СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 5 октября 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. В классе каждый ребёнок говорит правду только в определённые дни недели, причём никто не говорит правду два дня подряд. Первого, второго, третьего и четвёртого апреля у каждого ребёнка в классе спросили, будет ли он завтра говорить правду. Первого апреля «да» ответили все дети в классе, второго — половина, третьего — треть. Какая часть класса сказала правду четвёртого апреля? *Георгий Караваев*
4	2. Дорога от пункта A до пункта B идёт сначала по шоссе, а потом по тропинке. Петя и Вася одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно и встретились на шоссе. На следующий день они снова одновременно вышли навстречу друг другу, но теперь Петя — из B, а Вася — из A, и снова встретились на шоссе, но в 6 км от места вчерашней встречи. Известно, что Петя и Вася ходят по шоссе каждый со своей постоянной скоростью, причём Петя — в 1,5 раза быстрее Васи, а на тропинке их скорости снижаются в одно и то же число раз. На каком расстоянии от A они встретились в первый день? *Людмила Смирнова*
5	3. Клетчатая прямоугольная доска покрыта доминошками 1×2 в два слоя (каждая половинка доминошки расположена над одной клеткой доски). Назовём доминошку верхнего слоя *особой*, если её половинки лежат на двух доминошках разных направлений. Обязательно ли количество особых доминошек чётно? *Татьяна Казицына, Борис Френкин*
5	4. Каждое число натурального ряда барон Мюнхгаузен покрасил в синий, красный либо белый цвет (все цвета присутствуют). Он утверждает, что сумма любых 99 красных слагаемых — синяя, а сумма любых 99 синих слагаемых — красная (слагаемые в каждой сумме не обязательно различны). Могут ли слова барона быть правдой? *Михаил Евдокимов*
6	5. Существует ли такой острый угол α, что некоторый прямоугольник можно разрезать на равнобокие трапеции, у каждой из которых есть угол α? *Егор Бакаев*

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 5 октября 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
	1.	В ряд слева направо стоят коробки с номерами 1, 2, 3, ... В них по очереди кладут числа 1, 2, ..., 2025. В каждой коробке каждые два числа должны быть взаимно просты. Очередное число кладётся в самую левую из разрешённых коробок. Все числа разложили.
2	а)	Сколько чисел попало во вторую коробку?
2	б)	Сколько чисел попало в третью коробку?
		Александр Шаповалов
4	2.	В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ равны стороны AE, BC и DE, а также равны углы A, B, C и D. Докажите, что точки A, B, C, D и E лежат на одной окружности.
		Михаил Евдокимов
5	3.	По кругу стоят 30 мальчиков и 30 девочек. Докажите, что можно выбрать 10 мальчиков и 10 девочек так, чтобы никакие двое из выбранных не стояли рядом.
		Александр Грибалко
5	4.	Петя и Вася подошли к доске, и Петя нарисовал на ней несколько окружностей с различными центрами, покрасив каждый центр красным или синим цветом. Оказалось, что если какие-то две окружности касаются друг друга, то обязательно внешним образом, причём их центры — разного цвета. Всегда ли Вася может заменить каждую окружность на новую с тем же центром так, чтобы выполнялось условие: если касались друг друга две старые окружности, то соответствующие им новые тоже касаются, но уже внутренним образом?
		Михаил Святловский
	5.	Таблица $n \times n$ заполнена целыми числами от 0 до n так, что и в каждой строке, и в каждом столбце все числа различны. Назовём клетку таблицы *удачной*, если в объединении её строки и её столбца встречаются все числа от 0 до n.
3	а)	Каково наибольшее возможное количество удачных клеток?
3	б)	Докажите, что количество удачных клеток чётно.
		Александр Грибалко

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 19 октября 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. В 12-значном числе A любые две соседние цифры образуют двузначное простое число, причём все эти 11 простых чисел различны.

2 а) На какую цифру оканчивается число A?

2 б) Приведите пример такого числа A.

Георгий Караваев

6 **2.** В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и C равны $120°$. На стороне AD нашлась точка, из которой остальные стороны видны под равными углами. Найдите угол между диагоналями четырёхугольника.

Михаил Евдокимов, Алексей Заславский

3. У Паши и Миши есть квадратная таблица 100×100, в каждой клетке которой стоит либо плюс, либо минус. Паша и Миша по очереди вычёркивают: Паша — ещё не вычеркнутую строку, а Миша — ещё не вычеркнутый столбец, пока не останется всего одна невычеркнутая клетка. Если в ней стоит плюс, то выиграл Паша, а если минус — Миша. Могла ли таблица оказаться такой, что в этой игре, кто бы её ни начинал — Паша или Миша, — способ гарантировать себе победу имеется

2 а) у того, кто ходит вторым;

5 б) у начинающего?

Борис Френкин, Алексей Заславский

4.

2 а) В тридевятом царстве n городов. Иван-царевич строит дороги по одной (сначала дорог нет). Каждый раз он выбирает два города, не соединённых напрямую дорогой, расстояние между которыми наименьшее, и соединяет их прямолинейной дорогой. Строительство заканчивается, когда становится возможным проехать из любого города в любой (напрямую или через другие города). Обязательно ли никакие две построенные дороги не будут пересекаться вне городов?

6 б) Тот же вопрос, если каждый раз выбираются два ближайших друг к другу города, между которыми невозможен проезд (даже через другие города).

Алексей Заславский

10 **5.** Докажите, что при некотором натуральном N строго между соседними кубами N^3 и $(N+1)^3$ находится ровно 1000 точных квадратов.

Алексей Толпыго

6. У Пети есть 60 карточек с номерами от 1 до 60, на каждой написано действительное число. За один вопрос Вася может выбрать любые 17 номеров и узнать у Пети сумму чисел на карточках с этими номерами. Может ли Вася гарантированно определить сумму чисел на всех 60 карточках, задав

3 а) не более 30 вопросов;

4 б) не более 20 вопросов;

5 в) не более 10 вопросов?

Алексей Толпыго

12 **7.** Дано натуральное k. На столе по кругу лежат n внешне одинаковых монет массами $1, 2, \ldots, n$ г. Вам известно, что эти массы идут по порядку, но неизвестно, по часовой стрелке или против, и с какого места начинаются. Одним взвешиванием разрешается сравнить любые две монеты и узнать, какая тяжелее. Барон Мюнхгаузен утверждает, что вы можете сделать k взвешиваний так, чтобы по их результатам гарантированно определить массу хотя бы одной монеты. При каком наибольшем n слова барона будут правдой?

Иван Митрофанов

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 19 октября 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. У Паши и Миши есть квадратная таблица 100×100, в каждой клетке которой стоит либо плюс, либо минус. Паша и Миша по очереди вычёркивают: Паша — ещё не вычеркнутую строку, а Миша — ещё не вычеркнутый столбец, пока не останется всего одна невычеркнутая клетка. Если в ней стоит плюс, то выиграл Паша, а если минус — Миша. Могла ли таблица оказаться такой, что в этой игре, кто бы её ни начинал — Паша или Миша, — способ гарантировать себе победу имеется

1 а) у того, кто ходит вторым;

4 б) у начинающего?

Борис Френкин, Алексей Заславский

6 **2.** В выпуклом четырёхугольнике через середину каждой диагонали проведён отрезок с концами на сторонах четырёхугольника, параллельный другой диагонали. Докажите, что концы этих двух отрезков образуют четырёхугольник, в котором есть пара параллельных сторон.

Сергей Токарев

3. N узников сидят в камерах, расположенных по кругу. Сегодня у них есть возможность посовещаться и договориться, а завтра поутру каждый узник бросит игральный кубик. После этого каждый должен сделать предположение — какое число выпало у каждого из 5 узников, сидящих в 5 камерах, следующих по часовой стрелке. Если будет угадано хотя бы одно из выпавших чисел хоть у какого-то узника, всех освободят. Как им действовать, чтобы гарантированно выйти на свободу, если

4 а) $N = 47$;

4 б) $N = 48$?

Татьяна Казицына

8 **4.** Докажите, что при некотором натуральном N строго между соседними кубами N^3 и $(N+1)^3$ находится ровно 1000 точных квадратов.

Алексей Толпыго

5. На каждой из сторон правильного N-угольника живёт робот. Каждый робот едет по своей стороне со своей постоянной скоростью, в вершине мгновенно разворачивается и продолжает ехать с той же скоростью в противоположном направлении, и так далее. Когда два робота встречаются в какой-то вершине, там вспыхивает искра. Могло ли оказаться, что в каждой вершине искры вспыхивают с одной и той же ненулевой частотой, если

6 а) $N = 3$;

3 б) $N = 5$?

Александр Юран

10 **6.** Улитка проползла по плоскости по контуру замкнутой несамопересекающейся n-звенной ломаной. Известно, что она двигалась только в трех направлениях: вверх, вправо и вниз-влево (под углом 45° к горизонтали). Докажите, что n нечётно.

Павел Кожевников

14 **7.** Дано натуральное k. На столе по кругу лежат n внешне одинаковых монет массами $1, 2, \ldots, n$ г. Вам известно, что эти массы идут по порядку, но неизвестно, по часовой стрелке или против, и с какого места начинаются. Барон Мюнхгаузен утверждает, что вы можете сделать k взвешиваний на чашечных весах без гирь так, чтобы по их результатам гарантированно определить массу хотя бы одной монеты. При каком наибольшем n слова барона будут правдой? (На каждую чашу помещается сколько угодно монет.)

Александр Шаповалов

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

Предварительные решения базового варианта

8 – 9 классы

1 (4 балла). *В классе каждый ребёнок говорит правду только в определённые дни недели, причём никто не говорит правду два дня подряд. Первого, второго, третьего и четвёртого апреля у каждого ребёнка в классе спросили, будет ли он завтра говорить правду. Первого апреля «да» ответили все дети в классе, второго — половина, третьего — треть. Какая часть класса сказала правду четвёртого апреля?*

(Георгий Караваев)

Ответ: $\frac{1}{6}$. Заметим, что 1 апреля все солгали (так как никто не говорит правду два дня подряд). Значит, и 2 апреля все солгали. Половина из них ответила «нет», все они 3 апреля сказали правду, поэтому 4 апреля они лгали, а 3 апреля тоже сказали «нет». Вторая половина ответила «да», все они 3 апреля лгали, но треть из них ($\frac{1}{6}$ от общего числа) 3 апреля сказали «нет», поэтому 4 апреля они сказали правду. Остальные 3 апреля сказали «да», то есть 4 апреля они лгали.

2 (4 балла). *Дорога от пункта A до пункта B идёт сначала по шоссе, а потом по тропинке. Петя и Вася одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно и встретились на шоссе. На следующий день они снова одновременно вышли навстречу друг другу, но теперь Петя — из B, а Вася — из A, и снова встретились на шоссе, но в 6 км от места вчерашней встречи. Известно, что Петя и Вася ходят по шоссе каждый со своей постоянной скоростью, причём Петя — в 1,5 раза быстрее Васи, а на тропинке их скорости снижаются в одно и то же число раз. На каком расстоянии от A они встретились в первый день?*

(Людмила Смирнова)

Ответ: 18 км.

Решение 1. Построим вместо тропинки шоссе и удлиним его так, чтобы время прохождения этого участка было тем же самым. Теперь можно считать, что Петя и Вася оба дня шли навстречу друг другу по одному шоссе. Разобьём его на пять равных частей, тогда Петя оба дня проходил три части, а Вася – две. Значит, расстояние между местами их встречи составляет одну часть, то есть длина каждой части равна 6 км, а Петя в первый день прошел 18 км.

Решение 2. Пусть первая встреча ребят состоялась в точке M, а вторая — в точке N, тогда $MN = 6$. Поскольку Вася идет в 1,5 раза медленнее Пети, Петя на второй день дойдёт до точки M в 1,5 раза быстрее, чем Вася в первый день. Пусть Вася в этот момент находится в точке K. Пройденный Васей к этому моменту путь AK составляет тогда $1 : (1,5 \cdot 1,5) = \frac{4}{9}$ пути Пети в первый день, то есть $AK = \frac{4}{9}AM$. За оставшееся до встречи время Петя прошёл расстояние MN, а Вася — расстояние $KN = MN : 1,5 = 4$ (км). Таким образом, $KN + NM = 4 + 6 = 10 = AM - AK = \frac{5}{9}AM$, откуда $AM = 10 \cdot 9 : 5 = 18$ (км).

3 (5 баллов). *Клетчатая прямоугольная доска покрыта доминошками 1×2 в два слоя (каждая половинка доминошки расположена над одной клеткой доски). Назовём доминошку верхнего слоя* особой, *если её половинки лежат на двух доминошках разных направлений. Обязательно ли количество особых доминошек чётно?*

(Татьяна Казицына, Борис Френкин)

Ответ: обязательно.

