

Тогаш триаголниците ABE и A_3BX се складни бидејќи

$$\begin{aligned}\angle ABE &= \angle A_3BX = 80^\circ, \\ \angle EAB &= \angle XA_3B = 50^\circ \text{ и} \\ \overline{AB} &= \overline{A_3B}.\end{aligned}$$

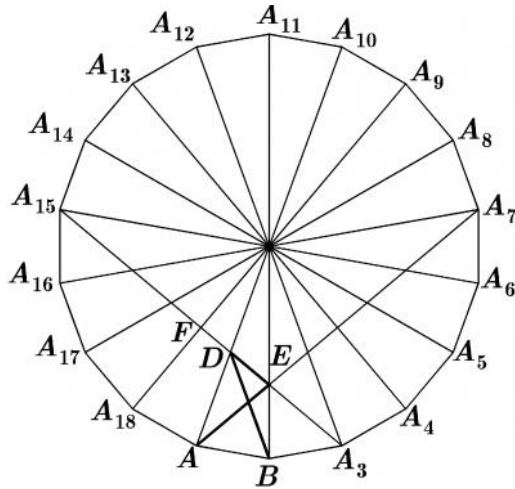
Тогаш $\overline{BE} = \overline{BX}$, а оттука $X = E$, односно A_3A_{15} ја сече

CB во E . Слично се докажува дека AA_7 ја сече CB во E . Нека A_3A_{15} и CA_{18} се сечат во F . Бидејќи

$$\angle FA_{15}C = \angle A_3A_{15}A_6 = \frac{1}{2} \angle A_3CA_6 = 30^\circ \text{ и } \angle A_{15}CF = \angle A_{15}CA_{18} = 60^\circ,$$

следува дека $\angle A_{15}FC = 90^\circ$ и затоа од рамностранот триаголник $CA_{15}A_{18}$ добиваме $\overline{A_{18}F} = \overline{FC}$. Бидејќи триаголникот $CA_{18}B$ е рамнокрак и CD е симетрала на аголот спроти основата следува дека $\overline{DA_{18}} = \overline{DB}$. Од $\overline{DA_{18}} = \overline{DB}$ и $\overline{DB} = \overline{DC}$ имаме $\overline{DA_{18}} = \overline{DC}$. Оттука и од тоа што $\overline{A_{18}F} = \overline{FC}$ добиваме дека $\angle DFC = 90^\circ$. Тогаш A_{15}, F, D, E и A_3 се колинеарни точки па $\angle DA_3B = \angle A_{15}A_3B = 50^\circ$. Тогаш од триаголникот A_3DB имаме

$$\begin{aligned}\angle BDE &= \angle BDA_3 = 180^\circ - \angle DA_3B - \angle DBA_3 \\ &= 180^\circ - 50^\circ - \angle DBE - \angle EBA_3 \\ &= 130^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 30^\circ.\end{aligned}$$



Цртеж 7

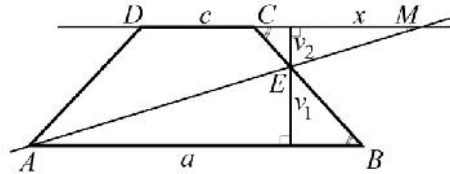
Задача 8. Во трапезот $ABCD$ должините на поголемата AB и помалата основа CD се однесуваат како $3:1$. На продолжението на CD преку темето C избрана е точка M така да правата AM го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека растојанието на точката M до темето C е половина од должината на основата AB .

Решение. Прв начин. Нека должината на поголемата основа е a , на помалата c , висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x , види цртеж. Од условот на задачата следува $a:c = 3:1$, т.е. $a = 3c$. Понатаму, бидејќи $P_{\triangle ABE} = P_{AECD}$, важи

$$\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2} (v_1 + v_2).$$

Ако замениме $a = 3c$ добиваме

$$\frac{3cv_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3c+c}{2} (v_1 + v_2),$$



Од каде после средувањето наоѓаме $v_1 : v_2 = 2 : 1$. Од сличноста на триаголниците ABE и MCE следува $a : x = v_1 : v_2$, па затоа $a : x = 2 : 1$, односно $x = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека должината на поголемата основа е a , на помалата c , висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x . Од условот на задачата следува $a : c = 3 : 1$, т.е. $a = 3c$. бидејќи $P_{\triangle ABE} = P_{AECD}$, важи

$$\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2} (v_1 + v_2).$$

Од последното равенство следува

$$2av_1 = (a+c)(v_1 + v_2),$$

односно

$$av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2.$$

Од сличноста на триаголниците ABE и MCE следува $a : x = v_1 : v_2$, па затоа $x = \frac{av_2}{v_1}$. Ако во равенството $av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2$ земеме дека $a = 3c$ добиваме

$3cv_1 = 3cv_2 + cv_1 + cv_2$, односно $v_1 = 2v_2$. Конечно, со замена во $x = \frac{av_2}{v_1}$ добиваме

дека $x = \frac{av_2}{2v_2} = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Трет начин. Нека должината на поголемата основа е a , на помалата c , висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x . Од условот на задачата следува $a : c = 3 : 1$, т.е. $a = 3c$. Бидејќи

$$P_{\triangle ABE} = P_{AECD} = \frac{1}{2} P_{ABCD}$$

добиваме

$$\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2} v.$$

Со замена за $a = 3c$ добиваме

$$\frac{3cv_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3c+c}{2} v,$$

односно $v_1 = \frac{2}{3}v$. Според тоа, $v_2 = \frac{1}{3}v$. Од

$$P_{AECD} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3c+c}{2} v,$$

следува

$$P_{\triangle AMD} = P_{AECD} + P_{\triangle EMC} = cv + \frac{1}{2} xv_2 = cv + \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{3} v = v(c + \frac{x}{6}).$$

Од друга страна $P_{\triangle AMD} = \frac{(c+x)v}{2}$, па затоа

$$\frac{(c+x)v}{2} = v(c + \frac{x}{6}),$$

од каде наоѓаме $6c + x = 3c + 3x$, односно $2x = 3c$. Конечно, $a = 3c = 2x$, т.е.

$x = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Задача 9. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Над страните на триаголникот ABC , надвор од триаголникот се конструирани квадрати $APRB$, $BSTC$ и $ACUV$. Докажи дека

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} + P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{BSTC} + P_{ACUV}.$$

Решение. Прв начин. Триаголникот ABC е рамнокрак и правоаголен, па затоа $a = \overline{AC} = \overline{BC}$ и $c = \overline{AB}$. Нека D е подножната точка на нормалата повлечена од точката R на правата SB . Од $BC \perp BD$ и $AB \perp BR$ следува дека острите агли $\angle CBA$ и $\angle DBR$ се со нормални краци, па затоа важи

$$\angle CBA = \angle DBR = 45^\circ.$$

Триаголникот BDR е правоаголен па затоа

$$\angle BRD = 90^\circ - \angle DBR = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle BAC.$$

Понатаму, четириаголникот $APRB$ е квадрат, па затоа $\overline{BR} = \overline{AB} = c$. Освен тоа, $\angle DBR = \angle CBA$ и $\angle BRD = \angle BAC$, па од признакот за складност ACA следува дека $\triangle RBD \cong \triangle ABC$, што значи дека $\overline{DR} = \overline{CA} = a$. Отсечката DR е висина на триаголникот BRS спуштена на страната BS , па затоа

$$P_{\triangle BRS} = \frac{\overline{BS} \cdot \overline{DR}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Заради симетрија имаме $P_{\triangle AVP} = \frac{a^2}{2}$. Од друга страна триаголниците ABC и CTU се правоаголни со должини на катети еднакви на a , па затоа важи

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle CTU} = \frac{a^2}{2}.$$

Значи,

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} + P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = 4 \frac{a^2}{2} = 2a^2.$$

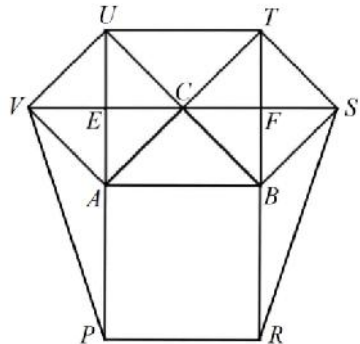
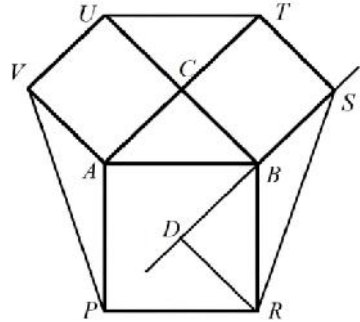
Од друга страна

$$P_{BSTC} + P_{ACUV} = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

со што тврдењето е докажано.

Втор начин. Ако ги повлечеме дијагоналите на квадратите $BSTC$ и $ACUV$ (види цртеж), добиваме дека триаголниците ABC, BTC, TBS, TUC, UAC и AUV се складни. Имено, овие триаголници се правоаголни и нивните катети се еднакви, па складноста следува од признакот SAC . Понатаму, важи

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} = P_{\triangle TBS} + P_{\triangle BTC} = P_{BSTC}.$$



Исто така важи

$$\angle BAC = \angle CAU = 45^\circ \text{ и } \angle PAB = 90^\circ,$$

па затоа точките P, A, E и U се колинеарни. Дијагоналите на квадратот се заемно нормални и се преполовуваат, па затоа $VC \perp AU$, а точката E е средина на дијагоналата на квадратот $ACUV$. Отсечката EV е висина на триаголникот AUV спуштена на страната AU , но е висина и на триаголникот AVP спуштена кон страната AP . Триаголниците ABC и UAC се складни, па затоа $\overline{AU} = \overline{AB} = \overline{AP}$. Понатаму, важи

$$P_{\triangle AVP} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{EV}}{2} = \frac{\overline{AU} \cdot \overline{EV}}{2} = P_{\triangle AUV}.$$

На ист начин се покажува дека $P_{\triangle BRS} = P_{\triangle TBS}$. Оттука

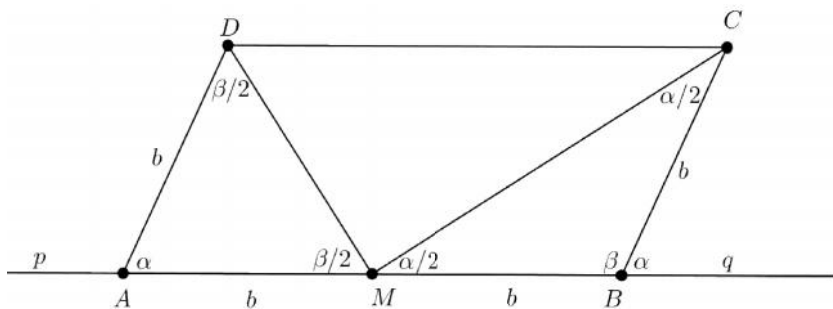
$$P_{\triangle BRS} = P_{\triangle TBS} = P_{\triangle ACU}.$$

Според тоа, важи

$$P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{\triangle AUV} + P_{\triangle ACU} = P_{ACUV},$$

со што е докажано тврдењето

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} + P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{BSTC} + P_{ACUV}.$$



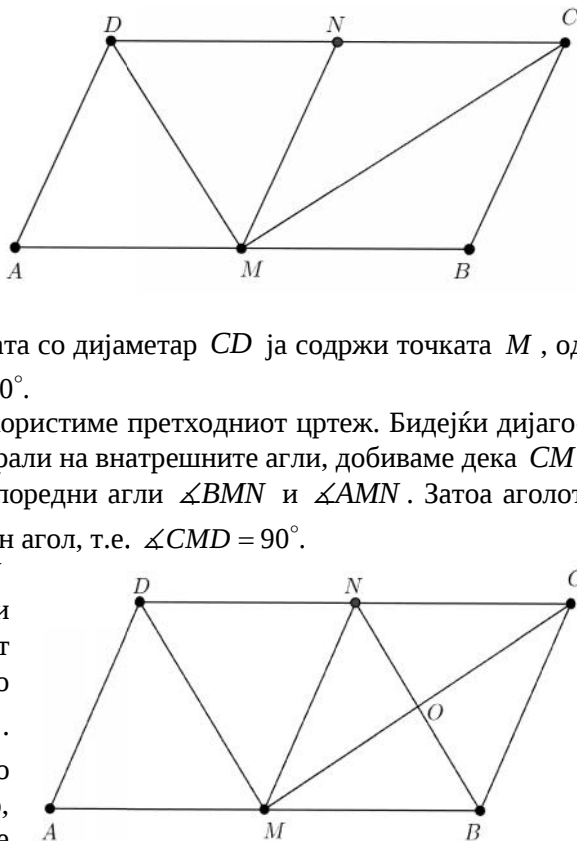
Трет начин. Нека тачката N е средина на страната CD (цртеж десно). Тогаш дадениот паралелограм е поделен на два складни ромба $AMND$ и $BCNM$, па затоа

$$\overline{MN} = \overline{CN} = \overline{DN}.$$

Но, тоа значи дека кружницата со дијаметар CD ја содржи тачката M , од што следува дека $\angle CMD = 90^\circ$.

Четврт начин. Ќе го користиме претходниот цртеж. Бидејќи дијагоналите на ромбот се и симетрала на внатрешните агли, добиваме дека CM и DM се симетрала два напоредни агли $\angle BMN$ и $\angle AMN$. Затоа аголот меѓу нив е половина од рамен агол, т.е. $\angle CMD = 90^\circ$.

Петти начин. Нека N е средина на страната CD и O пресек дијагонала ромбот $CNMB$ (цртеж десно). Јасно е дека $\overline{BN} = \overline{DM}$ и $BN \parallel DM$. Затоа $\angle CMD = \angle CON$, како агли со паралелни краци. Но, дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол, т.е. $\angle CON = 90^\circ$, па заклучуваме дека $\angle CMD = 90^\circ$.



Задача 11. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M и N припаѓаат на страните BC и CD , соодветно и се такви што $\angle BMA = \angle NMC = 60^\circ$. Определи го $\angle MAN$.

Решение. Прв начин. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$. Бидејќи $\triangle ABM$ е „половина од рамностран триаголник“ важи $\overline{AB} = \overline{BM}\sqrt{3}$, т.е.

$$\overline{BM} = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ и } \overline{AM} = 2\overline{BM} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Бидејќи $\triangle MCN$ е „половина од рамностран триаголник“ важи

$$\overline{CM} = \overline{BC} - \overline{BM} = a - \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{CN} = \overline{CM}\sqrt{3} = a\sqrt{3} - a,$$

$$\overline{MN} = 2\overline{CM} = 2a - \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Нека точката X е подножјето на нормалата повлечена од точката N на отсечката AM . Бидејќи $\angle BMA = \angle NMC = 60^\circ$, важи

$$\angle XMN = \angle AMN = 60^\circ.$$

Затоа и $\triangle MNX$ е „половина од рамностран триаголник“, па важи

$$\overline{MX} = a - \frac{a}{\sqrt{3}}, \overline{NX} = a\sqrt{3} - a.$$

Конечно,

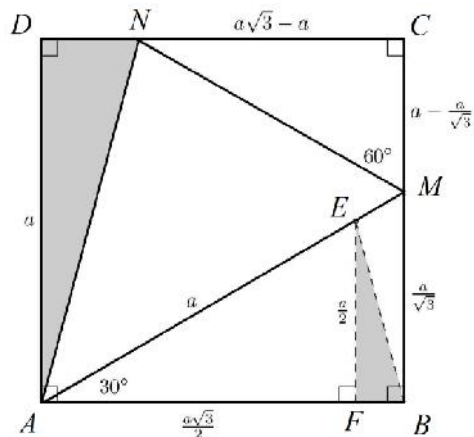
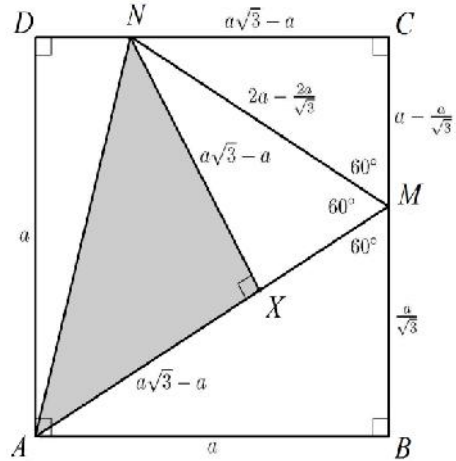
$$\overline{AX} = \overline{AM} - \overline{MX} = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \left(a - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = a\sqrt{3} - a.$$

Според тоа, $\overline{AX} = \overline{NX}$, т.е. $\triangle ANX$ е рамнокрак правоаголен триаголник (со прав агол во темето X). Затоа $\angle XAN = 45^\circ$, т.е. $\angle MAN = 45^\circ$.

Втор начин. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$. Бидејќи $\triangle ABM$ е половина од рамностран триаголник, важи

$$\overline{AB} = \overline{BM}\sqrt{3}, \text{ т.е. } \overline{BM} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Бидејќи $\triangle MCN$ е „половина од



рамностран триаголник“ важи

$$\overline{CM} = \overline{BC} - \overline{BM} = a - \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ и}$$

$$\overline{CN} = \overline{CM} \sqrt{3} = a\sqrt{3} - a.$$

Значи, $\overline{DN} = \overline{CD} - \overline{CN} = 2a - a\sqrt{3}$. Нека E е точка на отсечката AM таква што $\overline{AE} = \overline{AB}$. Бидејќи $\angle BMA = 60^\circ$ и $\angle BAM = 30^\circ$, во рамнокракиот $\triangle ABE$ важи

$$\angle ABE = \frac{180^\circ - \angle BAE}{2} = 75^\circ.$$

Нека F е подножјето на нормалата повлечена од точката E кон страната AB . Бидејќи $\angle EAF = 30^\circ$, заклучваме дека $\triangle AFE$ е „половина од рамностран триаголник“, па затоа важи $\overline{EF} = \frac{a}{2}$ и $\overline{AF} = \overline{EF} \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Но, $\overline{AD} = a = 2\overline{EF}$ и $\overline{DN} = a(2 - \sqrt{3}) = 2\overline{FB}$, па затоа правоаголните триаголници AND и EBF се слични. Според тоа, $\angle AND = 75^\circ$, што значи дека

$$\angle MAN = \angle BAN - \angle BAM = \angle AND - \angle BAM = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$

Трет начин. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$ и нека T е подножјето на висината повлечена од темето A кон страната MN во $\triangle AMN$. Од $\angle BMA = \angle NMC = 60^\circ$ следува дека $\angle AMT = 60^\circ$.

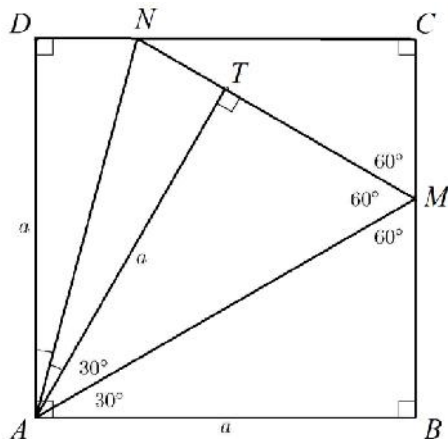
Понатаму, правоаголните триаголници ABM и ATM имаат еднакви агли и заедничка хипотенуза AM , па од признакот АСА следува дека тие се складни. Значи,

$$\overline{AT} = \overline{AB} \text{ и } \angle MAT = \angle MAB = 30^\circ.$$

Понатаму триаголниците ADN и ATN се складни, бидејќи и двата се правоаголни, имаат заедничка хипотенуза AN и важи $\overline{AT} = a = \overline{AD}$. Затоа $\angle TAN = \angle DAN$. Според тоа,

$$\angle MAN = \angle MAT + \angle TAN = \frac{1}{2} \angle BAT + \frac{1}{2} \angle TAD = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ.$$

Четврт начин. Нека a е должината на страната на квадратот $ABCD$. Бидејќи $\triangle ABM$ е „половина од рамностран триаголник“, важи $\overline{AB} = \overline{BM} \sqrt{3}$



т.е. $\overline{BM} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Бидејќи $\triangle MCN$ е „половина од рамностран триаголник“ важи $\overline{CM} = \overline{BC} - \overline{BM} = a - \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $\overline{CN} = \overline{CM} \sqrt{3} = a\sqrt{3} - a$. Според тоа, $\overline{DN} = \overline{CD} - \overline{CN} = 2a - a\sqrt{3}$. Нека P е точка на страната AD таква што $\angle DNP = 60^\circ$, т.е. $\triangle DNP$ е „половина од рамностран триаголник“ (направи цртеж). Тогаш $\overline{DP} = \overline{DN} \sqrt{3} = 2a\sqrt{3} - 3a$ и $\overline{NP} = 2\overline{DN} = 4a - 2a\sqrt{3}$. Понатаму, $\overline{AP} = \overline{AD} - \overline{DP} = a - (2a\sqrt{3} - 3a) = 4a - 2a\sqrt{3}$, па затоа $\overline{NP} = \overline{AP}$. Сега, бидејќи $\angle NPD = 30^\circ$, т.е. $\angle NPA = 150^\circ$, добиваме дека $\angle NAP = 15^\circ$. Конечно, $\angle MAN = \angle MAD - \angle NAP = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

Задача 12. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ земена е точка P таква што

$$\angle PAB = \angle ABP = 15^\circ.$$

Докажи дека $\triangle PCD$ е рамностран.

Решение. Прв начин. Во внатрешноста на $\triangle PBC$ наоѓаме точка R така што $\triangle PBR$ е рамностран. Тогаш $\triangle ABP \cong \triangle BCP$, според CAC , па затоа $\overline{BR} = \overline{RC}$. Понатаму, $\triangle CRB \cong \triangle CRP$, повторно според CAC , па затоа $\overline{PC} = \overline{BC}$.

Сега, од

$$\overline{PC} = \overline{BC} = \overline{DC}$$

и

$$\begin{aligned} \angle DCP &= 90^\circ - \angle PCB \\ &= 90^\circ - (\angle PCR + \angle RCB) \\ &= 90^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 60^\circ \end{aligned}$$

следува дека $\triangle PCD$ е рамностран.

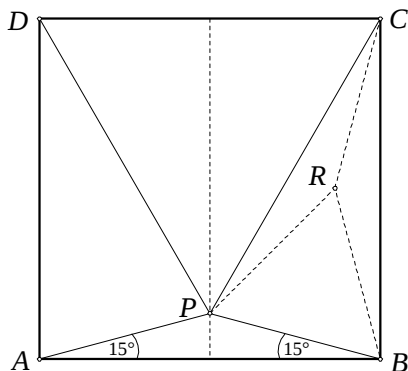
Втор начин. Над отсечката PB конструираме квадрат $PBEF$. Од складноста на триаголниците ABP и BEC следува дека $\angle BEC = 150^\circ$, па затоа $\angle FEC = 60^\circ$. Сега $\triangle FEC$ е рамнокрак со $\overline{FE} = \overline{EC}$, па затоа тој е рамностран. Бидејќи $\angle CFP = 150^\circ$, добиваме дека $\triangle BEC \cong \triangle PFC$ и бидејќи, $\angle PCB = 75^\circ$ добиваме $\angle BCP = 30^\circ$.

Според тоа, за $\triangle DPC$ важи

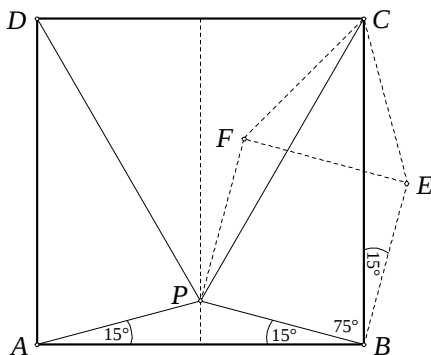
$$\overline{DC} = \overline{BC} = \overline{PC} \text{ и } \angle DCP = 90^\circ - \angle PCB = 60^\circ,$$

т.е. тој е рамностран.

Трет начин. Повлекуваме отсечка BE таква што $\angle PBE = 15^\circ$, цртеж 3, и нека $CF \perp BE$. $\triangle FBC$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $2\overline{FB} = \overline{BC}$.



Crt. 1



Crt. 2

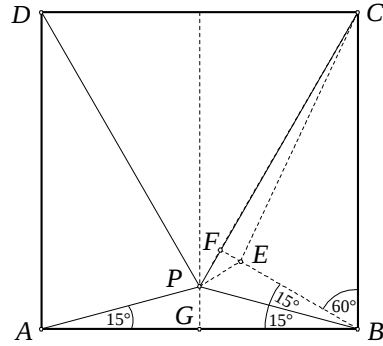
Бидејќи $\overline{BC} = 2\overline{BG}$, добиваме дека $\triangle PGB \cong \triangle FPB$, па затоа $\angle BFP = 90^\circ$. Значи, точките P, E и C се колинеарни, од што следува $E \equiv F$. Значи, $\angle BCE = 30^\circ$, $\triangle PBC$ е рамнокрак и $\overline{PC} = \overline{BC}$, од што следува дека $\triangle PCD$ е рамностран.

Четврт начин. Повлекуваме права BE таква што $\angle PBE = 45^\circ$, цртеж 4. $\triangle EBF$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{BE} = 2\overline{BF}$. Бидејќи $\overline{BC} = 2\overline{BF}$ добиваме дека $DPBC$ е рамнокрак со агли $75^\circ, 75^\circ, 30^\circ$. Понатаму, четириаголникот $PBCE$ е рамнокрак трапез со агли $75^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 105^\circ$, (зошто?), па затоа $\overline{PC} = \overline{BE}$. Според тоа, $\overline{PC} = \overline{BC}$, па сега доказот е како и во претходните разгледувања.

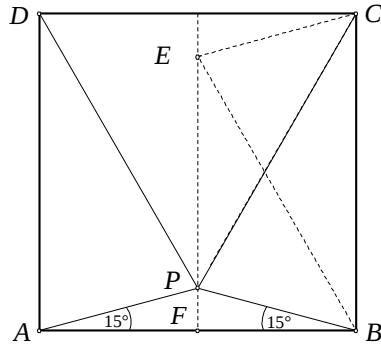
Петти начин. Нека $CG \perp PB$, $GN \perp BC$ и $GM \perp AB$, цртеж 5. Сега $DBGC$ е правоаголнен со еден агол 75° , па затоа $\overline{BC} = 4\overline{GN}$, (докажете!).

Бидејќи $\overline{GN} = \overline{BM} = \frac{a}{4}$ добиваме дека GM е средна линија за $DPFB$. Значи, точката G е средина за отсечката PB , што значи $DPGC \cong DBGC$, т.е. $\overline{PC} = \overline{BC}$, па сега доказот е како и во претходните случаи.

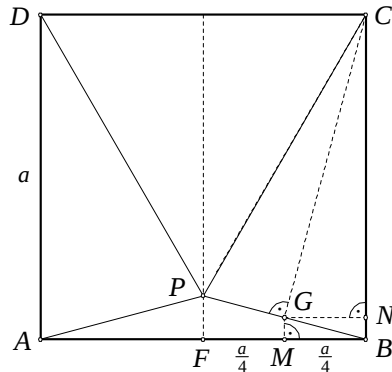
Шести начин. Да земеме точка D на правата CD таква што D е средина на отсечката CE . Нека D е центар на кружницата опишана околу $\triangle EAC$. Ако P лежи на кружницата, тогаш задачата е решена, т.е. $DPCD$ е рамностран, (зошто?). Претпоставуваме дека точката P лежи во внатрешноста на кружницата (цртеж 6). Нека правата AP по вторпат ја сече кружницата во точка P' . Четириаголникот $EAP'C$ е тетивен, па



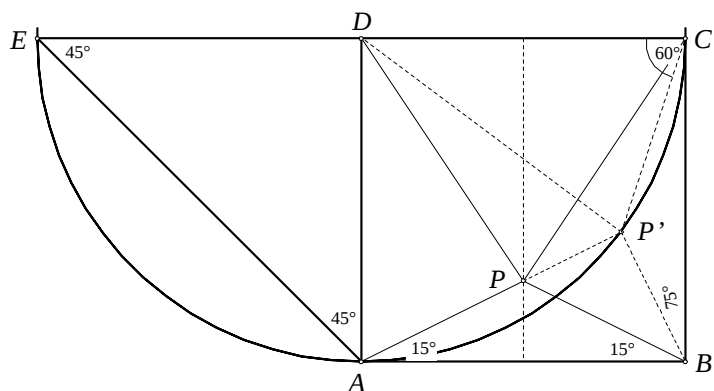
Crt. 3



Crt. 4



Crt. 5



Crt. 6

$$\angle EAP + \angle P'CE = 180^\circ,$$

односно, $\angle P'CE = 60^\circ$. Бидејќи $\triangle P'CD$ е рамностран, ($\overline{DC} = \overline{P'D}$ и $\angle DCP' = 60^\circ$), добиваме дека $\triangle P'BC$ е рамнокрак со агли $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$. Понатаму,

$$\angle ABC = \angle ABP + \angle PBP' + \angle P'BC = 90^\circ$$

од што следува $\angle PBP' = 0^\circ$, т.е. $P \equiv P'$, што значи точката P лежи на кружницата. Противречност.

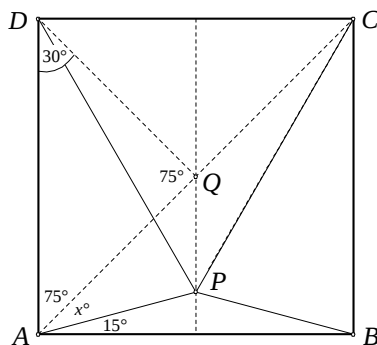
Ако точката P' лежи надвор од кружницата, заклучуваме на ист начин.

Седми начин. Нека претпоставиме дека $\triangle DQC$ е рамностран (црт. 7). Тогаш $\triangle QDA$ е рамнокрак со агли $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$. Бидејќи

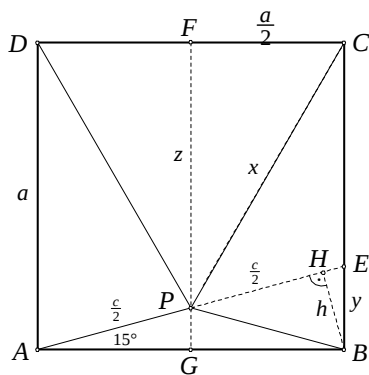
$$\angle DAB = 75^\circ + x + 15^\circ = 90^\circ,$$

добиваме $x = 0^\circ$. Значи, $P \equiv Q$ и $\triangle PCD$ е
рамностран.

