НЕКОИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ОД ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Даниел Велинов[1], Самоил Малчески[2]
[1]Градежен факултет Скопје, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ во Скопје
[2]Меѓународен Славјански Универзитет во Свети Николе

Во оваа статија ќе се осврнеме на фасцинантниот свет на фунцкионалните равенки, особено на оние кои се појавуваат во контекстот на олимписки проблеми. Функционалните равенки служат како моќни алатки за развивањењ на вештините за решавање на проблеми, потпомагање на поширокото разбирање на математичките концепти и предизвикување на интелектот на учениците учесници на математичките олимпијади.

Оваа статија има за цел да разоткрие и прикаже некои нестандардни идеи за решавање на функционалните равенки, да обезбеди инсајдерски поглед врз стратегиите, техниките и математичкото размислување што се користат за решавање на овие задачи. Со проучување на избраните проблеми, се надеваме дека ќе ја осветлиме убавината и комплексноста што се врзани за функционалните равенки, обезбедувајќи вреден ресурс за натпреварувачите, наставниците и математичките ентузијасти.

Задача 1. Дали постои функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за која важи

$$f(f(n))=f(n+1)-f(n),\text{ за секој } n\in\mathbb{N}\,?$$

Решение. I *начин*: Нека претпоставиме дека таква функција постои. Од условот на задачата имаме

$$f(n+1)-f(n)=f(f(n))\geq 1,$$

од каде заклучуваме дека функцијата е строго растечка. Па, важи $f(n)\geq n$, за секој природен број n. Имаме

$$f(n+1)=f(n)+f(f(n))\geq n+f(n)\geq 2n,$$

од каде добиваме дека

$$f(n)\geq 2(n-1)=2n-2\,.$$

Од друга страна,

$$f(f(n))=f(n+1)-f(n)<f(n+1)\,,$$

и имајќи предвид дека функцијата f е растечка, следува дека

$$f(n)<n+1\,.$$

Оттука,

$$2(n-1)\leq f(n)<n+1\,,$$

за секој природен број n, што не е можно, од каде заклучуваме дека не постои функција со дадените својства во условот на задачата.

II *начин*: Исто како и во првиот начин, заклучуваме дека функцијата е строго растечка. Нека ставиме $a=f(1)$. Со заменување $n=1$, во равенката од условот на задачата, добиваме дека $f(a)=f(2)-a$, од каде добиваме дека $f(a)<f(2)$. Бидејќи функцијата е растечка, добиваме дека $a<2$. Заклучуваме дека $a=1$, односно $f(1)=1$. Па, $f(2)=a+f(a)=2$. Со заменување $n=2$ во условот на задачата, добиваме

$$f(f(2))=f(3)-f(2),$$

односно $f(3)=4$.

Сега, во условот на задачата заменуваме $n=3$ и добиваме

$$f(f(3))=f(4)-f(3)$$
$$f(4)=f(4)-4$$
$$0=-4,$$

од каде заклучуваме дека не постои функција со својства како во условот на задачата.

Задача 2. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x+yf(x))=f(xf(y))-x+f(y+f(x)).$$

Решение. Ако ставиме $x=y=0$, добиваме дека $f(f(0))=0$. Понатаму, за $x=y=1$, од функционалната равенка, добиваме $f(f(1))=1$. Ставаме $x=1$ и $y=0$, па добиваме $f(1)=0$, па оттука заклучуваме дека $f(0)=f(f(1))=1$. Со заменување $y=0$, добиваме $f(f(x))=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Конечно, со заменување $x=1$, добиваме дека

$$f(1+yf(1))=f(f(y))-1+f(y),$$

односно $f(y)=1-y$, за секој $y\in\mathbb{R}$.

Со директна проверка утврдуваме дека $f(x)=1-x$ е навистина решение бидејќи

$$1-(x+y(1-x))=1-x-y+xy=1-x(1-y)-x+1-(y+1-x).$$

Задача 3. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција со својствата:

а) Постои реален број M, таков што $|f(x)|\le M$, за секој $x\in\mathbb{R}$;

б) За секој реален број x важи

$$f(x+\tfrac{1}{2})+f(x+\tfrac{1}{3})=f(x)+f(x+\tfrac{5}{6}).$$

Докажи дека функцијата f е периодична, односно постои позитивен реален број T, таков што $f(x+T)=f(x)$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Да забележиме дека

$$f(x)-f(x+\tfrac{1}{2})=f(x+\tfrac{1}{3})-f(x+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}),\text{ за секој } x\in\mathbb{R},$$

па јасно функцијата $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ е периодична со период $\frac{1}{3}$.