Решение 1. Окрасим горизонтальные доминошки нижнего слоя в белый цвет, а вертикальные – в чёрный. Клетки доминошек верхнего слоя окрасим в цвета клеток под ними. Особые доминошки и только они будут двухцветными. Общее число белых клеток верхнего слоя чётно (их в два раза больше, чем горизонтальных доминошек в нижнем слое). Значит, и количество белых клеток на двухцветных доминошках чётно, а это и есть количество особых доминошек.

Решение 2. Заметим, что от любого разбиения доски на доминошки можно перейти к любому другому последовательностью замен такого вида (будем называть их флипами): находим две доминошки, образующие квадрат 2×2 и у обеих меняем направление (см., например, статью Е. Карпова и К. Кохася «Разбиения на домино и функции высоты» в «Кванте» №6 за 2010 год.). В случае, когда оба слоя, покрывающие доску, одинаковы, задача очевидна — особых доминошек нет, то есть их 0 — чётное число. Осталось проверить, что после любого флипа в нижнем слое количество особых доминошек не меняется. Заметим, что если доминошка целиком лежит на рассматриваемом квадрате 2×2, то она неособая и останется таковой после флипа. Если же доминошка залезает на такой квадрат одной клеткой, то после флипа её статус меняется — особая становится неособой, и наоборот. Но таких залезающих доминошек либо четыре, либо две, либо ни одной, поэтому чётность числа особых доминошек при флипе не меняется.

4 (5 баллов). *Каждое число натурального ряда барон Мюнхгаузен покрасил в синий, красный либо белый цвет (все цвета присутствуют). Он утверждает, что сумма любых 99 красных слагаемых — синяя, а сумма любых 99 синих слагаемых — красная (слагаемые в каждой сумме не обязательно различны). Могут ли слова барона быть правдой?*

(Михаил Евдокимов)

Ответ: могут. Например, если красные — это все числа, дающие остаток 1 при делении на 100, синие — все числа, дающие остаток -1 при делении на 100, а белые — все остальные.

Замечание. Можно взять любой делитель k числа 100, больший 2, и сделать красными все числа, сравнимые с 1 по модулю k, синими — все числа, сравнимые с -1 по модулю k, а белыми — все остальные. Так как сумма 100 чисел, сравнимых с 1 по модулю k, делится на k, то сумма 99 таких чисел будет сравнима с -1 по модулю k, то есть, сумма любых 99 красных чисел синяя (аналогично, сумма любых 99 синих чисел красная).

5 (6 баллов). *Существует ли такой острый угол α, что некоторый прямоугольник можно разрезать на равнобокие трапеции, у каждой из которых есть угол α?*

(Егор Бакаев)

Ответ: нет. Предположим противное. Ясно, что $90°/\alpha$ — целое число (так как в вершине прямоугольника сходится несколько острых углов), поэтому число α — делитель числа 90. Рассмотрим все точки, в которых сходятся углы нескольких трапеций.

Сумма углов, сходящихся во внутренних точках, равна $360°$. Четыре и больше тупых углов в такой точке сходиться не может — тогда они не больше $90°$, то есть не тупые.

Трёх тупых углов в такой точке тоже быть не может: ведь тогда либо там нет острых, и каждый тупой равен $120°$, а острый равен $60°$, что невозможно (это не делитель $90°$), либо есть острые, но один острый плюс один тупой равен $180°$, и в «оставшихся» $180°$ не более одного тупого угла, противоречие.

Если тупых углов два, то и острых два, ведь тупой и острый дают в сумме 180°.

Возможен случай, и когда тупых углов не больше одного — если точка внутри стороны одной из трапеций, острых углов там тогда не меньше одного. То же происходит в точках, лежащих на границе прямоугольника, но не в его вершинах.

Наконец, в вершинах прямоугольника сходятся только острые углы.

Следовательно, во всех трапециях вместе число тупых углов меньше числа острых. Но в каждой трапеции число тупых углов равно числу острых. Противоречие.

Замечание. Оказывается, разрезать на равнобедренные трапеции (без требования равенства их острых углов) можно любой многоугольник — см., например, решение задачи 67346 на сайте problems.ru или решение задачи № 13 заочного тура Двадцатой олимпиады по геометрии им. И.Ф.Шарыгина на сайте geometry.ru (автор задачи Алексей Заславский).

10 – 11 классы

1. *В ряд слева направо стоят коробки с номерами 1, 2, 3, ... В них по очереди кладут числа 1, 2, ..., 2025. В каждой коробке каждые два числа должны быть взаимно просты. Очередное число кладётся в самую левую из разрешённых коробок. Все числа разложили.*
а) (2 балла) *Сколько чисел попало во вторую коробку?*
б) (2 балла) *Сколько чисел попало в третью коробку?*

(Александр Шаповалов)

Ответы: а) 14 чисел; б) 7 чисел.

В первую коробку, очевидно, попадёт единица и все простые числа, меньшие 2025, а составные числа туда попасть не могут.

Во вторую коробку не может попасть число, делящееся на два различных простых, так как квадрат меньшего из этих простых попал бы сюда раньше. Поэтому в эту коробку попадут в точности квадраты простых чисел, не превышающие $2025 = 45^2$. Это числа $2^2, 3^2, 5^2, \ldots, 43^2$. Их 14.

В третью коробку попадут следующие попарные произведения последовательных простых чисел: $2 \cdot 3$, $5 \cdot 7$, $11 \cdot 13$, $17 \cdot 19$, $23 \cdot 29$, $31 \cdot 37$, $41 \cdot 43$. Докажем это. Число 6 туда попадает, пусть там уже лежат числа $p_1p_2, p_3p_4, \ldots, p_{2k-1}p_{2k}$, и следующим туда попадает число A.

В разложении A участвуют простые числа, не меньшие p_{2k+1}. Число p_{2k+1}^2 попадёт во вторую коробку, так что A равно либо p_{2k+1}^3, либо $p_{2k+1}p_{2k+2}$. Заметим, что для простых чисел, меньших 50, $p_{2k+1}^3 > p_{2k+1}p_{2k+2}$. Действительно, это неравенство равносильно неравенству $p_{2k+1}^2 > p_{2k+2}$, но $5^2 > 7$, а 7^2 уже больше даже 47. Поэтому $A = p_{2k+1}p_{2k+2}$.

Замечание. На самом деле неравенство $2p_n > p_{n+1}$ верно всегда, что следует из известного постулата Бертрана: $2p_n > p_{n+1}$.

2 (4 балла). *В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ равны стороны AE, BC и DE, а также равны углы A, B, C и D. Докажите, что точки A, B, C, D и E лежат на одной окружности.*

(Михаил Евдокимов)

Из равенств $\angle A = \angle B$ и $AE = BC$ следует, что $EABC$ — равнобедренная трапеция. Значит, точки E, A, B и C лежат на одной окружности. Аналогично точки E, D, C и B лежат на одной окружности. Так как эти две окружности имеют три общие точки E, B и C, это одна и та же окружность.

3 (5 баллов). *По кругу стоят 30 мальчиков и 30 девочек. Докажите, что можно выбрать 10 мальчиков и 10 девочек так, чтобы никакие двое из выбранных не стояли рядом.*

(Александр Грибалко)

Решение 1. Выберем произвольно первого ребенка. Двигаясь от него по часовой стрелке, будем выбирать каждого второго и объявлять *негодными* пропущенных, пока не наберётся 10 детей одного пола. Пусть в этот момент выбрано, например, 10 мальчиков и $k < 10$ девочек. Объявим негодным следующего по кругу. Остались не рассмотренными не менее $30 - k - (10 + k) = 20 - 2k$ девочек. Выберем $10 - k$ (не более половины) из следующих девочек, начиная с первой из них и беря их через одну, не обращая внимания на мальчиков.

Решение 2. Будем доказывать индукцией по n, что среди $3n$ мальчиков и $3n$ девочек, стоящих по кругу, можно выбрать n мальчиков и n девочек, среди которых никто не стоит рядом друг с другом. База $n = 1$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для $n-1$, докажем его для n. Рассмотрим все возможные шестёрки подряд стоящих детей. Заметим, что не может во всех шестёрках быть больше мальчиков (так как, просуммировав по всем шестёркам, получили бы, что и всего мальчиков больше). Аналогично не может во всех шестёрках быть больше девочек. Поэтому найдётся шестёрка, где девочек не меньше половины, и аналогично найдётся шестёрка, где мальчиков не меньше половины. Двигаясь от первой из них ко второй по кругу, мы найдём шестёрку, где ровно 3 мальчика и 3 девочки. Заметим, что среди оставшихся детей (вне выбранной шестёрки) можно найти $n-1$ мальчиков и $n-1$ девочек, не стоящих рядом (по предположению индукции), выберем их.

Теперь рассмотрим в выделенной шестёрке четверых детей, не стоящих с краю. Среди них найдутся два ребёнка разного пола, не стоящие рядом (возьмём двух крайних детей, а если они одного пола, то среди двух детей, стоящих посередине, возьмём ребёнка другого пола и добавим к нему крайнего ребёнка, не стоящего рядом). Добавим этих двоих детей к уже выбранным, получим искомое.

Решение 3. Занумеруем детей по часовой стрелке числами $1, 2, 3, \ldots, 60$ и разделим на три группы: 1-я — номера которых имеют остаток 1 от деления на 3, 2-я — номера которых имеют остаток 3 от деления на 3, 3-я — номера которых делятся на 3. В каждой группе 20 человек, и если хотя бы в одной группе мальчиков и девочек поровну, то задача решена — надо просто выбрать эту группу. Иначе найдутся две «соседние» группы, в одной из которых больше мальчиков, а в другой — больше девочек. Пусть это 1-я и 2-я группы. Будем постепенно заменять в 1-й группе людей одного за другим на людей из второй группы: №1 на №2, потом №4 на №5, потом №7 на №8, и т. д. При каждой замене число мальчиков в изменяемой 1-й группе меняется не более чем на 1. Так как изначально их было больше половины, а после полной замены исходной 1-й группы на 2-ю мальчиков станет меньше половины, в какой-то промежуточный момент мы получим искомую группу, в которой мальчиков и девочек поровну.

Решение 4. Докажем, что можно выбрать даже 14 девочек и 14 мальчиков. *Шаблоном* назовем 28 мест «через 1», то есть набор мест вида m, $m+2$, $m+4$, $\ldots$, $m+54$. Шаблон назовём «Д», если в нём больше девочек, и «М» — если в нём больше мальчиков.

Если нет шаблона, в котором мальчиков и девочек поровну, то должны существовать и «М»-шаблон, и «Д»-шаблон (иначе, суммируя (усредняя) по всем шаблонам, получили бы, что всего в круге больше мальчиков или больше девочек). Тогда найдутся два «соседних» шаблона разного типа — скажем, «М»-шаблон n, $n+2$, $n+4$, $\ldots$, $n+54$ и «Д»-шаблон $n+1$, $n+3$, $n+5$, $\ldots$, $n+55$. Далее двигаемся от одного шаблона к другому, каждым ходом заменяя одного человека среди текущих 28: а именно, сначала сдвинем $n+54$ в $n+55$, затем $n+52$ в $n+53$ и т. д. В промежутках у нас будут получаться уже не шаблоны, но по-прежнему 28 человек, не стоящие рядом. После каждого хода число девочек в выбранных 28 ребятах изменяется не более чем на 1. Значит, в какой-то момент мы получим набор из 28 человек, в котором мальчиков и девочек поровну (так как изначально было больше мальчиков, а в конце больше девочек).

4 (5 баллов). *Петя и Вася подошли к доске, и Петя нарисовал на ней несколько окружностей с различными центрами, покрасив каждый центр красным или синим цветом. Оказалось, что если какие-то две окружности касаются друг друга, то обязательно внешним образом, причём их центры — разного цвета. Всегда ли Вася может заменить каждую окружность на новую с тем же центром так, чтобы выполнялось условие: если касались друг друга две старые окружности, то соответствующие им новые тоже касаются, но уже внутренним образом?*

(Михаил Святловский)

Ответ: всегда. Пусть $R_1, \ldots, R_m$ — радиусы «красных» окружностей, а $r_1, \ldots, r_n$ — радиусы «синих». Возьмём $R > \max(r_1, \ldots, r_n)$ и заменим окружности с радиусами R_i на окружности с радиусами $R + R_i$, а окружности с радиусами r_j на окружности с радиусами $R - r_j$. Если старые окружности с радиусами R_i и r_j касались, то $R_i + r_j = d_{ij}$ (где d_{ij} — расстояние между их центрами). Для соответствующих новых окружностей получим $(R + R_i) - (R - r_i) = d_{ij}$, то есть они касаются внутренним образом.