Осми начин. Нека $AD \cap BC = \{E\}$, H е подножјето на висината спуштена од B во $DABE$ и нека FG е оската на симетрија на квадратот. Да ги воведеме ознаките $\overline{AB} = a$, $\overline{AE} = c$, $\overline{BE} = y$, $\overline{BH} = h$, $\overline{PF} = z$, $\overline{PC} = x$, (цртеж 8). Да забележиме дека $c = 4h$



Crt. 7



Crt. 8

(зошто?). Плоштината на $\triangle ABE$ е $P = \frac{ay}{2}$, но и $P = \frac{ch}{2}$, па значи $ay = ch$, т.е. $ay = 4h^2$. Од друга страна $a^2 + y^2 = c^2 = 16h^2$. Оттука

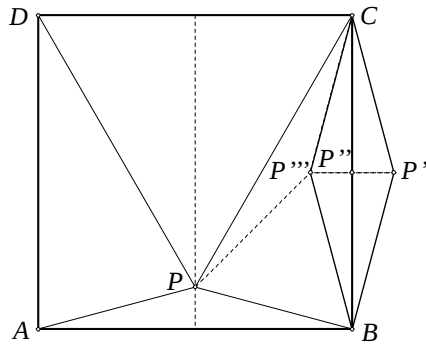
$$y^2 - 4ay + a^2 = 0,$$

па е $y = a(2 - \sqrt{3})$. Сега лесно се добива дека

$$z = a - \frac{y}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

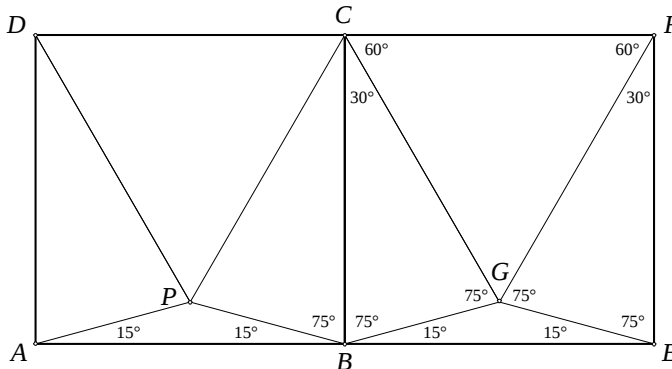
па е $x = a$. Значи, $\triangle PCD$ е рамностран.

Деветти начин. Нека $\triangle BCP'$ е добиен со ротација на $\triangle ABP$ околу точката B за 90° и нека е $\triangle BCP''$ осносиметричната слика на $\triangle BCP'$ во однос на правата BC . Понатаму $BC \cap P'P'' = \{P''\}$. Бидејќи $\angle PBP'' = 60^\circ$, добиваме дека $\triangle BPP''$ е рамностран. Понатаму $\angle P''PC' = 15^\circ$, што значи $\triangle BCP'' \cong \triangle PCP''$, од што следува $\overline{PC} = \overline{BC}$, т.е. $\triangle PCD$ е рамностран.



Crt. 9

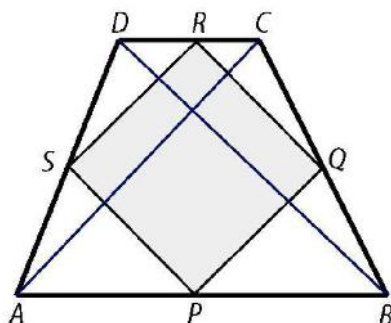
Десетти начин. Конструираме квадрат $BEFC$ над страната BC , а потоа конструираме рамностран $\triangle CFG$ така што точката G е во внатрешноста на квадратот $BEFG$. Триголниците BEG, GEF и BCG се рамнокраки, а соодветните агли се означени на цртеж 10. Затоа $\triangle ABE \cong \triangle BEG$, како и $\triangle PBC \cong \triangle GEF$. Од ова следува дека $\overline{PC} = \overline{BC}$, т.е. $\triangle PCD$ е рамностран.



Crt. 10

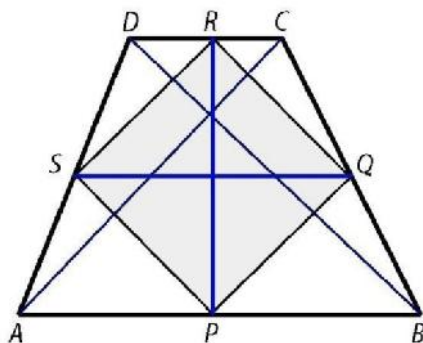
Задача 13. Докажи дека плоштината на рамнокрак трапез со заемно нормални дијагонали е еднаква на квадратот на неговата висина.

Решение. Прв начин. Нека точките P, Q, R, S се редоследно средини на страните AB, BC, CD, DA на рамнокракот трапез $ABCD$. Четириаголникот $PQRS$ е квадрат бидејќи SR е средна линија на $\triangle ACD$, па затоа $SR \parallel AC$ и $\overline{SR} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Слично, од $\triangle ABC$ следува $PQ \parallel AC$ и $\overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Според тоа, $PQ \parallel$

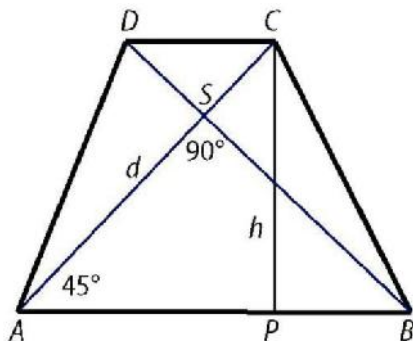


RS и $\overline{SR} = \overline{PQ}$. Слично, од триаголниците ABD и DBC следува $RQ \parallel SP$ и $\overline{RQ} = \overline{SP}$. Но, според условот на задачата $AC \perp BD$, па затоа аглите на четириаголникот $PQRS$ се прави. Значи, $PQRS$ е квадрат со плоштина $P = \frac{d^2}{2} = \frac{RP^2}{2} = \frac{h^2}{2}$. Но, плоштината на квадратот е двапати помала од плоштината на трапезот, добиваме дека плоштината на трапезот е еднаква на $2 \frac{h^2}{2} = h^2$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Во првиот начин на решавање докажавме дека четириаголникот $PQRS$ е квадрат. Дијагоналите на квадратот се еднакви, $\overline{SQ} = \overline{PR}$, па затоа средната линија на трапезот еднаква на висината на трапезот, т.е. $\frac{a+b}{2} = h$. Сега со замена во $P = \frac{a+b}{2}h$, добиваме $P = h \cdot h = h^2$.



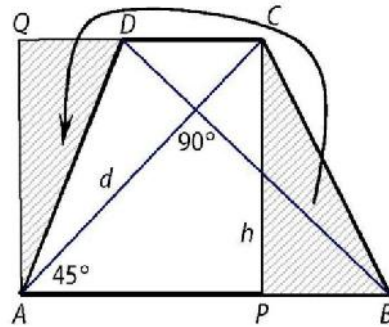
Трет начин. Дијагоналите на рамнокрак трапез се еднакви, па од признакот $ССС$ следува $\triangle ABD \cong \triangle BAC$. Според тоа, $\angle ABD = \angle BAC$. Со S да го означиме пресекот на дијагоналите. Според условот на задачата дијагоналите се заемно нормални, па затоа ABS е рамнокрак правоаголен



триаголник. Значи, $\angle ABS = \angle BAS = 45^\circ$. Нека $\overline{CP} = h$ е висината на дадениот рамнокрак трапез. Триаголникот APC е рамнокрак правоаголен, $\overline{AP} = \overline{PC}$ и $\overline{AC} = \overline{PC}\sqrt{2}$, т.е. $d = h\sqrt{2}$. Плоштината на четириаголник со нормални дијагонали е еднаква на половината од производот на дијагоналите, па затоа за плоштината на трапезот добиваме

$$P = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{d^2}{2} = \frac{(h\sqrt{2})^2}{2} = h^2.$$

Четврт начин. Во претходниот начин на решавање докажавме дека $\triangle APC$ е рамнокрак правоаголен и дека важи $\overline{AP} = \overline{PC} = h$. Сега, ако Q е подножјето на нормалата спуштена од темето A на основата CD , добиваме $\triangle PBC \cong \triangle QDA$, па затоа $P_{ABCD} = P_{APCQ} = h^2$.

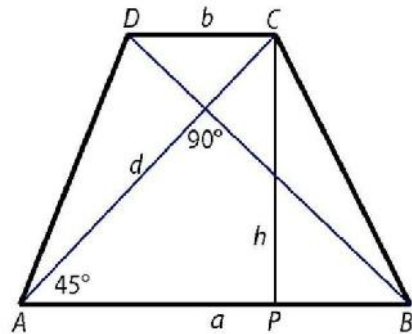


Петти начин. Претходно видовме дека триаголникот APC е рамнокрак правоаголен и важи $\overline{AP} = \overline{PC} = h$. Бидејќи $\overline{PB} = \frac{a-b}{2}$, добиваме дека

$$h = \overline{AP} = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Според тоа, со замена во $P = \frac{a+b}{2}h$,

добиваме $P = h \cdot h = h^2$.



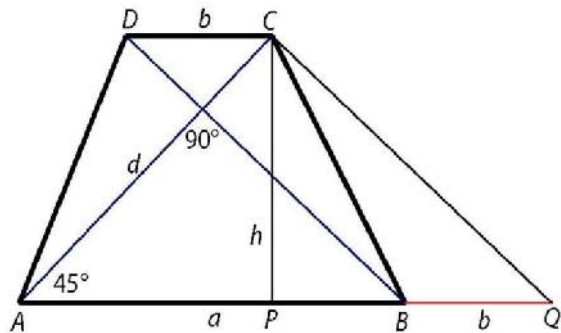
Шести начин. Низ точката C повлекуваме права паралелна со дијагоналата BD на трапезот $ABCD$ и во пресекот со правата AB ја определуваме точката Q .

Од

$$\triangle BQC \cong \triangle CDB \cong \triangle DCA$$

следува дека плоштината на дадениот трапез е еднаква на плоштината на рамнокракиот правоаголен триаголник AQC , $AQ \perp QC$ (види цртеж). Но, $\overline{AC} = \overline{PC}\sqrt{2} = h\sqrt{2}$, па затоа

$$P = \frac{(h\sqrt{2})^2}{2} = h^2.$$



Задача 14. Нека ABC е рамнокрак триаголник, $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACB = 20^\circ$. На кракот AC е дадена точка D таква што $\overline{CD} = \overline{AB}$. Определи го аголот $\angle CBD$.

Решение. Прв начин. Нека ABE е рамностран триаголник, при што точката E е во внатрешноста на триаголникот ABC и да ги поврземе точките E и C . Тогаш триаголниците AEC и BEC се складни (признак CCC), па затоа

$$\angle EAC = \angle ECB = \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ.$$

Понатаму, од $\overline{BE} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{CB}$ и $\angle EBC = \angle DCB = 20^\circ$ следува дека триаголниците BEC и CDB се складни. Конечно, од оваа складност следува $\angle CBD = \angle EAC = 10^\circ$.

Втор начин. Нека ABE е рамностран триаголник, при што точката E е во надворешноста на триаголникот ABC . Нека F е точка на страната BC таква што $\overline{CD} = \overline{FD}$. Сега од $\overline{FD} = \overline{CD} = \overline{AE}$ и $\angle CDF = \angle CAE = 140^\circ$ следува дека четириаголникот $AEFD$ е паралелограм. Триаголникот EFB е рамнокрак, бидејќи

$$\angle FEB = \angle AEB - \angle AEF = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ,$$

$$\angle EFB = 180^\circ - \angle CFD - \angle DFE = 180^\circ - 20^\circ - 140^\circ = 20^\circ.$$

Според тоа, $\overline{BE} = \overline{FB}$. Оттука $\overline{DF} = \overline{FB}$, па затоа триаголникот DBF е рамнокрак со агол при врвот

$$\angle DFB = \angle DFE + \angle EFB = 140^\circ + 20^\circ = 160^\circ.$$

Според тоа, аголот при основата е $\angle FBD = 10^\circ$, па затоа $\angle CBD = 10^\circ$.

Трет начин. Нека ABE е рамностран триаголник, при што точката E е во внатрешноста на триаголникот ABC и да ги поврземе точките E и D . Четириаголникот $BCDE$ е рамнокрак трапез бидејќи

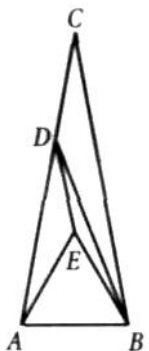
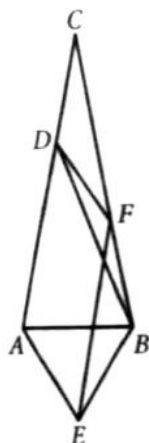
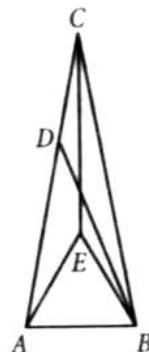
$$\angle CBE = \angle ABC - \angle ABE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle DCB$$

и $\overline{BE} = \overline{CD}$. Од $BC \parallel DE$ следува $\angle ADE = \angle DCB = 20^\circ$. Бидејќи и

$$\angle DAE = \angle DAB - \angle EAB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ,$$

добиваме дека триаголникот ADE е рамнокрак, па важи

$\overline{AE} = \overline{ED}$. Значи $\overline{DE} = \overline{AB}$, т.е. $\overline{DE} = \overline{EB}$, па затоа и триаголникот BDE е



рамнокрак. Аголот при врвот на овој триаголник е $\angle DEB = 160^\circ$, па затоа аголот при основата е $\angle EBD = 10^\circ$. Конечно,

$$\angle CBD = \angle CBE - \angle DBE = 20^\circ - 10^\circ = 10^\circ.$$

Четврт начин. Конструираме рамностран триаголник CED како на цртежот десно и ги поврзуваме точките E и B . Според признакот САС триаголниците ABC и ECB се складни. Затоа $\angle CEB = \angle BAC = 80^\circ$, $\angle EBC = \angle ACB = 20^\circ$ и $\overline{EB} = \overline{AC} = \overline{BC}$. Според признакот ССС триаголниците BDC и BDE се складни, па затоа се еднакви и соодветните агли, односно

$$\angle CBD = \angle EBD = \frac{1}{2} \angle EBC = 10^\circ.$$

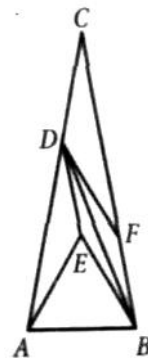
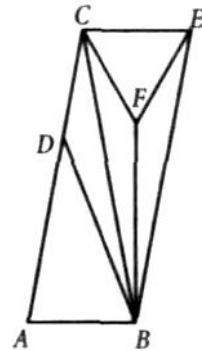
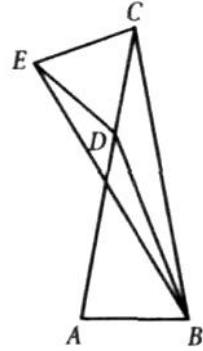
Петти начин. Цртаме рамностран триаголник CFE така што $CE \parallel AB$ и $\overline{CE} = \overline{AB}$. Тогаш $\angle FCB = 20^\circ$ (види цртеж). Четириаголникот $ABEC$ е паралелограм, при што $\angle ECA = 100^\circ$. Триаголникот ECB е складен со триаголникот ABC . Исто така, според признакот САС складни се и триаголниците CBF и EBF . Оттука следува $\angle CBF = \angle EBF = 10^\circ$. Исто така, според признакот САС складни се и триаголниците CBD и CBF , па затоа $\angle CBD = \angle CBF = 10^\circ$.

Шести начин. Нека ABE е рамностран триаголник, при што точката E е во внатрешноста на триаголникот ABC и да ги поврземе точките E и D . Нека F е точка на страната BC таква што $\overline{CD} = \overline{FD}$. Бидејќи

$$\angle CFD = \angle CBE = 20^\circ \text{ и } \overline{FD} = \overline{CD} = \overline{AB} = \overline{BE},$$

заклучуваме дека четириаголникот $BFDE$ е паралелограм. Како во третиот начин на решавање, заклучуваме дека $\overline{DE} = \overline{EB}$, што значи дека $BFDE$ е ромб со агли во темињата B и D еднакви на 20° . Дијагоналата BD е симетрала на $\angle FBE$, па затоа важи $\angle CBD = \angle FBD = 10^\circ$.

Седми начин. Нека точката E е таква што $\triangle DCE \cong \triangle ABC$ и притоа E е од онаа страна на правата AC од која е и точката B (види цртеж). Тогаш важи



$\angle ECB = \angle ECD - \angle BCD = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$
и како $\overline{CE} = \overline{CB}$, заклучуваме дека триаголникот ECB е рамностран. Според тоа,
 $\angle CEB = 60^\circ$. Триаголникот BDE е рамнокрак ($\overline{BE} = \overline{DE}$), и неговиот агол при врвот E е

$$\angle DEB = \angle CEB - \angle CED = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

Значи, аголот при основата е $\angle EBD = 70^\circ$. Според тоа,

$$\angle CBD = \angle EBD - \angle EBC = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ.$$

Осми начин. Нека E е точка на страната AC таква што $\angle AEB = 80^\circ$, F е точка на BC таква што $\angle BEF = 60^\circ$ и G е точка на EC таква што $\angle EFG = 100^\circ$. Триаголникот ABE е рамнокрак со агол при врвот B од 20° . Со пресметување на аглите лесно се докажува дека триаголниците ABE , BEF , EFG и FGC се рамнокраки (BEF е и рамностран). Бидејќи во оваа низа триаголници секои два имаат заеднички крак, следува дека $\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{EF} = \overline{BF} = \overline{FG} = \overline{GC}$. Сега, од $\overline{DC} = \overline{AB} = \overline{GC}$ следува дека точките G и D се совпаѓаат. Триаголникот BDF е рамнокрак ($\overline{BF} = \overline{FD}$), а неговиот агол при врвот е

$$\angle BFD = 60^\circ + 100^\circ = 160^\circ.$$

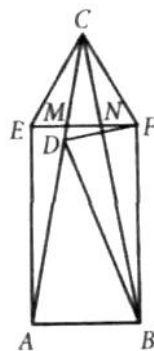
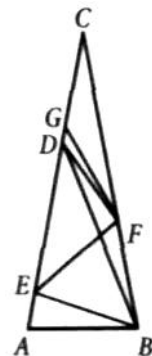
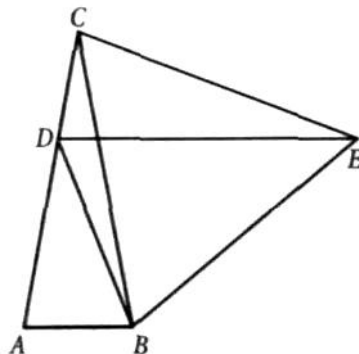
Според тоа, аголот при основата е $\angle FBD = 10^\circ$, т.е. $\angle CBD = 10^\circ$.

Деветти начин. Нека EFC е рамностран триаголник така што четириаголникот $ABFE$ е правоаголник (цртеж десно) чија страна EF ги сече AC и BC во точките M и N , соодветно. Лесно се гледа дека

$$\angle DCE = \angle MCE = \angle NCF = 20^\circ.$$

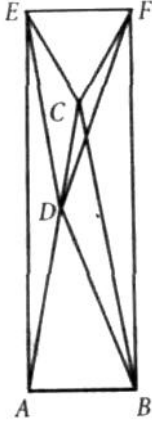
Триаголниците CBD и CFB се складни ($\overline{DC} = \overline{CF}$, страната CB е заедничка и $\angle DCB = \angle FCB = 20^\circ$), па затоа

$$\angle CBD = \angle CBF = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$



Десетти начин. Конструираме рамностран триаголник ECF (види цртеж) така што $\angle FCB = 140^\circ$ (тогаш е и $\angle ECA = 140^\circ$). Ги повлекуваме отсечките ED и FD . Четириаголникот $ABFE$ е правоаголник, па е

$$\angle AEF = \angle BFE = 90^\circ.$$



Триаголниците DCE и DFC се рамнокраки ($\overline{EC} = \overline{CD}$ и $\overline{FC} = \overline{CD}$), па затоа $\angle CED = \angle CDE = 20^\circ$ и бидејќи важи $\angle DCF = 140^\circ + 20^\circ = 160^\circ$ имаме $\angle CDF = \angle DFC = 10^\circ$.

Триаголникот ADE е рамнокрак ($\angle DAE = \angle DEA = 10^\circ$) и затоа $\overline{DE} = \overline{DA}$. Значи, точката D припаѓа на симетралата на страната AE , што значи и на симетралата на страната BF на правоаголникот, па затоа $\overline{DB} = \overline{DF}$. Затоа и триаголникот DBF е рамнокрак, т.е. $\angle DBF = \angle DFB$. Бидејќи

$$\angle DFB = \angle CFB - \angle CFD = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ,$$

добиваме $\angle DBF = 20^\circ$. Но,

$$\angle CBF = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ,$$

па затоа $\angle CBD = 10^\circ$.

Единаесетти начин. Нека точката E е таква што триаголникот ACE е рамностраник и E е на иста страна на правата AC како и точката B (цртеж десно). Бидејќи

$$\angle ECB = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

и триаголникот BEC е рамнокрак ($\overline{BC} = \overline{EC}$), добиваме

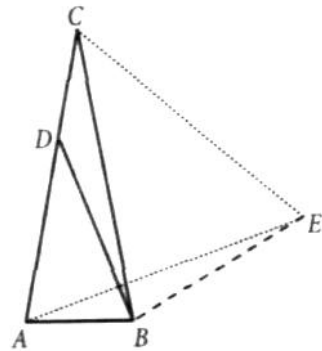
$$\angle CBE = \angle BEC = 70^\circ,$$

$$\angle BEA = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ,$$

$$\angle ABE = 80^\circ + 70^\circ = 150^\circ,$$

$$\angle EAB = 180^\circ - 150^\circ - 10^\circ = 20^\circ.$$

Сега од признакот САС следува дека триаголниците ABE и CBD се складни, па затоа $\angle DBC = \angle BEA = 10^\circ$.



Задача 15. Во правоаголен триаголник ABC аголот во темето A е еднаков на 15° . Докажи дека плоштината во тој триаголник е еднаква на осмина од плоштината на квадратот над хипотенузата, т.е.

$$P = \frac{c^2}{8}. \quad (1)$$

Решение. Прв начин. Нека ACD е триаголникот симетричен на триаголникот ABC во однос на правата AC (цртеж десно). Нека $BE \perp AD$, $E \in AD$. Триаголниците ABC и BDE се слични, па затоа $\overline{BD} : \overline{AB} = \overline{BE} : \overline{AC}$, односно

$$2a : c = \overline{BE} : b. \quad (2)$$

Бидејќи во правоаголен триаголник наспроти агол од 30° се наоѓа страна која два пати помала од хипотенузата заклучуваме дека

$$\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{c}{2}. \quad (3)$$

Од (2) и (3) следува $2a : c = \frac{c}{2} : b$, односно $2ab = \frac{c^2}{2}$, односно

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{8},$$

што и требаше да се докаже.

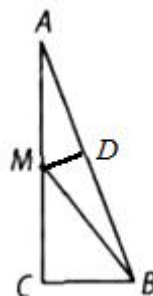
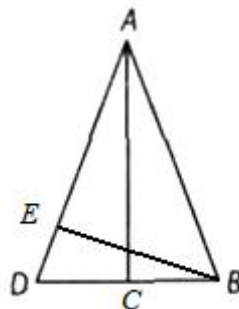
Втор начин. Нека D е средина на хипотенузата AB (цртеж десно). Конструираме агол $\angle ABM = 15^\circ$, $M \in AC$. Триаголникот ABM е рамнокрак и $MD \perp AB$. Триаголниците BMD и ABC се слични, па затоа

$$\overline{BD} : \overline{BM} = \overline{AC} : \overline{AB}.$$

Во правоаголниот триаголник BCM хипотенузата е два пати поголема од катетата наспроти аголот од 30° , па затоа $\overline{BM} = 2\overline{BC} = 2a$. Сега, ако се земе предвид дека $\overline{BD} = \frac{c}{2}$, добиваме $\frac{c}{2} : 2a = b : c$, односно $2ab = \frac{c^2}{2}$. Значи,

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{8}, \text{ што и требаше да се докаже.}$$

Трет начин. Нека точката M е таква $\angle ABM = 15^\circ$ (цртеж десно). Со примена на Питагоровата теорема на триаголникот BCM , бидејќи $\overline{BM} = 2a$ и $\overline{BC} = a$, добиваме



$$\overline{MC}^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2,$$

па затоа $\overline{MC} = a\sqrt{3}$. Да ја изразиме и катетата $b = \overline{AC}$ со a . Имаме:

$$b = \overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC} = \overline{BM} + \overline{MC} = 2a + a\sqrt{3} = a(2 + \sqrt{3}).$$

Со примена на Питагоровата теорема на триаголникот ABC добиваме

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2(2 + \sqrt{3})^2 = 4a^2(2 + \sqrt{3}) = 4a \cdot a(2 + \sqrt{3}) = 4ab,$$

т.е. $c^2 = 4ab$, од каде добиваме $P = \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{8}$.

Четврт начин. Над хипотенузата AB од надвор од триаголникот ABC конструираме агол $\angle BAD = 15^\circ$, $D \in BC$. Триаголникот ACD е половина од рамностран триаголник, па затоа

$\overline{AD} = m$, $\overline{CD} = \frac{1}{2}m$ и $\overline{AC} = \frac{m\sqrt{3}}{2}$. Но, $\overline{AC} = b$, па затоа $\overline{AD} = \frac{2}{\sqrt{3}}b$ и $\overline{CD} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Бидејќи AB е симетрала на $\angle CAD$ и $\overline{BC} = a$, од теоремата за

симетралата на внатрешен агол на триаголник следува $\overline{DB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{AC}$, односно $\overline{DB} : a = \frac{2b}{\sqrt{3}} : b$, па затоа $\overline{DB} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Сега, од $\overline{DB} + \overline{BC} = \overline{DC}$ следува

$\frac{2a}{\sqrt{3}} + a = \frac{b}{\sqrt{3}}$, односно $b = a(2 + \sqrt{3})$. Сега, како погоре добиваме $P = \frac{c^2}{8}$.

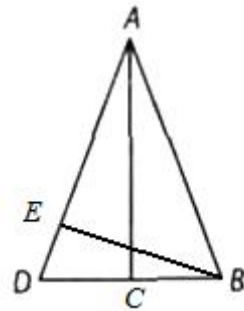
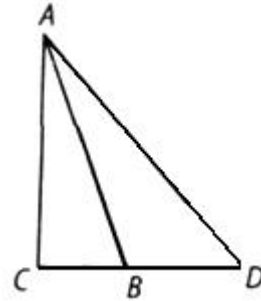
Петти начин. При ознаки како во првиот начин на решавање плоштината на триаголникот ABD е еднаква на $\frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{BE}$, но таа е еднаква и на

$\frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{AC}$. Затоа $\frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{AC}$, од каде бидејќи

$\overline{AD} = c$, $\overline{BE} = \frac{c}{2}$, $\overline{BD} = 2a$, $\overline{AC} = b$, добиваме $c \cdot \frac{c}{2} = 2ab$. Од последното равенство следува

$$P = \frac{c^2}{8}.$$

Шести начин. Означуваме како во петтиот начин на решавање. Плоштината на триаголникот ABD е два пати поголема од плоштината на дадениот правоаголен триаголник, т.е. таа е еднаква на $2P$. Од друга страна, во правоаголниот триаголник ABE , наспроти аголот од 30° е катета која е два пати помала од хипотенузата, па затоа $\overline{AD} = c$, $\overline{BE} = \frac{c}{2}$.



Конечно, добиваме $2P = \frac{1}{2}c \cdot \frac{c}{2}$, од каде следува $P = \frac{c^2}{8}$.

Седми начин. Нека триаголникот ADF е симетричен на триаголникот ADB (цртеж горе) во однос на правата AD како оска на симетрија. Тогаш четириаголникот $ABDF$ е делтоид чии дијагонали се еднакви на c , бидејќи триаголникот ABF е рамностран. Плоштината на овој делтоид е четири пати поголема од плоштината на дадениот правоаголен триаголник ABC , па затоа за плоштината на триаголникот ABC добиваме $P = \frac{1}{4} \cdot \frac{c \cdot c}{2} = \frac{c^2}{8}$.

Задача 16. Во правоаголен триаголник ABC должните на катетите AC и BC се соодветно 8 cm и 6 cm . Од точка M на хипотенузата се повлечени нормали MP и MQ на катетите AC и BC , соодветно. Определи ја положбата на точката M така што правоаголникот $CPMQ$ има најголема можна плоштина.

Решение. Прв начин. Растојанијата на точката M од катетите се $\overline{MP} = x$ и $\overline{MQ} = y$ (цртеж десно). Од сличноста на триаголниците MPA и BQM следува

$$x : (8 - y) = (6 - x) : y,$$

$$xy = (8 - y)(6 - x),$$

$$8x + 6y = 48,$$

$$y = \frac{24 - 4x}{3},$$

па затоа плоштината на правоаголникот е:

$$P = P(x) = x \cdot \frac{24 - 4x}{3} = -\frac{4}{3}(x^2 - 6x) = -\frac{4}{3}(x^2 - 6x + 9 - 9) = -\frac{4}{3}(x - 3)^2 + 12.$$

Правоаголникот има најголема плоштина за $x = 3, y = 4$, што значи дека точката M е средина на хипотенузата.

Втор начин. Од сличноста на триаголниците BQM и BCA следува

$$(6 - x) : y = 6 : 8,$$

$$48 - 8x = 6y,$$

$$x = \frac{24 - 3y}{4},$$

па плоштината на правоаголникот е

$$P = P(y) = y \cdot \frac{24 - 3y}{4} = -\frac{3}{4}(y^2 - 8y) = -\frac{3}{4}(y^2 - 8y + 16 - 16) = -\frac{3}{4}(y - 4)^2 + 12$$

Правоаголникот има најголема плоштина за $y = 4, x = 3$, што значи дека точката M е средина на хипотенузата.

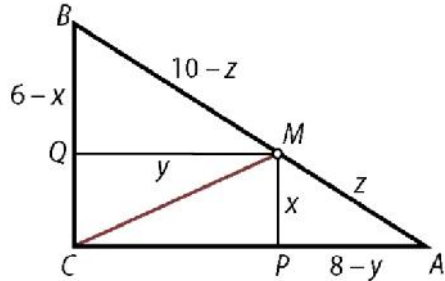
Трет начин. Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците CMA и BCM . Значи,

$$\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{8x}{2} + \frac{6y}{2},$$

$$4x + 3y = 24.$$

Понатаму, постапката е идентична како при првите два начина на решавање.

Четврт начин. Од сличноста на триаголниците MPA и BCA следува



$$x : z = 6 : 10, x = \frac{3}{5}z.$$

Од сличноста на триаголниците BQM и BCA следува

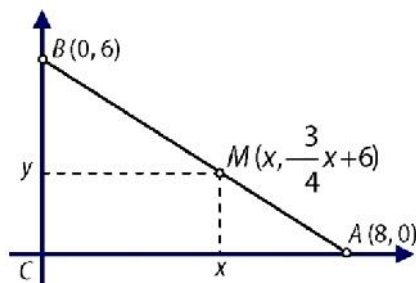
$$y : (10 - z) = 8 : 10, y = \frac{4}{5}(10 - z).$$

Плоштината на правоаголникот е

$$P = P(z) = xy = \frac{3}{5}z \cdot \frac{4}{5}(10 - z) = -\frac{12}{25}(z^2 - 10z) = -\frac{12}{25}(z - 5)^2 + 12.$$

Значи, правоаголникот има најголема плоштина за $z = 5$ и таа е еднаква на 12. Точката M е средина на хипотенузата.

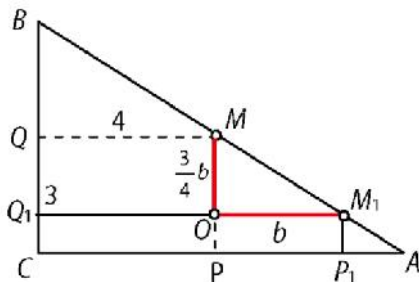
Петти начин. Триаголникот ABC го поставуваме во правоаголен координатен систем при што темето C е во координатниот почеток, а другите две темиња се $A(8, 0)$ и $B(0, 6)$ (цртеж десно). Правата низ точките A и B е $y = -\frac{3}{4}x + 6$. Притоа плоштината на правоаголникот е



$$P = P(x) = xy = x(-\frac{3}{4}x + 6) = -\frac{3}{4}(x - 4)^2 + 12.$$

Според тоа, најголемата плоштина е еднаква на 12 и таа се достигнува за $x = 4, y = 3$. Значи, точката M е средина на хипотенузата.