Ќе покажеме дека f е периодична со период 1. Имаме

$$f(x)-f(x+1)=g(x)-g(x+\tfrac{1}{2}).$$

Значи, функцијата $h(x)=f(x)-f(x+1)$ е периодична со период 1. Сега

$$f(x)-f(x+2)=h(x)-h(x+1)=2h(x)=2(f(x)-f(x+1)).$$

Со помош на принципот на математичка индукција ќе покажеме дека

$$f(x)-f(x+n)=n(f(x)-f(x+1)),$$

за секој реален број $x\in\mathbb{R}$ и секој природен број $n\in\mathbb{N}$. Тврдењето е очигледно за $n=1$. Нека претпоставиме дека е точно за првите n природни броеви. Тогаш за $n+1$, имаме

$$\begin{aligned}f(x)-f(x+n+1)&=f(x)-f(x+n)+f(x+n)-f(x+1)\\&=n(f(x)-f(x+1))+h(x+n)\\&=n(f(x)-f(x+1))+h(x)\\&=(n+1)(f(x)-f(x+1)),\end{aligned}$$

со што покажавме дека тврдењето е точно за $n+1$. Согласно принципот на математичка индукција, тврдењето е точно за секој природен број n.

Функцијата f е ограничена функција, т.е. постои позитивен реален број M таков што $|f(x)|\le M$ за секој реален број x. Затоа важи важи

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)|+|f(y)|\le 2M,$$

за секои реални броеви x,y.

Нека претпоставиме дека x е реален број таков што $f(x)\neq f(x+1)$. Тогаш постои природен број n, таков што

$$|f(x)-f(x+n)|=n|f(x)-f(x+1)|>2M,$$

од каде добиваме контрадикција, односно таков реален број x не постои. Конечно, $f(x)=f(x+1)$ засекој реален број x, што значи дека f е периодична функција со период 1.

Задача 4. Одреди ги сите реални броеви a за кои постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што

$$f(x+f(y))=f(x)+a\lfloor y\rfloor,$$

за секои реални броеви x и y. Со ознаката $\lfloor y\rfloor$ е означен најголемиот цел број кој не е поголем од y. Пример, $\lfloor 1,7\rfloor=1$, $\lfloor -3,6\rfloor=-4$, $\lfloor 0\rfloor=0$.

Решение. За $a=0$, јасно е дека функцијата $f(x)=0$, за секој реален број x, го задоволува условот на задачата. Нека сега го разгледаме случајот кога $a\neq 0$. Нека y и z се реални броеви такви што $f(y)=f(z)$. Тогаш важи

$$f(x)+a\lfloor y\rfloor=f(x+f(y))=f(x+f(z))=f(x)+a\lfloor z\rfloor,$$

односно $\lfloor y\rfloor=\lfloor z\rfloor$. Нека ова својство го наречеме квази-инјективност. Ако замениме $(x,y)=(0,0)$ во фунцкионалната равенка во условот, добиваме $f(f(0))=f(0)$. Сега, бидејќи

$$f((n+1)f(0))=f(nf(0)+f(0))=f(nf(0))+a\lfloor 0\rfloor=f(nf(0)),$$

со помош на принципот на математичка индукција добиваме дека $f(nf(0))=f(0)$, за секој природен број n. Од квази-инјективноста имаме дека

$$\lfloor nf(0)\rfloor=\lfloor f(0)\rfloor,$$

за секој природен број n, па следува дека $f(0)=0$. Оттука, $f(f(1))=a$.

Понатаму, со замена $(x,y)=(-f(1),1)$, во функционалната равенка во условот на задачата, добиваме

$$0=f(-f(1)+f(1))=f(-f(1))+a,$$

од каде следува дека $f(-f(1))=-a$. Со замена $(x,y)=(a,-f(1))$, добиваме

$$0=f(a-a)=f(a+f(-f(1)))=f(a)+a\lfloor -f(1)\rfloor.$$

Од $-\lfloor f(1)\rfloor=\lfloor -f(1)\rfloor$, заклучуваме дека $f(1)\in\mathbb{Z}$, односно $f(a)=af(1)$.