Наглядно это можно представить себе так: мы равномерно раздуваем все красные окружности и одновременно сдуваем синие (с той же скоростью), причём когда какая-то синяя окружность «схлопывается» в точку, далее она снова начинает расти (с той же скоростью). При этом все касания всё время сохраняются, а в моменты схлопываний внешние касания заменяются на внутренние.

Замечание. Хотя этого и не требовалось, можно добиться того, чтобы ещё и никаких новых касаний не появилось (между красными и синими окружностями новые касания не возникнут, а если вдруг коснутся между собой синие окружности (или же красные), то это будут внешние касания, и их можно избежать, ещё увеличив R).

5. *Таблица $n \times n$ заполнена целыми числами от 0 до n так, что и в каждой строке, и в каждом столбце все числа различны. Назовём клетку таблицы* удачной*, если в объединении её строки и её столбца встречаются все числа от 0 до n.*

а) (3 балла) *Каково наибольшее возможное количество удачных клеток?*

б) (3 балла) *Докажите, что количество удачных клеток чётно.*

(Александр Грибалко)

а) Ответ: $n^2 - n$.

Оценка 1. Докажем, что в каждой строке есть неудачная клетка. Предположим, что в некоторой строке отсутствует какое-то число a из набора $0, 1, 2 \ldots, n$, а все клетки в ней удачные. Тогда в каждом столбце есть число a. Таким образом, в $n-1$ строках число a встречается n раз, а значит, в какой-то строке оно записано более одного раза, что противоречит условию. Следовательно, удачных клеток не больше $n^2 - n$.

Оценка 2. Заметим, что в каждом ряду отсутствует ровно одно из разрешённых чисел, а остальные встречаются по одному разу. Очевидно, клетка неудачна тогда и только тогда, когда она лежит на пересечении строки и столбца, в которых отсутствует одно и то же число. Пусть число i отсутствует ровно в k_i строках. Тогда в таблице $n-k_i$ чисел i, поэтому оно отсутствует ровно в k_i столбцах. Следовательно, количество неудачных клеток равно $k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2$.

Заметим, что $k_0+k_1+\ldots+k_n=n$. Значит,

$$k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2-n=k_0(k_0-1)+k_1(k_1-1)+\ldots+k_n(k_n-1)\geqslant 0$$

(каждое слагаемое неотрицательно). Следовательно, удачных клеток не больше n^2-n.

Пример. В таблице на рисунке неудачны только клетки главной диагонали.

1	2	3	...	$n-1$	n
2	3	4	...	n	0
3	4	5	...	0	1
...	...	...	...	...	...
$n-1$	n	0	...	$n-4$	$n-3$
n	0	1	...	$n-3$	$n-2$

б) В решениях 1 и 2 мы будем использовать обозначения из «Оценки 2» пункта а).

Решение 1. Чётность числа $k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2$, очевидно, равна чётности $k_0+k_1+\ldots+k_n=n$, то есть чётности n^2. Поэтому количество удачных клеток чётно.

Решение 2. Клетка удачная, если в её строке и столбце отсутствующие числа разные. В строках с отсутствующим нулём, например, таких клеток $k_0(k_1+\ldots+k_n)$, и аналогично для других чисел. Поэтому общее количество удачных клеток равно сумме произведений k_ik_j, где $i\neq j$. Но это удвоенная сумма произведений k_ik_j, где $i<j$, то есть чётное число.

Решение 3. Если удачных клеток 0, то задача решена (0 — чётное число). Иначе пусть (x,y) — удачная клетка (x — номер строки, y — номер столбца). Посмотрим на её строку. В ней нет ровно одного какого-то числа из набора $0,1,2\ldots,n$, пусть это a. Значит, в столбце y есть число a, пусть оно находится в клетке (x_0,y). Тогда в строке x_0 нет какого-то другого числа, пусть b. Так как b не равно a, то в изначальной строке x есть число b. Пусть оно имеет координаты (x,y_0). Тогда очевидно, что клетка (x_0,y_0) — удачная. Её и сопоставим исходной удачной клетке (x,y). Так мы разобьём удачные клетки на пары.

Для корректности надо проверить, что никакой клетке не сопоставится она же сама (это очевидно, так как сопоставление происходит между разными строками), и что клетке с координатами (x_0,y_0) сопоставится клетка с координатами (x,y). Это тоже понятно.

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

Предварительные решения сложного варианта

8 – 9 классы

1. *В 12-значном числе A любые две соседние цифры образуют двузначное простое число, причём все эти 11 простых чисел различны.*
а) (2 балла) *На какую цифру оканчивается число A?*
б) (2 балла) *Приведите пример такого числа A.*

(Георгий Караваев)

а) Ответ: на 9. Двузначные простые числа не могут оканчиваться на 2, 4, 5, 6 или 8. Поэтому простое число, начинающееся с такой цифры, может стоять только в начале A. Остальных простых двузначных чисел (начинающихся на 1, 3, 7 или 9) только 10 — это 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 и 97, тогда все они должны быть использованы. При этом на 9 начинается только 97, а оканчиваются на 9 два числа — 19 и 79, поэтому одно из чисел 19, 79 стоит в конце числа A.

б) Ответ: например, число 417971137319.

2 (6 баллов). *В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и C равны $120°$. На стороне AD нашлась точка, из которой остальные стороны видны под равными углами. Найдите угол между диагоналями четырёхугольника.*

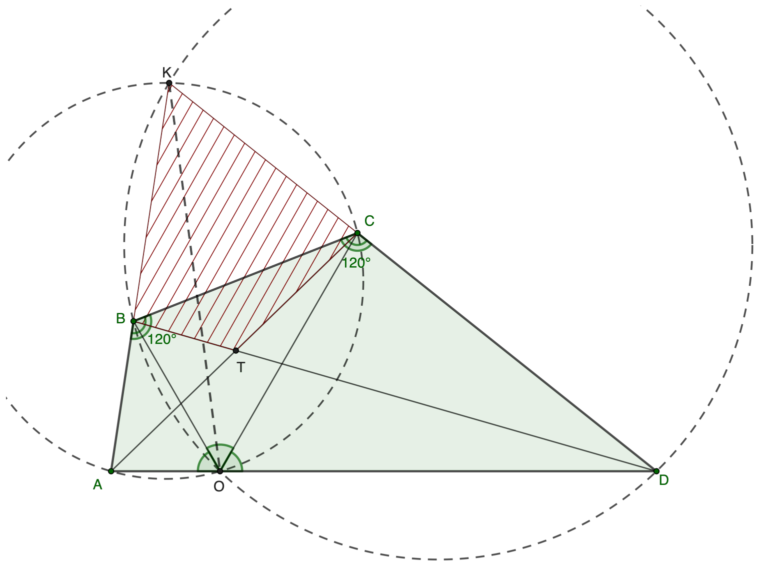
(Михаил Евдокимов, Алексей Заславский)

Ответ: $60°$. Пусть O — точка на стороне AD из условия. Тогда $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 60°$. Далее можно действовать по-разному.

Решение 1. Пусть T — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Продлим лучи AB и DC до пересечения в точке K. Они пересекутся, так как углы B и C равны $120°$, причём $\angle K = 60°$.

Заметим, что четырёхугольник $AKCO$ вписанный, так как $\angle AKC + \angle AOC = 60° + 120° = 180°$. Тогда $\angle KCA = \angle KOA$. Аналогично четырёхугольник $DKBO$ вписанный и $\angle KBD = \angle KOD$. Поэтому $\angle KCA + \angle KBD = \angle KOA + \angle KOD = 180°$.

Тогда в четырёхугольнике $KBTC$ сумма углов KCT и KBT равна $180°$ и $\angle K = 60°$, откуда оставшийся угол BTC равен $360° - 60° - 180° = 120°$, то есть угол между диагоналями равен $60°$.



Решение 2. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром O, являющуюся композицией поворота на 60°, переводящего прямую OA в прямую OB, и гомотетии с коэффициентом OB/OA. При этой поворотной гомотетии точка A переходит в B, прямая AB — в прямую BC (угол между ними по условию равен 60°), прямая OB — в прямую OC, точка B пересечения прямых AB и OB — в точку пересечения образов этих прямых, то есть в C, прямая BC — в прямую CD, прямая OC — в прямую OD, точка C пересечения прямых BC и OC — в точку D. Поэтому прямая AC переходит в прямую BD, следовательно, угол между ними равен 60°.

3. *У Паши и Миши есть квадратная таблица* 100×100, *в каждой клетке которой стоит либо плюс, либо минус. Паша и Миша по очереди вычёркивают: Паша — ещё не вычеркнутую строку, а Миша — ещё не вычеркнутый столбец, пока не останется всего одна невычеркнутая клетка. Если в ней стоит плюс, то выиграл Паша, а если минус — Миша. Могла ли таблица оказаться такой, что в этой игре, кто бы её ни начинал — Паша или Миша, — способ гарантировать себе победу имеется*
а) (2 балла) *у того, кто ходит вторым;*
б) (5 балла) *у начинающего?*

(Борис Френкин, Алексей Заславский)

а) Ответ: могла. Рассмотрим таблицу, где плюсы и минусы расставлены в шахматном порядке. Пусть игрок, который ходит вторым, каждым ходом вычеркивает ряд, пересекающий главную диагональ, состоящую из «его» знаков, в клетке, которую перед этим вычеркнул его противник. Тогда последняя невычеркнутая клетка лежит на этой диагонали, то есть приносит победу второму.

б) Ответ: не могла.

Решение 1. Предположим, что у Паши есть выигрышная стратегия, когда он начинает. Тогда в игре, где Паша ходит вторым, пусть он игнорирует первый ход Миши (будто его не было) и после второго хода Миши играет, применяя свою выигрышную стратегию. Сделав свой последний ход, Паша может считать, что это он начинал, и только сейчас Миша сделал тот самый ход, который на самом деле у Миши был первым. Значит, тут снова выиграет Паша, а не начинавший Миша.

Вариация решения 1. Предположим, что у Паши есть выигрышная стратегия, когда он начинает. Тогда в игре, где Паша ходит вторым, пусть он действует по своей выигрышной стратегии, делая свой первый ход по этой стратегии, а второй ход — тот, который надо сделать в ответ на первый ход Миши, и так далее (то есть каждый раз он как бы запаздывает с ответом, отвечая на более ранний ход Миши). Тогда Паша выиграет, ответив своим последним ходом на предпоследний ход Миши (поскольку последний ход Миши уже не имеет значения — не важно, сделан ли он до хода Паши или после).

Решение 2. Назовём таблицу, для которой способ гарантировать себе победу имеется у начинающего, кто бы это ни был, *хорошей.* Докажем следующую лемму.

Лемма. *Если существует хорошая таблица S размерами $(n+1)\times(n+1)$, то существует и хорошая таблица T размерами $n\times n$.*

Пусть для таблицы S начинающий Паша побеждает, вычёркивая первым ходом строку a, а начинающий Миша побеждает, вычёркивая первым ходом столбец b. Рассмотрим таблицу T размерами $n\times n$, полученную из S вычёркиванием строки a и столбца b. Докажем, что в ней снова выигрывает начинающий.

В самом деле, если начинающий — Паша, то для таблицы S он вычеркнул бы строку a, и если бы Миша в ответ вычеркнул столбец b, Паша всё равно сумел бы выиграть. Но при этом как раз осталась бы таблица T, и Паша как раз начинает. Аналогично разбирается случай, когда начинающий — Миша. Лемма доказана.

Предположим теперь, что существует хорошая таблица размерами 100×100. Использовав лемму 99 раз, получим, что существует хорошая таблица размерами 1×1. Но в такой таблице стоит лишь один определённый знак, и если это плюс, то всегда выиграет Паша, а если минус — Миша, то есть таблица не является хорошей, противоречие.

Решение 3. Рассмотрим два случая.

1) В таблице есть столбец из одних минусов. Пусть начинает Паша. Тогда Миша выиграет, если не будет вычёркивать этот столбец (Паша за 99 ходов не сможет вычеркнуть из него все минусы).

2) В каждом столбце есть хотя бы один плюс. Пусть начинает Миша. Паша мысленно отмечает по одному плюсу в каждом столбце. Пока есть строки без отмеченных плюсов, Паша вычёркивает их. Когда они закончатся, количество оставшихся отмеченных плюсов будет равно количеству оставшихся строк (Миша каждым ходом вычеркивал ровно один отмеченный плюс), то есть в каждой строке и каждом столбце останется по одному отмеченному плюсу. Далее Паша каждый раз вычеркивает строку, содержащую отмеченный плюс, только что вычеркнутый Мишей. В результате в конце останется клетка с отмеченным плюсом, то есть выиграет Паша.