Шести начин. Ако точката M е средина на хипотенузата, тогаш плоштината на правоаголникот $CPMQ$ е еднаква на 12. Ќе докажеме дека за било која друга точка M_1 на хипотенузата плоштината на соодветниот правоаголник е помала од 12. Странте на триаголникот MOM_1 се во однос

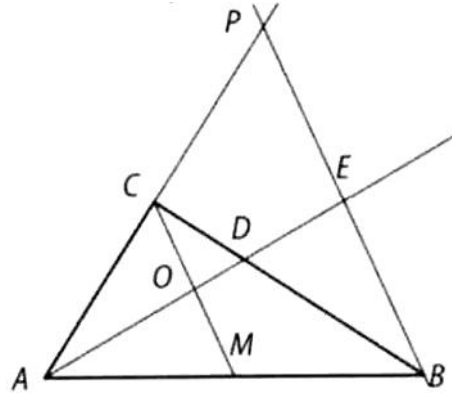


$\overline{MO} : \overline{MO_1} = 6 : 8$, т.е. $\overline{MO} : b = 3 : 4$, каде $\overline{MO_1} = b$. Тогаш страните на правоаголникот $CP_1M_1Q_1$ се $\overline{Q_1M_1} = 4 + b, \overline{P_1M_1} = 3 - \frac{3}{4}b$, па плоштината на правоаголникот $CP_1M_1Q_1$ е

$$P = P(b) = (4 + b)(3 - \frac{3}{4}b) = 12 - 3b + 3b - \frac{3}{4}b^2 = 12 - \frac{3}{4}b^2 = 12 < 12.$$

Задача 17. Во триаголникот ABC точката O е средина на тежишната линија CM . Полуправата AO ја сече страната BC во точката D . Во кој однос точката D ја дели страната BC ?

Решение. Прв начин. Низ точката B повлечуваме права паралелна на CM . Нека P и E се пресечните точки на оваа права со правите AC и AD , соодветно (цртеж десно).



Од Талесовата теорема следува дека точката E е средина на отсечката BP и точката C е средина на отсечката AP . Според тоа, AE и BC се тежишни линии на триаголникот ABP , а нивниот пресек D е

тежиште на овој триаголник. Според тоа, $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 1$.

Втор начин. Низ точката M повлечуваме права паралелна со AD . Нека E е пресекот на оваа права со BC (цртеж десно). Талесовата теорема ја применуваме на $\angle ABD$ и добиваме дека

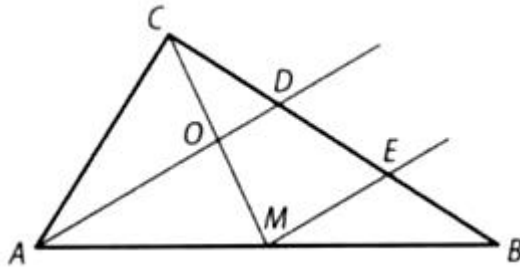
$$\overline{BM} : \overline{MA} = \overline{BE} : \overline{ED}$$

и како $\overline{BM} = \overline{MA}$, добиваме

$$\overline{BE} = \overline{ED}. \quad (1)$$

Слично, со примена на Талесовата теорема на $\angle MCE$, добиваме дека

$$\overline{CD} = \overline{ED}. \quad (2)$$



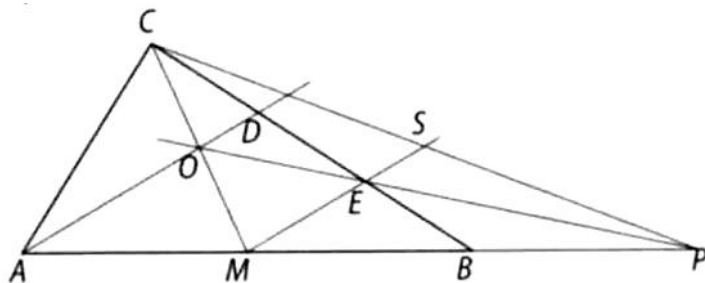
Сега, од (1) и (2) следува $\overline{BE} = \overline{ED} = \overline{CD}$, т.е. $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 1$.

Трет начин. Нека E е средина на отсечката DB (цртеж горе). Тогаш ME е средна линија на триаголникот ABD и $ME \parallel AD$. Со примена на Талесовата теорема на $\angle MCE$ следува дека $\overline{CO} : \overline{OM} = \overline{CD} : \overline{DE}$, па бидејќи $\overline{CO} = \overline{OM}$, добиваме $\overline{CD} = \overline{DE}$. Од $\overline{CD} = \overline{DE}$ и $\overline{DE} = \overline{EB}$, следува равенството $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 1$.

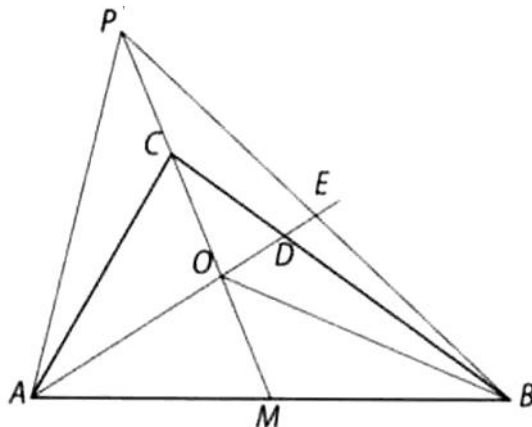
Четврт начин. На продолжението на страната AB земаме точка P таква што B е средина на отсечката MP (цртеж долу).

Отсечките PO и CB се тежишни линии на триаголникот MPC , а точката E е негово тежиште, па затоа $\overline{CE} = 2\overline{BE}$. Третата тежишна линија минува низ темето M , тежиштето E и средината на спротивната страна

(точката S). Од $\overline{PM} : \overline{MA} = \overline{PE} : \overline{EO} = 2:1$ следува дека правите AD и ME се паралелни (Талесовата теорема применета на $\angle APD$). Сега, од Талесовата теорема, применета прво на $\angle MCE$, а потоа на $\angle ABD$, наоѓаме $\overline{CD} = \overline{DE}$ и $\overline{DE} = \overline{EB}$, од каде следува $\overline{BD} : \overline{DC} = 2:1$.



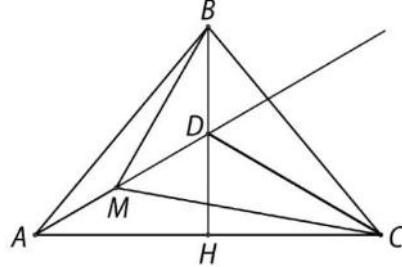
Петти начин. Нека P е точка на правата, таква што C е средина на отсечката OP (цртеж десно). Отсечката PM е тежишна линија на триаголникот ABP , а како $\overline{PO} = 2\overline{OM}$, добиваме дека точката O е тежиште на овој триаголник. Според тоа, AE е тежишна линија на овој триаголник, па затоа E е средина на страната BP .



Сега да го разгледаме триаголникот POB . Отсечките BC и OE се негови тежишни линии, па нивниот пресек, точката D , е тежиште на триаголникот POB . Оттука заклучуваме дека $\overline{BD} : \overline{DC} = 2:1$.

Задача 18. Аголот при врвот B на рамнокракиот триаголник ABC е еднаков на 80° . Нека M е точка во внатрешноста на тој триаголник таква што $\angle MAC = 30^\circ$ и $\angle MCA = 10^\circ$. Определи го $\angle AMB$.

Решение. Прв начин. Со D да ја означиме пресечната точка на правата AM и висината BH (цртеж десно). Правоаголните триаголници ADH и CDH се складни (еднакви катети), па затоа $\angle DCH = \angle DAH = 30^\circ$, од каде добиваме



$$\angle MCD = \angle ACD - \angle ACM = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ.$$

Понатаму,

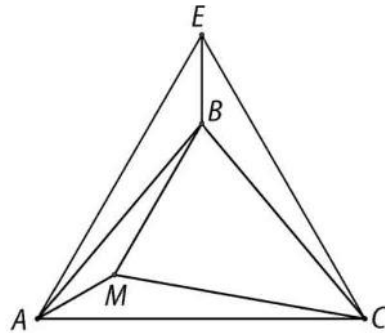
$$\angle DMC = 180^\circ - \angle MDC - \angle MCD = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ,$$

од каде следува дека триаголниците MCD и BCD се складни (еднакви агли и заедничка страна CD). Од оваа складност следува дека $\overline{MC} = \overline{BC}$, што збјачи дека триаголникот BMC е рамнокрак со агол при врвот еднаков на 40° . Според тоа, $\angle CMB = \angle CBM = 70^\circ$, па затоа

$$\angle BMC - \angle DMC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

Конечно, $\angle AMB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Втор начин. Да го разгледаме рамностраниот триаголник ACE таков што точките B и E се од иста страна на правата AC (цртеж десно). Триаголниците ABE и CBE се складни (ССС), па затоа нивните агли во темето E се еднакви (по 30°). Триаголниците ACM и ECB се скалдни (АСА)се скалдни (АСА), па затоа $\overline{EB} = \overline{AM}$. Според тоа,

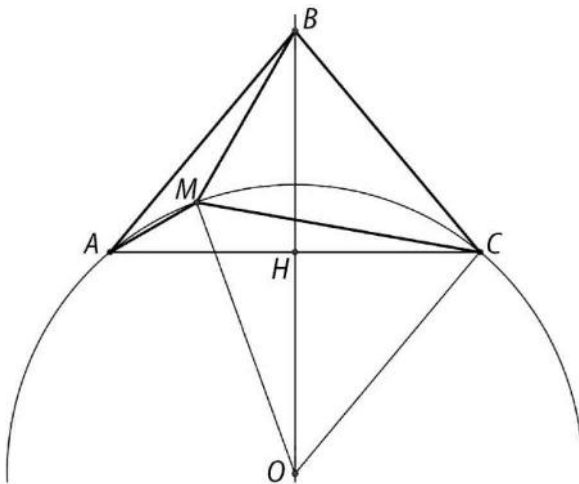


четриаголникот $AMBE$ е рамнокрак трапез со агол од 30° при поголемата основа, па затоа агол при помалата основа е $\angle AMB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Трет начин. Нека O е центарот на кружницата опишана околу триаголникот AMC (види цртеж). Јасно, точките B и O лежат на симетралата на страната AC . Бидејќи аглите $\angle MOC$ и $\angle MAC$ се соодветно централен и перифериски агол над ист лак, важи

$$\angle MOC = 2\angle MAC = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

Според тоа, триаголникот MOC е рамнокрак, па затоа $\overline{MC} = \overline{CO}$. Понатаму,

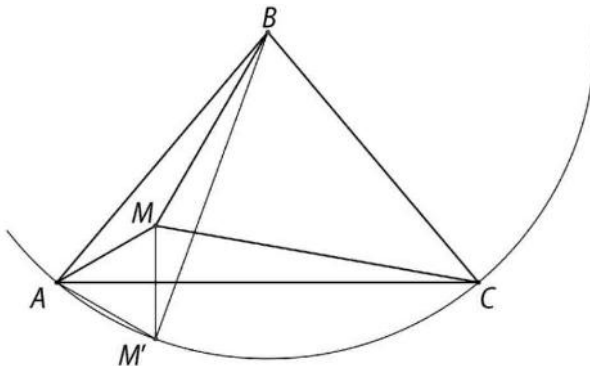


$$\angle ACO = \angle MCO - \angle MCA = 60^\circ - 10^\circ = 50^\circ = \angle ACB.$$

Нека H е средината на страната AC . Во триаголникот BOC отсечката CH истовремено е висина и симетрала на агол, па затоа BOC е рамнокрак триаголник. Значи, $\overline{BC} = \overline{CO} = \overline{MC}$. Според тоа, триаголникот BMC е рамнокрак со агол при врвот C еднаков на 40° . Значи, $\angle BMC = 70^\circ$. Конечно,

$$\angle AMB = 360^\circ - \angle AMC - \angle CMB = 360^\circ - 140^\circ - 70^\circ = 150^\circ.$$

Четврт начин. Да ја разгледаме кружницата $k(B, \overline{BA})$, види цртеж. Нека точката M' е симетрична на точката M во однос на правата AC . Тогаш $\angle MAM' = 60^\circ$, па затоа триаголникот MAM' е рамностран.



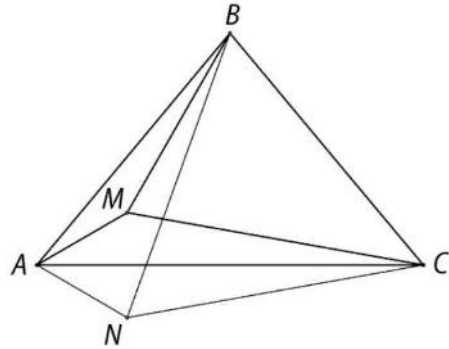
Бидејќи $\angle AMC = 140^\circ$, важи $\angle AM'C = 140^\circ$ (осна симетрија во однос на правата AC). Бидејќи централниот агол е $\angle ABC = 80^\circ$, на него соодветниот перифериски агол е еднаков на 40° , а како $\angle AM'C = 140^\circ$, следува дека точката M' припаѓа на кружницата k . Оттука следува дека триаголниците AMB и $M'MB$ се складни (ССС), па затоа BM е симетрала на $\angle ABM'$. Бидејќи аголот при основата AM' на рамнокракиот триаголник BAM' е еднаков $60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$, добиваме $\angle ABM' = 20^\circ$, $\angle ABM = 10^\circ$, од каде наоѓаме $\angle AMB = 180^\circ - 20^\circ - 10^\circ = 150^\circ$.

Петти начин. Нека BNC е рамностранб триаголник таков што точките A и N се од иста страна на правата BC (цртеж десно). Бидејќи $\overline{BA} = \overline{BC} = \overline{BN}$, триаголникот ANB е рамнокрак и

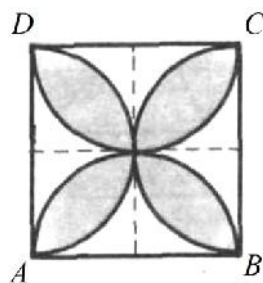
$$\angle BAN = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Затоа $\angle CAN = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$, а како и $\angle ACN = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ триаголниците ACM и ACN се складни (АСА). Значи, $\overline{CM} = \overline{CN}$, па затоа и $\overline{CM} = \overline{CB}$. Според тоа, триаголникот BCM е рамнокрак со агол при врвот C еднаков на 40° , па затоа аголот при основата на овој триаголник е $\angle BMC = 70^\circ$. Оттука добиваме

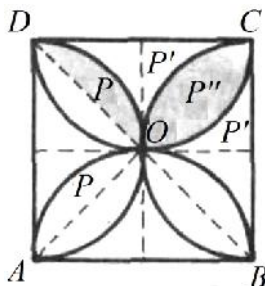
$$\angle AMB = 360^\circ - \angle AMC - \angle CMB = 360^\circ - 140^\circ - 70^\circ = 150^\circ.$$



Задача 19. Над секоја страна на квадрат $ABCD$ како над дијаметар се опишани полукружници кои лежат внатре во квадратот. Определи ја плоштината на добиената розета (осенчениот дел од фигурата) ако должината на страната на квадратот е a .



Решение. Прв начин. При ознаки на цртежот долу лево имаме $P'' = 2P$ и плоштината на розетата е еднаква на $S = 4P'' = 8P$.



Плоштината P ќе ја определиме така што од плоштината на четвртина кругот со центар во средната на страната и радиус $\frac{a}{2}$ ќе ја одземеме плоштината на рамнокрак правоаголен триаголник со страна $\frac{a}{2}$. Имаме

$$P = \frac{\pi}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Според тоа, плоштината на розетата е

$$S = 8P = 8 \cdot \frac{a^2}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Втор начин. Прво ќе ја определиме плоштината P'' на еден лист на розетата, па потоа за плоштината на розетата ќе имаме $S = 4P''$. Бидејќи

$$P' = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{16} (4 - \pi),$$

па затоа

$$P'' = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2P' = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a^2}{16} (4 - \pi) = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Конечно,

$$S = 4P'' = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

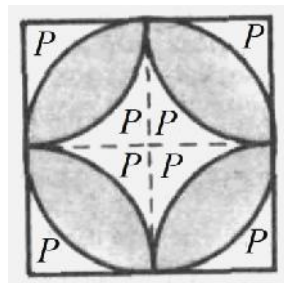
Трет начин. Плоштината $P'' = 2P$ ќе ја определиме како разлика на плоштината на полукругот со радиус $\frac{a}{2}$ и триаголникот $AOPD$. Имаме

$$P'' = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Затоа

$$S = 4P'' = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

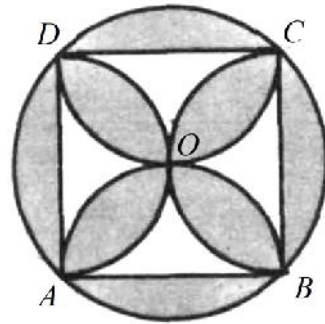
Четврт начин. Ако квадратот го расечеме по хоризонталната оска на симетрија, а потоа го составиме како цртежот десно, добиваме дека



плоштината на розетата е $S = a^2 - 8P$. Но, плоштината $4P$ се добива ако од плоштината на квадратот ја одземеме плоштината на кругот со радиус $\frac{a}{2}$. Според тоа:

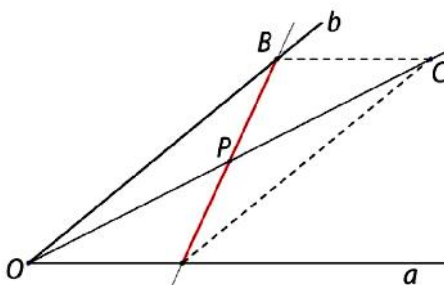
$$S = a^2 - 8P = a^2 - 2 \cdot 4P = a^2 - 2(a^2 - \pi(\frac{a}{2})^2) = a^2(\frac{\pi}{2} - 1).$$

Забелешка. На крајот да забележиме дека може да се докаже дека разликата на плоштината на кругот со радиус $\overline{OA}$ и плоштината на квадратот е еднаква на плоштината на розетата (цртеж десно). Обиди се ова да го докажеш и потоа пресметај ја плоштината на розетата.

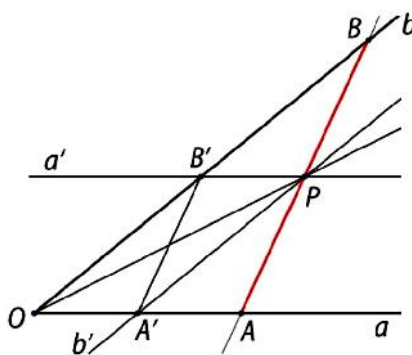


Задача 20. Во внатрешноста на даден $\angle aOb$ е дадена точка P . Конструирај права која минува низ точката P така што точката P е средина на отсечката која на таа права ја отсекуваат краците на дадениот агол.

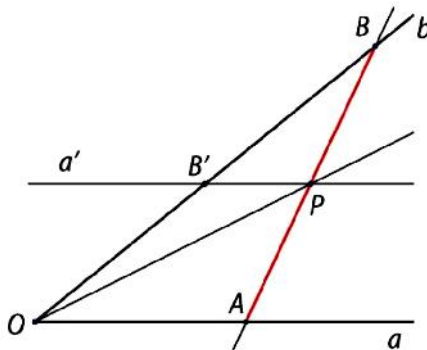
Решение. Прв начин. На полуправата OP наоѓаме точка C таква што P е средина на OC (цртеж десно). Отсечката OC ја набљудуваме како дијагонала на паралелограм чии две страни лежат на краците на дадениот агол. Втората дијагонала на овој паралелограм е токму отсечката која краците на дадениот агол ја отсекуваат на бараната права. Според тоа, бараната права може да ја конструираме така што низ точката C ќе повлечеме права паралелна на правата a , ја наоѓаме пресечната точка B на оваа права со правата b и ја повлекуваме правата BP , која е бараната права.



Втор начин. Нека a' и b' се прави низ точката P паралелни со краците Oa и Ob на дадениот агол (цртеж десно). Нека овие прави ги сечат краците на аголот во точките B' и A' , соодветно. Четириаголникот $OA'PB'$ е паралелограм со дијагонали OP и $A'B'$, кои се половат. Нека p е права низ точката P паралелна со $A'B'$ и нека таа ги сече a и b во точките A и B , соодветно. Бидејќи полуправата OP ја полови отсечката $A'B'$, од Талесовата теорема следува дека таа ја полови и на неа паралелната отсечка AB . Според тоа, правата p е бараната права.

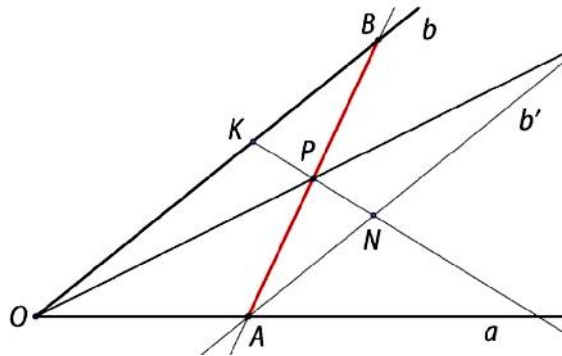


Трет начин. Низ точката P конструираме права a' паралелна со a . Нека таа го сече кракот Ob во точката B' (цртеж десно). На кракот Ob конструираме точка B таква што точката B' е средина на отсечката OB . Потоа конструираме права p низ точките B и P . Правата p е



бараната права. Навистина, ако A е пресечната точка на оваа права со кракот Oa , тогаш од Талесовата теорема следува дека P ја полови AB (паралелните прави a и a' се пресечени со трансферзалите BO и BA).

Четврт начин. На кракот Ob земаме произволна точка K и на полуправата KP наоѓаме точка N таква што P е средина на отсечката KN (цртеж десно). Низ точката N повлекуваме права b' паралелна на b . Нека оваа права го сече кракот Oa



во точката A . Низ точките A и P повлекуваме права p , која кракот Ob го сече во точката B . Според Талесовата теорема точката P е средина на отсечката AB (паралелните прави b и b' се пресечени со трансферзалите PN и PA), па затоа p е бараната права.

Задача 21. Должината на кракот на рамнокрак триаголник е двапати поголема од должината на основата, а должината на висината која соодветствува на основата е 4 cm . Определи ја должината на радиусот на впишаната кружница во овој триаголник.

Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа $\overline{AB} = a$, крак $\overline{AC} = \overline{BC} = 2a$, висина $\overline{CE} = h_a = 4\text{ cm}$ и нека радиусот на впишаната кружница е $\overline{OD} = r$.

Прв начин. Со примена на Питагоровата теорема на триаголникот AEC добиваме

$$h^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$16 = \frac{15a^2}{4},$$

$$a^2 = \frac{64}{15}.$$

Исто така, од правоаголникот триаголник ODC следува: $\overline{DC}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OD}^2$. Но, $\overline{BE} = \overline{BD} = \frac{a}{2}$ и $\overline{OE} = \overline{OD} = r$, па затоа

$$\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = (4-r)^2 - r^2,$$

$$\frac{9a^2}{4} = 16 - 8r,$$

$$\frac{48}{5} = 16 - 8r,$$

$$r = \frac{4}{5}\text{ cm}.$$

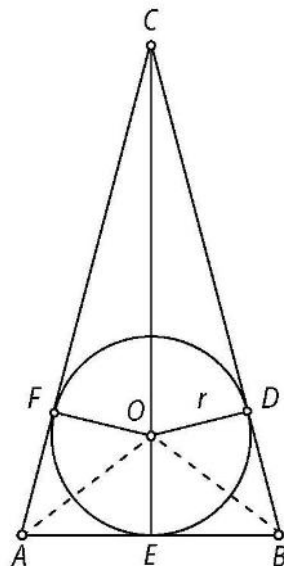
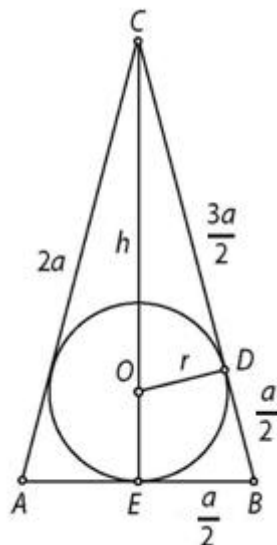
Значи, должината на бараниот радиус е $\frac{4}{5}\text{ cm}$.

Втор начин. Нека точката O е центарот, а отсечките OD, OE, OF се радиусите на впишаната кружница нормални на страните на триаголникот (цртеж десно). Тогаш плоштината на триаголникот ABC е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците ABO, BCO, CAO . Според тоа,

$$\frac{ah_a}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{2ar}{2} + \frac{2ar}{2},$$

$$4a = 5ar,$$

$$r = \frac{4}{5}\text{ cm}.$$



Значи, должината на бараниот радиус е $\frac{4}{5} \text{ cm}$.

Трет начин. Имаме

$$\angle CEB = \angle CDO = 90^\circ$$

и

$$\angle ECB = \angle DCO,$$

па затоа триаголниците CEB и CDO се слични.

Од сличноста на овие триаголници следува

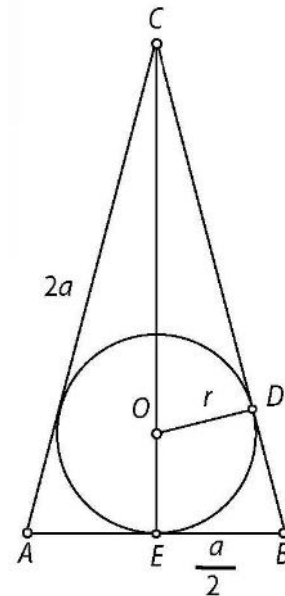
$$\frac{a}{2} : 2a = r : (4 - r)$$

$$\frac{4-r}{2} = 2r,$$

$$4 - r = 4r,$$

$$r = \frac{4}{5} \text{ cm}.$$

Значи, должината на бараниот радиус е $\frac{4}{5} \text{ cm}$.



Четврт начин. Центарот на впишаната кружница припаѓа на симетралата на $\angle BAC$ која ја дели страната на триаголникот AEC на отсечки CO и OE кои се пропорционални на страните AC и AE (цртеж десно). Според тоа,

$$\overline{CO} : \overline{OE} = \overline{CA} : \overline{AE},$$

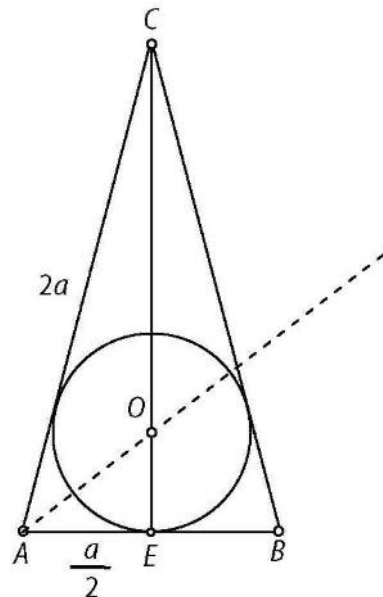
$$(4 - r) : r = 2a : \frac{a}{2}$$

$$(4 - r) : r = 4,$$

$$4 - r = 4r,$$

$$r = \frac{4}{5} \text{ cm}$$

Значи, должината на бараниот радиус е $\frac{4}{5} \text{ cm}$.



Петти начин. Нека во триаголникот ABC симетралата на $\angle ABC$ го сече кракот AC во точката F . Од теоремата за симетралата на агол за триаголникот ABC следува

$$\overline{AF} : \overline{FC} = \overline{BA} : \overline{BC},$$

$$\overline{AF} : \overline{FC} = a : 2a,$$

па е

$$\overline{AC} : \overline{FC} = 3a : 2a, .$$

Правата која го содржи темето A и е паралелна на симетралата BF на $\angle ABC$ ја сече правата CE во точката D (цртеж десно). Понатаму, лесно се гледа дека $\triangle COF \sim \triangle CDA$, па затоа

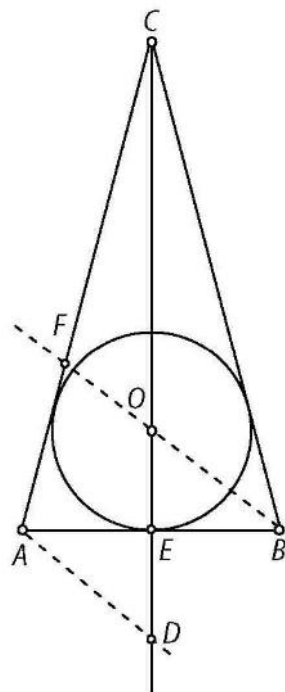
$$\overline{CO} : \overline{CD} = \overline{CF} : \overline{CA},$$

односно

$$(4 - r) : (4 + r) = 2 : 3,$$

$$3(4 - r) = 2(4 + r),$$

$$r = \frac{4}{5} \text{ cm}.$$

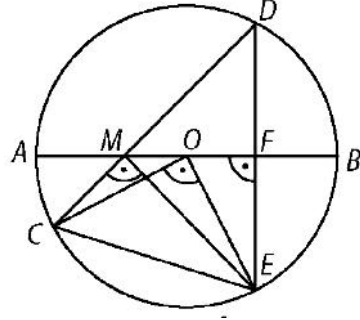


Значи, должината на бараниот радиус е $\frac{4}{5} \text{ cm}$.

Задача 22. Дадена е кружница со радиус r . Тетива CD на оваа кружница сече во точка M нејзин дијаметар AB под агол од 45° . Докажи дека

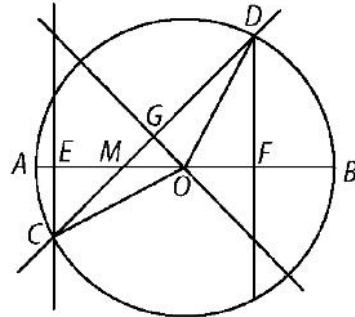
$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2r^2.$$

Решение. Прв начин. Нека точката E оносиметрична слика на точката во однос на дијаметратот AB , F е пресекот на правите AB и DE , O е центарот на кружницата (цртеж десно). Бидејќи триаголниците MDF и MEF се складни, добиваме дека триаголникот DME е рамнокрак правоаголен: $\overline{MD} = \overline{ME}$, $\angle DME = 90^\circ$, $\angle MDE = 45^\circ$.



Значи, $\angle CME = 90^\circ$ и $\angle COE = 90^\circ$ (централен агол над тетива чиј перифериски агол е еднаков на 45°). Според тоа, важи $\overline{CE}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{ME}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2$ и $\overline{CE}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OE}^2 = 2r^2$, па затоа $\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2r^2$.