За природен број n, со замена $(na,f(1))$ во почетната функционална равенка, добиваме

$$f((n+1)a)=f(na+f(f(1))=f(na)+af(1).$$

Со помош на принципот на математичка индукција добиваме дека $f(na)=naf(1)$, за секој природен број $n\in\mathbb{N}$. Исто така, $f(f(n))=an$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Во продолжение од решението на задачата, со n ќе означуваме произволен природен број. Со замена на $(-na, f(n))$, во почетната функционална равенка, добиваме

$$0 = f(-na + f(f(n))) = f(-na) + a\lfloor f(n) \rfloor,$$

па $f(-na) = -a\lfloor f(n) \rfloor$. Сега, со замена на $(-f(n), n)$, во почетната функционална равенка, добиваме

$$0 = f(-f(n) + f(n)) = f(-f(n)) + an,$$

па $f(-f(n)) = -na$. Со замена на $(na, -f(n))$, во почетната функционална равенка, добиваме

$$0 = f(na - na) = f(na + f(-f(n))) = f(na) + a\lfloor -f(n) \rfloor.$$

Сосема аналогно, како и за $f(1)$, заклучуваме дека $f(n) \in \mathbb{Z}$. Затоа, $anf(1) = f(na) = af(n)$, односно $f(n) = nf(1)$. Сега, разликуваме два случаи во зависност од знакот пред $f(1)$.

1) Ако $f(x) > 0$, тогаш $f(1) \in \mathbb{N}$, па имаме $a = f(f(1)) = f(1)^2$

2) Ако $f(1) < 0$, тогаш $-f(1) \in \mathbb{N}$, па имаме $-a = f(-f(1)) = -f(1)^2$.

Тоа значи дека $a = f(1)^2$, односно a е квадрат на целиот број.

Ќе покажеме дека функција која го исполнува условот на задачата постои секогаш кога го исполнува условот: a е квадрат на некој цел број. За $a = m^2$, каде m е цел број, лесно се гледа дека функцијата f дефинирана со $f(x) = m\lfloor x \rfloor$, за секој $x \in \mathbb{R}$, го задоволува условот на задачата.

Задача 5. Нека $\sim$ е реален број. Најди ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x + \sim + f(y)) = f(f(x)) + f(\sim) + y. \qquad (1)$$

Решение. Во (1) ставаме $(x, y) = (-\sim, -\sim)$ и добиваме

$$f(f(-\sim)) = f(f(-\sim)) + f(\sim) - \sim,$$

од каде добиваме дека $f(\sim) = \sim$.

Во (1) ставаме $(x, y) = (-\sim, \sim)$ и добиваме

$$\sim = f(f(\sim)) = f(f(-\sim)) + \sim + \sim,$$

од каде следува дека $f(f(-\sim)) = -\sim$.

Означуваме $a = f(-\sim)$. Јасно е дека $f(a) = -\sim$. Сега, ставајќи $(x, y) = (\sim, a)$, во (1), имаме $\sim = 2\sim + a$, од каде $a = -\sim$.

На крај, ставајќи $y = -\sim$, во (1) добиваме $f(x) = f(f(x))$, за секој реален број x, а ако ставиме $x = -\sim$, добиваме $f(f(y)) = y$, за секој реален број y. Следува дека

$$f(x) = f(f(x)) = x \text{, за секој реален број } x.$$

Со проверка, утврдуваме дека функцијата $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{R}$ е решение на задачата.

Задача 6. Дадена е функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е таква да за секои реални броеви x и y важи

$$f(xf(y)) + f(x^2) = f(x)(x + f(y)) \qquad (1)$$

и $f(2) = 3$. Пресметај $f(2^{2016})$.

Решение. Ставаме $(x, y) = (0,0)$ во (1) и добиваме $2f(0) = f(0)^2$. Според ова, разликуваме два случаи: $f(0) = 2$ и $f(0) = 0$.

Ако $f(0) = 2$, тогаш во (1) ставаме $(x, y) = (1,0)$ и добиваме

$$f(f(0)) = f(1)f(0) \text{, т.е. } 3 = f(2) = 2f(1).$$

Следува, $f(1) = \frac{3}{2}$. Во (1) ставаме $(x, y) = (0,1)$ и добиваме

$$2f(0) = f(0)f(1),$$

т.е. $2f(0) = \frac{3}{2}f(0)$, па затоа $f(0) = 0$, што е контрадикција.