Решение 4. Пусть начинает Паша. Покажем, что у него есть выигрышная стратегия в том и только том случае, если имеется строка из одних плюсов.

Если такая строка есть, то пусть Паша её не вычёркивает. Тогда в конце остаётся клетка этой строки, а в ней стоит плюс и Паша выигрывает.

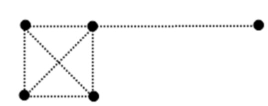
Наоборот, пусть в каждой строке есть минус. Докажем, что Миша может действовать так, чтобы всё время сохранять это свойство (тогда в конце останется клетка с минусом и Миша выиграет). Предположим противное и рассмотрим первый шаг, когда Миша не может сделать нужный ход, а именно: какой бы столбец он не вычеркнул, появится строка из одних плюсов. Тогда для каждого столбца есть строка, содержащая ровно один минус, причём именно в этом столбце. Эти строки различны для всех столбцов, поэтому всего строк не меньше, чем столбцов. Но после хода Паши всего строк на 1 меньше, чем столбцов — противоречие.

Аналогично доказывается, что если начинает Миша, то у него есть выигрышная стратегия в том и только том случае, когда имеется столбец из одних минусов. Но если есть такой столбец, то не может быть строки из одних плюсов. Поэтому если есть выигрышная стратегия у начинающего Миши, то не может быть выигрышной стратегии у начинающего Паши, что и требовалось.

4. а) (2 балла) *В тридевятом царстве n городов. Иван-царевич строит дороги по одной (сначала дорог нет). Каждый раз он выбирает два города, не соединённых напрямую дорогой, расстояние между которыми наименьшее, и соединяет их прямолинейной дорогой. Строительство заканчивается, когда становится возможным проехать из любого города в любой (напрямую или через другие города). Обязательно ли никакие две построенные дороги не будут пересекаться вне городов?*

б) (6 баллов) *Тот же вопрос, если каждый раз выбираются два ближайших друг к другу города, между которыми невозможен проезд (даже через другие города).*

(Алексей Заславский)



а) Ответ: не обязательно. При расположении городов, как на рисунке справа, сначала будут проведены стороны квадрата (в каком-то порядке), потом обе его диагонали, а затем последняя дорога.

Замечание. Имеется контрпример и всего с четырьмя городами: четырехугольник $ABCD$ с $AD = CD > BD > AC > AB = BC$.

б) Ответ: обязательно. Предположим противное — были проведены две пересекающиеся вне городов дороги: сначала AC, а потом BD.

Тогда это либо диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (первый случай), либо A, B, C, D лежат на одной прямой (второй случай). Перед проведением дороги BD города B и D не были связаны никаким путём. Тогда хотя бы от одного из них (пусть D) нельзя было доехать до дороги AC. То, что вместо дороги BD не была проведена ни одна из дорог AD, CD, означает, что $AD \geqslant BD$, $CD \geqslant BD$. Перед проведением дороги AC города A и C тоже не были связаны путём. Тогда хотя бы один из них (пусть C) не был соединён с B. То, что вместо дороги AC не была проведена дорога BC, означает, что $BC \geqslant AC$. Значит, $BC + AD \geqslant AC + BD$. Но, как известно, в четырёхугольнике сумма двух противоположных сторон меньше суммы диагоналей, поэтому в первом случае сразу получаем противоречие.

Во втором случае, так как AC и BD пересекаются и $AD \geqslant BD$, $CD \geqslant BD$, то города A и C лежат вне отрезка BD и по разные стороны от него. Но тогда неравенство $BC \geqslant AC$ невозможно, так как B лежит внутри отрезка AC.

Замечание. Случай, когда $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, можно разобрать немного иначе. Пусть проведены его диагонали AC и BD. У этого четырёхугольника есть неострый угол, будем считать, что это угол B. Тогда $AC > AB$, $AC > BC$. В момент проведения диагонали AC города A и C не были связаны путём, поэтому какой-то из них не был связан с B — пусть, например, A. Тогда перед этим уже была либо проведена дорога AB, либо A и B были соединены путём. Но поскольку A и C сейчас по-прежнему не соединены путём, то перед этим должен была быть также проведена либо дорога BC, либо путь, соединяющий B и C. Но тогда A и C уже связаны путём, противоречие.

5 (10 баллов). *Докажите, что при некотором натуральном N строго между соседними кубами N^3 и $(N+1)^3$ находится ровно 1000 точных квадратов.*

(Алексей Толпыго)

Попробуем найти подходящее N явно, причём будем искать его в виде $N = k^2$. Чтобы оно удовлетворяло условию задачи, достаточно выполнения неравенств:

$$(k^3 + 1000)^2 < (k^2 + 1)^3 \leqslant (k^3 + 1001)^2.$$

(Тогда строго между кубами $(k^2)^3$ и $(k^2+1)^3$ будет ровно 1000 квадратов: $(k^3+1)^2, \ldots, (k^3+1000)^2$.)

Раскрыв скобки, получим:

$$k^6 + 2000k^3 + 1000^2 < k^6 + 3k^4 + 3k^2 + 1 \leqslant k^6 + 2002k^3 + 1001^2.$$

Вычтем из всех частей k^6 и поделим все части на k^3. Получим:

$$2000 + \left(\frac{100}{k}\right)^3 < 3k + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^3} \leqslant 2002 + \frac{1001^2}{k^3}.$$

Тогда такое число k, что $3k = 2001$, то есть $k = 667$, подходит, поскольку при этом k, очевидно, $\left(\frac{100}{k}\right)^3 < 1$ и $\frac{3}{k} + \frac{1}{k^3} < 1$.

Замечание. Идея другого решения приведена в решениях 10–11 классов (см. задачу 4).

6. *У Пети есть 60 карточек с номерами от 1 до 60, на каждой написано действительное число. За один вопрос Вася может выбрать любые 17 номеров и узнать у Пети сумму чисел на карточках с этими номерами. Может ли Вася гарантированно определить сумму чисел на всех 60 карточках, задав*

а) (3 балла) *не более 30 вопросов;*

б) (4 балла) *не более 20 вопросов;*

в) (5 баллов) *не более 10 вопросов?*

(Алексей Толпыго)

Ответ: может во всех трёх пунктах. Первые два вопроса всегда тратим на $17+17=34$ числа и узнаём их сумму, остаются 26 чисел.

а) Расположим оставшиеся 26 чисел по кругу и узнаем сумму каждых 17 подряд идущих из них за 26 вопросов. Сложив эти 26 ответов и поделив на 17 (так как каждое число посчитано в общей сумме 17 раз), мы узнаем сумму этих 26 чисел. И всю сумму тоже узнаем, прибавив первые два ответа. В итоге мы потратили $2+26=28$ вопросов.

б) Разобьём оставшиеся 26 чисел на два блока: из 9 и из 17 чисел. Пусть суммы в этих блоках соответственно равны A и B. За один ход можно узнать B (выбрав весь второй блок). Теперь, как в пункте а), расположим числа второго блока по кругу и далее за ход будем узнавать сумму 9 чисел первого блока и 8 подряд идущих чисел второго, каждый раз выбирая ещё не выбиравшиеся 8 подряд идущих чисел. Тогда за 17 вопросов, сложив полученные ответы, мы узнаем величину $17A+8B$, так как во втором блоке мы переберём все возможные варианты 8 чисел, идущих подряд, и каждое число второго блока в общей сумме будет посчитано 8 раз. Но слагаемое $8B$ нам известно, откуда найдём A и потом $A+B$. В итоге мы потратили $2+1+17=20$ вопросов.

Замечание. Есть много других вариантов разбиения 26 чисел на 2 блока, которые позволяют уменьшить число вопросов. Например, разобьём их на два блока: из 10 чисел и из 16 чисел. Пусть суммы в этих блоках соответственно равны A и B.

За 10 вопросов узнаем сумму $A+10B$, проверяя каждый раз $1+16$ чисел — по одному числу первого блока и все 16 чисел первого блока.

За 4 вопроса узнаём $2A+3B$, проверяя каждый раз $5+12$ чисел — это 5 чисел первого блока, которые сдвигаем циклически, и 12 чисел второго блока, которые сдвигаем циклически ($12\cdot 4=48$, то есть второй блок будет подсчитан трижды).

Далее, найдём B, вычислив $2(A+10B)-(2A+3B)$ и поделив на 17. После этого найдём и A (например, вычтя $10B$ из суммы $A+10B$). В итоге мы потратили $2+10+4=16$ вопросов.

в) Разобьём оставшиеся 26 чисел их на три блока: из 5 чисел, из 9 чисел и из 12 чисел. Пусть суммы в этих блоках соответственно равны A, B и C.

За 1 вопрос, взяв числа первого и третьего блоков, узнаём $A+C$.

За 4 вопроса узнаём $4A+4B+C$, проверяя каждый раз $5+9+3$ чисел — это все 5 чисел первого блока, все 9 чисел второго блока и 3 числа третьего, которые сдвигаем циклически ($3\cdot 4=12$, как раз получится весь третий блок).

За 3 вопроса узнаём $3B+2C$, проверяя каждый раз $9+8$ чисел — это все 9 чисел второго блока, и 8 чисел третьего, которые сдвигаем циклически ($3\cdot 8=24$, так что третий блок будет подсчитан дважды).

Далее, сложив $9\cdot(A+C)+2\cdot(4A+4B+C)+3\cdot(3B+2C)$, получим $17(A+B+C)$, и, поделив на 17, узнаем сумму этих 26 чисел. В итоге мы потратили $2+1+4+3=10$ вопросов.

Замечание 1. Интересно было бы узнать, за какое наименьшее число вопросов можно найти сумму всех 60 чисел (ответ жюри неизвестен).

Замечание 2. Интересно также узнать, за какое наименьшее число вопросов можно узнать хотя бы одно из этих 60 чисел — например, записанное на первой карточке. Жюри умеет находить это число за 10 вопросов. С другой стороны, за 18 вопросов можно узнать любые конкретные 18 чисел.

7 (12 баллов). *Дано натуральное k. На столе по кругу лежат n внешне одинаковых монет массами 1, 2, …, n г. Вам известно, что эти массы идут по порядку, но неизвестно, по часовой стрелке или против, и с какого места начинаются. Одним взвешиванием разрешается сравнить любые две монеты и узнать, какая тяжелее. Барон Мюнхгаузен утверждает, что вы можете сделать k взвешиваний так, чтобы по их результатам гарантированно определить массу хотя бы одной монеты. При каком наибольшем n слова барона будут правдой?*

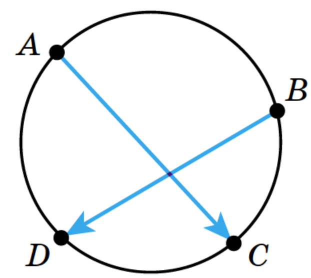
(Иван Митрофанов)

Ответ: $n = 2$ при $k = 1$ и $n = 2^k - 1$ при остальных k.

Случай $k = 1$ очевиден. Далее разберём случай $k > 1$.

Алгоритм. Пусть $n = 2^k - 1$. Пусть уже проведено несколько взвешиваний, нарисуем соответствующие им стрелки (от меньшей монеты к большей). Будем считать, что монеты делят окружность, на которой лежат, на равные промежутки длины 1 (а сами монеты — точки на этой окружности).

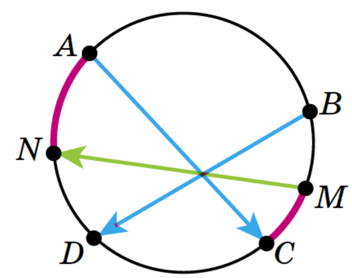
Пусть монеты A, B, C, D расположены на окружности именно в таком циклическом порядке (возможно, $A = D$ или $B = C$) и проведены стрелки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Назовём *зазором* между этими стрелками объединение дуг BC и DA, а *длиной зазора* — длину *наибольшей* из дуг BC и DA (дуги берём «в том же циклическом порядке», то есть, например, дуга BC не содержит внутри точек A и D). Докажем, что «разрыв» между монетами (граница между монетой массы 1 и монетой массы n) расположен внутри зазора (то есть, на BC или DA).



В самом деле, пусть зазор расположен, например, на дуге CD. Пройдём по окружности от монеты массой 1 до монеты массой n (массы всё время будут возрастать).

В зависимости от направления, в котором идут монеты, мы в одном случае пройдём сначала D, а потом B, что невозможно (так как $B < D$), а в другом случае пройдём сначала C, а потом A, что тоже невозможно (так как $A < C$). Противоречие. Аналогично, разрыв не может быть на AB.

Теперь мы готовы описать сам алгоритм. Первые две стрелки выбираем «почти перпендикулярными», то есть так, чтобы четыре их конца делили окружность на дуги, длины которых не больше чем 2^{k-2}. Тогда длина зазора между ними будет тоже не больше чем 2^{k-2}.