Втор начин. Нека O е центарот на кружницата, нека E и E се подножјата на нормалите повлечени соодветно од точките C и D на дијаметарот AB и нека G е средината на тетивата CD (цртеж десно). Бидејќи $\overline{CO} = \overline{OD}$, $\overline{CG} = \overline{GD}$ и $\overline{GO} = \overline{GO}$, од признакот ССС следува дека триаголниците OCG и ODG се складни. Оттука добиваме дека $\angle MGO = 90^\circ$, т.е. триаголникот MGO е правоаголен со агли 90° , 45° и 45° , т.е. тој е рамнокрак правоаголен. Значи, $\overline{GM} = \overline{GO}$. Понатаму имаме:



$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = (\overline{CG} - \overline{MG})^2 + (\overline{DG} + \overline{MG})^2,$$

$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = \overline{CG}^2 - 2\overline{CG} \cdot \overline{MG} + \overline{MG}^2 + \overline{DG}^2 + 2\overline{DG} \cdot \overline{MG} + \overline{MG}^2,$$

па како $\overline{GM} = \overline{GO}$ и $\overline{CG} = \overline{GD}$, добиваме

$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = \overline{CG}^2 - 2\overline{CG} \cdot \overline{MG} + \overline{GO}^2 + \overline{DG}^2 + 2\overline{CG} \cdot \overline{MG} + \overline{GO}^2,$$

$$\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GO}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{GO}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2,$$

односно $\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2r^2$.

Трет начин. Нека O е центарот на кружницата и нека E и F се подножјата на нормалите повлечени соодветно од точките C и D на дијаметарот AB (цртеж десно). Триаголникот OCD е рамнокрак ($\overline{CO} = \overline{OD}$), па затоа $\angle OCD = \angle CDO = \alpha$. Имаме,

$$\angle OCE = \angle OCD + \angle DCE = 45^\circ + \alpha.$$

Понатаму,

$$\angle COE = 180^\circ - \angle OEC - \angle OCE = 45^\circ - \alpha.$$

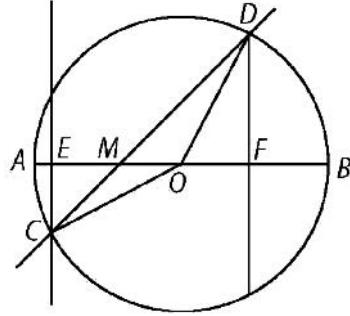
Слично,

$$\angle ODF = \angle CDF - \angle CDO = 45^\circ + \alpha.$$

Од ова следува дека правоаголните триаголници OCE и ODF се складни, па затоа

$\overline{EM} = \overline{OF}$ и $\overline{EO} = \overline{MF}$. Сега, од Питагоровата теорема следува:

$$\begin{aligned} \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 &= \overline{CE}^2 + \overline{ME}^2 + \overline{MF}^2 + \overline{FD}^2 \\ &= \overline{CE}^2 + \overline{OF}^2 + \overline{EO}^2 + \overline{FD}^2 \\ &= \overline{CE}^2 + \overline{EO}^2 + \overline{OF}^2 + \overline{FD}^2 \\ &= \overline{CO}^2 + \overline{OD}^2 = 2r^2. \end{aligned}$$



Четврт начин. Нека O е центарот на кружницата и нека E и F се подножјата на нормалите повлечени соодветно од точките C и D на дијаметарот AB (цртеж горе). Триаголниците MEC и MDF се рамнокраки правоаголници (имаат по еден прав агол и по еден агол еднаков на 45°). Според тоа, $\overline{EC} = \overline{MC}$ и $\overline{MF} = \overline{FD}$. Понатаму, од правоаголните триаголници MCE, MDF, OCE и ODF редоследно добиваме

$$\begin{aligned} \overline{EM}^2 + \overline{EC}^2 &= \overline{MC}^2, & \overline{FM}^2 + \overline{FD}^2 &= \overline{MD}^2, \\ \overline{EO}^2 + \overline{EC}^2 &= r^2, & \overline{FO}^2 + \overline{FD}^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Да означиме: $\overline{EM} = a, \overline{MF} = b, \overline{MO} = c$. Тогаш $\overline{MC}^2 = 2a^2, \overline{MD}^2 = 2b^2$ и

$$(a + c)^2 + a^2 = r^2, \quad (b - c)^2 + b^2 = r^2$$

т.е.

$$2a^2 + 2ac + c^2 = r^2, \quad 2b^2 - 2bc + c^2 = r^2. \quad (1)$$

Задача 23. Нека M, N, P, Q се редоследно точки на страните AB, BC, CD, DA на квадратот $ABCD$ такви што $\overline{AM} = \overline{NC} = \overline{PD} = \overline{QA}$ (цртеж десно). Повлечена е искршената линија $PNQM$. Докажи дека $\angle PNC = \angle NQM$.

Решение. Ако M, N, P, Q се средини на соодветните страни, тогаш тврдењето е тривијално, па затоа ќе го разгледаме општиот случај.

Прв начин. Нека S е точка на страната AB таква што $\overline{SB} = \overline{AM}$ (цртеж десно). Четириаголникот $SNPQ$ е квадрат, па затоа

$$\angle NQS = 45^\circ = \angle AQM.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle NQM &= \angle SQM + \angle SQN \\ &= \angle SQM + \angle MQA = \angle SQA.\end{aligned}\quad (1)$$

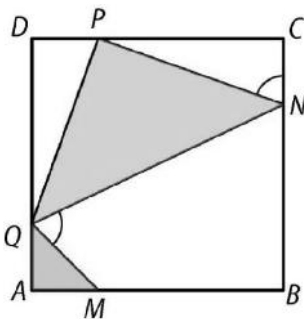
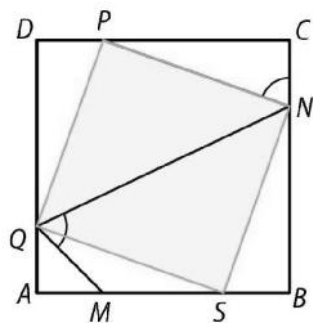
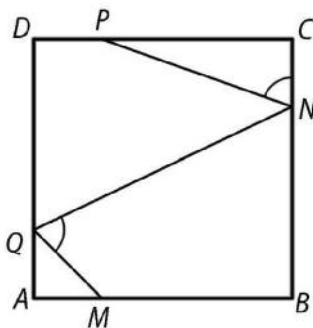
Бидејќи правоаголните триаголници QAS и NCP се складни, важи $\angle PNC = \angle SQA$, па од (1) следува $\angle PNC = \angle NQM$.

Втор начин. Бидејќи триаголниците NPQ и MQA се рамнокраки правоаголни, добиваме $\angle QNP = \angle AQM = 45^\circ$ (цртеж десно). Од $\angle NQA = \angle QNC$ (наизменични агли), следува

$$\begin{aligned}\angle PNC &= \angle QNC - \angle QNP \\ &= \angle NQA - \angle MQA \\ &= \angle NQM.\end{aligned}$$

Трет начин. Бидејќи триаголниците NPQ и MQA се рамнокраки правоаголни, добиваме $\angle QNP = \angle AQM = 45^\circ$ (цртеж десно). Понатаму, $\angle NQD = \angle QNB$ (наизменични агли), па затоа

$$\begin{aligned}\angle PNC &= 180^\circ - \angle PNQ - \angle QNB \\ &= 180^\circ - \angle AQM - \angle NQD \\ &= \angle NQM.\end{aligned}$$



Четврт начин. Триаголниците AQM и MNB се рамнокраки правоаголници (цртеж десно), па затоа $\angle AMQ = \angle NMB = 45^\circ$. Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle QMN &= 180^\circ - \angle AMQ - \angle NMB \\ &= 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,\end{aligned}$$

т.е. триаголникот NMQ е правоаголен. Правоаголните триаголници MNQ и PCN се слични, бидејќи

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} = \sqrt{2} = \frac{\overline{NM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{PC}}.$$

Оттука следува дека соодветните агли се еднакви, т.е. $\angle PNC = \angle NQM$.

Петти начин. Со S да го означиме пресекот на отсечките NQ и PM . Отсечката PM е паралелна со AD и BC (цртеж десно), па затоа

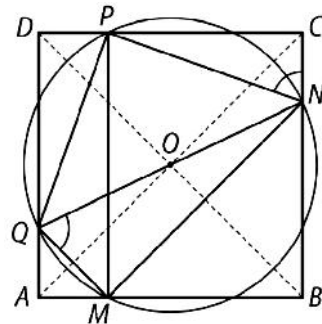
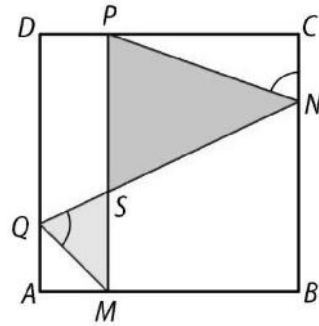
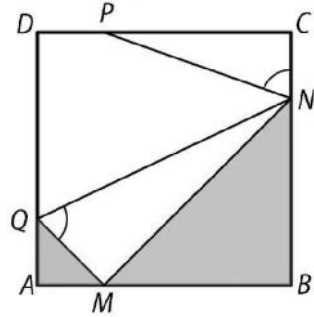
$$\angle PMQ = \angle SMQ = 45^\circ. \quad (1)$$

Покрај тоа,

$$\angle SNP = \angle QNP = 45^\circ, \quad (2)$$

како остар агол на рамнокракиот правоаголен триаголник NPQ . Од (1) и (2) следува дека триаголниците SQM и SPN имаат еднакви агли во темињата M и N , а бидејќи $\angle QSM = \angle PSN$ (како накрсни агли), триаголниците SQM и SPN се слични. Од сличноста на овие триаголници следува еднаквоста на третиот пар агли, односно $\angle SQM = \angle SPN$. Бидејќи $\angle SPN = \angle PNC$ (како наизменични), добиваме $\angle SQM = \angle PNC$, односно $\angle PNC = \angle NQM$.

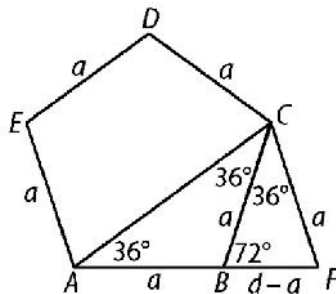
Шести начин. Центарот на опишаната кружница околу триаголникот NPQ е средишната NQ , т.е. пресекот на дијагоналите на квадратот (види цртеж). Оваа кружница минува низ точката M , бидејќи $\overline{OM} = \overline{OP}$. Според тоа, четириаголникот $MNPQ$ е тетивен, па затоа $\angle NQM = \angle MPN$. Но, $\angle MPN = \angle PNC$ (наизменични агли, па затоа $\angle PNC = \angle NQM$).



Задача 24. Ако се a и d должината на страната и дијагоналата на правилен петаголник, докажи дека

$$\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1. \quad (1)$$

Решение. Прв начин. Нека $ABCDE$ е правилен петаголник (цртеж десно). Неговата страна AB преку темето B ја продолжуваме до точката F така што $\overline{AF} = \overline{AC} = d$. Надворешниот агол на правилниот петаголник $\angle CBF = 360^\circ : 5 = 72^\circ$ истовремено е надворешен агол за триаголникот ABC , па затоа $\angle BAC = \angle BCA = 72^\circ : 2 = 36^\circ$. Бидејќи триаголникот AFC е рамнокрак, добиваме



$$\angle ACF = \angle AFC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ,$$

па затоа

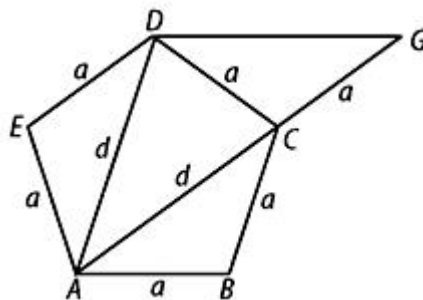
$$\angle BCF = \angle ACF - \angle ACB = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ,$$

од каде следува дека триаголникот BFC е рамнокрак и тој е сличен со триаголникот CFA . Затоа важи

$$d : a = a : (d - a), \text{ т.е. } d^2 - a^2 = ad.$$

Ако последното равенство го поделиме со ad , го добиваме равенството (1).

Втор начин. Дијагоналата AC ја продолжуваме преку точката C до точката G така што $\overline{CG} = \overline{CD} = a$ (цртеж десно). Имаме



$$\begin{aligned} \angle CAD &= 108^\circ - \angle BAC - \angle EAD \\ &= 108^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ. \end{aligned}$$

Триаголниците ACD и CDG се рамнокраки, па затоа

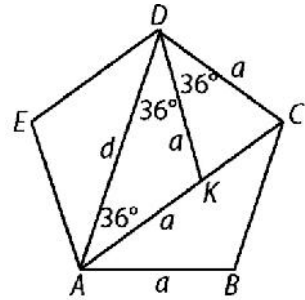
$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ \text{ и } \angle CDG = \angle CGD = \angle ACD : 2 = 36^\circ.$$

Понатаму од признакот SAC следува дека триаголниците ABC и CGD се складни, па затоа $\overline{GD} = \overline{AC} = d$. Понатаму, триаголниците AGD и CGD се слични, (имаат еднакви агли), па затоа $\overline{AF} : \overline{GD} = \overline{GD} : \overline{CD}$, т.е.

$$(d + a) : d = d : a, \text{ т.е. } d^2 = a(a + d),$$

од каде лесно се добива равенството (1).

Трет начин. Симетралата на $\angle ADC = 72^\circ$ ја сече дијагоналата AC во точка K (цртеж десно). Од $\angle KAD = \angle ADK = 36^\circ$ следува дека триаголникот ADK е рамнокрак. Затоа важи $\overline{AK} = \overline{DK}$. Понатаму, од триаголникот AKD добиваме $\angle AKD = 108^\circ$ и како овој агол е надворешен за триаголникот KCD добиваме $\angle DKC = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ и $\angle KCD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, што значи дека триаголникот KCD е рамнокрак и важи $\overline{DK} = \overline{CD} = a$. Според тоа, $\overline{AK} = \overline{DK} = a$, па затоа $\overline{CK} = d - a$. Но, триаголниците ACD и DKC се слични, од каде добиваме $d : a = a : (d - a)$, а оттука следува равенството (1).



Четврт начин. Точката F ја определуваме како во првиот начин на решавање, а потоа ја повлекуваме висината CL на триаголникот BFC (цртеж десно). Тогаш $\overline{BL} = \frac{d-a}{2}$ и $\overline{AL} = a + \frac{d-a}{2} = \frac{a+d}{2}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на правоаголните триаголници ACL и BCL следува

$$\overline{CL}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AL}^2 \text{ и } \overline{CL}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BL}^2,$$

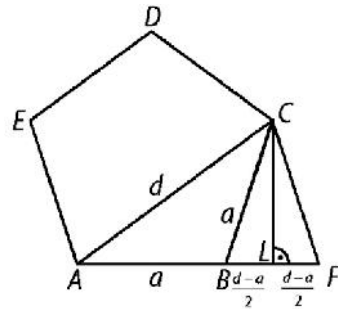
односно

$$\overline{CL}^2 = d^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \text{ и } \overline{CL}^2 = a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2.$$

Значи,

$$d^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2,$$

од каде го добиваме равенството $d^2 - a^2 = ad$, кое е еквивалентно со равенството (1).



Задача 25. Правоаголникот $ABGF$ на цртежот десно е составен од три квадрата $ABCD$, $DCFE$ и $EFGH$. Докажи дека

$$\angle ADB + \angle AEB + \angle AHB = 90^\circ.$$

Решение. Должината на страната на квадратите да ја означиме со a .

Ги воведуваме ознаките $x = \angle ADB$, $y = \angle AEB$, $z = \angle AHB$. Јасно, е дека $\angle DBC = x$, $\angle EBF = y$, $\angle HBC = z$ и $x = 45^\circ$. Според тоа, за да ја решиме задачата доволно е да докажеме дека $y + z = 45^\circ$.

Прв начин. Нека S е пресечната точка на отсечките CD и BE (цртеж десно). Од правоаголниот триаголник BCS наоѓаме дека $\overline{BS} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи триаголниците

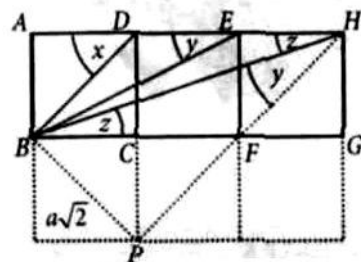
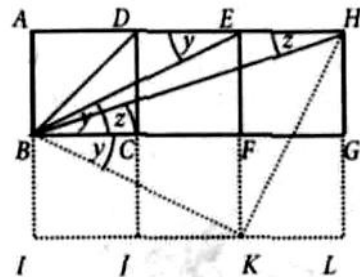
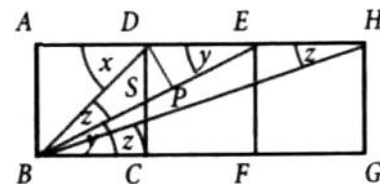
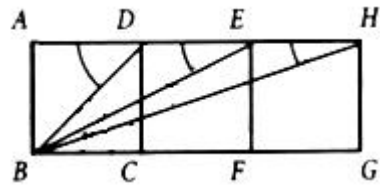
BCS и DPS се слични, со коефициент на сличност $\sqrt{5}$, важи $\overline{SP} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$ и $\overline{DP} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Тогаш $\overline{BP} = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{10} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$, т.е. $\overline{DP} = 3\overline{BP}$. Значи, триаголниците BDP и BGH се слични, па затоа $\angle PBD = z$. Но, $\angle EBF = y$, па затоа $y + z = 45^\circ$.

Втор начин. Дадениот цртеж од условот на задачата да го дополниме со квадратите $BIJC$, $CJKF$ и $FKLG$ (цртеж десно). Триаголниците HKE и KFB се складни, па затоа $\overline{HK} = \overline{KB}$, $\angle KBF = \angle HKE$, па е BKH рамнокрак правоаголен триаголник. Оттука следува $\angle KBH = 45^\circ$ и како

$$\angle KBH = \angle KBG + \angle HBG = \angle EBG + \angle HBG = y + z,$$

следува $y + z = 45^\circ$.

Трет начин. Цртежот од условот на задачата да го дополниме со три квадрата (цртеж десно). Правоаголните триаголници ABE и PBH се слични бидејќи едниот има катети a и $2a$, а другиот има катети $a\sqrt{2}$ и $2a\sqrt{2}$.



Според тоа, $\angle PHB = y$, од каде следува равенството

$$y + z = \angle PHA = 45^\circ.$$

Четврт начин. Цртежот од условот на задачата да го дополниме со квадратот $BIJC$ (цртеж десно). Правоаголните триаголници ABH и OBE се слични, бидејќи катетите на првиот се a и $3a$, а катетите на вториот се $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Според тоа, $\angle OEB = z$. Сега, од квадратот $DCFE$ заклучуваме

$$y + z = \angle DEB + \angle BEC = \angle DEC = 45^\circ.$$

Петти начин. На цртежот десно точката I е пресек на правите BE и GH (таа е средина на страната на средниот десен квадрат), а J е центарот на горниот десен квадрат. Лесно се пресметува дека

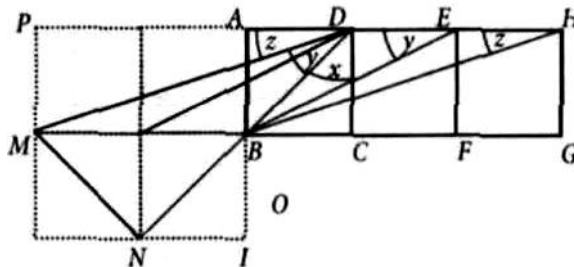
$$\overline{BI} = \frac{3a\sqrt{5}}{2} \text{ и } \overline{JI} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Според тоа, триаголниците BGH и BIJ се слични, па затоа $\angle IBJ = z$. Значи,

$$y + z = \angle FBI + \angle IBJ = \angle FBJ = \angle FBD = 45^\circ.$$

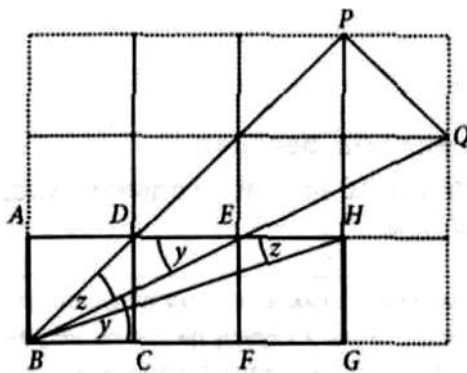
Шести начин. Цртежот од условот да го дополниме на начин како што е прикажано на долниот цртеж. Правоаголните триаголници AEB и NDM се слични, бидејќи катетите на првиот триаголник се a и $2a$, а на вториот се $\overline{NM} = a\sqrt{2}$ и $\overline{ND} = 2a\sqrt{2}$. Затоа $\angle NDM = \angle AEB = y$. Од $\triangle ABH \cong \triangle PMD$ следува $\angle MDP = z$, па затоа

$$y + z = \angle NDM + \angle MDP = \angle NDP = 45^\circ.$$



Седми начин. На цртежот десно правоаголните триаголници BGH и BPQ се слични, бидејќи катетите на првиот се a и $3a$, а на вториот се $a\sqrt{2}$ и $3a\sqrt{2}$. Според тоа, $\angle QBP = z$, па затоа важи

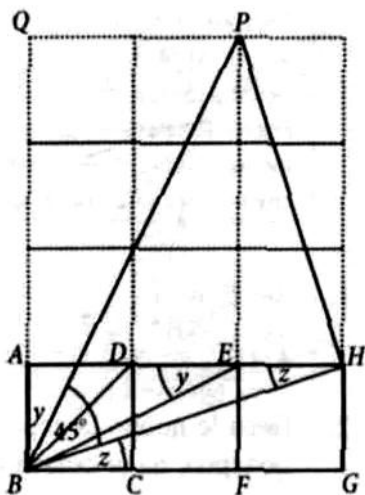
$$\begin{aligned} y + z &= \angle FBQ + \angle QBP \\ &= \angle FBP = 45^\circ. \end{aligned}$$



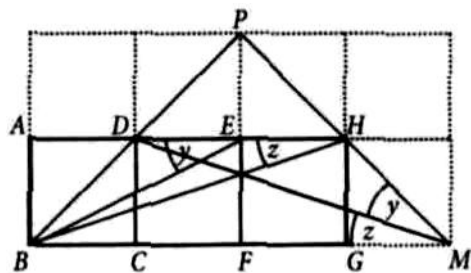
Осми начин. Триаголникот BHP на цртежот лево е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето H (Зошто?). Според тоа, $\angle HBP = 45^\circ$. Понатаму, од сличноста на триаголниците AEB и QBP следува $\angle PBQ = y$ и како важи $\angle GBH = z$, добиваме

$$y + z + 45^\circ = \angle GBQ = 90^\circ,$$

па затоа $y + z = 45^\circ$.

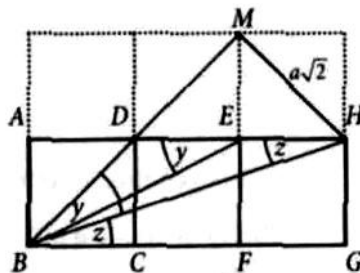


Деветти начин. Цртежот од условот да го дополниме на начин како што е прикажано на цртежот десно. Од сличноста на триаголниците ABE и PMD следува дека $\angle BMD = z$ и $\angle DMP = y$. Бидејќи $\triangle BPM$ е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето P и $\angle MBP = 45^\circ$, добиваме $y + z = \angle PMD + \angle DMB = 45^\circ$.

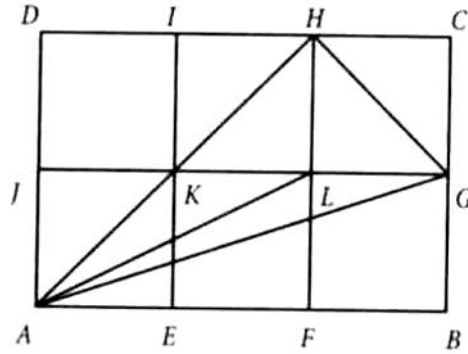


Десетти начин. Според цртежот десно правоаголните триаголници BMH и EAB се слични (катетите на едниот се $a\sqrt{2}$ и $2a\sqrt{2}$, а на другиот се a и $2a$). Затоа $\angle HBM = y$, па е

$$y + z = \angle MBH + \angle HBG = \angle MBG = 45^\circ.$$



Задача 26. Правоаголникот $ABCD$ е составен од шест еднакви квадрати $AEKJ$, $EFLK$, $FBGL$, $LGCH$, $KLHI$ и $JKID$. Ако плоштината на триаголникот ALJ е еднаква на 16 cm^2 , определи ја плоштината на триаголникот AGH .



Решение. Ако должината на страната на квадратот е еднаква

на a , тогаш плоштината на триаголникот ALJ е еднаква на $16 = \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2$, од каде добиваме $a = 4 \text{ cm}$. Значи, плоштината на секој од шесте квадрати е еднаква на 16 cm^2 .

Прв начин. Триаголникот ABH е составен од триаголниците AGK и KGH . Ма заедничката страна на овие триаголници $\overline{KG} = 2a$ во триаголникот AGK му соодветствува висина $\overline{AI} = a$, а во триаголникот KGH висина $\overline{HL} = a$. Оттука добиваме

$$P_{AGH} = P_{AGK} + P_{KGH} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 2a^2 = 32 \text{ cm}^2.$$

Втор начин. Страната AH на триаголникот AGH е дијагонала на квадратот $AFHD$ со страна $2a$ и затоа $\overline{AH} = 2a\sqrt{2}$ и $\angle AHG = 45^\circ$. Страната HG е дијагонала на квадратот $LGCH$, па затоа $\overline{HG} = a\sqrt{2}$ и $\angle GHC = 45^\circ$. Тоа значи дека триаголникот AGH е правоаголен со прав агол во темето H и катети $\overline{AH} = 2a\sqrt{2}$ и $\overline{HG} = a\sqrt{2}$. Затоа

$$P_{AGH} = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a^2 = 32 \text{ cm}^2.$$

Трет начин. Имаме:

$$P_{AGJ} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a = \frac{3}{2}a^2 \text{ и } P_{AKJ} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2}a^2,$$

па затоа

$$P_{AGK} = P_{AGJ} - P_{AKJ} = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = a^2.$$

Слично добиваме

$$P_{KGH} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = a^2.$$

Конечно,

$$P_{AGH} = P_{AGK} + P_{KGH} = a^2 + a^2 = 2a^2 = 32 \text{ cm}^2.$$

Четврт начин. Плоштината на триаголникот AGH ја добиваме ако од плоштината на правоаголникот $ABCD$ ги одземеме плоштините на триаголниците ABG , GCH , HDA . Имаме

$$\begin{aligned} P_{AGH} &= 3a \cdot 2a - \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \\ &= 6a^2 - \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - 2a^2 \\ &= 2a^2 = 32 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Петти начин. Правоаголните триаголници LAJ и AGH се слични, бидејќи првиот има катети $2a$ и a , а вториот има катети $2a\sqrt{2}$ и $a\sqrt{2}$. Коефициентот на сличност е $a\sqrt{2}$. Затоа

$$P_{AGH} : P_{ALJ} = 2:1,$$

т.е.

$$P_{AGH} = 2P_{ALJ} = 2a^2 = 32 \text{ cm}^2.$$

Шести начин. Должините на страните на триаголникот AGH се $\overline{AH} = 2a\sqrt{2}$, $\overline{HG} = a\sqrt{2}$ и $\overline{AG} = a\sqrt{10}$. Сега, од Хероновата формула следува

$$\begin{aligned} P_{AGH} &= \frac{1}{4} \sqrt{(3a\sqrt{2} + a\sqrt{10})(3a\sqrt{2} - a\sqrt{10})(a\sqrt{10} + a\sqrt{2})(a\sqrt{10} - a\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(18a^2 - 10a^2)(10a^2 - 2a^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{8a^2 \cdot 8a^2} = \frac{1}{4} \cdot 8a^2 = 2a^2 = 32 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

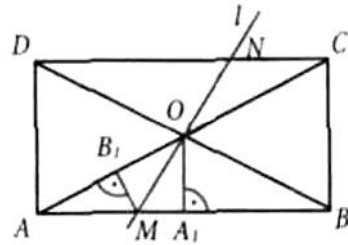
Задача 27. Дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ се сечат во точката O , при што важи $\overline{AO} = \overline{BO}$. Низ точката O е повлечена права l која страните AB и CD ги сече соодветно во точките M и N . Ако $\overline{AM} : \overline{MB} = 1 : 2$ докажи дека четириаголникот $MBND$ е ромб.

Решение. При различните начини на решавање ќе користиме некои факти кои лесно се докажуваат, како на пример: триаголниците AOD и BOC се рамнострани,

$$\overline{OM} = \overline{ON}, \angle AOB = 120^\circ, \angle ADB = 60^\circ, \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ, \overline{NC} = \overline{AM}, \dots$$

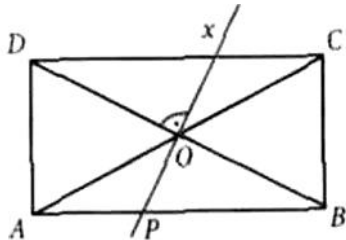
Бидејќи $\overline{OM} = \overline{ON}$, доволно е да докажеме дека $MN \perp BD$, т.е. дека дијагоналите на четириаголникот $MBND$ се заемно нормални и се половат.

Прв начин. Триаголникот AOD е рамнострани, од каде добиваме $\angle OAM = 30^\circ$ и $\angle OBM = 30^\circ$. Нека A_1 и B_1 се точки соодветно на AB и AC такви што $OA_1 \perp AB$ и $MB_1 \perp AC$ (цртеж десно). Јасно, A_1 е средина на страната AB и $\angle AOA_1 = 60^\circ$ и $\angle BOA_1 = 60^\circ$.



Понатаму, $\overline{MA_1} = \frac{1}{2} \overline{MA}$ ($\overline{MA} = \frac{1}{3} \overline{AB} = \frac{2}{3} \overline{AA_1}$) и $\overline{MB_1} = \frac{1}{2} \overline{MA}$ (како катета на спроти агол од 30° во правоаголниот триаголник AMB_1).

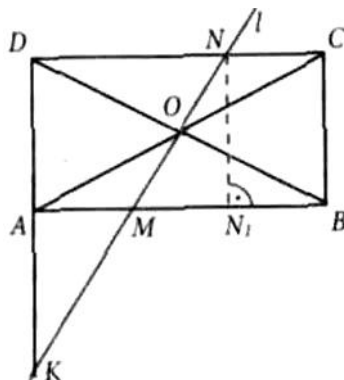
Значи, $\overline{MA_1} = \overline{MB_1}$. Правоаголните триаголници B_1OM и A_1OM се складни (заедничка хипотенуза и еднакви катети $\overline{MA_1} = \overline{MB_1}$). Според тоа, $\angle B_1OM = \angle A_1OM = 30^\circ$. Значи, $\angle A_1OM + \angle A_1OB = 90^\circ$, па е $l \perp BD$. Конечно, дијагоналите на четириаголникот $MBND$ се заемно нормални и се половат, што значи дека тој е ромб.



Втор начин. Нека правата x е нормалата во точката O на OB и нека таа ја сече страната AB во точката P (цртеж лево).

Тогаш $\angle AOP = 30^\circ = \angle OAP$, па затоа $\overline{OP} = \overline{AP}$. Од друга страна важи $\overline{PB} = 2\overline{OP}$ (бидејќи $\angle OBP = 30^\circ$). Од $\overline{OP} = \overline{AP}$ и $\overline{PB} = 2\overline{OP}$ следува $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$, т.е. точката P се совпаѓа со M , од каде што следува тврдењето на задачата.