Ако $f(0) = 0$, тогаш во (1) ставаме $y = 0$ и добиваме $f(x^2) = f(x)x$, по (1) го добива обликот $f(xf(y)) = f(x)f(y)$. Со замена $y = x$, добиваме $f(xf(x)) = f(x^2)$. Со примена на f , на добиената равенка, добиваме

$$f(f(xf(y)) + f(x^2)) = f(f(x)(x + f(y)),$$

па со замена $x = y$ и користење на $f(xf(x)) = f(x^2)$, добиваме

$$f(f(x^2)) = f(f(x)x) = f(x)^2.$$

Со замена $x = 1$ во $f(xf(y)) = f(x)f(y)$, добиваме $f(f(y)) = f(1)f(y)$, што заедно со $f(f(x^2)) = f(x)^2$, ни дава

$$xf(x)f(1) = f(x^2)f(1) = f(f(x^2)) = f(x)^2.$$

Конечно, за секој x важи $f(x) = xf(1)$ или $f(x) = 0$.

Бидејќи $f(2) \neq 0$, добиваме $f(3x) = 3f(x)$, па со последователна примена добиваме $f(3^{2016}) = \frac{1}{2} \cdot 3^{2017}$.

Во (1) ставаме $y=1$ и ако искористиме дека $f(x^2)=f(x)x$ и $f(1)=\frac{3}{2}$ добиваме

$$f(\tfrac{3}{2}x)=\tfrac{3}{2}f(x),$$

од каде добиваме дека $f(2^{2016})=3\cdot 2^{2015}$.

Да забележиме дека функцијата $f(x)=\frac{3}{2}x$ е таква функција која ги има овие вредности и ја задоволува функционалната равенка во условот на задачата.

Задача 7. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ за кои важи

$$(x+\tfrac{1}{x})f(y)=f(xy)+f(\tfrac{y}{x}),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$, каде $\mathbb{R}^+$ е ознака за множеството од сите позитивни реални броеви.

Решение. Нека функцијата g е едно решение. Тогаш решение е и секоја функција $f(x)=g(x)+Kx+\frac{L}{x}$. Нека $0<a\neq 1$. Ги избираме K и L такви да $f(1)=0$, $f(a)=0$. Броевите K и L постојат и може да се најдат со решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати.

Со ставање $(x,y)=(a,a)$, добиваме $f(a^2)=0$. Потоа, нека ставиме $(x,y)=(a,a^2)$, по што добиваме $f(a^3)=0$. Со помош на принципот на математичка индукција, со замена на $(x,y)=(a,a^{n-1})$, добиваме дека $f(a^n)=0$. Па, $f(a^k)=0$, за секој $k\in\mathbb{Z}$.

Со замена во почетната равенка $y=a^k x$, добиваме

$$(x+\tfrac{1}{x})f(a^k x)=f(a^k x^2). \qquad (1)$$

Со замена во почетната равенка (x,y) со $(a^k x,x)$, добиваме

$$(a^k x+\tfrac{1}{a^k x})f(x)=f(a^k x^2). \qquad (2)$$

Ако во (1) ставиме наместо x ставиме ax, добиваме

$$(ax+\tfrac{1}{ax})f(a^{k+1}x)=f(a^{k+2}x^2). \qquad (3)$$

Ако во (2) наместо k ставиме $k+2$, добиваме

$$(a^{k+2}x+\tfrac{1}{a^{k+2}x})f(x)=f(a^{k+2}x^2). \qquad (4)$$

Од равенките (1) и (2), при претпоставка $f(x)\neq 0$, добиваме

$$\frac{f(a^k x)}{f(x)}=\frac{a^k x+a^{-k}x^{-1}}{x+x^{-1}}. \qquad (5)$$

Од равенките (3) и (4), при услов $f(x)\neq 0$, имаме

$$\frac{f(a^{k+1}x)}{f(x)}=\frac{a^{k+2}kx+a^{-k-2}x^{-1}}{ax+a^{-1}x^{-1}}. \qquad (6)$$

Сега во (5) наместо k ставаме $k+1$ и од (5) и (6), добиваме

$$a^{k+2}+\frac{1}{a^{k+2}}=a^k+\frac{1}{a^k}.$$

Со средување на последниот израз, за $k\in\mathbb{N}$, добиваме

$$a^{2k+2}(a^2-1)=a^2-1,$$

од каде добиваме дека $a=\pm 1$, што не е можно. Значи, мора да важи $f(x)=0$. Оттука, решението е функција g, која е од облик $g(x)=Kx+\frac{L}{x}$. Со непосредна проверка, лесно се утврдува дека сите функции g од горниот облик, го задоволуваат условот на задачата.