Докажем, что далее можно делать взвешивания так, чтобы минимальный зазор с каждым разом уменьшался хотя бы в два раза. Действительно, пусть зазор между $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не превосходит 2^a. Пусть M — середина (или почти середина в случае нечётной длины) дуги BC, а N — середина (или почти середина) дуги DA. Если $M < N$, то зазор между $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}$ не превосходит 2^{a-1} (см. рисунок), а если $N < M$, это верно для зазора между $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Действуя так, мы после k-го взвешивания найдём две стрелки с зазором не больше 1. Путь это $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Случаи $B = C$ и $A = D$ разбираются тривиально (в первом случае разрыв проходит между лежащими рядом A и D, и так как $A < C = B < D$, то $A = 1$; во втором аналогично $B = 1$).

В случае различных A, B, C, D разрыв проходит между лежащими рядом A и D или между лежащими рядом B и C, причём, так как $A < C$ и $B < D$, все монеты на дуге AB легче, чем на дуге CD. Но одна из этих дуг чётной длины (то есть с нечётным числом монет), и тогда монета, лежащая посередине этой дуги, определяется однозначно.

Оценка. Предположим, что такой алгоритм есть при некотором n и за k взвешиваний можно вычислить какую-то монету. Тогда после всех взвешиваний монеты могут быть расположены не более чем двумя способами, и, произведя ещё одно взвешивание, мы узнаем полностью всю конфигурацию. Но всего разных конфигураций $2n$, а возможных результатов последовательности из $k + 1$ взвешиваний — не более 2^{k+1}. Итак, $2n \leqslant 2^{k+1}$, откуда $n \leqslant 2^k$. Поэтому осталось лишь доказать, что при $n = 2^k$ алгоритма нет.

Предположим противное, и есть какой-то алгоритм. Всего имеется 2^{k+1} возможных конфигураций (того, как в действительности расположены монеты). Эти конфигурации бывают типа A или B (по или против часовой стрелки). Здесь мы используем, что $k > 1$ (в случае двух монет нет разницы между расположениями по и против часовой стрелки). После выполнения k взвешиваний должны исключаться все конфигурации, кроме может быть двух: одной из A, второй из B. Тогда в любой ситуации в конце должно оставаться ровно две конфигурации: одна из A, вторая из B.

Изначально, до взвешиваний, в A и B по 2^k конфигураций. Несложно понять, что после каждого взвешивания, вне зависимости от результата взвешивания, число возможных конфигураций из A должно в точности уполовиниваться — иначе результаты следующих взвешиваний могут оказаться такие, что в конце останется либо 0, либо больше одной конфигурации из A. То же верно и для B.

Нарисуем правильный n-угольник (вершины соответствуют монетам), каждую конфигурацию типа A изобразим как красную сторону многоугольника (соединяющую монеты 1 и n). Каждая конфигурация типа B — синяя сторона многоугольника (снова соединяющая монеты 1 и n). Изначально, когда имеется 2^{k+1} возможных конфигураций, каждая сторона «двойная» — проведена и синим, и красным. Далее каждым ходом алгоритма выбираются две вершины, X и Y. Заметим, что далее, в зависимости от ответа (кто из X, Y тяжелее), происходит одно из двух:

либо выкидываются синие стороны на дуге XY и красные на дуге YX,

либо выкидываются синие стороны на дуге YX и красные на дуге XY.

И, напомним, нам надо, чтобы каждый раз в любом случае число красных сторон уменьшалось ровно вдвое, и число синих сторон уменьшалось вдвое.

Индукцией по i несложно показать, что после i-го хода синие стороны будут образовывать дугу длины 2^{k-i}, а красные стороны — симметричную ей дугу. Переход индукции — несложным перебор показываем, что следующее взвешивание должно затрагивать середины этих дуг.

Тогда после k взвешиваний останутся две противоположные стороны, одна красная, а другая синяя. Но такие две конфигурации не имеют общих чисел, поэтому ни одно число восстановить нельзя.

10 – 11 классы

1. *У Паши и Миши есть квадратная таблица 100×100, в каждой клетке которой стоит либо плюс, либо минус. Паша и Миша по очереди вычёркивают: Паша — ещё не вычеркнутую строку, а Миша — ещё не вычеркнутый столбец, пока не останется всего одна невычеркнутая клетка. Если в ней стоит плюс, то выиграл Паша, а если минус — Миша. Могла ли таблица оказаться такой, что в этой игре, кто бы её ни начинал — Паша или Миша, — способ гарантировать себе победу имеется*

а) (1 балла) *у того, кто ходит вторым;*

б) (4 балла) *у начинающего?*

(Борис Френкин, Алексей Заславский)

а) Ответ: могла. Рассмотрим таблицу, где плюсы и минусы расставлены в шахматном порядке. Пусть игрок, который ходит вторым, каждым ходом вычеркивает ряд, пересекающий главную диагональ, состоящую из «его» знаков, в клетке, которую перед этим вычеркнул его противник. Тогда последняя невычеркнутая клетка лежит на этой диагонали, то есть приносит победу второму.

б) Ответ: не могла.

Решение 1. Предположим, что у Паши есть выигрышная стратегия, когда он начинает. Тогда в игре, где Паша ходит вторым, пусть он игнорирует первый ход Миши (будто его не было) и после второго хода Миши играет, применяя свою выигрышную стратегию. Сделав свой последний ход, Паша может считать, что это он начинал, и только сейчас Миша сделал тот самый ход, который на самом деле у Миши был первым. Значит, тут снова выиграет Паша, а не начинавший Миша.

Вариация решения 1. Предположим, что у Паши есть выигрышная стратегия, когда он начинает. Тогда в игре, где Паша ходит вторым, пусть он действует по своей выигрышной стратегии, делая свой первый ход по этой стратегии, а второй ход — тот, который надо сделать в ответ на первый ход Миши, и так далее (то есть каждый раз он как бы запаздывает с ответом, отвечая на более ранний ход Миши). Тогда Паша выиграет, ответив своим последним ходом на предпоследний ход Миши (поскольку последний ход Миши уже не имеет значения — не важно, сделан ли он до хода Паши или после).

Решение 2. Назовём таблицу, для которой способ гарантировать себе победу имеется у начинающего, кто бы это ни был, *хорошей.* Докажем следующую лемму.

Лемма. *Если существует хорошая таблица S размерами $(n+1)\times(n+1)$, то существует и хорошая таблица T размерами $n\times n$.*

Пусть для таблицы S начинающий Паша побеждает, вычёркивая первым ходом строку a, а начинающий Миша побеждает, вычёркивая первым ходом столбец b. Рассмотрим таблицу T размерами $n\times n$, полученную из S вычёркиванием строки a и столбца b. Докажем, что в ней снова выигрывает начинающий.

В самом деле, если начинающий — Паша, то для таблицы A он вычеркнул бы строку a, и если бы Миша в ответ вычеркнул столбец b, Паша всё равно сумел бы выиграть. Но при этом как раз осталась бы таблица T, и Паша как раз начинает. Аналогично разбирается случай, когда начинающий — Миша. Лемма доказана.

Предположим теперь, что существует хорошая таблица размерами 100×100. Использовав лемму 99 раз, получим, что существует хорошая таблица размерами 1×1. Но в такой таблице стоит лишь один определённый знак, и если это плюс, то всегда выиграет Паша, а если минус — Миша, то есть таблица не является хорошей, противоречие.

Решение 3. Рассмотрим два случая.

1) В таблице есть столбец из одних минусов. Пусть начинает Паша. Тогда Миша выиграет, если не будет вычёркивать этот столбец (Паша за 99 ходов не сможет вычеркнуть из него все минусы).

2) В каждом столбце есть хотя бы один плюс. Пусть начинает Миша. Паша мысленно отмечает по одному плюсу в каждом столбце. Пока есть строки без отмеченных плюсов, Паша вычёркивает их. Когда они закончатся, количество оставшихся отмеченных плюсов будет равно количеству оставшихся строк (Миша каждым ходом вычеркивал ровно один отмеченный плюс), то есть в каждой строке и каждом столбце останется по одному отмеченному плюсу. Далее Паша каждый раз вычеркивает строку, содержащую отмеченный плюс, только что вычеркнутый Мишей. В результате в конце останется клетка с отмеченным плюсом, то есть выиграет Паша.

Решение 4. Пусть начинает Паша. Покажем, что у него есть выигрышная стратегия в том и только том случае, если имеется строка из одних плюсов.

Если такая строка есть, то пусть Паша её не вычёркивает. Тогда в конце остаётся клетка этой строки, а в ней стоит плюс и Паша выигрывает.

Наоборот, пусть в каждой строке есть минус. Докажем, что Миша может действовать так, чтобы всё время сохранять это свойство (тогда в конце останется клетка с минусом и Миша выиграет). Предположим противное и рассмотрим первый шаг, когда Миша не может сделать нужный ход, а именно: какой бы столбец он не вычеркнул, появится строка из одних плюсов. Тогда для каждого столбца есть строка, содержащая ровно один минус, причём именно в этом столбце. Эти строки различны для всех столбцов, поэтому всего строк не меньше, чем столбцов. Но после хода Паши всего строк на 1 меньше, чем столбцов — противоречие.

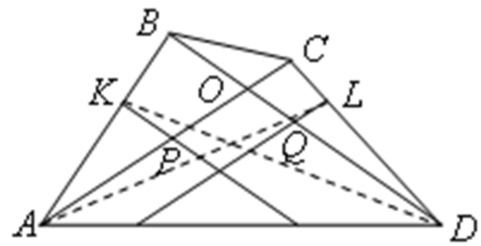
Аналогично доказывается, что если начинает Миша, то у него есть выигрышная стратегия в том и только том случае, когда имеется столбец из одних минусов. Но если есть такой столбец, то не может быть строки из одних плюсов. Поэтому если есть выигрышная стратегия у начинающего Миши, то не может быть выигрышной стратегии у начинающего Паши, что и требовалось.

2 (6 баллов). *В выпуклом четырёхугольнике через середину каждой диагонали проведён отрезок с концами на сторонах четырёхугольника, параллельный другой диагонали. Докажите, что концы этих двух отрезков образуют четырёхугольник, в котором есть пара параллельных сторон.*

(Сергей Токарев)

Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, P и Q — середины диагоналей AC и BD соответственно. Разберём случай, когда ни одна из точек P, Q не совпадает с точкой O (оставшиеся случаи разбираются аналогично).

Не теряя общности, можно считать, что P лежит на отрезке OA, а Q — на отрезке OD. Тогда прямая, проходящая через P параллельно BD, пересекает стороны AB (пусть в точке K) и AD, а прямая, проходящая через Q параллельно AC, пересекает стороны CD (пусть в точке L) и AD. Достаточно доказать, что $KL \parallel AD$, то есть что $S_{AKD} = S_{ALD}$. Имеем:



$$S_{AKD} = \frac{AK}{AB} \cdot S_{ABD} = \frac{AP}{AO} \cdot S_{ABD} = \frac{AC}{2AO} \cdot \frac{DB}{DO} \cdot S_{AOD}.$$

Аналогично,

$$S_{ALD} = \frac{DB}{2DO} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot S_{AOD} = S_{AKD}.$$

3. *N узников сидят в камерах, расположенных по кругу. Сегодня у них есть возможность посовещаться и договориться, а завтра поутру каждый узник бросит игральный кубик. После этого каждый должен сделать предположение — какое число выпало у каждого из 5 узников, сидящих в 5 камерах, следующих по часовой стрелке. Если будет угадано хотя бы одно из выпавших чисел хоть у какого-то узника, всех освободят. Как им действовать, чтобы гарантированно выйти на свободу, если*

а) (4 балла) $N = 47$*;*

б) (4 балла) $N = 48$*?*

(Татьяна Казицына)

Решение 1.

а) Занумеруем узников по часовой стрелке. Узники договариваются: каждый «предположит», что у следующих пяти выпало то же число, что и у него. Пусть у 1-го узника выпадет число a. Если повезёт, то и у 2-го выпадет a и всех освободят. В противном случае у 2-го выпадет другое число b. Если повезёт, то у 3-го выпадет a или b, и всё хорошо. В противном случае у 3-го выпадет третье число c. При продолжающемся невезении у 4-го, 5-го и 6-го выпадут новые числа d, e, f, а у 7-го – снова a. Далее при невезении всё продолжится по циклу и у 43-го узника выпадет a, то есть он угадает число 1-го, и всех освободят.

б) Первые 47 узников действуют так же, как в а), а 48-й «предсказывает», что у следующих пяти выпало какое-нибудь одно и то же число, но не то, что у него. При невезении у него выпадет f, поэтому он угадает число у одного из первых пяти узников.