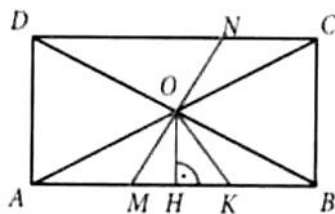
Трет начин. Нека K е пресечната точка на правите AD и MN (цртеж десно) и N_1 е точка на AB таква што $NN_1 \perp AB$. Тогаш $\overline{N_1B} = \overline{NC} = \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, па затоа $\overline{MN_1} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ т.е. $\overline{MN_1} = \overline{AM}$. Според тоа, правоаголните триаголници AMK и NMN_1 се складни (катета и остар агол), па затоа $\overline{NN_1} = \overline{AK}$. Триаголникот DKB е рамностран, бидејќи $\overline{DK} = 2\overline{BC} = \overline{DB}$ и KO е негова тежишна линија, па според тоа и висина. Значи $MO \perp DB$, од што следува



тврдењето на задачата.

Четврт начин. Нека OH и OK се соодветно висината и тежишната линија на триаголникот OMB (цртеж лево). Тогаш

$$\overline{MK} = \frac{\overline{MB}}{2} = \frac{\overline{AB}}{3} \text{ и } \overline{MH} = \overline{HK}.$$



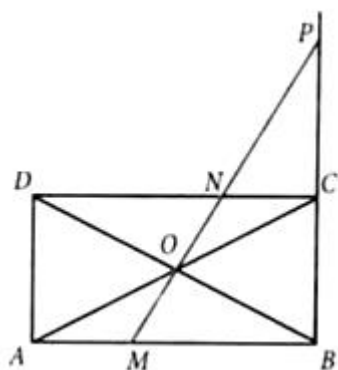
Од складноста на триаголниците OMH и OKH следува $\overline{OK} = \overline{OM}$ и $\angle HOM = \angle HOK$. Правоаголните триаголници HBO и HOK се слични бидејќи односот на катетите на едниот и другиот триаголник е $\sqrt{3}$ (првиот бидејќи $\angle HBO = 30^\circ$, а вториот заради изборот на точката K - пресметај). Затоа важи $\angle HOK = \angle HOM = 30^\circ$, од каде следува $\angle BOM = 90^\circ$.

Петти начин. Нека P е пресечната точка на правите MN и BC (цртеж десно). Од $\overline{MB} = 2\overline{NC}$ и $MB \parallel NC$ следува дека NC е средна линија за триаголникот MBP , па затоа C е средина на отсечката BP . Бидејќи $\overline{OC} = \overline{BC}$, т.е. $\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, заклучуваме дека триаголникот BOP е правоаголен со прав агол во темето O , што значи дека $MN \perp BD$.

Шести начин. Нека H е подножјето на нормалата повлечена од O на AB (цртеж

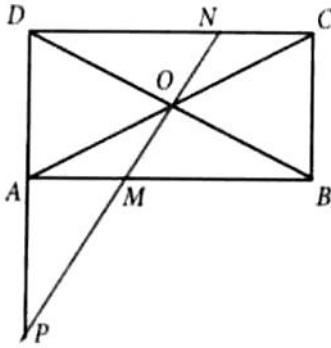
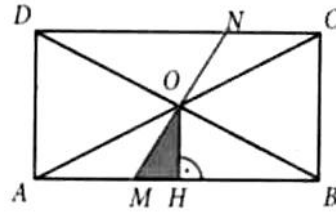
долу десно). Бидејќи H е средина на отсечката AB , добиваме $\overline{MH} = \frac{\overline{AB}}{6}$,

па затоа важи



$$\frac{\overline{OH}}{\overline{MH}} = \frac{\frac{\overline{BC}}{2}}{\frac{\overline{AB}}{6}} = \frac{3\overline{BC}}{\overline{AB}} \text{ и } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \sqrt{3},$$

па затоа $\frac{\overline{OH}}{\overline{MH}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Следува дека триаголниците OHM и ABC се слични, па е $\angle MOH = 30^\circ$, т.е. $\angle MOB = 90^\circ$.



Седми начин. Нека P е точка на правата AD таква што A е средина на отсечката DP (цртеж лево).

Триаголникот DBP е рамностран и M е негово тежиште. Сега OP е тежишната линија повлечена од темето P и таа мора да минува низ тежиштето M . Бидејќи таа истовремено е и висина на триаголникот DBP , заклучуваме дека $OM \perp BD$, што и требаше да се докаже

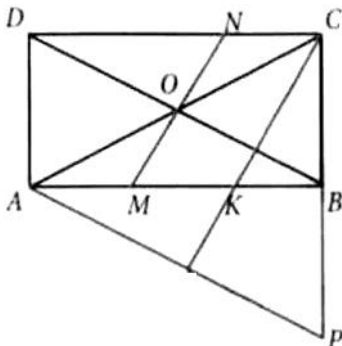
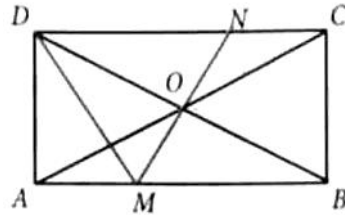
Осми начин. Бидејќи

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \sqrt{3} \text{ и } \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AD}}{\frac{\overline{AB}}{3}} = \frac{3\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

следува дека триаголниците ADM и ABD се слични (цртеж десно), па затоа важи

$$\angle ADM = 30^\circ \text{ и } \angle MDO = 30^\circ.$$

Оттука следува скалдноста на триаголниците ADM и ODM (CAC), па затоа $\angle DOM = \angle BAD = 90^\circ$.



Деветти начин. Нека K е средина на отсечката MB и P е точка на правата BC таква што B е средина на CP (цртеж лево). Јасно, четириаголниците $APBD$ и $MKCN$ се паралелограми. Од друга страна, триаголникот APC е рамностран и точката K е неговото тежиште. Затоа важи $CK \perp AP$.

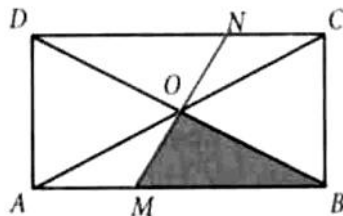
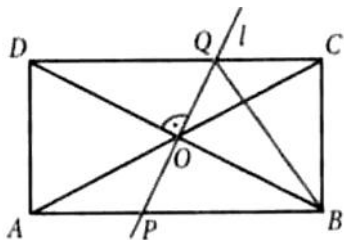
Бидејќи $NM \parallel CK$ и $BD \parallel AP$, следува дека $MN \perp BD$.

Десетти начин. Бидејќи $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (цртеж долу десно) и

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{BM}} = \frac{\frac{\overline{BD}}{2}}{\frac{2\overline{AB}}{3}} = \frac{3\overline{BD}}{4\overline{AB}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

триаголниците OBM и ABD се слични, па затоа важи

$$\angle MOB = \angle DAB = 90^\circ.$$



Единаесетти начин. Повлекуваме нормала l на правата BD во точката O (цртеж лево), која ги сече правите AB и CD соодветно во точките P и Q . Бидејќи OQ е катета наспроти агол од 30° во правоаголниот триаголник DOQ , добиваме дека

$\overline{OQ} = \frac{1}{2} \overline{DQ}$. Правоаголните триаголници POB и QOB се складни (имаат еднакви катети), па затоа $\angle PBO = \angle OBQ = \angle CBQ = 30^\circ$. Затоа триаголниците QOB и QCB се складни (остар агол и заедничка хипотенуза). Триаголниците QOB и QOD се симетрични, па затоа се складни. Според тоа, триаголниците QOD и QCB се складни, од каде следува $\overline{QC} = \overline{QO}$, т.е. $\overline{QC} = \frac{1}{2} \overline{DQ}$. Според тоа, правата l се совпаѓа со правата MN .

Задача 28. Нека ABC правоаголен триаголник со со прав агол во темето C . Докажи дека

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}, \quad (1)$$

каде a и b се должините на катетите, а h е должината на висината повлечена кон хипотенузата c .

Решение. Прв начин. Од формулите за плоштината на правоаголен триаголник и Питагоровата теорема последователно следува

$$(ab)^2 = (ch)^2,$$

$$a^2b^2 = c^2h^2,$$

$$a^2b^2 = (a^2 + b^2)h^2,$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2},$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Втор начин. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето C , $\overline{AD} = p$ и $\overline{BD} = q$. Според Евклидовата теорема имаме

$$h^2 = pq. \quad (2)$$

Сега, од (2) и од Питагоровата теорема, ако земеме предвид дека $p + q = c$, добиваме

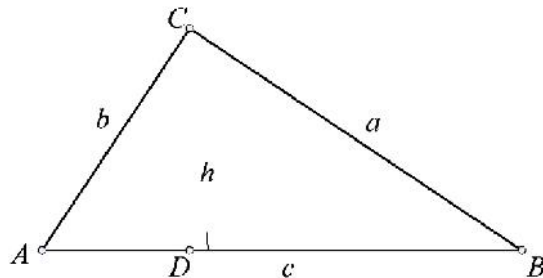
$$a^2 = h^2 + q^2 = pq + q^2 = q(p + q) = qc,$$

$$b^2 = h^2 + p^2 = pq + p^2 = p(p + q) = pc,$$

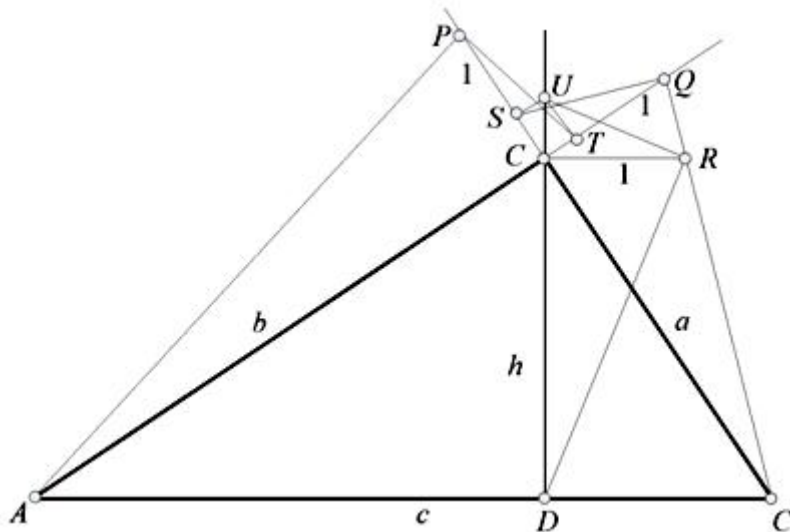
па затоа

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{qc} + \frac{1}{pc} = \frac{p+q}{cpq} = \frac{c}{cpq} = \frac{1}{pq} = \frac{1}{h^2}.$$

Трет начин. На продолжението на катетата BC преку точката C конструираме точка P , таква што $\overline{CP} = 1$. Ги поврзуваме точките A и P , па во точката P конструираме нормала на AP . Пресечната точка на оваа нормала и продолжението на катетата AC преку точката C ја означуваме со T (види цртеж). Триаголникот ATP е правоаголен ($\angle P = 90^\circ$) и од Евклидовата теорема добиваме



$$\overline{CT} = \frac{1}{b}. \quad (3)$$



На ист начин начин конструираме на продолжението на катетата AC , преку точката C , точка Q таква што $\overline{CQ}=1$. Нормалата на BQ конструирана во точката Q го сече продолжението на катетата BC , преку точката C , во точка S . Триаголникот BQS е правоаголен ($\angle Q = 90^\circ$) и од Евклидовата теорема добиваме

$$\overline{CS} = \frac{1}{a}. \quad (4)$$

Во точката C конструираме нормала на висината CD и на оваа нормала определуваме точка R , таква што $\overline{CR}=1$. Во точката R конструираме нормала на DR и пресечната точка на оваа нормала со продолжението на висината CD преку точката C ја означуваме со U . Триаголникот UDR е правоаголен ($\angle R = 90^\circ$) и од Евклидовата теорема добиваме

$$\overline{CU} = \frac{1}{a}. \quad (5)$$

Ја поврзуваме точката U со точките S и T . Од триаголниците USC и DCB добиваме

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{UC}} \stackrel{(5)}{=} \frac{a}{\frac{1}{h}} = ah, \quad (6)$$

и

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} \stackrel{(4)}{=} \frac{h}{\frac{1}{a}} = ah, \quad (7)$$

па затоа

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{UC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}}.$$

Значи триаголниците USC и DCB се слични и од оваа сличност следува дека $\angle USC = 90^\circ$, што значи дека четириаголникот $SCTU$ е право-аголник. Затоа

$$\overline{SU} = \overline{CT} = \frac{1}{b}. \quad (8)$$

Конечно, со примена на Питагоровата теорема на триаголникот USC , од (4), (5) и (8) добиваме

$$\begin{aligned} \overline{CS}^2 + \overline{SU}^2 &= \overline{CU}^2, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} &= \frac{1}{h^2}. \end{aligned}$$

Задача 29. Нека $ABCD$ е квадрат со страна 1. На страните AB, BC, CD и DA се земени точки M, N, K и L , соодветно, такви што

$$\overline{AM} + \overline{AL} + \overline{CN} + \overline{CK} = 2. \quad (1)$$

Докажи дека правите MK и NL се заемно нормални.

Решение. Прв начин. Повлекуваме прави MP и NQ паралелни на страните на квадратот (цртеж десно). Тогаш

$$\overline{KP} = |\overline{AM} - \overline{DK}|, \overline{LQ} = |\overline{BN} - \overline{AL}|.$$

Равенството (1) е еквивалентно со равенството

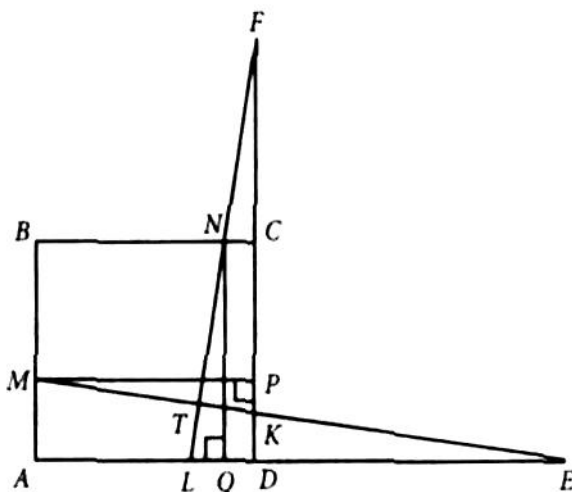
$$\overline{AM} + \overline{AL} = (1 - \overline{CN}) + (1 - \overline{CK}).$$

Бидејќи разгледуваниот квадрат е единичен, важи

$$\overline{AM} + \overline{AL} = \overline{BN} + \overline{DK}, \text{ т.е. } \overline{AM} - \overline{DK} = \overline{BN} - \overline{AL}.$$

Според тоа, $\overline{KP} = \overline{LQ}$, па затоа правоаголните триаголници PMK и QNL се складни. Значи, $\angle PMK = \angle QNL$. Бидејќи и $MP \perp NQ$, заклучуваме дека $MK \perp NL$.

Втор начин. Нека T е пресечната точка на правите MK и NL . Да ги продолжиме MK и NL до пресеците со продолженијата на страните на квадратот (види цртеж). Нека, на пример, правата Mk ја сече правата AD во точката E , а правата NL ја сече правата CD во точката F .



Воведуваме ознаки $\overline{AM} = m, \overline{AL} = l, \overline{CN} = n, \overline{CK} = k$. Ќе разгледаме два пара слични триаголници.

Триаголниците FCN и FDL се слични (еднакви агли), па затоа $\frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{LD}}$, односно $\frac{\overline{FC}}{\overline{FC}+1} = \frac{n}{1-l}$. Оттука добиваме $\overline{FC} = \frac{n}{1-n-l}$.

Триаголниците EDK и EAM се слични (еднакви агли), па затоа $\frac{\overline{ED}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{KD}}{\overline{MA}}$, односно $\frac{\overline{ED}}{\overline{ED}+1} = \frac{1-k}{m}$. Оттука добиваме $\overline{ED} = \frac{1-k}{k+m-1}$.

Од $m+n+k+l=2$ следува дека $1-n-l=k+m-1$, па е $\frac{\overline{FC}}{\overline{ED}} = \frac{n}{1-k} = \frac{\overline{CN}}{\overline{DK}}$.

Според тоа, правоаголните триаголници FCN и EDK се слични. Затоа $\angle FNC = \angle EKD = \alpha$, па во четириаголникот $CNTK$ важи

$$\angle CKT = \alpha, \angle CNT = 180^\circ - \alpha, \angle NCK = 90^\circ.$$

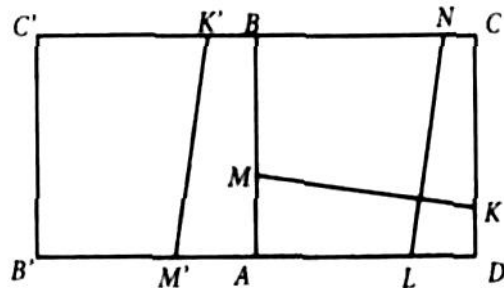
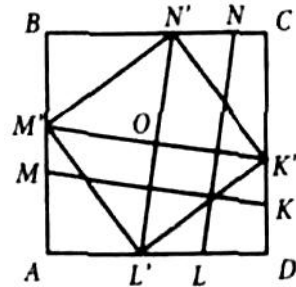
Тоа значи дека $\angle NTK$ е прав, што и требаше да се докаже.

Трет начин. Нека O е центар на дадениот квадрат. Низ центарот O повлекуваме отсечки $M'K'$ и $N'L'$ паралелни на отсечките Mk и NL , соодветно, при што точките M', K', N', L' припаѓаат на страните AB, BC, CD, DA , соодветно (цртеж десно). Четириаголниците $M'K'NL'$ и $M'K'NL'$ се паралелограми, па затоа $\overline{MM'} = \overline{KK'}$ и $\overline{LL'} = \overline{NN'}$, што значи

$$\overline{AM'} + \overline{AL'} + \overline{CN'} + \overline{CK'} = \overline{AM} + \overline{AL} + \overline{CN} + \overline{CK} = 2.$$

Покрај тоа, важи $\overline{AM'} = \overline{CK'}$ и $\overline{AL'} = \overline{CN'}$ (централна симетрија во однос на центарот O). Следува дека $\overline{AM'} + \overline{AL'} = \overline{CN'} + \overline{CK'} = 1$. Сега, ако земеме предвид дека страните на квадратот се со должина 1, добиваме дека точките M', L', K', N' ги делат страните на квадратот во еднаков однос. Затоа правоаголните триаголници $M'AL', L'DK', K'CN', N'BM'$ се складни. Од еднаквоста на нивните хипотенузи следува дека четириаголникот $M'L'K'N'$ е ромб, па затоа неговите дијагонали се заемно нормални. Но, тогаш се заемно нормални и на нив паралелните отсечки MK и NL , што и требаше да докажеме.

Четврт начин. Нека $AB C'B'$ е квадратот кој со дадениот квадрат има заедничка страна AB (цртеж десно). Нека M' и K' се точки на страните AB' и BC' такви што $\overline{BK'} =$



$\overline{DK}$ и $\overline{AM}' = \overline{AM}$. Тогаш и $\overline{C'K}' = \overline{CK}$. Од условот на задачата следува дека

$$\overline{AM}' + \overline{AL} + \overline{CN} + \overline{C'K}' = \overline{CC}' = 2.$$

Бидејќи должините на страните на квадратот се 1, добиваме

$$\overline{BK}' + \overline{BN} + \overline{CN} + \overline{C'K}' = \overline{CC}' = 2.$$

Следува дека

$$\overline{M'L} = \overline{AM}' + \overline{AL} = \overline{BK}' + \overline{BN} = \overline{K'N},$$

па затоа четириаголникот $M'K'NL$ е паралелограм. Значи

$$\overline{M'K'} \parallel \overline{NL}. \quad (1)$$

Од друга страна, од складноста на трапезите $M'ABK'$ и $MADK$ следува еднаквоста на $\angle K'M'A$ и $\angle KMA$, чии краци $M'A$ и AM се заемно нормални. Од тоа следува дека и другите два краја се заемно нормални, т.е.

$$M'K' \perp MK. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува $MK \perp MK$, што и требаше да се докаже.

Петти начин. Теорема. Ако збирот на квадратите на две спротивни страни на четириаголникот е еднаков на збирот на квадратите на другите две спротивни страни, тогаш дијагоналите на овој четириаголник се заемно нормални.

Доказ. Страните на четириаголникот $ABCD$ да ги означиме како на цртежот десно. Нека M и N се подножјата на нормалите повлечени од темињата B и D на дијагоналата AC .

Ако точките M и N се совпаѓаат, тогаш дијагоналите се заемно нормални. Нека претпоставиме дека точките M и N не се совпаѓаат и дека нивниот распоред е како на дадениот цртеж (останатите случаи се разгледуваат аналогно). Во случајов имаме

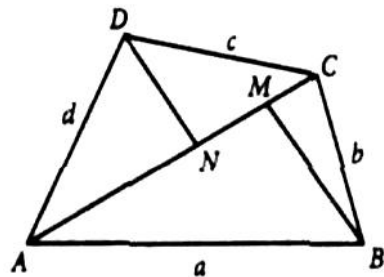
$$\overline{AM} > \overline{AN} \text{ и } \overline{CN} > \overline{CM}. \quad (1)$$

Нека претпоставиме дека $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Со примена на Питагоровата теорема на правоаголните триаголници ABM, BCM, CDN, DAN добиваме

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 + \overline{DN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{DN}^2,$$

па затоа

$$\overline{AM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AN}^2,$$



што противречи на (1). Од добиената противречност следува дека точките M и N се совпаѓаат, од каде следува тврдењето на теоремата. ■

Да се вратиме на задачата.

Воведуваме ознаки

$$\overline{AM} = m, \overline{AL} = l, \overline{CN} = n, \overline{CK} = k,$$

(цртеж десно). Со примена на Питагоровата теорема на правоаголните триаголници MAL, NBM, KCN, LDK , добиваме

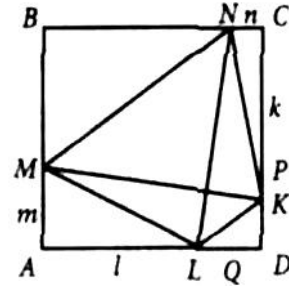
$$\overline{ML}^2 = m^2 + l^2, \quad \overline{NM}^2 = (1-m)^2 + (1-n)^2,$$

$$\overline{KN}^2 = n^2 + k^2, \quad \overline{LK}^2 = (1-l)^2 + (1-k)^2.$$

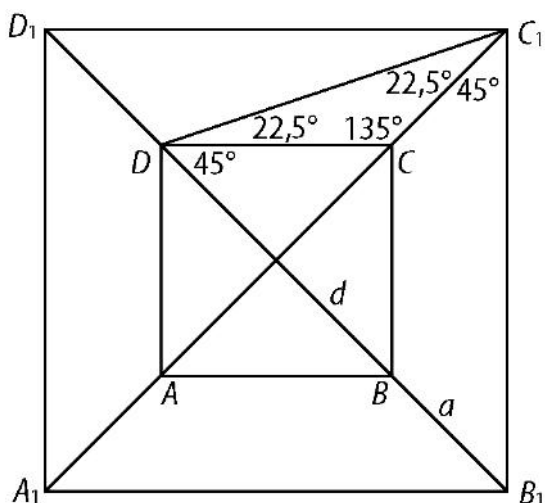
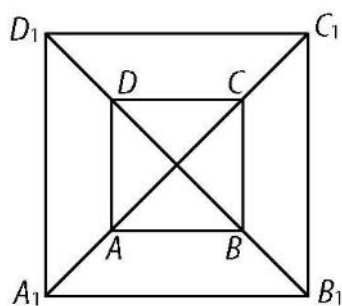
Според тоа,

$$\begin{aligned} \overline{NM}^2 + \overline{LK}^2 &= (1-m)^2 + (1-n)^2 + (1-l)^2 + (1-k)^2 \\ &= 4 - 2(m+n+l+k) + m^2 + l^2 + n^2 + k^2 \\ &= m^2 + l^2 + n^2 + k^2 \\ &= \overline{ML}^2 + \overline{KN}^2. \end{aligned}$$

Значи, збирот на квадратите на две спротивни страни на четириаголникот $MNKL$ е еднаков на збирот на квадратите на другите две спротивни страни. Сега од претходно докажаната теорема следува дека дијагоналите на овој четириаголник се заемно нормални, односно $MN \perp LK$.



Задача 30. Даден е квадрат со страна a и дијагонала d . Нека A_1 и C_1 се точки на правата AC во надворешноста на квадратот такви што $\overline{AA_1} = \overline{CC_1} = a$. На ист начин на правата BD се определуваат и точките B_1 и D_1 (цртеж десно). Докажи дека должината на страната на квадратот $A_1B_1C_1D_1$ е еднаква на збирот на должините на страната и дијагонала $ABCD$.



Решение. Прв начин. Ги поврзуваме точките D и C_1 . Триаголникот DCC_1 е рамнокрак, бидејќи неговите страни DC и CC_1 се еднакви и неговиот агол во темето C е еднаков на 135° (цртеж лево). Според тоа,

$$\angle DC_1C = \angle CDC_1 = 22^\circ 30'.$$

Бидејќи

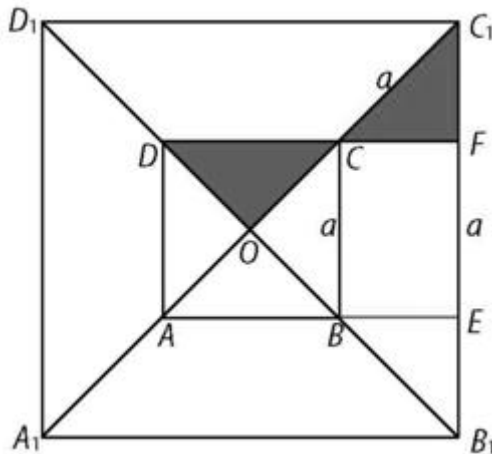
$$\angle BDC = \angle A_1C_1B_1 = 45^\circ,$$

$$\text{следува } \angle B_1DC_1 = \angle DC_1B_1,$$

па триаголникот B_1DC_1 е рамнокрак, т.е. $\overline{C_1B_1} = \overline{B_1D} = \overline{B_1B} + \overline{BD} = a + d$.

Втор начин. Повлекуваме нормали од темињата B и C на страната B_1C_1 (цртеж десно). Трапезниците OCD и FCC_1 се складни (рамнокраки правоаглони со еднакви хипотенузи). Бидејќи катетите им се половина од дијагонала на квадратот $ABCD$, добиваме дека $\overline{FC_1} = \frac{d}{2}$.

На потполно идентичен начин се докажува дека $\overline{EB_1} = \frac{d}{2}$, па затоа



$$\overline{C_1B_1} = \frac{d}{2} + a + \frac{d}{2} = a + d.$$

Трет начин. Нека E е точка од отсечката B_1C_1 таква што $CE \parallel BB_1$ (цртеж десно). Четириаголникот BB_1EC е паралелограм и $\overline{B_1E} = a$. Триаголникот CEC_1 е рамнокрак правоаголен и е складен со триаголникот ABC (катети со должина a и хипотенуза d). Од тоа следува дека

$$\overline{C_1B_1} = \overline{B_1E} + \overline{EB_1} = a + d.$$

Четврт начин. Од пресечната точка на дијагоналите повлекуваме нормали на страните на големиот квадрат, чии подножни точки се E и F (цртеж десно). Четириаголникот $OE C_1F$ е квадрат. Плоштината на овој квадрат е еднаква на

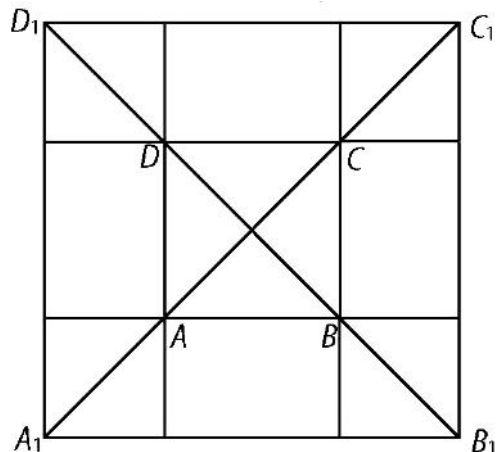
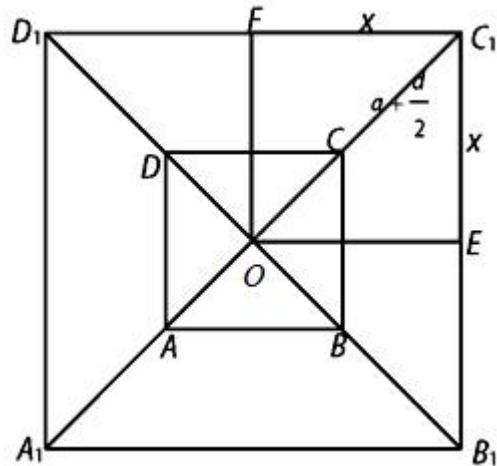
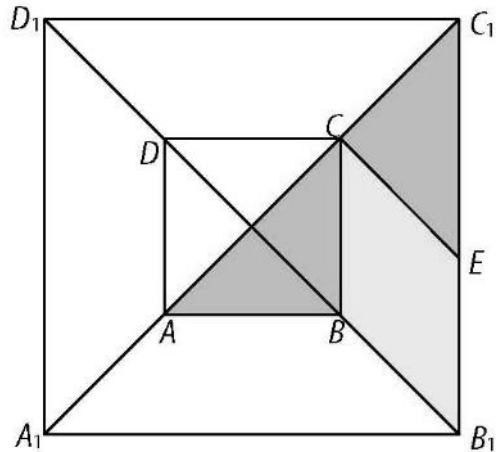
$$x^2 = \frac{(a + \frac{d}{2})^2}{2},$$

па затоа

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + \frac{d}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2a\sqrt{2} + d}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{d}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{d}{2} + \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Значи, страната на големиот квадрат е $2x = a + d$.

Петти начин. Квадратот $A_1B_1C_1D_1$ го делиме на девет четириаголници како на цртежот десно. Четириаголниците во аглите се складни квадрати, во средината е квадратот $ABCD$, а преостанати-



те четириаголници се четири складни правоаголници. Ако должините на страните на аголните квадрати се x , должините на страните на правоаголниците се a и a , а должината на страната на квадратот $A_1B_1C_1D_1$ е $a + 2x$. Плоштината на квадратот $A_1B_1C_1D_1$ е еднаква на збирот на плоштините на делбените квадрати и правоаголници, па затоа

$$(a + 2x)^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{2} + a^2 + 4ax.$$

По собирањето и средувањето добиваме $4x^2 = 2a^2$, па е $x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$.