Задача 8. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x, y важи

$$f(xf(y))=(1-y)f(xy)+x^2y^2f(y).$$

Решение. Нека означиме со $P(x,y)$, заменувањето на вредностите x и y во почетната функционална равенка. Па, имаме

$P(0,1):\quad f(0)=0$

$P(1,1):\quad f(f(1))=f(1)$

$P(1,f(1)):\quad f(f(f(1)))=(1-f(1))\cdot f(f(1))+f(1)^2\cdot f(f(1))$.

Од второто и третото равенство, добиваме

$$f(1)=(1-f(1))\cdot f(1)+f(1)^3 \text{ односно } f(1)^2=f(1)^3.$$

Оттука, имаме две можности: $f(1)=1$ и $f(1)=0$.

Ако $f(1)=1$ добиваме

$P(x,1):\quad f(x0=x^2$,

па би важело $f(x)=x^2$, за секој x. Со директна замена во почетната равенка, јасно се гледа дека ова не е можно, па заклучуваме дека важи $f(1)=0$.

Нека сега c е произволна нула на функцијата f. Имаме

$$P(x,c):\quad 0=(1-c)f(xc).$$

Според тоа, ако $c\neq 1$, важи и $f(cx)=0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Ако $c\neq 0$, оттука следува дека важи $f(x)=0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Со директна проверка може да се утврди дека $f\equiv 0$ е едно можно решение на почетната равенка.

Сега, нека претпоставиме дека функцијата f не е идентички еднаква на нула. Од претходната дискусија, јасно се гледа дека 0 и 1 се единствени нули на функцијата f. Сега имаме

$$P(1,y):\quad f(f(y))=(1-y)f(y)+y^2f(y)=(1-y+y^2)f(y),\qquad (7)$$

а за $x\neq 0$,

$$P(\tfrac{1}{x},x):\quad f(\tfrac{f(x)}{x})=f(x),$$

бидејќи $f(1)=0$.

Нека сега $y_1,y_2\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ се такви што важи $f(y_1)=f(y_2)\neq 0$. Тогаш, имаме

$$1-y_1+y_1{}^2=1-y_2+y_2{}^2,\ \text{т.е.}\ (y_1-y_2)(y_1+y_2-1)=0.$$

Следува,

$$f(y_1)=f(y_2)\ \Rightarrow y_1=y_2\ \text{или}\ y_1+y_2=1.$$

Со комбинација на претходните релации, добиваме дека за секој $x\neq 0,1$, важи

$$\frac{f(x)}{x}=x\ \text{или}\ \frac{f(x)}{x}+x=1,$$

односно

$$f(x)=x^2\ \text{или}\ f(x)=x-x^2.$$

Нека сега $x\in\mathbb{R}$, $x\notin\{0,1\}$ и x е таков што $f(x)=x^2$. Со замена $y=x$ во (7) добиваме

$$f(x^2)=(1-x+x^2)x^2.$$

Сега, имаме два случаи: $f(x^2)=x^4$ и $f(x^2)=x^2-x^4$. Во првиот случај, добиваме $x^4=(1-x+x^2)x^2$, од каде лесно следува дека $x=0$ или $x=1$. Имајќи ја во предвид претпоставката $x\notin\{0,1\}$, ова не е можно. Во вториот случај, имаме $x^2-x^4=(1-x+x^2)x^2$, од каде следува дека $x=0$ или $x=\frac{1}{2}$. Случајот $x=0$ го отфрламе, додека за $x=\frac{1}{2}$, имаме

$$f(\tfrac{1}{2})=(\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{2}-(\tfrac{1}{2})^2.$$

Со ова имаме покажано дека за сите $x \notin \{0,1\}$, важи $f(x) = x - x^2$. Како и во случајот за $x = 0,1$, важи оваа формула, па заклучуваме дека

$$f(x) = x - x^2, \text{ за секој реален број } x.$$

Со директна замена во почетната равенка, утврдуваме дека $f(x)$, дефинирана како погоре, е решение на задачата. Конечно, според ова, единствени функции, кои се решение на задачата се $f \equiv 0$ и $f(x) = x - x^2$, за секој реален број x.