Решение 2.

Занумеруем узников по часовой стрелке. Узники договариваются: каждый «предположит», что у второго за ним выпала 2, у третьего — 3, у четвёртого — 4, у пятого — 5, а у первого — либо 1, либо 6, а что именно — поясним ниже.

Заметим, что если хоть у одного узника выпадет число a, равное 2, 3, 4 или 5, то кто-то угадает (так как где-то перед каждым узником есть тот, кто предсказывает ему число a). Поэтому далее можно считать, что у всех выпало 1 или 6.

а) Если узников всего 47, то пусть каждый предскажет своему 1-му узнику выпадение 1, если у него самого выпало 1, и предскажет выпадение 6, если у него самого выпало 6. Тогда если у 1-го узника выпало, скажем, 1, то у 2-го — 6, у 3-го — 1, и так далее, у 47-го — 1, и он угадает, что выпало у 1-го узника.

б) Если узников всего 48, то пусть каждый узник с 1-го до 47-го предскажет своему 1-му узнику выпадение 1, если у него самого выпало 1, и предскажет выпадение 6, если у него самого выпало 6. А 48-й узник пусть действует наоборот: предскажет своему 1-му узнику выпадение 6, если у самого выпало 1, и предскажет выпадение 1, если у самого выпало 6. Тогда если у 1-го узника выпало, скажем, 1, то у 2-го — 6, у 3-го — 1, и так далее, у 48-го — 6, и он угадает, что выпало у 1-го узника.

Замечание. Не существует детерминированной стратегии, в которой каждый узник предсказывает какие-то конкретные числа, не зависящие от того, что у него выпало (например, остаток от деления номера своего места в круге на 6 и т.п.), так как тогда для каждого узника заранее имеется 5 конкретных предсказаний, и мы можем считать, что у него выпало число, отличное от всех этих 5 вариантов — тогда никто ничего не угадает).

4 (8 баллов). *Докажите, что при некотором натуральном N строго между соседними кубами N^3 и $(N+1)^3$ находится ровно 1000 точных квадратов.*

(Алексей Толпыго)

Решение 1. Попробуем найти подходящее N явно, причём будем искать его в виде $N = k^2$. Чтобы оно удовлетворяло условию задачи, достаточно выполнения неравенств:

$$(k^3 + 1000)^2 < (k^2 + 1)^3 \leqslant (k^3 + 1001)^2.$$

(Тогда строго между кубами $(k^2)^3$ и $(k^2+1)^3$ будет ровно 1000 квадратов: $(k^3+1)^2, \ldots, (k^3+1000)^2$.)

Раскрыв скобки, получим:

$$k^6 + 2000k^3 + 1000^2 < k^6 + 3k^4 + 3k^2 + 1 \leqslant k^6 + 2002k^3 + 1001^2.$$

Вычтем из всех частей k^6 и поделим все части на k^3. Получим:

$$2000 + \left(\frac{100}{k}\right)^3 < 3k + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^3} \leqslant 2002 + \frac{1001^2}{k^3}.$$

Тогда такое число k, что $3k = 2001$, то есть $k = 667$, подходит, поскольку при этом k, очевидно, $\left(\frac{100}{k}\right)^3 < 1$ и $\frac{3}{k} + \frac{1}{k^3} < 1$.

Идея решения 2. Количество квадратов между N^3 и $(N+1)^3$ равно числу целых точек на интервале $(N^{3/2}, (N+1)^{3/2})$. Обозначим через $L = L(N)$ этот интервал и через $l = l(N)$ — его длину. Очевидно, величина $l(N)$ растёт, и нетрудно доказать, что она растёт со скоростью $\sqrt{N}$, то есть не очень быстро. Количество целых точек на $L(N)$ равно либо $[l(N)]$, либо $[l(N)] + 1$.

Пусть r — произвольное достаточно большое натуральное число (здесь $r = 1000$). Найдём такое натуральное N, что $r - \frac{1}{2} < l(N) < r$, тогда на интервале $L(N)$ лежит либо r, либо $r-1$ целых точек. Если их r, то всё получилось, в противном случае рассмотрим интервал $L(N+1)$. Можно считать, что для него также выполняется неравенство $r - \frac{1}{2} < l(N+1) < r$, соответственно, на нём также r или $r-1$ целых точек. Но если бы их было $r-1$, то на объединении интервалов $L(N)$ и $L(N+1)$ лежало бы только $2r-2$ целые точки, тогда как его длина больше $2r-1$. Противоречие. (Отдельно надо рассмотреть случай, когда один из концов интервала целый, но это тоже несложно). Осталось лишь заметить, что число 1000 достаточно большое для наших целей.

5. *На каждой из сторон правильного N-угольника живёт робот. Каждый робот едет по своей стороне со своей постоянной скоростью, в вершине мгновенно разворачивается и продолжает ехать с той же скоростью в противоположном направлении, и так далее. Когда два робота встречаются в какой-то вершине, там вспыхивает искра. Могло ли оказаться, что в каждой вершине искры вспыхивают с одной и той же ненулевой частотой, если*
а) (6 баллов) $N = 3$;
б) (3 балла) $N = 5$?

(Александр Юран)

а) Решение 1.

Докажем, что искры не могут вспыхивать с равной частотой. Предположим, искры вспыхивают каждые t секунд, и за время t роботы проезжают свои стороны m, n и k раз. Домножим их скорости на $\frac{mnk}{t}$. Сократим скорости на их наибольший общий делитель и получим ситуацию, в которой скорости целые и их наибольший общий делитель равен 1. Пусть в ней первый, второй и третий роботы проезжают стороны за a, b и c секунд соответственно.

Тогда промежуток между вспышками — это

$$\text{НОК}(2a, 2b) = \text{НОК}(2b, 2c) = \text{НОК}(2a, 2c).$$

Значит,

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(a, c).$$

Рассмотрим три последовательные искры: между первым и третьим роботом, между первым и вторым и между вторым и третьим. Пусть между соответствующими им искрам первый, второй и третий роботы прошли по своим сторонам l, m и n раз соответственно. Тогда l, m и n нечётны и

$$la + mb = nc \Rightarrow a + b \equiv c \pmod 2.$$

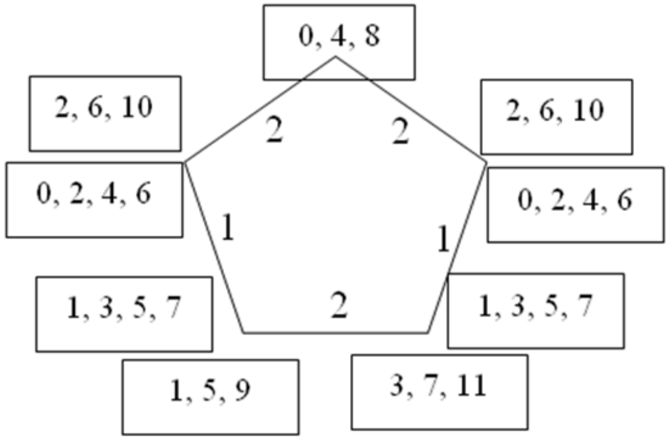
Значит, либо a, b и c чётны, либо два из них нечётны, а третье чётно. Если все они чётны, то a, b и c имеют общий делитель 2, что противоречит нашему предположению. А если два из них нечётны, а третье чётно, то их попарные наименьшие кратные не все одной чётности, что невозможно, так как они должны быть равны.

Таким образом, мы пришли к противоречию, то есть искры не могут вспыхивать через равные промежутки времени.

б) Решение 1. Да, такое возможно. Обозначим пятиугольник через $ABCDE$ и будем считать, что его сторона равна 1. Все роботы начинают одновременно. Два робота начинают в A. Один из них едет в сторону E со скоростью 2, второй — в сторону B со скоростью 1. Третий робот начинает в B и едет к C со скоростью 2. Четвёртый начинает в середине CD едет к C со скоростью 1. Пятый начинает в середине ED и едет к E со скоростью 1.

В каждой вершине искры будут вспыхивать через промежуток времени, равный 2: вспышки в вершине A — в моменты времени $2k$, в вершине B — в моменты $2k+1$, в вершине C — в моменты $2k+\frac{1}{2}$, в вершине D — в моменты $2k+\frac{3}{2}$, в вершине E — в моменты $2k+\frac{1}{2}$, где k — неотрицательное целое.

Решение 2. На рисунке внутри пятиугольника указано время в минутах, которое требуется роботу, чтобы проехать соответствующую сторону, а у вершин — моменты времени, когда роботы в них попадают (из этих данных можно восстановить, где роботы начинают движение в момент времени 0: например, два «верхних» робота начинают движение по своим сторонам из верхней вершины, а робот на нижней стороне начинает движение влево из её середины). Как видно, в каждой вершине искрит раз в 4 минуты.



6 (10 баллов). *Улитка проползла по плоскости по контуру замкнутой несамопересекающейся n-звенной ломаной. Известно, что она двигалась только в трех направлениях: вверх, вправо и вниз-влево (под углом 45° к горизонтали). Докажите, что n нечётно.*

(Павел Кожевников)

Решение 1. Будем использовать только, что улитка может двигаться в трёх направлениях, сонаправленных с одним из трёх векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=\vec{0}$. Не умаляя общности, будем считать, что эти векторы $\vec{e}_i$ идут в порядке $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, считая от $\vec{e}_1$ против часовой стрелки.

При повороте улитки (в вершине многоугольника) текущий вектор направления $\vec{e}_i$ меняется на вектор $\vec{e}_{i\pm1}$ (здесь и далее нижние индексы у векторов берём по модулю 3). Поэтому каждый раз улитка поворачивается на угол между каким-то двумя соседними векторами из наших трёх по или против часовой стрелки.

Пусть улитка проползла контур многоугольника против часовой стрелки (то есть так, что внутренность ломаной оставалась всё время слева от улитки) и снова находится в исходной точке и повёрнута в исходном направлении. Тогда она сделала суммарно 1 оборот против часовой стрелки (сумма внешних углов многоугольника, взятых со знаками (в зависимости от того, поворот по часовой стрелке или против), равна 360°). Это значит, что количество изменений индекса на $+1$ было ровно на 3 больше, чем изменений на -1. Тогда общее количество изменений на ±1 нечётно, но оно равно количеству вершин n. Этим завершается решение.

Замечание 1. На самом деле, исходную задачу (да и общий случай) можно свести к другому, менее сложному частному случаю. А именно, рассмотрим в плоскости движения улитки треугольник с углами 45°, 45°, 90° и сторонами, параллельными направлениям движения улитки, и сделаем аффинное преобразование плоскости, переводящее этот треугольник в равносторонний. При аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные, поэтому весть путь улитки перейдёт в новую ломаную, по которой улитка движется в трёх равноправных направлениях $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, образующих друг с другом равные углы (по 120°).

В этом частном случае решение можно изложить более элементарно, используя лишь формулу суммы углов n-угольника. Действительно, теперь наша ломаная ограничивает n-угольник с углами $180^\circ \pm 120^\circ$; количество тех и других углов обозначим k_+ и k_- соответственно. Тогда сумма углов нашего n-угольника с одной стороны равна $S=(n-2)\cdot180^\circ = n\cdot180^\circ-360^\circ$, а с другой стороны,

$$S=k_+\cdot(180^\circ+120^\circ)+k_-\cdot(180^\circ-120^\circ)=(k_++k_-)\cdot180^\circ+(k_+-k_-)\cdot120^\circ=n\cdot180^\circ+(k_+-k_-)\cdot120^\circ.$$

Отсюда $(k_+-k_-)\cdot120^\circ=-360^\circ$, значит, $k_+-k_-=-3$. Следовательно, $n=k_++k_-=2k_--3$, Видим, что n нечётно, и задача решена.

Замечание 2. Соображения, приведённые в решении 1, показывают, что для произвольной (возможно самопересекающейся) замкнутой n-звенной траектории нашей улитки (которой разрешено двигаться в трёх направлениях) чётность числа n совпадает с чётностью количества полных оборотов (вектора скорости улитки).

Можно показать, что для произвольной замкнутой ломаной четность количества оборотов совпадает с четностью количества ее точек самопересечения (здесь считаем, что разрешены только самопересечения пар звеньев во внутренних точках).

Решение 2. Поставим в соответствие пути улитки (многоугольнику) кольцевое слово из букв П (ход вправо), В (ход вверх) и Д (ход по диагонали); в этом слове нет соседних одинаковых букв. Каждой паре соседних букв в этом слове соответствует ориентированный угол, на который поворачивается улитка при переходе с первой стороны на вторую. Этот угол с точностью до знака равен внешнему углу нашего многоугольника. Например, паре ПВ соответствует угол $90°$, а паре ДВ — угол $-135°$. Из теоремы о сумме внешних углов многоугольника следует, что сумма всех этих углов равна $360°$, если улитка обходит многоугольник против часовой стрелке, и $-360°$ — в противном случае.