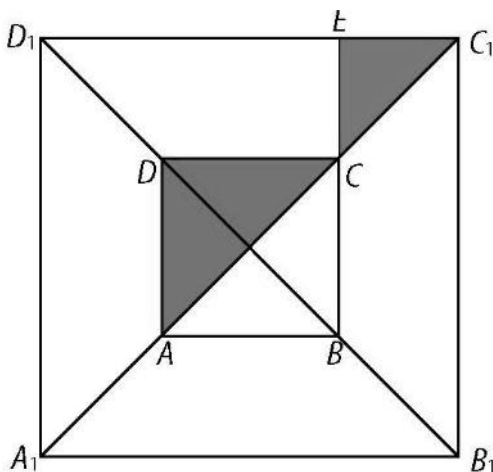
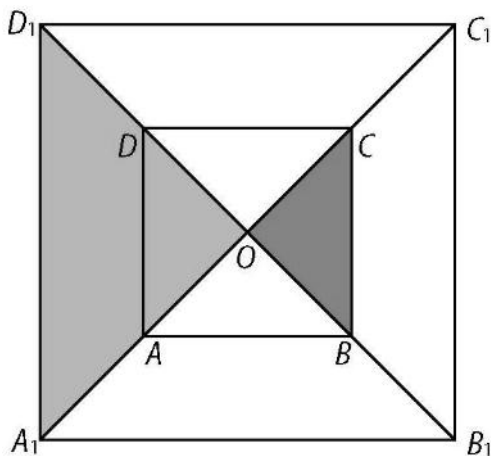
Конечно, должината на страната на квадратот $A_1B_1C_1D_1$ е $a + d$.

Шести начин. Триаголниците OBC и OD_1A_1 се рамнокраки правоаголници, па затоа се слични (цртеж десно). Од сличноста следува $a : \frac{d}{2} = x : (a + \frac{d}{2})$, каде со x е означена должината на страната на големиот квадрат. Имаме

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(a + \frac{d}{2})}{\frac{d}{2}} = \frac{2a(2a + d)}{2d} = \frac{a(2a + d)}{d} \\ &= \frac{a(2a + a\sqrt{2})}{a\sqrt{2}} = \frac{2a\sqrt{2} + 2a}{2} \\ &= a\sqrt{2} + a = d + a. \end{aligned}$$

Седми начин. Од точката C повлекуваме нормала на страната C_1D_1 и подножјето да го означиме со E (цртеж десно). Триаголниците ACD и CC_1E се слични, па затоа $d : a = a : x$, каде $x = \overline{EC_1}$. Оттука добиваме $x = \frac{a^2}{d} = \frac{d^2}{2d} = \frac{d}{2}$, бидејќи плоштината на квадратот е $a^2 = \frac{d^2}{2}$. Затоа

$$\overline{C_1D_1} = a + 2 \cdot \frac{d}{2} = a + d.$$



Осми начин. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот $A_1B_1C_1$ (цртеж десно), каде со x е означена катетата на овој квадрат, последователно добиваме

$$2x^2 = (d + 2a)^2,$$

$$2x^2 = d^2 + 4ad + 4a^2,$$

$$x^2 = \frac{d^2}{2} + 2ad + 2a^2,$$

$$x^2 = \frac{d^2}{2} + 2ad + \frac{d^2}{2} + a^2,$$

$$x^2 = d^2 + 2ad + a^2,$$

$$x^2 = (d + a)^2,$$

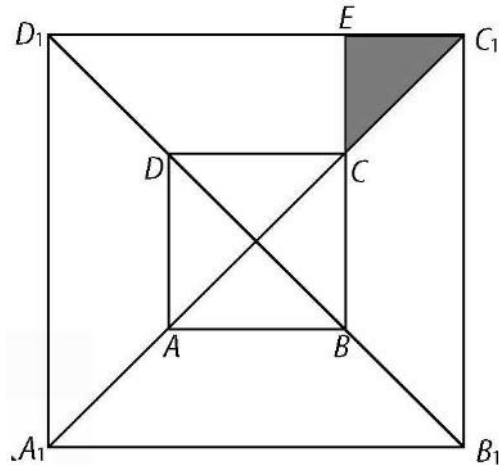
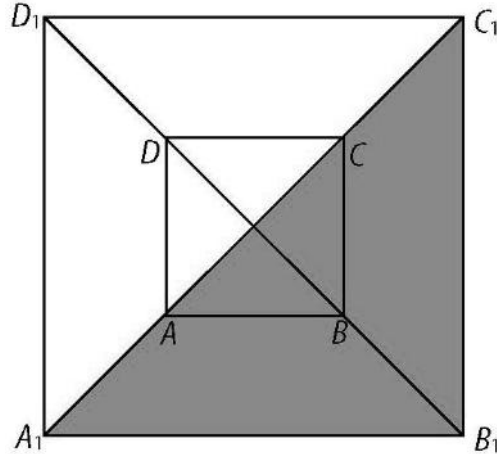
$$x = d + a.$$

Деветти начин. Од Питагоровата теорема применета на правоаголниот триаголник ECC_1 , каде E е подножјето на нормалата повлечена од C на C_1D_1 , цртеж десно, добиваме $2x^2 = a^2$, па е

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}.$$

Значи, должината на страната на квадратот е

$$\overline{C_1D_1} = 2 \cdot \frac{d}{2} + a = d + a.$$



Задача 31. Докажи дека должината на страната на правилен деветаголник е еднаква на разликата на должините на неговите најдолга и најкратка дијагонала.

Решение. Во правилен деветаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ со страна $\overline{A_1A_2} = a$ секоја дијагонала е еднаква на една од отсечките A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 , чии должини ги означуваме со d_1, d_2, d_3 , соодветно при што важи $a < d_1 < d_2 < d_3$. Треба да докажеме дека $d_3 - d_1 = a$.

Прв начин. Четириаголникот $A_1A_2A_4A_5$ е рамнокрак траpez (цртеж десно) чии основи се најдолгата и најкратката дијагонала A_1A_5 и A_4A_2 , а аглите на поголемата основа се

$$\angle A_2A_1A_5 = \angle A_4A_5A_1 = 60^\circ.$$

Низ точката A_4 повлекуваме права паралелна со A_2A_1 и нека нејзиниот пресек со основата A_4A_5 е точката M . Четириаголникот $A_1MA_4A_2$ е паралелограм, па

затоа $\angle A_4MA_5 = \angle A_2A_1A_5 = 60^\circ$. Според тоа, триаголникот A_4MA_5 е рамностран, со страна $\overline{A_4A_5} = a$, па затоа

$$d_3 - a = \overline{A_1A_5} - \overline{A_4A_5} = \overline{A_1A_5} - \overline{MA_5} = \overline{A_1M} = \overline{A_2A_4} = \overline{A_1A_3} = d_1.$$

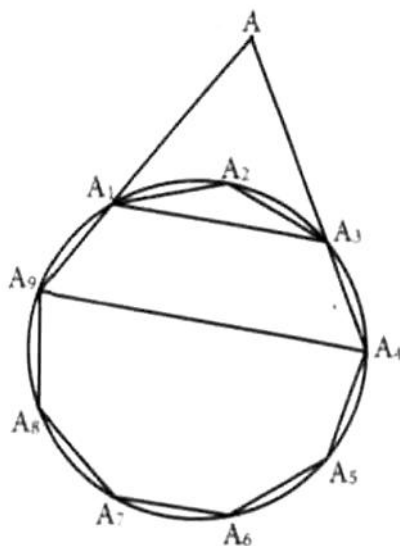
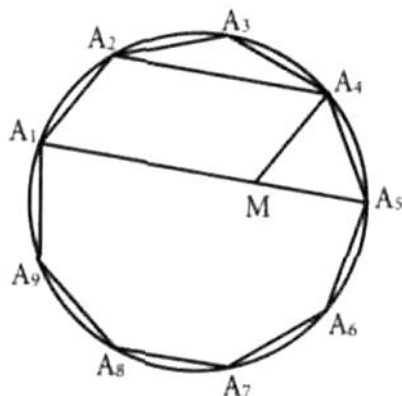
Втор начин. Да ги продолжime страните A_9A_1 и A_4A_3 до пресекот во точката A (цртеж десно). Триаголникот AA_9A_4 е рамностран, бидејќи

$$\angle AA_9A_4 = \angle AA_4A_9 = 60^\circ.$$

Бидејќи $A_1A_3 \parallel A_9A_4$, добиваме дека

$$\angle AA_1A_3 = \angle AA_3A_1 = 60^\circ,$$

па значи и триаголникот AA_1A_3 е рамностран. Должините на страните на овие триаголници се $\overline{A_4A_9} = d_3$ и $\overline{A_1A_3} = d_1$, па затоа нивната разлика е



$$d_3 - d_1 = \overline{A_4A_9} - \overline{A_1A_3} = \overline{AA_9} - \overline{AA_1} = \overline{A_1A_9} = a.$$

Трет начин. Да ги продолжиме дијагоналите A_8A_1 и A_4A_2 до пресекот во точката A (цртеж десно). Триаголникот AA_8A_4 е рамностран, бидејќи

$$\angle AA_8A_4 = \angle AA_4A_8 = 60^\circ.$$

Бидејќи $A_1A_2 \parallel A_8A_4$, добиваме дека

$$\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1 = 60^\circ,$$

па значи и триаголникот AA_1A_2 е рамностран. Должините на страните на овие триаголници соодветно се $\overline{A_4A_8} = d_3$ и $\overline{A_1A_2} = a$, па затоа нивната разлика е

$$d_3 - a = \overline{A_4A_8} - \overline{A_1A_2} = \overline{AA_8} - \overline{AA_1} = \overline{A_1A_8} = d_1.$$

Четврт начин. Нека две најдолги дијагонали A_1A_6 и A_3A_7 се сечат во точката M (цртеж десно). Имаме

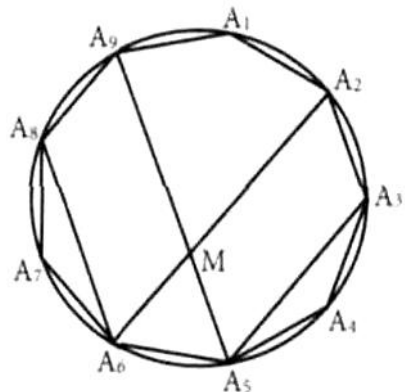
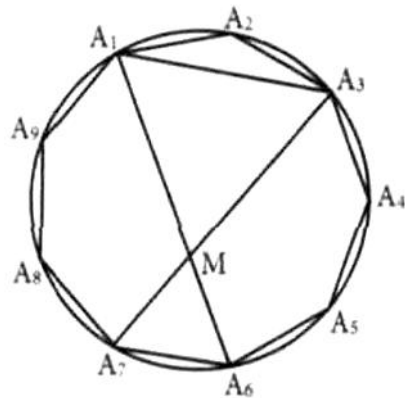
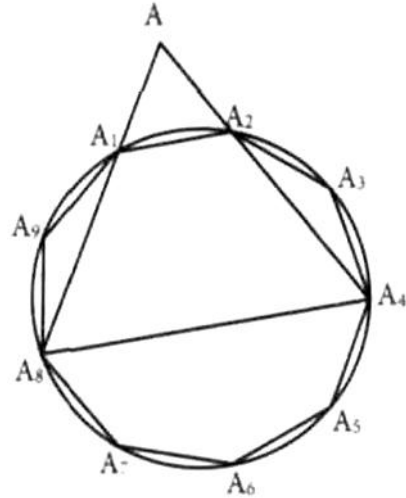
$$\begin{aligned} \angle A_3A_1A_6 &= \angle A_1A_3A_7 = \angle A_3A_7A_6 \\ &= \angle A_1A_6A_7 = 60^\circ \end{aligned}$$

па затоа триаголниците MA_3A_1 и MA_7A_6 се рамнострани. Имаме

$$\begin{aligned} d_3 - d_1 &= \overline{A_1A_6} - \overline{A_1A_3} = \overline{A_1A_6} - \overline{MA_1} \\ &= \overline{MA_6} = \overline{A_6A_7} = a. \end{aligned}$$

Петти начин. Нека две најдолги дијагонали A_2A_6 и A_9A_5 се сечат во точката M (цртеж десно). Четириаголниците $MA_2A_3A_5$ и $MA_9A_8A_6$ се складни паралелограми со должини на страни d_1 и a . Затоа важи

$$\begin{aligned} d_3 - d_1 &= \overline{A_2A_6} - \overline{A_3A_5} \\ &= \overline{A_2A_6} - \overline{MA_2} \\ &= \overline{MA_6} = \overline{A_8A_9} = a. \end{aligned}$$

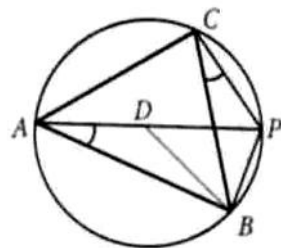


Шести начин. Прво ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема (Помпеј). Нека k е опишаната кружница околу рамностраниот триаголник ABC и P е произволна точка на лакот BC на таа кружница кој не ја содржи точката A . Тогаш

$$\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$$

Доказ. Нека D е точка на отсечката AP таква што $\overline{PD} = \overline{PB}$ (цртеж десно). Ќе докажеме дека $\overline{DA} = \overline{PC}$. Бидејќи $\angle APB = 60^\circ$, добиваме дека триаголникот BDP е рамностран. Оттука следува дека $\angle PBD = 60^\circ$. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\angle DAB = \angle PCB$ (перифериски агли над ист лак) и $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = \angle PBD - \angle CBD = \angle PBC$ заклучуваме дека триаголниците ABD и CBP се



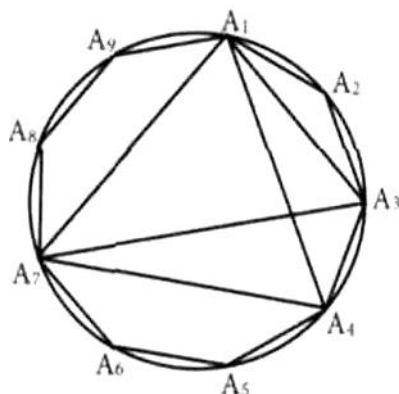
складни, па затоа $\overline{DA} = \overline{PC}$. Според тоа, $\overline{PA} = \overline{PD} + \overline{DA} = \overline{PB} + \overline{PC}$, со што доказот е завршен. ■

Да се вратиме на задачата.

Триаголникот $A_1A_4A_7$ е рамностран, а A_3 е точка на пократкиот лак A_1A_4 на кружницата опишана околу овој триаголник (цртеж десно). Од теоремата на Помпеј следува:

$$d_3 = \overline{A_3A_7} = \overline{A_3A_4} + \overline{A_3A_1} = a + d_1,$$

т.е. $d_3 - d_1 = a$.



Задача 32. Нека отсечката AC е дијаметар на кружницата k_1 со центар B . Кружницата k_2 ги допира правата AC во точката B и кружницата k_1 во точката D . Тангентата од A (различна од AC) на кружницата k_2 ја допира оваа кружница во точката E и ја сече правата BD во точката F . Определи го односот $\overline{AF} : \overline{AB}$.

Решение. Прв начин. Нека S е центарот на кружницата k_2 и нека $\overline{BS} = \overline{ES} = r$ е радиусот на таа кружница. Точката S е средина на отсечката BD , која е радиус на кружницата k_1 и затоа $\overline{AB} = \overline{BD} = 2r$.

Понатаму, $\overline{AB} = \overline{AE} = 2r$ како тангентни отсечки од точката A на кружницата k_2 . Јасно, триаголниците ABF и SEF се правоаголници, па како тие имаат заеднички агол заклучуваме дека се слични. Нека $a = \overline{FS}$.

Од спомената сличност следува дека

$$\overline{AF} : \overline{FS} = \overline{AB} : \overline{ES},$$

па затоа

$$\overline{AF} = \overline{FS} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{ES}} = 2\overline{FS} = 2a.$$

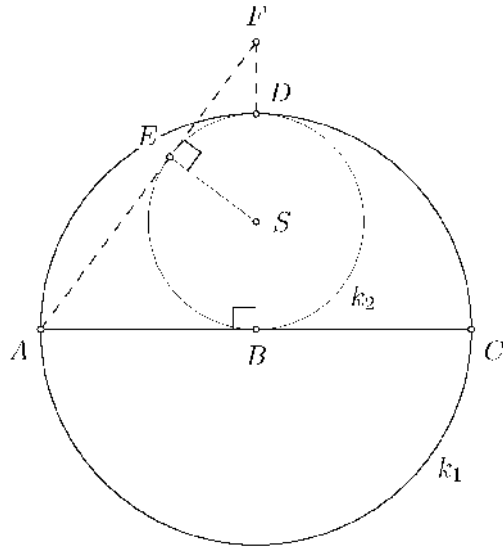
Според тоа,

$$2a - 2r = \overline{AF} - \overline{AE} = \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BF} = \frac{1}{2}(r + a),$$

од каде следува дека $3a = 5r$, односно $a : r = 5 : 3$. Конечно,

$$\overline{AF} : \overline{AB} = 2a : 2r = 5 : 3.$$

Втор начин. Нека $\overline{AB} = R$ е дијаметарот на поголемата кружница. Нека $\overline{DF} = x$, $\overline{EF} = y$ и S е центарот на помалата кружница (види цртеж). Тогаш $\overline{AB} = \overline{AE} = R$ како тангентни отсечки од точката A на кружницата k_2 . Точката S е средина на дијаметарот BD , па затоа $\overline{DS} = \frac{\overline{DB}}{2} = \frac{R}{2}$. Јасно, триаголникот ABF е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува



$$(R + x)^2 + R^2 = (R + y)^2. \quad (1)$$

Триаголникот SEF е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува:

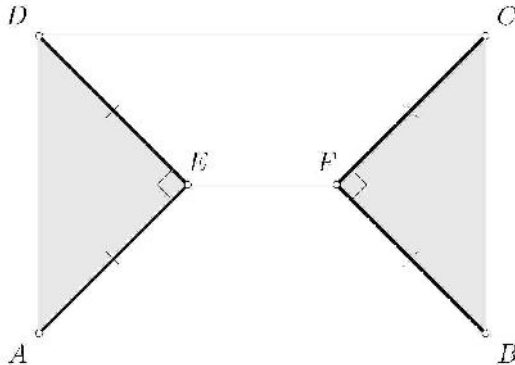
$$\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2. \quad (2)$$

Ако од (2) ја одземеме (1), по средувањето добиваме $R + x = 2y$. Со замена во (1) добиваме $3y = 2R$, односно $y = \frac{2}{3}R$. Конечно, бараниот однос е

$$\overline{AF} : \overline{AB} = (R + y) : R = \left(\frac{2}{3}R + R\right) : R = 5 : 3.$$

Задача 33. Горјан нацртал правоаголник со две сини страни со должини 24 и две црвени страни со должини 36. Секоја точка во внатрешноста на правоаголникот ја обоил со бојата на страната која е најблиска до таа точка. Точките кои се еднакво оддалечени од сините и црвените страни ги обоил со црна боја. Определи ја плоштината на црвениот дел на правоаголникот.

Решение. Прв начин. Нека $ABCD$ е правоаголник таков што важи $\overline{AB} = \overline{CD} = 36$ и $\overline{BC} = \overline{DA} = 24$. Нека E е пресечната точка на симетралата на $\angle BAD$ и симетралата на $\angle ADC$, а F е пресечната точка на симетралата на $\angle ABC$ и симетралата на $\angle BCD$. Точките на отсечката AE се еднакво оддалечени од отсечките AB и AD , па затоа се црни. Аналогно важи и за отсечките BF, CF и DE . Најблиска страна на точките во внатрешноста на триаголникот AED е страната AD , па затоа сите овие токи се сини. Слично, точките во внатрешноста на триаголникот BCF се сини. На точките во внатрешноста на трапезот $ABFE$ најблиска страна е AB , па затоа овие точки се црвени. Исто тка и сите точки во внатрешноста на трапезот $CDEF$ се црвени.



Од претходно изнесеното следува дека бараната плоштина е плоштината на правоаголникот $ABCD$ намалена за плоштините на триаголниците AED и BCF . Понатаму, триаголниците AED и BCF се правоаголни и важи $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{CF} = \overline{FB} = a$. Сега, од Питагоровата теорема применета на триаголникот AED следува $a\sqrt{2} = 24$, т.е. $a = 12\sqrt{2}$. Затоа бараната плоштина е еднаква на

$$P_{ABCD} - 2P_{AED} = 24 \cdot 36 - 2 \cdot \frac{(12\sqrt{2})^2}{2} = 576.$$

Втор начин. Како во првиот начин го определуваме црвениот и синиот дел на правоаголникот. Плоштините на трапезите $ABFE$ и $CDEF$ можеме

да ги определиме директно. Должинта на основата EF ја добиваме така што од должината на страната AB ќе ги одземеме должините на висините над хипотенузите во правоаголните триаголници AED и BCF . Бидејќи овие триаголници се рамнокраки правоаголни должината на висината повлечена кон хипотенузата е еднаква на половина од хипотенузата, односно таа е еднаква на $\frac{24}{2} = 12$. Оттука добиваме дека $\overline{EF} = 36 - 2 \cdot 12 = 12$.

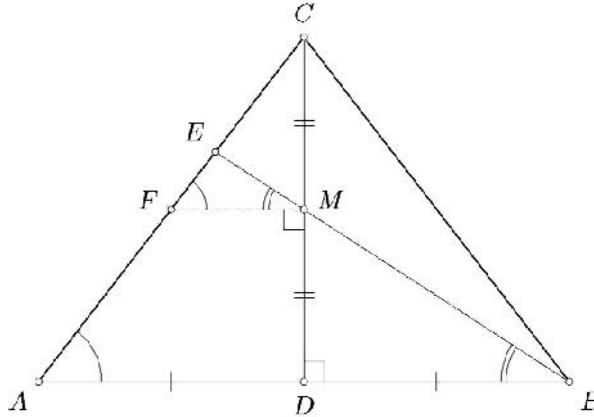
Понатаму, висината на секој од двата трапези е еднаква на половина од должината на страната BC на трапезот, што значи дека $h = \frac{24}{2} = 12$.

Конечно, бараната плоштина е еднаква на

$$P_{ABFE} + P_{CDEF} = \frac{\overline{AB} + \overline{EF}}{2} h + \frac{\overline{CD} + \overline{EF}}{2} h = 2 \cdot \frac{36 + 12}{2} \cdot 12 = 576.$$

Задача 34. Нека D е подножјето на висината од темето C на рамнокракиот триаголник ABC со основа AB . Точката M е средина на отсечката CD . Правите BM и AC се сечат во точката E . Определи го односот $\overline{CE} : \overline{AC}$.

Решение. Прв начин. Нека точката F е средина на страната AC . Бидејќи точката M е средина на страната CD , заклучуваме дека отсечката FM е средна линија на триаголникот ADC . Од тоа следува:



$$\overline{FM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{AB}}{4},$$

каде второто равенство важи бидејќи D е средина на страната AB (триаголникот ABC е рамнокрак). Понатаму, правата FM е паралелна со правата AD , па затоа

$$\angle MFE = \angle BAE \text{ и } \angle FME = \angle ABE.$$

Според тоа, триаголниците FME и ABE се слични, па затоа

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}.$$

Бидејќи

$$\overline{AF} + \overline{FE} = \overline{AE} = 4\overline{FE},$$

добиваме дека

$$\overline{FE} = \frac{\overline{AF}}{3} = \frac{\overline{AC}}{6}.$$

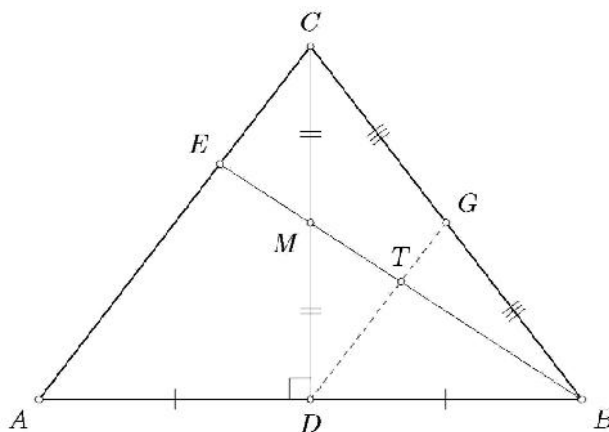
Според тоа,

$$\overline{CE} = \overline{CF} - \overline{FE} = \frac{\overline{AC}}{2} - \frac{\overline{AC}}{6} = \frac{\overline{AC}}{3},$$

т.е. $\overline{CE} : \overline{AC} = 1 : 3$.

Втор начин. Нека точката G е средина на страната BC и нека точката T е пресекот на отсечките BM и DG . Бидејќи точките M и G се средини

на страните CD и BC , заклучуваме дека точката T е тежиште на триаголникот BCD . Затоа важи $\overline{GT} : \overline{DG} = 1:3$.



Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа точката D е средина на страната AB . Бидејќи и точката G е средина на страната BC заклучуваме дека отсечката DG е средна линија на триаголникот ABC . Значи, правите DG и AC се паралелни. Конечно, од Талесовата теорема следува дека

$$\overline{CE} : \overline{AC} = \overline{GT} : \overline{DG} = 1:3.$$

Задача 35. Нека M е средина на страната BC на паралелограмот $ABCD$. Ако E е подножјето на нормалата од точката D на правата AM , докажи дека $\overline{CD} = \overline{CE}$

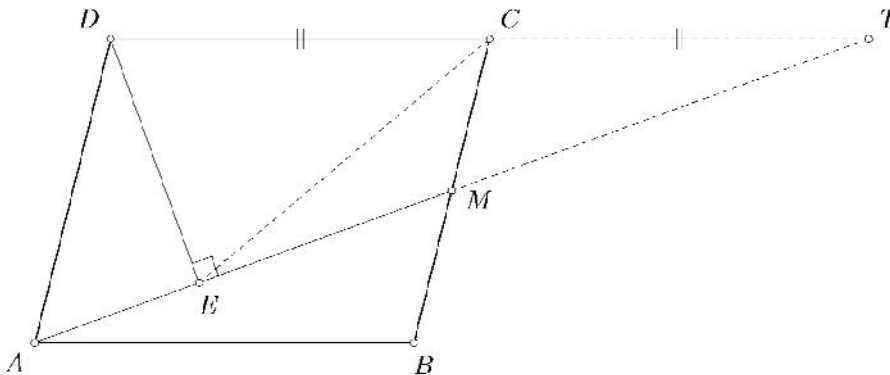
Решение. Прв начин. Нека правата која минува низ точката C и е нормална на правата DE ги сече правите AD и DE во точките F и G , соодветно. Од $CF \perp DE$ и $AM \perp DE$ следува $CF \parallel AM$. Кај четириаголникот $AMCF$ паровите спротивни страни се паралелни, па затоа тој е паралелограм.

Според тоа, $\overline{AF} = \overline{MC}$. Но F е средина на BC , па затоа $\overline{AF} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \overline{AD}$. Во триаголникот ADE отсечката FG минува низ средината на едната страна и е паралелна со другаа страна. Според тоа, таа е средна линија, па затоа G е средина на отсечката ED .

Да ги разгледаме триаголниците CGE и CGD . Тоа се правоаголници со прав агол во темето G , имаат еден пар еднакви страни $\overline{GE} = \overline{GD}$ и една заедничка страна CG . Сега од признакот CAC следува дека овие триаголници се складни. Конечно, од докажаната складност следува $\overline{CD} = \overline{CE}$.

Втор начин. Нека T е пресек на правите AM и CD . Правите CM и DA се паралелни, па од Талесовата теорема следува

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{TD}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{DA}}.$$



Понатаму, бидејќи M е средина на страната BC , заклучуваме дека $\overline{TD} = 2\overline{TC}$, т.е. C е средина на отсечката DT . Во правоаголниот триаголник DET , точката C е средина на хипотенузата, што значи дека таа е центар на опишаната кружница околу овој триаголник. Последното значи дека $\overline{CD} = \overline{CE}$.

Задача 36. Во правоаголен триаголник должините на сите страни се природни броеви, а радиусот на впишаната кружница е еднаков на 4. Определи ги сите можни вредности на должините на катетите на овој триаголник.

Решение. Прв начин. Со a и b да ги означиме катетите, со c хипотенузата и со r радиусот на впишаната кружница. Од формулите за плошина на правоаголен триаголник добиваме

$$\frac{a+b+c}{2}r = \frac{ab}{2},$$

$$ab - 4a - 4b = 4c.$$

Последното равенство го квадрираме и со примена на Питагоровата теорема последователно добиваме

$$(ab - 4a - 4b)^2 = 16c^2,$$

$$(ab - 4a - 4b)^2 = 16a^2 + 16b^2,$$

$$a^2b^2 - 8a^2b - 8ab^2 + 32ab = 0,$$

$$ab(ab - 8a - 8b + 32) = 0.$$

Бидејќи a и b се страни на триаголник, тие мора да се позитивни, па затоа од последното равенство последователно добиваме

$$ab - 8a - 8b + 32 = 0,$$

$$(a - 8)(b - 8) = 32.$$

Бидејќи a и b се цели броеви, мора да се цели броеви и $a - 8$ и $b - 8$, што значи дека тоа се цели броеви кои се делители на бројот 32. Останува уште да провериме дванаесет можности, од кои шест можеме да прескокнеме при претпоставка дека $a < b$. Според тоа, имаме:

$$a - 8 = -32, \quad a - 8 = 1,$$

$$a - 8 = -16, \quad a - 8 = 2,$$

$$a - 8 = -8, \quad a - 8 = 4.$$

Ако замениме во почетната равенка и ако земеме предвид дека a мора да е позитивен заклучуваме дека следните парови катети го задоволуваат условот на задачата:

$$(9, 40), (10, 24), (12, 16), (16, 12), (24, 10), (40, 9).$$

За секој добиен пар со Питагоровата теорема ја пресметуваме катетата c и проверуваме дали важи $\frac{ab}{a+b+c} = 4$.

Втор начин. Ги користиме истите ознаки како при првиот начин на решавање. Нека A', B', C' се допирните точки на впишаната кружница со страните, соодветно и нека S е центарот на впишаната кружница.

Четириаголникот $CA'SB'$ има три прави агли и две еднакви страни, па затоа тој е квадрат со должина на страна r . Неговата плоштина е $P_1 = r^2$. Понатаму, триаголниците $AC'S$ и $AB'S$ се складни (признак $ССА$, бидејќи двата се правоаголници, имаат заедничка хипотенуза и имаат по една катета еднаква на r), па затоа нивната вкупна плоштина е еднаква на $P_2 = 2 \frac{r(b-r)}{2} = r(b-r)$. Аналогно се докажува дека вкупната плоштина на триаголниците $BC'S$ и $BA'S$ е еднаква на $P_3 = r(a-r)$. Сега, за плоштината на триаголникот ABC добиваме $P = P_1 + P_2 + P_3$, па затоа

$$\frac{ab}{2} = 4^2 + 4(a-4) + 4(b-4),$$

$$ab - 8a - 8b + 32 = 0.$$

Понатаму, продолжуваме да решаваме исто како во првиот начин на решавање.

Трет начин. Ги користиме истите ознаки како при првиот начин на решавање. Нека A', B', C' се допирните точки на впишаната кружница со страните, соодветно и нека S е центарот на впишаната кружница.

Четириаголникот $CA'SB'$ има три прави агли и две еднакви страни, па затоа тој е квадрат со должина на страна r . Понатаму, триаголниците $AC'S$ и $AB'S$ се складни (признак $ССА$, бидејќи двата се правоаголници, имаат заедничка хипотенуза и имаат по една катета еднаква на r), па затоа $\overline{AC'} = \overline{AB'} = b - r$. Аналогно, триаголниците $BC'S$ и $BA'S$ се складни, па затоа важи $\overline{BC'} = \overline{BA'} = a - r$. Со тоа покажавме дека важи

$$c = a + b - 2r = a + b - 8,$$

па од Питагоровата теорема следува

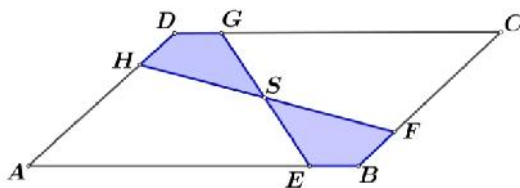
$$(a + b - 8)^2 = a^2 + b^2,$$

$$64 + 2ab - 16a - 16b = 0,$$

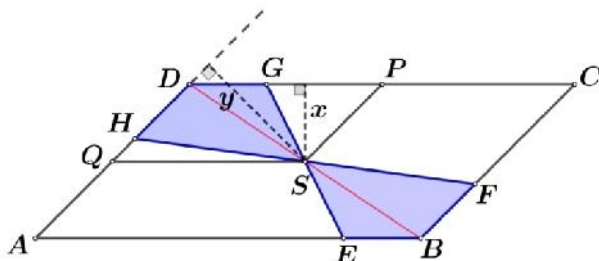
$$ab - 8a - 8b + 32 = 0.$$

Понатаму, продолжуваме да решаваме исто како во првиот начин на решавање.

Задача 37. Должините на страните на паралелограмот се 10 cm и 8 cm . Определи ја плоштината на осенчениот дел на цртежот десно, ако плоштината на целиот паралелограм е 40 cm^2 и ако важи $\overline{EB} = \overline{BF} = \overline{GD} = \overline{DH} = 1\text{ cm}$.



Решение. Прв начин. Според принакот САС триаголниците GDS и EBF се складни, а според принакот АСА триаголниците GHS и EFS се складни. Според тоа, осенчените четириаголници се складни, па затоа имаат еднакви плоштини, а точката S е средина на дијагоналата BD .



Со x да ја означиме половината од висината на паралелограмот $ABCD$ повлечена кон страната CD , а со y половината од висината повлечена кон страната AD . Плоштината на паралелограмот $PQRS$ е еднаква на четвртина од плоштината на целиот паралелограм, т.е. е еднаква на 10 cm^2 . Бидејќи неговите висини се x и y добиваме $10 = 5x$ и $10 = 4y$, од каде наоѓаме $x = 2\text{ cm}$ и $y = 2,5\text{ cm}$. Понатаму, плоштините на триаголниците GDS и DHS се еднакви на

$$P_{GDS} = \frac{\overline{GD} \cdot x}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\text{ cm}^2,$$

$$P_{DHS} = \frac{\overline{DH} \cdot y}{2} = \frac{1 \cdot 2,5}{2} = 1,25\text{ cm}^2.$$

Значи, бараната плоштина е еднаква на

$$2(P_{GDS} + P_{DHS}) = 2(1 + 1,25) = 4,5\text{ cm}^2.$$

Втор начин. Исто како и во првиот начин на решавање заклучуваме дека осенчените четириаголници $DHSG$ и $BFSE$ се складни и дека точката S е пресек на дијагоналите. Според тоа, од принакот ССС следува дека триаголниците ASH и CSF се складни. Плоштината на осенчениот дел е еднаква на

$$P_0 = P_{ABCD} - 2P_{AES} - 2P_{ASH}.$$

Од формулата за плоштина на паралелограм добиваме $P = ah_a$, па затоа $h_a = \frac{P}{a} = \frac{40}{10} = 4 \text{ cm}$. Аналогно, од $P = bh_b$ добиваме $h_b = \frac{P}{b} = \frac{40}{8} = 5 \text{ cm}$.

Затоа

$$P_{AES} = \frac{1}{2} \overline{AE} \cdot \frac{h_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{2} = 9 \text{ cm}^2,$$

$$P_{AHS} = \frac{1}{2} \overline{AH} \cdot \frac{h_b}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{5}{2} = 8,75 \text{ cm}^2.$$

Конечно,

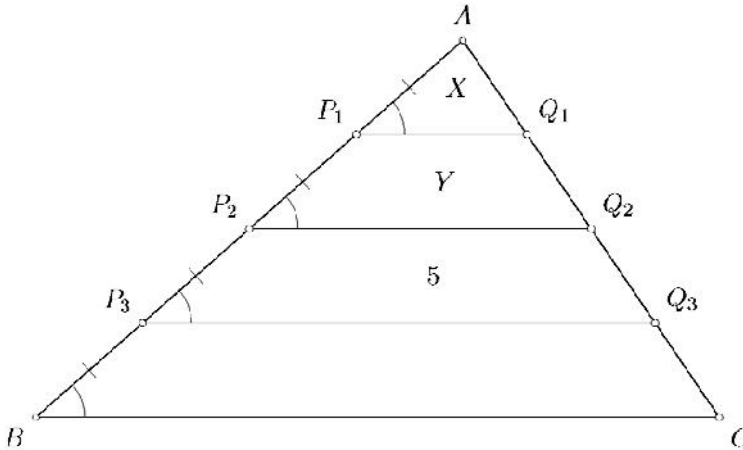
$$P_0 = 40 - 2 \cdot 9 - 2 \cdot 8,75 = 4,5 \text{ cm}^2.$$

Задача 38. На страната AB на триаголникот ABC се наоѓаат тоќки P_1, P_2 и P_3 такви што важи

$$\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3B} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$

Низ овие точки се повлечени паралелни прави на страната BC , кои триаголникот го делат на четири дела. Плоштината на делот кој се наоѓа меѓу точките P_2 и P_3 е еднаква на 5. Определи ја плоштината на триаголникот ABC .

Решение. Прв начин. Со Q_1, Q_2 и Q_3 да ги означиме точките во кои паралелните прави низ точките P_1, P_2 и P_3 ја сечат страната AC (види цртеж).



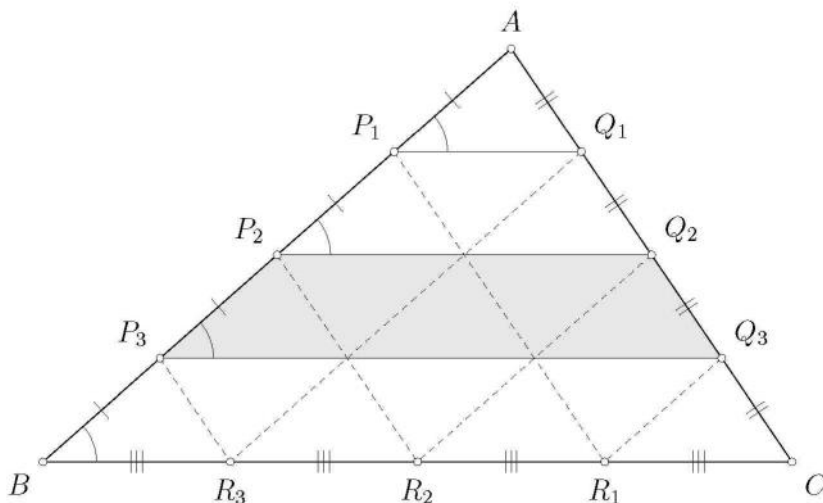
Од $BC \parallel P_iQ_i$ за $i=1,2,3$ следува дека

$$\angle ABC = \angle AP_1Q_1 = \angle AP_2Q_2 = \angle AP_3Q_3.$$

Понатаму, триаголниците ABC, AP_1Q_1, AP_2Q_2 и AP_3Q_3 имаат заеднички агол при темето A , па како имаат по два еднакви агли тие се слични. Нека X и Y се плоштините на триаголникот AP_1Q_1 и четириаголникот $P_1Q_1Q_2P_2$. Бидејќи $\overline{AB} = 4\overline{AP_1}$, добиваме дека плоштината на триаголникот ABC е еднаква на $16X$. Понатаму, бидејќи $\overline{AP_2} = 2\overline{AP_1}$ следува дека $X + Y = 4X$. Исто така, бидејќи $\overline{AP_3} = 3\overline{AP_1}$, важи $X + Y + 5 = 9X$. Од последните две равенства следува $4X + 5 = 9X$, т.е. $X = 1$. Конечно, плоштината на триаголникот ABC е еднаква на 16.

Втор начин. Со Q_1, Q_2 и Q_3 да ги означиме точките во кои паралелните прави низ точките P_1, P_2 и P_3 ја сечат страната AC (види цртеж).

Бидејќи точките P_1, P_2 и P_3 ја делат отсечката AB на четири еднакви дела, од Талесовата теорема за пропорционалност следува дека точките Q_1, Q_2 и Q_3 ја делат отсечката AC на четири еднакви дела. Слично, да повлечеме низ P_1, P_2 и P_3 паралелни прави на страната AC кои страната BC ја сечат



во точките R_1, R_2 и R_3 (види цртеж). Јасно, точките R_1, R_2 и R_3 ја делат страната BC на четири еднакви дела. Сега, од обратната Талесова теорема следува дека правите Q_3R_1, Q_2R_2 и Q_1R_3 се паралелни на правата BC .

На овој начин триаголникот ABC е поделен на мрежа на помали триаголници чии страни лежат на прави паралелни со страните на триаголникот ABC . Бидејќи сите делбени мали триаголници имаат еднакви агли, тие се меѓусебно слични. Притоа, соседните триаголници во оваа мрежа имаат заедничка страна, па затоа тие се складни. Последното значи дека сите делбени мали триаголници се меѓусебно складни.

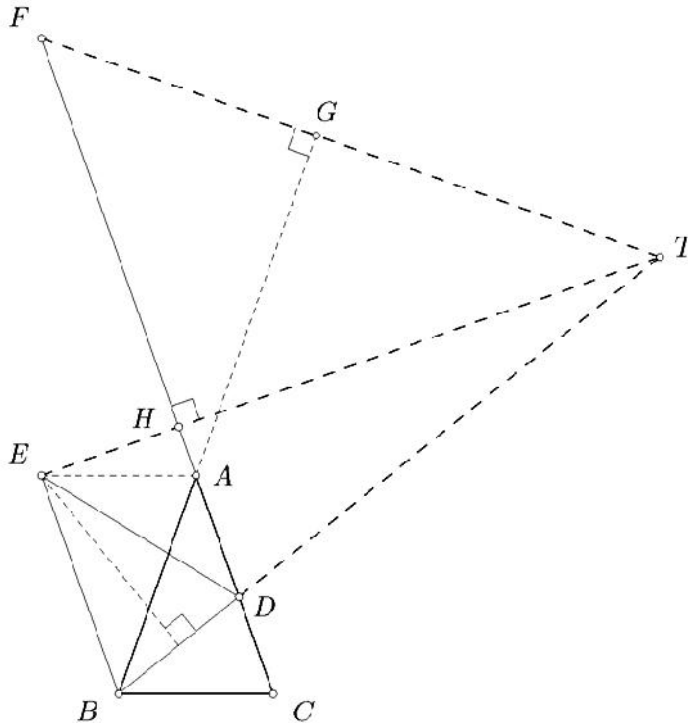
Четириаголникот $P_2Q_2Q_3P_3$ се состои од пет мали делбени триаголници, што значи дека плоштината на секој мал делбен триаголник е еднаква на 1. Конечно, триаголникот ABC е составен од 16 мали делбени триаголници, па затоа неговата плоштина е еднаква на 16.

Задача 39. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) важи $\angle BAC < 60^\circ$. Нека точката D припаѓа на отсечката AC и е таква што $\angle DBC = \angle BAC$, нека E е пресечната точка на симетралата на отсечката BD и правата низ точката A која е паралелна на BC и нека F е точка на правата AC таква што A е меѓу C и F и важи $\overline{AF} = 2\overline{AC}$.

а) Докажи дека правите BE и AC се паралелни.

б) Докажи дека нормалата повлечена од F на AB и нормалата повлечена од E на AC се сечат на правата BD .

Решение. Прв начин. а) Од $\angle DBC = \angle BAC$ и $\angle BCD = \angle BCA$ следува дека триаголниците BDC и ABC се слични. Според тоа, $\overline{BD} = \overline{BC}$. Нека $a = \angle BAC = \angle CBD$ и $b = \angle CBA = \angle DCB$



Нека точката E' е таква што четириаголникот $AE'BC$ е паралелограм. Следува дека $\angle ABE' = \angle BAC = \angle CBD$, па затоа

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \angle ABE' + \angle ABD = \angle E'BD.$$

Бидејќи важи и $\overline{BE'} = \overline{AC}$, од признакот САС следува дека триаголниците $E'BD$ и ABC се складни. Значи, триаголникот $E'BD$ е рамнокрак, па E' припаѓа на симетралата на страната BD . Бидејќи точките E и E' лежат

на правата која минува низ A и е паралелна со BC , заклучуваме дека тие се совпаѓаат. Според тоа, четириаголникот $AEB C$ е паралелограм, па затоа правите BE и AC се паралелни.

б) Нека P е средината на отсечката BC . Бидејќи четириаголникот $AEB C$ е паралелограм, следува дека $\overline{BC} = \overline{AE}$. Затоа

$$\overline{AE} : \overline{CP} = 2 : 1 = \overline{AF} : \overline{CA}.$$

Сега од признакот CAC следува дека триаголниците CAP и AFE се слични. Затоа важи $\angle DFE = \frac{1}{2} \angle BAC$. Бидејќи средината на основата во рамнокрак триаголник воедна е и подножје на висината, следува дека $\angle APC = 90^\circ$, па затоа $\angle AEF = 90^\circ$

Нека G е подножјето на нормалата од F на правата AB , а H е подножјето на нормалата од E на правата AC . Нека точката T е пресек на правите EH и FG . Треба да докажеме дека T припаѓа на BD . Според доказот под а) следува дека триаголниците EBD и ABC се слични, па важи

$$\angle ADE = 180^\circ - \angle BDE - \angle BDC = 180^\circ - \angle ACB - \angle ABC = \angle BAC.$$

Да забележиме дека

$$\angle DFT = 90^\circ - \angle FAG = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \angle ADE = \angle DEH = \angle DET.$$

Значи, четириаголникот $DEFT$ е тетивен, па затоа

$$\angle DTE = \angle DFE = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Следува дека $\angle TDH = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$, додека $\angle BDH = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$, што значи дека точките B, D и T се колинеарни.

Втор начин. а) Нека O е ортоцентарот на триаголникот ABC . Да воочиме дека O воедно е и центар на опишаната кружница околу триаголникот BCD . Понатаму, од односот на централниот и периферискиот агол следува

$$\angle EOB = \frac{1}{2} \angle DOB = \angle DCB = \angle EAB,$$

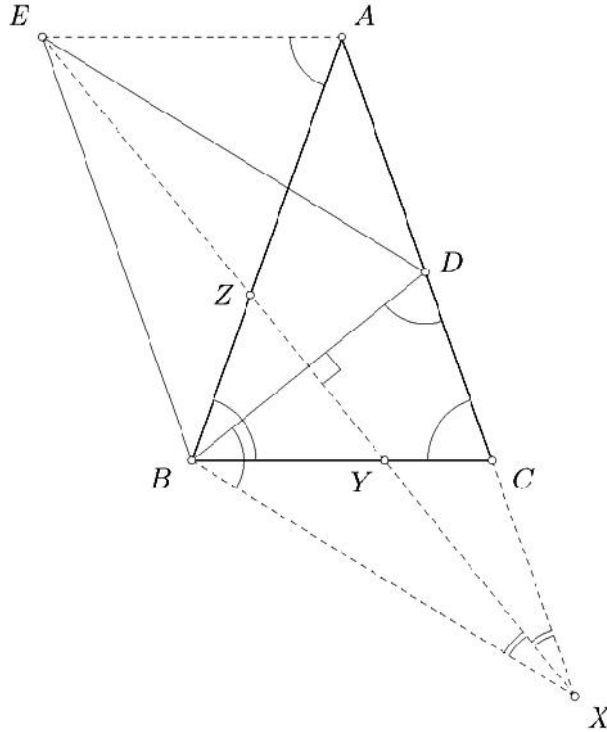
од што следува дека четириаголникот $AEBO$ е тетивен. Оттука следува дека

$$\angle AEB = 180^\circ - \angle AOB = \angle ACB,$$

при што последното равенство важи бидејќи O е ортоцентар на триаголникот ABC . Сега бидејќи $AE \parallel BC$ го добиваме бараното тврдење.

б) Исто како во првиот начин на решавање.

Трет начин. а) Од $\angle DBC = \angle BAC$ и $\angle BCD = \angle BCA$ следува дека триаголниците BDC и ABC се слични. Според тоа, $\overline{BD} = \overline{BC}$. Нека $a = \overline{BD} = \overline{BC}$, $b = \overline{AB} = \overline{AC}$, $\alpha = \angle DBC = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA = \angle DCB = \angle BDC$. Тогаш $\angle DBA = \angle CBA - \angle CBD = \beta - \alpha$.



Нека X е точка на полуправата AC таква што $\angle XBC = \angle DBA = \beta - \alpha$. Тогаш $\angle XBD = \angle XBC + \angle CBD = \beta = \angle BDY$. Но, $\overline{BD} = \overline{BC}$, па затоа рамнокраките триаголници XBD и ABC се складни и важи $\overline{XD} = \overline{XB} = b$.

Рамнокраките триаголици ABC и BCD се слични, па затоа важи $\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{CD}$, од каде добиваме $\overline{CD} = \frac{a^2}{b}$. Сега заклучуваме дека

$$\overline{XC} = \overline{XD} - \overline{CD} = b - \frac{a^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Рамнокраките триаголници EBD и XBD имаат заедничка основа BD , па затоа нејзината симетрала воедно е симетрала и на $\angle DXB$. Со Y и Z редоследно да ги означиме точките во кои правата XE ги сече отсечките BC и AB . Од теоремата за симетрала на агол применета на триаголникот XBC добиваме:

$$\frac{b^2}{b^2-a^2} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{BC}-\overline{YB}} = \frac{\overline{YB}}{a-\overline{YB}},$$

т.е. $\overline{YB} = \frac{ab^2}{2b^2-a^2}$. Понатаму, од теоремата за симетралата на агол применета

на триаголникот XBA добиваме:

$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}+\overline{CA}} = \frac{b}{\frac{b^2-a^2}{b}+b} = \frac{b^2}{2b^2-a^2}.$$

Бидејќи AB е трансферзала на паралелните прави AE и , триаголниците AEZ и BYZ се слични, па затоа важи $\overline{AE}:\overline{BY} = \overline{AZ}:\overline{BZ}$, од каде добиваме

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} \cdot \overline{BY} = \frac{2b^2-a^2}{b^2} \cdot \frac{ab^2}{2b^2-a^2} = a = \overline{BC}.$$

Затоа четириаголникот $BCAE$ е паралелограм, односно $BE \parallel AC$.

б) Исто како во првиот начин на решавање.

Задача 40. Четириаголникот $ABCD$ има точно два прави агли, во темињата A и C . На дијагоналата AC точките E и F се подножјата на нормалите повлечени редоследно на AC од темињата B и D . Ако $\overline{AE} = 3$, $\overline{BE} = 5$ и $\overline{CE} = 7$, пресметај ја должината на отсечката DF .

Решение. Прв начин. Ја повлекуваме дијагоналата BD . Тогаш триаголникот DAB е правоаголен и важи

$$\angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ.$$

Триаголникот AFD е правоаголен и важи

$$\angle DAF + \angle ADF = 90^\circ,$$

па затоа

$$\angle EAB = \angle ADF.$$

Значи, правоаголните триаголници AEB и AFD имаат по еден еднаков остар агол, па од признакот AA следува дека тие се слични. Оттука добиваме

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{5}{3}, \text{ т.е. } \overline{AF} = \frac{5}{3} \overline{DF}.$$

На ист начин се докажува дека $\angle CDF = \angle BCE$, од каде следува $\triangle CFD \sim \triangle BEC$, па затоа важи

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{5}{7}, \text{ т.е. } \overline{CF} = \frac{5}{7} \overline{DF}.$$

Понатаму, од

$$\overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AF} + \overline{FC} = 10,$$

следува

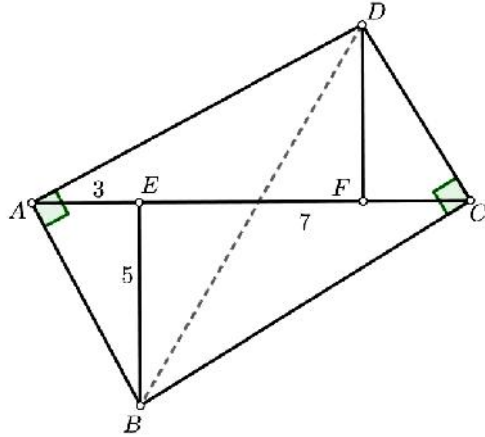
$$\frac{5}{7} \overline{DF} + \frac{5}{3} \overline{DF} = 10, \text{ т.е. } \overline{DF} = \frac{21}{5}.$$

Втор начин. Ќе го користиме истиот цртеж како и во првиот начин на решавање. Имаме $\overline{AC} = 10$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AD} = d$. Со примена на Питагоровата теорема редоследно на триаголниците ABE , BCE , ABD , BCD добиваме

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 5^2 = 34,$$

$$\overline{BC}^2 = 5^2 + 7^2 = 74,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 34 + d^2$$



$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 74 + c^2.$$

Ако ги одземеме последните две равенства, добиваме

$$d^2 - c^2 = 40.$$

Збирот на спротивните агли во четириаголникот $ABCD$ е еднаков на $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што значи дека тој е тетивен. Според тоа, $\angle BDC = \angle BAE$ и затоа $\triangle BDC \sim \triangle BAE$, од каде следува

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}},$$

$$\frac{\sqrt{74}}{c} = \frac{5}{3},$$

$$c = \frac{3\sqrt{74}}{5},$$

$$d^2 = 40 + \left(\frac{3\sqrt{74}}{5}\right)^2 = \frac{1666}{25}$$

$$d = \frac{7\sqrt{34}}{5}.$$

Плоштината на четириаголникот $ABCD$ можеме да ја пресметаме како збир на плоштините на триаголниците ABC и ADC , или како збир на плоштините на триаголниците BCD и BAD , па затоа важи

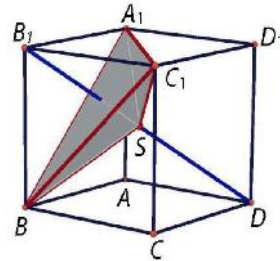
$$\frac{\overline{DF} \cdot 10}{2} + \frac{5 \cdot 10}{2} = \frac{c\sqrt{74}}{2} + \frac{d\sqrt{34}}{2}$$

$$10\overline{DF} + 50 = \frac{3 \cdot 74}{2} + \frac{7 \cdot 34}{2}$$

$$\overline{DF} = \frac{21}{5}.$$

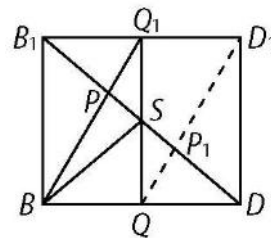
Задача 41. Дадена е коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Со S е означен центарот на таа коцке. Пресметај го волуменот на пирамидата $A_1 B C_1 S$.

Решение. Прв начин. Ќе ги пресметаме должините на сите рабови на пирамиде. Рабовите $A_1 B$, $A_1 C_1$ и BC_1 се дијагонали квадратите, кои се сидови на коцката, па нивните должини се $a\sqrt{2}$, каде a е должината на работ на коцката. Рабовите $A_1 S$, BS и $C_1 S$ се половици од дијагоналите на коцката, па должините им се $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека е триагол-



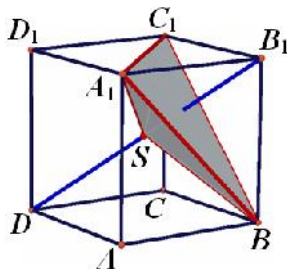
никот $A_1 B C_1$ основата на таа пирамида, а P е средината на овој (рамностран) триаголник. Тогаш PS е висина на пирамидата. Отсечките PA_1 , PB и PC_1 се меѓу себе еднакви и се еднакви на две третини од висината на триаголникот $A_1 B C_1$, т.е. $a\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$, а висината на пирамидата PS од правоаголникот триаголник $A_1 P S$ се добива со помош на Питагоровата теорема, и таа е $\sqrt{(a\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (a\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = a\frac{\sqrt{3}}{6}$. Плоштината на траголникот $A_1 B C_1$ е $(a\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, па волуменот на пирамидата $A_1 B C_1 S$ је $V = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{12}$.

Втор начин. Со нормална проекција на целата коцка на рамнината $BB_1 D_1 D$ точките A_1 и C_1 се пресликуваат во средината на отсечката $B_1 D_1$, а точките A и C во средината на отсечката BD . Овие средини да ги означиме соодветно со Q_1 и Q . Триаголникот $A_1 B C_1$ се пресликува во отсечката BQ_1 . Нека P е пресечната точка на дијагоналата $B_1 D$ и отсечката BQ_1 . Понатаму, нека P_1 е пресечната точка на дијагоналата $B_1 D$ и отсечката $D_1 Q$. Отсечките BQ_1 и $D_1 Q$ се паралелни, па од Талесовата теорема следува дека отсечките $B_1 P$ и PP_1 имаат еднакви должини. Слично, еднакви должини имаат и отсечките PP_1 и $P_1 D$. Бидејќи S е средина на отсечката $B_1 D$ добиваме дека S е средина на отсечката PP_1 , па затоа должината на отсечката PS е еднаква на половици од должина на



отсечката B_1P , а тоа значи дека волуменот на пирамидата A_1BC_1S е еднаков на половина од волуменот на пирамидата $A_1BC_1B_1$. Оваа пирамида може да се разгледува како пирамида со основа $A_1C_1B_1$ и висином BB_1 , т.е. нејзиниот волумен е $a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^3}{6}$. Значи, волуменот на пирамидата A_1BC_1S е $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{12}$, каде a е должината на работ на коцката.

Трет начин. Рамнината определена со точките A_1 , B и S ги содржи тачке D_1 и C и ја дели коцката на две складни призми. Пирамидата A_1BC_1S целосно се наоѓа само во една од овие две призми, и тоа во призмата $A_1BB_1D_1CC_1$. Оваа призма рамнината A_1BC_1 ја дели на три-



страната пирамида $A_1BC_1B_1$ и четиристраната пирамида $A_1BCD_1C_1$ (основата е A_1BCD_1). Бидејќи тристраната пирамида $A_1BC_1B_1$ и тристраната призма $A_1BB_1D_1CC_1$ имаат заедничка основа A_1BB_1 и иста висина B_1C_1 , добиваме дека волуменот на пирамидата е еднаков на една третина од волуменот на призмата, додека четиристраната пирамида $A_1BCD_1C_1$ има волумен еднаков на $\frac{2}{3}$ од волуменот на призмата $A_1BB_1D_1CC_1$, односно $\frac{1}{3}$ од волуменот на коцката. Од друга страна пирамидата A_1BC_1S има основа A_1BS еднаква на четвртина од основата на пирамидата $A_1BCD_1C_1$ и иста висину. Значи, волуменот на пирамидата A_1BC_1S е еднаков на една дванаесеттина од волуменот на коцката, т.е. $V = \frac{a^3}{12}$, каде a е должината на работ на коцката.

Четврт начин. Рамнината определена со точките A_1 , B и S ги содржи точките D_1 и C , и со неа правата C_1B_1 е паралелна. Затоа волуменот на пирамидата A_1BC_1S е еднаков на волуменот на пирамидата A_1BB_1S (иста основа A_1BS и иста висина заради претходната паралелност). Волуменот на пирамидата A_1BB_1S можеме да го пресметаме така што за основа го земаме триаголникот A_1BB_1 , а за висина растојанието на тачката S до (било која) страна на коцката, т.е. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}$, a е должината на работ на коцката.

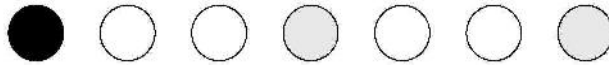
ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

Задача 1. Дадени се 599 жолти и 301 сини топчиња. Дали може топчињата да се наредат во низа така што бројот на топчињата меѓу секои две сини топчиња е различен од 2 и од 5?

Решение. Прв начин. Во низата броеви од 1 до 900, да тазгледаме 300 дисјунктни групи на позиции

$$\{9k + 1, 9k + 4, 9k + 7\}, \{9k + 2, 9k + 5, 9k + 8\}, \{9k + 3, 9k + 6, 9k + 9\},$$

за $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 99$.



Бидејќи имаме 301 сино топче, од принципот на Дирихле следува дека во една група ќе имаме позиции на барем две сини топчиња. Овие две сини топчиња меѓу себе ќе имаат две или пет други топчиња.

Втор начин. Да ги означиме топчињата со броевите од 1 до 900. Ќе докажеме дека постојат две сини топчиња означени со i и j така што важи $|i - j| = 3$ или $|i - j| = 6$. Бидејќи се дадени 301 сино топче, од принципот на Дирихле следува дека ознаките на барем 101 сино топче даваат ист остаток при делење со 3. Тврдиме дека меѓу овие 101 сино топче постојат две топчиња означени со i и j такви што $|i - j| = 3$ или $|i - j| = 6$.

Ако го претпоставиме спротивното, тогаш за ознаките i и j на било кои две од овие 101 топче кои при делење со 3 даваат ист остаток важи $|i - j| \geq 9$. Тогаш меѓу тие 101 сини топчиња ќе има точно 100 парови последователни топчиња, што значи дека најголемата ознака меѓу овие 101 топче е најмалку $1 + 9 \cdot 100 = 901 > 900$, што е противречност.

Задача 2. Нека $k > 1$ е природен број. Дадени се $k + 2$ меѓусебно различни природни броеви помали од $3k + 1$. Докажи дека меѓу нив постојат два броја чја разлика е поголема од k и е помала од $2k$.

Решение. Прв начин. Со S да го означиме множеството од избраните $k + 2$ броеви. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека бројот 1 припаѓа на множеството S . Навистина, ако бројот 1 не е во множеството S , тогаш од сите елементи од множеството S можеме да го одземеме најмалиот елемент на S , а потоа на секој од добиените броеви да го додадеме бројот 1. Притоа разликата меѓу секои два броја нема да се промени.

Ако во множеството S се наоѓа барем еден број b од множеството $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k\}$, тогаш за броевите 1 и b се задоволени условите на задачата.

Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите $k + 1, k + 2, \dots, 2k$ не е во множеството S . Сите броеви од 2 до $3k + 1$ можеме да ги поделиме во k парови $(2, 2k + 1), \dots, (k + 1, 3k)$. Освен бројот 1 во множеството S се наоѓаат уште $k + 1$ броеви, па од принципот на Дирихле следува дека постои пар кој содржи два броја од S . Овие два броја го задоволуваат условот на задачата.

Втор начин. Да ги запишеме избраните броеви во растечки редослед, т.е. $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{k+2} \leq 3k$. Тогаш важи $a_{k+2} - a_1 > k$. Ако важи $a_{k+2} - a_1 < 2k$, тогаш a_1 и a_{k+2} се бараните броеви. Затоа да претпоставиме дека $a_{k+2} - a_1 \geq 2k$.

Нека i е најголемиот индекс таков што важи $a_{k+2} - a_i \geq 2k$. Да забележиме дека важи $a_{j+1} - a_j \leq 2k - 1$ за секој индекс $j = 1, 2, \dots, k + 1$. Во спротивно заради $a_j \geq j$ и $a_{k+2} \geq a_{j+1} + (k + 2 - j - 1)$ ќе важи

$$a_{k+2} \geq a_{j+1} + (k + 2 - j - 1) > a_j + 2k - 1 + (k + 2 - j - 1) \geq 3k,$$

што не е можно. Посебно важи $a_{k+2} - a_{k+1} \leq 2k - 1$, од што следува дека $i < k + 1$. Исто така, според дефиницијата на индексот i точно е неравенството $a_{k+2} - a_{i+1} < 2k$. Ако $a_{k+2} - a_{i+1} > k$, тогаш a_{k+2} и a_{i+1} се бараните броеви.