Будем сокращать полученное слово, а именно, тройку букв вида XYX будем заменять на букву X. При этом чётность количества букв сохранится, а соседних одинаковых букв, очевидно, не появится. Кроме того, сумма соответствующих углов не изменится, поскольку парам XY и YX соответствуют противоположные углы. Когда процесс закончится, останется слово, в котором не только соседние, но и буквы через одну не повторяются. Таких слов есть всего два вида (с точностью до кругового сдвига): ПВДПВД... и ПДВПДВ... Соответствующие суммы углов — это $(90° + 135° + 135°) + (90° + 135° + 135°) + \ldots$ и $(-135° - 135° - 90°) + (-135° - 135° - 90°) + \ldots$ Допустимые суммы $360°$ или $-360°$ будут только в словах из трёх букв. Значит, получено одно из таких слов, а в исходном слове число букв было нечётно, что и требовалось.

7 (14 баллов). *Дано натуральное k. На столе по кругу лежат n внешне одинаковых монет массами $1, 2, \ldots, n$ г. Вам известно, что эти массы идут по порядку, но неизвестно, по часовой стрелке или против, и с какого места начинаются. Барон Мюнхгаузен утверждает, что вы можете сделать k взвешиваний на чашечных весах без гирь так, чтобы по их результатам гарантированно определить массу хотя бы одной монеты. При каком наибольшем n слова барона будут правдой? (На каждую чашу помещается сколько угодно монет.)*

(Александр Шаповалов)

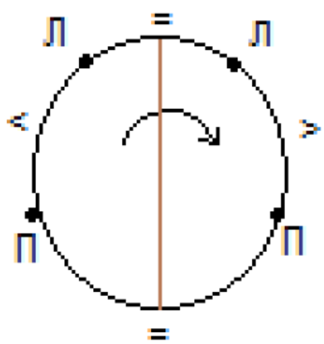
Ответ: $n = 2$ при $k = 1$ и $n = 3^k$ при $k > 1$.

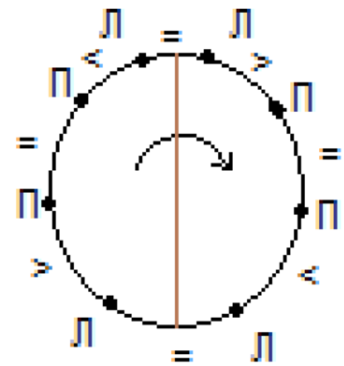
Оценка. За k взвешиваний результаты разобьют все $2n$ вариантов расположения монет не более чем на 3^k частей. При $n > 3^k$ в какую то часть попадут не менее 3 вариантов, среди них будут два одинакового направления (оба по часовой стрелке или оба против часовой). Веса любой монеты в этих двух вариантах различаются, поэтому никакой из весов нельзя определить однозначно. Значит, $n \leqslant 3^k$.

Осталось разобрать ещё случай $k = 1$ — проверить, что $n = 3$ не подходит. Будем называть монету числом, равным её весу в граммах. Заметим, что одним взвешиванием мы либо сравним друг с другом какие-то две монеты и ни одну из трёх имеющихся не определим (мы могли сравнить монеты 1 и 2, отложив монету 3, или сравнить монеты 2 и 3, отложив монету 1 — ни одна монета «не осталась на месте»), либо сравним одну монету и пару оставшихся монет и в случае неравенства снова ни одну не определим (могли взять монету 1 против монет 2 и 3, а могли взять монету 2 против 1 и 3, причём в паре монеты могут идти по кругу в любом порядке).

Алгоритм. Ясно, что при $k = 1$ и $n = 2$ достаточно сравнить две имеющиеся монеты друг с другом, и мы узнаем их обе. Далее везде считаем, что $k > 1$.

Способ 1. Пусть $n = 3^k$. Пусть монеты выкладываются в вершины правильного n-угольника с вертикальной осью симметрии, проходящей через нижнюю вершину. Их веса определяются однозначно, если мы знаем, на какой стороне лежат веса 1 и n (скажем, что это разрыв) и направление (по или против часовой; разрыв по часовой обозначим $n1$, против часовой — $1n$). Пусть мы положили несколько монет на левую чашу и столько же на правую. Пометим буквой Л вершины, из которой монеты взяты на левую чашу, и буквой П — на правую. Будем класть на каждую чашу монеты парами из симметричных вершин, по 2 или по 4 на каждую чашу. Результат взвешивания определяет набор подозрительных на разрыв сторон (набор зависит от направления). Будем брать монеты из вершин как на рисунках





Эти вершины разбивают круг монет на участки. Нетрудно убедиться, что при данном направлении (на рисунках — по часовой стрелке) результаты взвешивания зависят только от участка, на который попал разрыв и не зависят от места разрыва на участке (при сдвиге разрыва по участку все веса увеличиваются или уменьшаются на одно и то же число, поэтому разность чаш не меняется). При расположении разрыва на оси симметрии суммы в каждой симметричной паре одинаковы, а при переходе разрыва по часовой стрелке через монету сумма на соответствующей чаше уменьшается на n. Это позволяет узнать результаты взвешивания на участках, приведённые на рисунке. При смене направления на противоположное и результат меняется на противоположный (знак $>$ меняется на $<$ и наоборот.) Число сторон на участке от места A до места B по часовой стрелке обозначим AB.

Проведём первое взвешивание по 2 монеты ЛЛ ? ПП так, чтобы было $|\text{ЛЛ}| = 1$, $|\text{ПП}| = n/3 - 1$ (тогда $|\text{ЛП}| = |\text{ПЛ}| = n/3$). При равенстве подозрительные стороны на ЛЛ + ПП, при неравенстве на ЛП + ПЛ, при $<$ подозрительны $n1$ на ЛП и $1n$ на ПЛ, при $>$ наоборот.

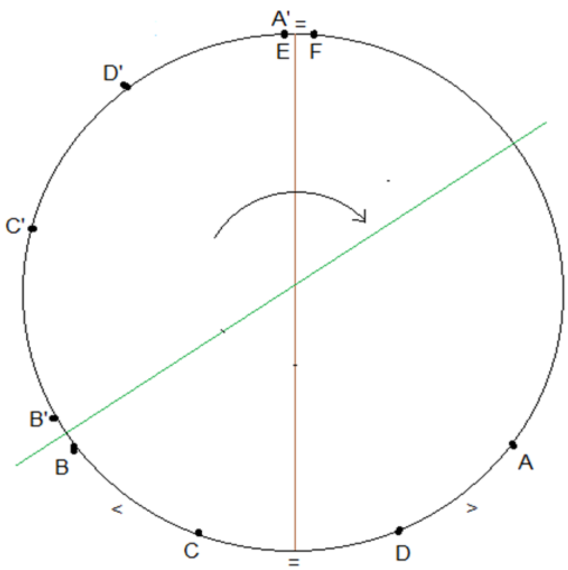
Изначально было по n подозрительных сторон для каждого направления, теперь их осталось по $n/3$. Сохранилась симметрия подозрительных сторон относительно вертикальной оси.

Случай 1: при неравенстве у нас есть два участка, симметричных друг другу, на одном подозрительны только стороны вида $1n$, на другом — только $n1$.

Случай 2: При равенстве у нас есть два участка (один длины 1), каждый участок симметричен и подозрительная сторона может быть как вида $1n$, так и вида $n1$. Будем проводить взвешивания так, чтобы сохранять все перечисленные свойства.

Случай 1. У нас есть два подозрительных участка длин $3m$, где один симметричен другому. В первый раз такие участки возникли при неравенстве $>$ или $<$, запомним, при каком именно. Обозначаем их концы ЛЛ′ и Л′Л и разбиваем каждый на три равные части монетами П и П′. Монеты лежат по кругу так ЛПП′Л′Л′П′ПЛ. Сравниваем ЛЛЛ′Л′ ? ППП′П′. При равенстве подозрительны монеты на П′П и ПП′, при неравенстве того же знака как запомненное – подозрительны участки ЛП + ПЛ, при противоположном – участки П′Л′ + Л′П′. Во всех случаях остаются по m подозрительных симметричных пар.

Случай 2. Есть два подозрительных участка: EF длины 1 и AB длины $3m-1$, где $m > 1$. Пусть $B'A'$ – участок длины $3m-1$ соседний по часовой с AB, который не включает EF (при этом A' может совпасть с E, см. рисунок).



Выберем *вспомогательную ось симметрии*, чтобы AB и $B'A'$ были симметричны относительно неё. Добавим на участки две симметричные пары монет C, C', D, D' так чтобы $|BC| = |AD| = m$, $|DC| = m-1$. Взвесим $ABB'A'$? $DCC'D'$. При равенстве подозрительны участки $EF + DC$, при неравенстве $<$ подозрительны $n1$ на CB и $1n$ на AD, при неравенстве $>$ наоборот.

Осталось заметить, что при неравенстве мы получили ситуацию случая 1, при равенстве – случай 2, все со втрое меньшим m.

Случай 2'. Есть два подозрительных участка, EF длины 1 и AB длины 2. Взвесим FF' ? $A'B'$, где F', A', B' – соседи монет F, A, B по часовой. При равенстве подозрительная пара $A'B$, при неравенстве $<$ имеем $EF = 1n$ либо $A'B = n1$, при неравенстве $>$ имеем $EF = n1$ либо $AA' = 1n$. Во всех случаях после k испытаний остаются подозрительными два расположения противоположного направления, ввиду нечётности общего числа монет у них есть общая монета.

Способ 2. Мы будем задавать расположение монет границей между монетами 1 и n — назовём её *началом* — и *направлением*, в котором монеты возрастают (по или против часовой стрелки). Для различных монет A и B назовём *дугой* AB множество границ между монетами от A до B против часовой стрелки, а *размером* дуги — количество границ в ней.

Как и выше, считаем, что $k > 1$. Объясним, как при $n = 3^k$ найти вес одной монеты.

Докажем, что при нечётном количестве монет у двух разных расположений монет есть общая монета тогда и только тогда, когда у них разное направление. Очевидно, что если направление одинаковое, то общих монет нет. Если направления разные, то начала этих расположений разбивают монеты на две группы (одна из групп может быть пустой, если начала совпадают), в одной из этих групп будет нечётное количество монет, и средняя монеты этой группы является общей для двух расположений. (Приведём также более концептуальное доказательство этого факта, которое вы можете пропустить без ущерба для понимания дальнейшего решения. Рассмотрим движение, которое переводит одно расположение монет в другое. Поскольку это меняющее ориентацию движение плоскости с неподвижной точкой, это симметрия. Но любая ось симметрии правильного n-угольника для нечётного n проходит через вершину).

Таким образом, достаточно показать, как при $n = 3^k$ за k взвешиваний установить, что расположение — одно из двух с различными направлениями.

Лемма 1. Пусть дуги AB и CD не пересекаются и имеют размеры 3^l. Пусть про расположение монет известно, что либо его начало на дуге AB, а направление — против часовой стрелки, либо начало на дуге CD, а направление — по часовой стрелке. Тогда за l взвешиваний можно найти вес одной монеты.

Доказательство. Докажем лемму по индукции. База индукции для $l = 0$ очевидна, перейдём к шагу. Пусть лемма доказана для $l - 1$, докажем для l. Разделим дугу AB на равные дуги (размерами 3^{l-1}) монетами K и L, а дугу CD — монетами M и N. Положим на левую чашу весов монеты A, B, C и D, а на правую — монеты K, L, M и N. Заметим, что, если начало лежит вне дуги AB или на дуге KL, то сумма масс монет A и B равна сумме масс монет K и L, аналогично для другой четвёрки монет. Теперь разберём исходы взвешиваний:

- Если чаши уравновесились, то либо начало на дуге KL, а направление — против часовой стрелке, либо начало на дуге MN, а направление — по часовой стрелке.
- Если левая чаша легче правой, то либо начало на LB, а направление — против часовой стрелки, либо начало на CM, а направление — по часовой стрелке.
- Третий случай разбирается аналогично второму.

Таким образом, все случаи сводятся к предположению индукции и лемма доказана.

Лемма 2. Пусть начало лежит на дуге AB размера 3^l, а направление неизвестно. Тогда найти вес одной монеты можно за l взвешиваний.