Нека претпоставиме дека $a_{k+2} - a_{i+1} \leq k$. Во тој случај, заради $a_{k+2} - a_i \geq 2k$ следува $a_{i+1} - a_i \geq k$. Ако $a_{i+1} - a_i > k$, тогаш бидејќи $a_{i+1} - a_i \leq 2k - 1 < 2k$ добиваме дека a_{i+1} и a_i се бараните броеви.

Ако $a_{i+1} - a_i = k$, тогаш имаме

$$k \geq a_{k+2} - a_{i+1} = a_{k+2} - a_i - k \geq 2k - k = k,$$

па следува дека $a_{k+2} - a_{i+1} = k$. Нека претпоставиме дека важи $i < k$. Тогаш постои m таков што $i+1 < m < k+2$. Притоа важи

$$a_m - a_i > a_{i+1} - a_i = k \text{ и } a_m - a_i < a_{k+2} - a_i \leq 2k,$$

па затоа a_i и a_m се бараните броеви. Ако важи $i+1 = k+1$, тогаш $a_{k+2} - a_{k+1} = k$ и $a_{k+2} - a_k = 2k$. Бидејќи $a_k + 2k = a_{k+2} \leq 3k$, т.е. $a_k \leq k$, а важи и $a_k \geq k$, добиваме дека $a_k = k$. Сега $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k = k$, па мора да е $a_j = j$ за секој $j = 1, 2, \dots, k$. Исто така важи $a_{k+1} = 2k$ и $a_{k+2} = 3k$. Сега бараните броеви се, на пример, a_1 и a_{k+1} .

Задача 3. На масата има 42 камчиња. Двајца играчи наизменично влечат потези. Во секој потез играчот треба да земе најмалку едно камче, но не повеќе од половината од преостанатите камчиња. Победува играчот по чиј потез на масата ќе остане само едно камче. Кој играч сигурно може да победи.

Решение. Прв начин. Првиот играч може да победи со следнава стратегија: на противникот ќе му остава редоследно 31, 15, 7, 3 и 1 камче.

Во првиот потез првиот играч зема 11 камчиња. Тогаш вториот играч може да земе од 1 до 15 камчиња, со што на масата ќе останат од 16 до 30 камчиња. Колку и да останат првиот играч може да земе онолку камчиња по што на масата ќе останат 15 камчиња.

Кога на масата има 15 камчиња, вториот играч може да земе меѓу 1 и 7 камчиња, по што на масата ќе останат од 8 до 14 камчиња. Колку и да останат камчиња на масата првиот играч може да земе онолку камчиња по што на масата ќе останат 7 камчиња.

Кога на масата ќе останат 7 камчиња вториот играч може да земе од 1 до 3 камчиња, по што на масата ќе останат од 4 до 6 камчиња. Колку и да останат камчиња на масата првиот играч може да земе онолку камчиња по што на масата ќе останат 3 камчиња.

Кога на масата ќе останат 3 камчиња, вториот играч може да земе само 1 камче, по што остануваат 2 камчиња. Сега првиот играч зема 1 камче и победува.

Втор начин. Да разгледаме ситуација во која на масата по некој играч остануваат 3 камчиња. Тогаш тој играч може да земе точно 1 камче по што за другиот играч на масата остануваат 2 камчиња, од кои тој зема 1 и победува. Според тоа, играчот кој на својот потез (пред земање) има 3 камчиња на масата сигурно губи.

Понатаму, да разгледаме ситуација во која на потезот на некој играч на масата има 7 камчиња. Тогаш овој играч може да земе најмалку 1, а најмногу 3 камчиња. Во секој од можните случаи другиот играч може да земе точно онолку камчиња колку што е потребно на својот противник да му остави 3 камчиња, па од претходно изнесенот следува дека тој победува. Според тоа, играчот кој на својот потез (пред земање) има 7 камчиња на масата сигурно губи.

Слично, да разгледаме ситуација во која на потезот на некој играч на масата има 15 камчиња. Тогаш овој играч може да земе најмалку 1, а најмногу 7 камчиња. Во секој од можните случаи другиот играч може да земе точно онолку камчиња колку што е потребно на својот противник да

му остави 7 камчиња, па од претходно изнесенот следува дека тој победува. Според тоа, играчот кој на својот потез (пред земање) има 15 камчиња на масата сигурно губи.

Конечно, да разгледаме ситуација во која на потезот на некој играч на масата има 31 камчиња. Тогаш овој играч може да земе најмалку 1, а најмногу 15 камчиња. Во секој од можните случаи другиот играч може да земе точно онолку камчиња колку што е потребно на својот противник да му остави 15 камчиња, па од претходно изнесенот следува дека тој победува. Според тоа, играчот кој на својот потез (пред земање) има 31 камчиња на масата сигурно губи.

Сега, да воочиме дека според правилата на играта во првиот потез може да се земат од 1 до 21 камче, па затоа првиот играч може да земе 11 камчиња и на вториот играч на масата да му остави 31 камче. Од претходно изнесенот следува дека вториот играч сигурно губи, т.е. првиот играч победува.

Задача 4. На секој од дванаесетте рабови на коцката Горјан му придружил по еден од броевите 1 или -1 . Потоа на секој од шесте сидови на таа коцка му го придружил производот на четирите броја кои се придружени на рабовите од тој сид. На крајот Горјан ги собрал сите 18 броја придружени на рабовите и сидовите на коцката. Кој е најмалиот број кој Горјан може да го добие?

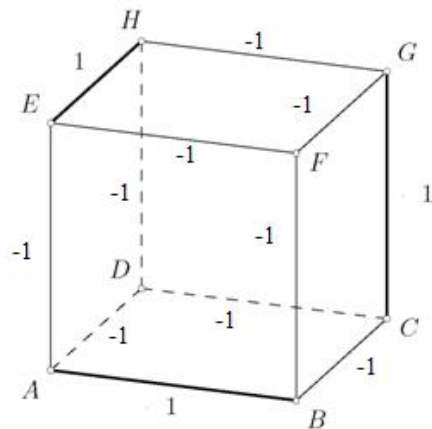
Решение. Прв начин. Да разгледаме пет броја придружени на еден сид и четирите рабови кои го ограничуваат. Да забележиме дека нивниот збир може да биде најмалку -3 . Имено, ако броевите кои се придружени на рабовите се еднакви на -1 , тогаш нивниот шроизвод е еднаков на 1, па затоа збирот е еднаков на -3 . Ако барем еден од броевите придружени на рабовите не е еднаков на -1 , тогаш збирот е непарен број поголем од -5 , па затоа е најмалку -3 .

Нека s е збирот на сите броеви придружени на сидовите на коцката, а b е збирот на сите броеви придружени на рабовите на коцката. Не инетресира најмалата вредност на $s + b$. Да ги разгледаме шесте зборови добиени со собирање на петте броја придружени на еден сид и четирите рабови кои го ограничуваат. Во овој збир секој број придружен на сид на коцката се јавува само еднаш, а секој број придружен на раб на коцката се јавува двапати. Затоа

$$s + 2b \geq 6 \cdot (-3) = -18.$$

Очигледно $s \geq -6$, па затоа $2s + 2b \geq -24$, односно $s + b \geq -12$.

Ќе покажеме дека навистина може да се постигне $s + b = -12$. На коцката $ABCDEFGH$ ќе им придружиме број 1 на рабовите AB, GC и EH , а на сите останата рабови ќе им го придружиме бројот -1 . Тогаш на секој сид на коцката му е придружен бројот -1 , па вкушниот збир е еднаков на $3 \cdot 1 + 9 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) = -12$.



Втор начин. Како и во првиот начин на решавање со расоредот на броевите на коцката $ABCDEFGH$

знаеме дека може да се постигне збир -12 . Ќе докажеме дека овој збир не може да е помал. Нека a е најмалиот број броеви придружени на сидовите и рабовите на коцката кои се еднакви на 1. Ако $a \geq 3$, тогаш збирот на сите

броеви е најмалку -12 . Според тоа, ако сакаме да имаме помал број, тогаш мора да е $a \leq 2$.

Ако $a = 0$, тогаш сите броеви придружени на рабовите, а и сите броеви придружени на сидовите на коцката е еднакви на -1 . Последното не е можно, бидејќи за секој сид производот на броевите придружени на рабовите кои го ограничуваат е еднаков на 1 .

Ако $a = 1$, тогаш најмногу на еден раб е придружен бројот 1 . Но, тоа значи дека барем на четири сида на коцката четирите броја придружени на рабовите кои ги ограничуваат имаат производ $(-1)^4 = 1$, што е противречност.

Нека $a = 2$. Тоа значи дека барем на еден раб на коцката е придружен бројот 1 . Во спротивно на сите сидови на коцката им е придружен бројот $(-1)^4 = 1$, што е противречност. Ако на два раба на коцката им е придружен бројот 1 , тогаш на барем два сида кои тие рабови не ги ограничуваат им е придружен бројот $(-1)^4 = 1$, што повторно е противречност. Останува случајот кога точно на еден раб и точно на еден сид му е придружен бројот 1 . Но, тогаш на сите сидови на коцката за кои работ на кој е придружен бројот 1 не ги ограничува им е придружен бројот 1 , што е противречност, бидејќи такви сидови се четири.

Според тоа, не може да имаме 0 , 1 или 2 броја еднакви на 1 , па затоа најмалиот можен број е -12 .

Задача 5. Три пријателки Марија, Ивана и Ана многу сакаат да патуваат. Марија посетила 20 држави, Ивана 90% држави повеќе од Марија, а Ана 13 држави помалку од Ивана. Ана посетила 40% држави во кои била и Марија, а Ивана посетила петтина од државите во кои била Ана и половина од државите во кои била Марија. Бројот на државите во кои биле сите три пријателки е 16 пати помал од вкупниот број држави кои ги посетиле. Колку вкупно држави посетиле Марија, Ивана и Ана?

Решение. Прв начин. Со $k(M)$ да го означиме бројот на државите кои ги посетила Марија, со $k(I)$ бројот на државите кои ги посетила Ивана и со $k(A)$ бројот на државите кои ги посетила Ана. Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}k(M) &= 20, \quad k(I) = 38, \quad k(A) = 25, \\k(M \cap A) &= 8, \quad k(I \cap A) = 5, \quad k(M \cap I) = 10.\end{aligned}$$

Со x да го означиме бројот на државите кои ги посетиле сите три пријателки, т.е. $k(M \cap I \cap A) = x$. Тогаш $k(M \cup I \cup A) = 16x$, па ако замениме во формулата

$$\begin{aligned}k(M \cup I \cup A) &= k(M) + k(I) + k(A) - \\&\quad - k(M \cap A) - k(I \cap A) - k(M \cap I) + \\&\quad + k(M \cap I \cap A),\end{aligned}$$

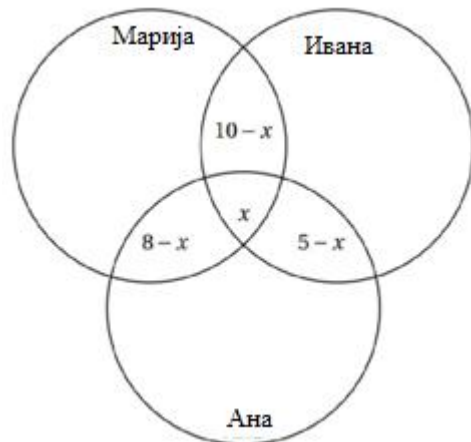
добиваме

$$\begin{aligned}16x &= 20 + 38 + 25 - 8 - 5 - 10 + x, \\15x &= 60, \\x &= 4.\end{aligned}$$

Значи, Марија, Ивана и Ана вкупно посетиле $16 \cdot 4 = 60$ држави.

Втор начин. Марија посетила 20, Ивана 38 и Ана 25 држави. Марија и Ана посетиле 8 држави, Ана и Ивана 5 држави, а Марија и Ивана 10 држави.

Со x да го означиме бројот на државите кои ги посетиле сите три пријателки и добиените податоци да ги прикажеме со Венов дијаграм. Прво ќе го запишеме податокот за бројот на елементите во пресекокот на сите три мно-



жества, а потоа податоците за бројот на елементите во пресеците на две по две од множествата (цртеж горе).

Останатите полиња во дијаграмот ги пополнуваме на следниов начин:

- само Марија била во
 $20 - (10 - x) - (8 - x) - x = 2 + x$

држави,

- само Ивана била во
 $38 - (10 - x) - (5 - x) - x = 23 + x$

држави,

- само Ана била во
 $25 - (8 - x) - (5 - x) - x = 12 + x$

држави.

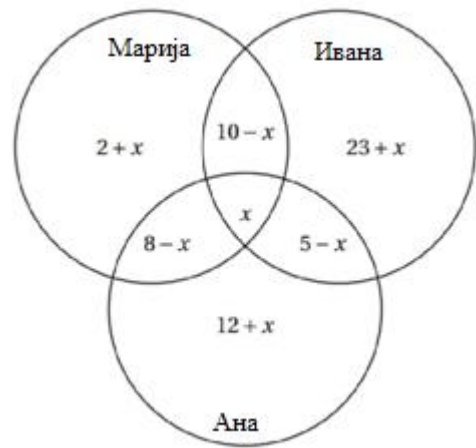
Според тоа,

$$16x = 2 + x + 23 + x + 12 + x + 10 - x + 5 - x + 8 - x + x$$

$$15x = 60,$$

$$x = 4.$$

Значи, Марија, Ивана и Ана вкупно посетиле $16 \cdot 4 = 60$ држави.



Задача 6. Колку има подредени парови природни броеви (a, b) такви што $a + b = 1000$ и ниту еден од броевите a и b не содржи нула во својот декаден запис?

Решение. Прв начин. Да забележиме дека со изборот на бројот a вториот елемент во подредениот пар е точно определен, односно важи $b = 1000 - a$. Затоа доволно е да ги опреелиме сите можности за бројот a .

Едноцифрени броеви кои во својот запис немаат о се 9, двоцифрени се $9 \cdot 9$ и трицифрени се $9 \cdot 9 \cdot 9$. Ова се вкупно 819 броеви a кои во својот декаден запис немаат цифра 0.

Меѓутоа, меѓу овие броеви се наоѓаат и оние броеви a кои не содржат нула во својот декаден запис, а броевите $b = 1000 - a$ содржат нула. Тоа се броевите кај кои цифрата на десетките е 9, односно броевите 91, 92, 99, 191, 192, ..., 199, 291, 292, ..., 299, ..., 891, 892, ..., 899. Вакви броеви има 9 двоцифрени и $8 \cdot 9$ трицифрени, што значи 81 број.

Од претходните разгледувања следува дека подредени парови природни броеви (a, b) такви што $a + b = 1000$ и кои не содржат нула во својот декаден запис има $819 - 81 = 738$.

Втор начин. Да забележиме дека со изборот на бројот a вториот елемент во подредениот пар е точно определен, односно важи $b = 1000 - a$. Затоа доволно е да ги опреелиме сите можности за бројот a . Имаме вкупно 999 природни броеви a за кои важи $a + b = 1000$.

Нулата во декадниот запис на бројот a може да се појави на местото на единиците или на местото на десетките. Според тоа, бројот a може да биде од видот $\overline{x0}$, $\overline{xy0}$, $\overline{x00}$, $\overline{x0y}$, каде x, y се произволни цифри од множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Да забележиме дека ако бројот a има последна или последни две цифри 0, тогаш и бројот b има последна или последни две цифри 0.

Броеви од видот $\overline{x0}$ и $\overline{x00}$ вкупно има 18.

Броеви од видот $\overline{xy0}$ и броеви од видот $\overline{x0y}$ има по $9 \cdot 9 = 81$. Вкупно вакви броеви има $81 + 81 = 162$.

Уште треба да преброиме колку се броеви a кои во својот екаден запис немаат цифра 0, но бројот $b = 1000 - a$ во својот декаден запис има цифра 0. Последното е можно само ако бројот b е од видот $\overline{x0y}$, односно ао бројот a е од видот $\overline{9y}$ или $\overline{x9y}$, $y \neq 0$, $x \neq 0, 9$. Вакви броеви има $9 + 8 \cdot 9 = 81$.

Според тоа, броеви a кои во својот декаден запис имаат барем една цифра 0 или за кои бројот $b = 1000 - a$ во својот декаден запис има барем една цифра нула вкупно се $18 + 162 + 81 = 261$.

Значи, $999 - 261 = 738$ е бројот на сите подредени парови природни броеви (a, b) такви што $a + b = 1000$ и ниту еден од броевите a и b не содржи нула во својот декаден запис.

Задача 7. Колку има петцифрени содржатели на бројот 15 кои се запишани со цифрите 0, 1 и 2?

Решение. Прв начин. Првата цифра мора да е различна од 0. Еден број е делив со 15 ако и само ако е делив со 3 и со 5. Бројот е делив со 5 ако и само ако цифрата на единиците му е 0 или 5. Но, бројот е запишан само со цифрите 0, 1, 2, па затоа неговата цифра на единиците мора да е 0.

Цифрата на десетилјадитите може да биде 1 или 2, па затоа бараните содржате се од видот $\overline{1xyz0}$ или $\overline{2xyz0}$. Бидејќи бројот е делив со 3, потребно е збирот на неговите цифри да е делив со 3. Затоа можни се само аледниве четири случаи:

$$1 + x + y + z = 3,$$

$$1 + x + y + z = 6,$$

$$2 + x + y + z = 3,$$

$$2 + x + y + z = 6,$$

од каде добиваме

$$x + y + z = 2,$$

$$x + y + z = 5,$$

$$x + y + z = 1,$$

$$x + y + z = 4.$$

Бидејќи цифрите x, y, z припаѓаат на множеството $\{0, 1, 2\}$, дадените броеви може да се добијат на следниве начини.

Збирот 1 може да се добие ако двете цифри се 0, а едната е 1. Такви можности има 3, бидејќи цифрата 1 можеме да ја сместиме на три начини, односно можеда биде било која од цифрите x, y, z .

Збирот 2 можеме да го добиеме ако двете цифри се 0, а едната цифра е 2 или ако двете цифри се 1, а едната е 0. Како и во претходниот случај, добиваме дека за секој од двата случаја имаме по 3 можности, т.е. имаме вкупно $3 + 3 = 6$ можности.

Збирот 4 можеме да го добиеме ако две цифри се 1 и едната е 2 или ако две цифри се 2 и едната е 0. Како и во претходниот случај и сега имаме $3 + 3 = 6$ можности.

Збирот 5 можеме да го добиеме ако две цифри се 2, а едната е 1. Како и во првиот случај и овде имаме 3 можности.

Конечно, имаме $3 + 6 + 6 + 3 = 18$ броеви кои ги задоволуваат условите на здачата.

Втор начин. Цифрата на десетилјадитите мора да е различна од 0. Понатаму, еден број е делив со 15 ако и само ако е делив со 3 и со 5. Број е

делив со 5 ако цифрата на единиците му е 0 или 5, а како цифрите може да се само 0, 1, 2 добиваме дека цифрата на единиците мора да е 0.

Еден број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3. Тоа значи дека збирот на цифрите на бараните броеви може да биде 3 или 6.

Ако збирот на преостанатите цифри е еднаков на 3, тогаш преостанатите цифри може да бидат 1, 1, 1, 0 или 1, 2, 0, 0. Ако тоа се цифрите 1, 1, 1, 0, тогаш бараниот број мора да е од видот $\overline{1xyz0}$, каде цифрата 0 може да се распореди на три начини (на место на секоја од цифрите x, y, z). Ако тоа се цифрите 1, 2, 0, 0, бараниот број мора да е од облик $\overline{1xyz0}$ или $\overline{2xyz0}$ и во двата случаја цифрата различна од 0 може да се распореди на 3 начина.

Ако збирот на преостанатите броеви е 6, четирите преостанати цифри може да бидат 2, 2, 2, 0 или 1, 1, 2, 2. Ако тоа се цифрите 2, 2, 2, 0, тогаш бараниот број мора да е од облик $\overline{2xyz0}$ каде цифрата 0 може да се распореди на 3 начина. Ако тоа се цифрите 1, 1, 2, 2 бараниот број мора да е од видот $\overline{1xyz0}$ или $\overline{2xyz0}$, и во секој од двата случаја имаме по три можности.

Конечно, постојат $3 + 2 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 3 = 18$ броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

Трет начин. Цифрата на десетилјадитите мора да е различна од 0. Понатаму, еден број е делив со 15 ако и само ако е делив со 3 и со 5. Број е делив со 5 ако цифрата на единиците му е 0 или 5, а како цифрите може да се само 0, 1, 2 добиваме дека цифрата на единиците мора да е 0.

Еден број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3, што значи дека за преостанатите четири цифри имаме четири случаи.

Прв случај: три цифри 1 и една 0. Во овој случај ги имаме броевите 10110, 11010 и 11100.

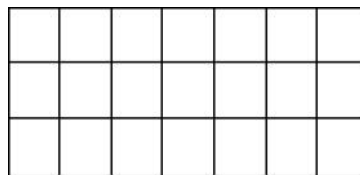
Втор случај: две цифри 1 и две цифри 2. Во овој случај ги имаме броевите: 11220, 12120, 12210, 21120, 21210, 22110.

Трет случај: една цифра 1, една цифра 2 и две цифри 0. Во овој случај ги имаме броевите: 10020, 10200, 12000, 21000, 20100, 20010.

Четврт случај: три цифри 2 и една цифра 0. Во овој случај ги имаме броевите: 20220, 22020, 22200.

Значи, вкупно имаме $3 + 6 + 6 + 3 = 18$ броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

Задача 8. Перица на роденденската забава на присутните 21 годи сака да им подели табла чоколадо. Таблата со жлебови е подечена на 3×7 „коцки“ (види цртеж), што значи дека секој гостин треба да добие по една коцка. Перица ја зема



таблата и ја крши по еден жлеб на два дела, потоа зема еден од скршените делови (кој содржи повеќе од една коцка) и повторно крши по жлеб. Ова го повторува се додека чоколадото не го подели на 21 коцка. Колку најмалку пати Перица треба да го крши чоколадото, за да го подели на 21 коцка?

Решение. Прв начин. Прво правиме два кршења водорамно, и добиваме три „ленти“, а потоа секоја лента со шест кршења ја делиме на коцки. Тоа се вкупно $2 + 3 \cdot 6 = 20$ кршења. Ако прво кршиме по вертикала, тоа се шест кршења и добиваме седум ленти, од кои секоја со две кршења се дели на три коцки, па вкупно имаме $6 + 2 \cdot 7 = 20$ кршења. Можеме да кршиме првиот пат водорамно (добиваме два различни дела), потоа двата дела вертикално (добиваме седум коцки и седум ленти) и на крајот сите седум ленти со по едно кршење ги делиме на по две коцки. Тоа се вкупно $1 + 2 \cdot 6 + 7 = 20$ кршења. Гледаме дека во трите случаи добивме по 20 кршења. Јасно, има уште начини. Имено, ако пробате да кршите по желба секогаш ќе добиете по 20 кршења.

Втор начин. Со едно кршење од еден дел се добиваат два дела. Значи, со секое кршење бројот на деловите се зголемува за 1. На почетокот имаме една табла, значи еден дел, а на крајот имаме 21 коцка, односно 21 дел. Зголемувањето е $21 - 1 = 20$, што значи дека ни се потребни 20 кршења.

Задача 9. Во едно куп натпреварување во фудбал учествуваат 2007 екипи. Купот се игра по систем таков што екипата која го изгубила натпреварот (во регуларен тек или по изведување на пенали) испаѓа од натамошното натпреварување. Колку натпревар треба да се одиграат за да се добие победник?

Решение. Прв начин. Јасно, 2007 екипи во првиот круг одиграле 1003 натпревари, по што останале 1004 екипи. Тие одиграле 502 натпревари, по што останале 502 екипи итн. Така ја имаме табелата:

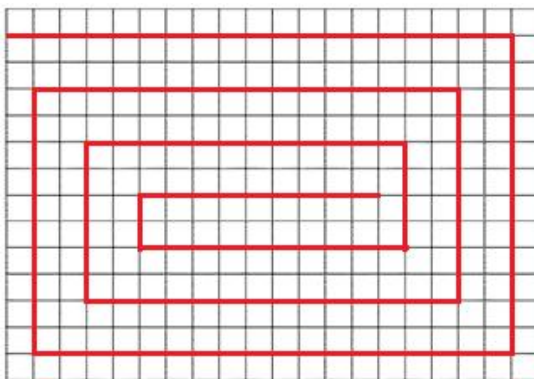
Круг	Број на натпревари	Преостанати екипи
I.	1003	1004
II.	502	502
III.	251	251
IV.	125	126
V.	63	63
VI.	31	32
VII.	16	16
VIII.	8	8
IX.	4	4
X.	2	2
XI.	1	1

Вкупно треба да се одиграат

$$1003 + 502 + 251 + 125 + 63 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 2006 \text{ натпревари.}$$

Втор начин. За да се добие победник на Купот, без разлика како се распоредени екипите, мора од натпреварувањето да отпаднат 2006 екипи. Од натпреварувањето се испаѓа ако се загуби натпреварот. Последното значи дека за да се добие победник мора да има 2006 порази, односно дека се одиграни 2006 натпревари.

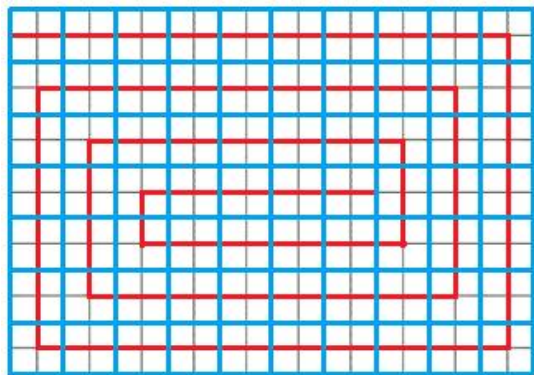
Задача 10. Правоаголник со димензии $20\text{ cm} \times 14\text{ cm}$ е поделен на 280 квадратчиња со димензии $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. Внатре во правоаголникот нацртана е (со црвена боја) искршена линија (види цртеж). Колкава е должината на искршената линија?



Решение. Прв начин. Лесно се гледа дека должините на хоризонталните отсечки на искршената линија последователно се 19, 18, 16, 14, 12, 10 и 9 cm, а должините на вертикалните отсечки на искршената линија последователно се 12, 10, 8, 6, 4 и 2 cm. Според тоа, должината на искршената линија е еднаква на

$$19 + 12 + 18 + 10 + 16 + 8 + 14 + 6 + 12 + 4 + 10 + 2 + 9 = 140\text{ cm}.$$

Втор начин. Ако правоаголникот го подели-ме на квадрати со димензии $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ како на цртежот (сина боја), во секој квадрат се наоѓа дел од 2 cm од црвената линија. Бидејќи правоаголникот е поделен на $10 \cdot 7 = 70$ квадрати со димензија $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, добиваме дека должината на искршената линија е $70 \cdot 2 = 140\text{ cm}$.



ЛИТЕРАТУРА

1. А. Муминагиќ, Ј. Карстенсен: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање (неравенство), Нумерус, Скопје
2. А. Муминагиќ, Ј. Карстенсен: Три решенија на една позната задача, Нумерус, Скопје
3. А. Муминагиќ, Ф. Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Нумерус, Скопје
4. А. Средојевиќ, Д. Милошевиќ: Една задача, повеќе начини за решавање, Нумерус, Скопје
5. Б. Симић: Три гране истог стабла, Математички лист, Београд
6. В. Јоцковић: Два троугла, Математички лист, Београд
7. В. Миовска: Една задача и дванаесет начини на решавање, Сигма, Скопје
8. Д. Зита: Један задатак више решења, Математички лист, Београд
9. Д. Зита: Један задатак о површинама, Математички лист, Београд
10. Д. Милошевић: Један задатак више решења 1, Математички лист, Београд
11. Д. Милошевић: Један задатак више решења 2, Математички лист, Београд
12. Д. Милошевић: Један задатак о правилном петоуглу, Математички лист, Београд
13. Д. Милошевић: О једној неједнакости, Математички лист, Београд
14. Д. Милошевиќ: Една задача, повеќе начини на решавање, Нумерус, Скопје
15. И. Јанев: Една задача – многу решенија (теорема за симетралата на агол на триаголник), Нумерус, Скопје
16. И. Јанев: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
17. Ј. Варга: Један задатак више решења 1, Математички лист, Београд
18. Ј. Варга: Један задатак више решења 2, Математички лист, Београд
19. Ј. Варга: Један задатак више решења 3, Математички лист, Београд
20. Ј. Варга: Један задатак више решења 4, Математички лист, Београд

21. Ј. Варга: Три уморна путника и кнедле, Математички лист, Београд
22. Ј. Илија: Повеће докази на една теорема (плоштина на трапез), Нумерус, Скопје
23. Ј. Маркоска: Една задача, повеће начини на решавање, Сигма, Скопје
24. Ј. Мартић, Б. Маринковић: Варијанте при решавању задатака, Математички лист, Београд
25. Ј. Петровић: Један задатак више решења, Математички лист, Београд
26. К. Аневска, С. Малчески: Една теорема, многу начини на докажување (Питагорова теорема), Нумерус, Скопје
27. М. Главче: Една задача, повеће начини на решавање, Математички тален, Скопје
28. М. Шарић, Р. Тошић: Један задатак о једнокраком троуглу, Математички лист, Београд
29. М. Шарић, Р. Тошић: Три квадрата, Математички лист, Београд
30. М. Шарић: Метод на помошни фигури, Нумерус, Скопје
31. М. Шуковић: Један задатак више решења (дужина пречника), Математички лист, Београд
32. М. Шуковић: Један задатак више решења (линеарна функција), Математички лист, Београд
33. М. Шуковић: Један задатак више решења (максимална површина), Математички лист, Београд
34. М. Шуковић: Један задатак више решења (подеоба странице), Математички лист, Београд
35. Н. Србиноска: Повеће начини за решавање на една задача, Нумерус, Скопје
36. Р. Малчески: Една задача, повеће начини на решавање (броен ребус), Нумерус, Скопје
37. Р. Малчески: Семејно решавање на една едноставна задача, Сигма, Скопје
38. Р. Малчески: Методика на наставата по математика (второиздание), Сојуз на математичари на Македонија, Скопје, 2016
39. Р. Тошић, М. Шарић: Један задатак о правилном деветоуглу, Математички лист, Београд
40. Р. Тошић, М. Шарић: Један задатак о правоугаонику, Математички лист, Београд

41. Р. Тошић: Један задатак више решења (конструкција праве), Математички лист, Београд
42. Р. Тошић: Један задатак више решења (приходи породице), Математички лист, Београд
43. Р. Тошић: Један задатак више решења 1, Математички лист, Београд
44. Р. Тошић: Један задатак о квадрату (нормалност права), Математички лист, Београд
45. Р. Тошић: Један задатак о квадрату (углови), Математички лист, Београд
46. Р. Тошић: Један задатак о троуглу, Математички лист, Београд
47. Р. Тошић: Једна неједноконост о правоуглом троуглу, Математички лист, Београд
48. С. Малчески: Неколку начини за докажување на едно неравенство, Нумерус, Скопје
49. Ш. Арсланагиќ, А. Муминагиќ: Повеќе докази на едно познато алгебарско неравенство, Нумерус, Скопје