Доказательство. Докажем лемму по индукции, база для $l = 0$ очевидна, перейдём к шагу. Разделим дугу AB на три равные дуги монетами M и N. Положим монеты A и B на левую чашу, а M и N — на правую. Разберём случаи:

- Если чаши уравновесились, начало лежит на дуге MN и направление неизвестно, так что утверждение сводится к предположению индукции.
- Если левая чаша легче правой, то либо начало на NB и направление — против часовой стрелки, либо начало на AM, а направление — по часовой стрелке. Таким образом, ситуация сводится к лемме 1 для $l - 1$.
- Оставшийся случай разбирается аналогично предыдущему.

Перейдём к доказательству основного утверждения для круга из 3^k монет. Выберем монеты A, B, C и D так,что дуга BC имеет размер 3^{k-2}, дуги AB и CD — 3^{k-1}, а DA — $2 \cdot 3^{k-2}$ (напомним, что у нас $k \geq 2$). Положим на левую чашу монеты A и D, а на правую — B и C. Разберём возможные результаты взвешиваний:

- Неравенство сводится к лемме 1 для дуг AB и CD.
- Равенство разбирается несколько сложнее. Выберем монету E, которая делит дугу DA пополам. Положим на одну чашу монеты C и D, а на другую — E и B. Равенство сведётся к лемме 2, а неравенство — к лемме 1.

Более подробный разбор завершения решения оставим читателю.

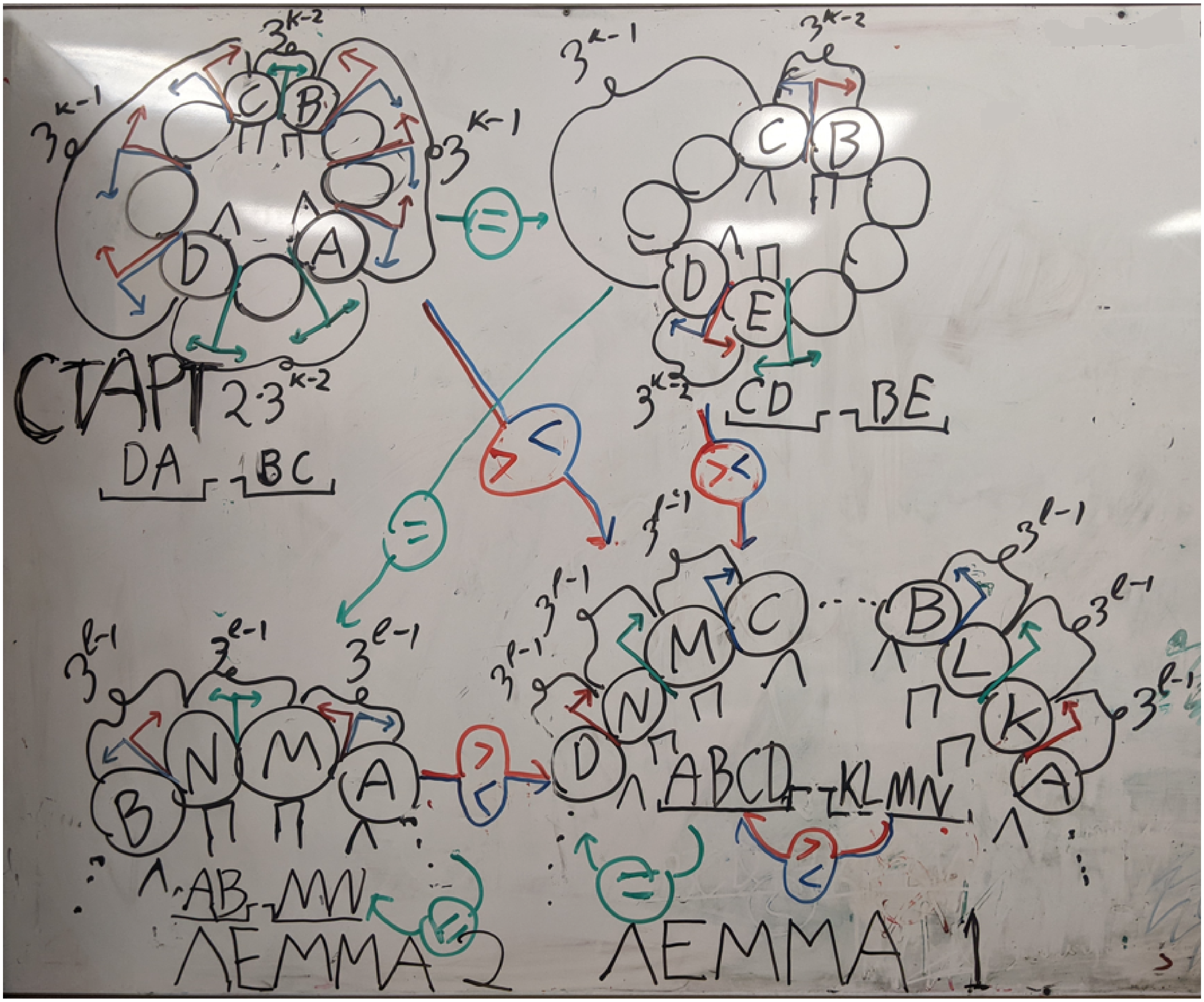


Рис. 1. Синими углами со стрелочками между монетами обозначены начало и направление ситуации, которая будет, если левая чаша легче, красными — если правая легче, зелеными — если они равны. Соответственно, все стрелочки обозначают ситуации, возможные до очередного взвешивания. «П» и «Л» указывают на монеты, которые надо положить на правую и левую чашу весов соответственно.

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 1 марта 2026 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

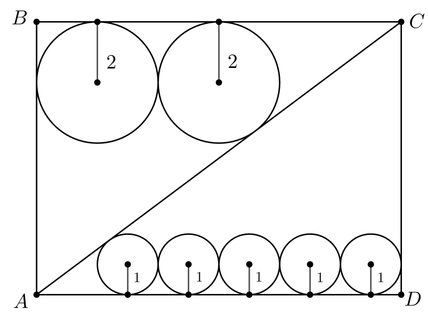
4 **1.** Коля выписал на доске число $111\ldots111$ (60 единиц). Оля выбрала какие-то 30 подряд стоящих единиц и заменила каждую из них на восьмёрку. Докажите, что полученное 60-значное число делится на $999\ldots999$ (30 девяток).

Михаил Мурашкин

4 **2.** Учитель дал 30 ученикам тест из 10 вопросов, в котором на каждый вопрос есть ровно один правильный ответ. Каждый ученик на пять вопросов ответил правильно, а в пяти ошибся. Оказалось, что никакие два неправильных ответа учеников на один и тот же вопрос не совпали. Какое наименьшее число работ необходимо посмотреть, чтобы мы гарантированно смогли выбрать 5 вопросов и указать правильный ответ к каждому из них?

Татьяна Казицына

5 **3.** В прямоугольнике $ABCD$ расположены 7 кругов. Два круга радиуса 2 касаются друг друга и стороны BC, причём один из них касается ещё и стороны AB, а другой — диагонали AC. Остальные 5 кругов имеют радиус 1 и все касаются стороны AD, образуя цепочку: соседние круги касаются друг друга, причём один из крайних кругов цепочки касается ещё и стороны CD, а другой — диагонали AC. Найдите длины сторон прямоугольника $ABCD$.



Михаил Евдокимов

4. В каждой клетке доски $N \times N$ стоит по шкатулке. В одной из них лежит приз. Пустая шкатулка весит 100 грамм, а вес шкатулки с призом равен суммарному весу всех шкатулок в соседних с ней по стороне клетках. У ведущего есть двухчашечные весы без гирь, на каждую чашу помещается сколько угодно шкатулок. За одну попытку можно указать ведущему, какие шкатулки положить на какую чашу (а какие не взвешивать), и он сообщит результат: будут ли весы в равновесии, а если нет — какая чаша перевесит. За какое наименьшее количество попыток можно гарантированно узнать, сколько весит приз, если

2 а) $N = 4$;

3 б) $N = 7$?

(Узнавать, в какой именно шкатулке лежит приз, не требуется.)

Михаил Евдокимов, Александр Грибалко

5 **5.** На спортивном параде выстроились по кругу 2026 спортсменов, занумерованных подряд числами от 1 до 2026 по часовой стрелке. Каждый спортсмен смотрел на соседа справа или соседа слева. Известно, что было ровно 100 пар соседей, смотрящих друг на друга. Затем каждый спортсмен с чётным номером повернулся и смотрит уже на другого соседа. Сколько теперь имеется пар соседей, смотрящих друг на друга?

Людмила Смирнова

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 1 марта 2026 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 **1.** Можно ли из последовательности точных квадратов $1, 4, 9, 16, \ldots$ выбрать такую бесконечную подпоследовательность, что разность любых двух её соседних членов — точный куб?

Михаил Евдокимов

4 **2.** Через вершину правильного тетраэдра проведена плоскость, касающаяся его вписанной сферы и отсекающая от противоположной грани треугольник. Докажите, что периметр этого треугольника не зависит от выбора плоскости.

Михаил Евдокимов

4 **3.** На спортивном параде выстроились по кругу 2026 спортсменов, занумерованных подряд числами от 1 до 2026 по часовой стрелке. Каждый спортсмен смотрел на соседа справа или соседа слева. Известно, что было ровно 100 пар соседей, смотрящих друг на друга. Затем каждый спортсмен с чётным номером повернулся и смотрит уже на другого соседа. Сколько теперь имеется пар соседей, смотрящих друг на друга?

Людмила Смирнова

5 **4.** Дан многочлен

$$*x^n + *x^{n-1} + \ldots + *x + *,$$

вместо каждого из $n+1$ его коэффициентов записана звёздочка. Играют двое, ходят по очереди, за ход выбирают любую звёздочку и заменяют её на любое целое ненулевое число. Когда звёздочек не останется, игрок, сделавший последний ход, выиграет, если у получившегося многочлена есть целый корень, иначе выиграет другой игрок. При каждом натуральном n выясните, кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник.

Александр Романов

5. Квадрат $N \times N$ разбит на N^2 единичных квадратов. Одна из вершин единичных квадратов радиоактивна. Имеется также прибор, который про любой из этих единичных квадратов определяет, есть ли среди его вершин радиоактивная. Найдите радиоактивную вершину за наименьшее число проверок, если

2 а) $N = 7$;

3 б) $N = 8$.

Рустэм Женодаров

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 15 марта 2026 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 **1.** Несколько человек участвовало в школьных соревнованиях по трём видам спорта: плавание, гонки на велосипеде и бег. Кроме обычного зачёта по каждому виду спорта присуждались дополнительные награды в трёх номинациях:

«Лучший пловец среди пяти лучших велосипедистов»;

«Лучший велосипедист среди пяти лучших бегунов»;

«Лучший бегун среди пяти лучших пловцов».

Кирилл хвастается, что завоевал все три дополнительные награды, хотя ни по одному виду спорта не вошёл в тройку лучших. Какое наименьшее количество человек могло участвовать в соревнованиях?

Иван Русских

6 **2.** Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с целыми ненулевыми коэффициентами a, b и c, имеющее целый корень. Может ли оказаться, что, какой бы из этих трёх коэффициентов ни увеличить на 1, снова получится квадратное уравнение, имеющее целый корень?

Михаил Евдокимов

6 **3.** Имеется 11 арбузов массами 1, 2, 3, …, 11 кг. Оля и Коля раскладывают арбузы в четыре пакета; каждый пакет выдерживает 14 кг, а от большей массы рвётся. Они по очереди выбирают любой арбуз и кладут его в любой из пакетов так, чтобы пакет не порвался. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Оля. Кто может гарантировать себе победу, как бы ни играл другой?

Людмила Смирнова

7 **4.** На сторонах AB и BC треугольника ABC с углом B, равным 45°, выбрали соответственно точки Q и P так, что угол BAP в три раза меньше угла A, а угол BCQ в три раза меньше угла C. Пусть M — точка пересечения отрезков AP и CQ. Описанные окружности треугольников BPM и BQM повторно пересекают стороны AB и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что из отрезков AN, AC и CK можно сложить треугольник, и найдите наибольший угол этого треугольника.

Михаил Евдокимов

8 **5.** Существует ли такое бесконечное множество S натуральных чисел, что для любых двух различных x и y из S найдётся z из S (не обязательно отличное от x и y), для которого $x^2+y^2+z^2$ будет точным квадратом?

Михаил Евдокимов

6.

5 а) Существует ли отличный от параллелограмма выпуклый четырёхугольник, который можно разрезать на любое количество равных выпуклых четырёхугольников от 2 до 100?

5 б) Существует ли выпуклый четырёхугольник, не имеющий ни центра, ни оси симметрии, который можно разрезать как на 2, так и на 47 равных выпуклых четырёхугольников?

Алексей Заславский

12 **7.** В каждой клетке одной из главных диагоналей доски 90×90 стоит конь. За какое наименьшее число ходов кони могут занять все клетки другой главной диагонали?

Александр Грибалко

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

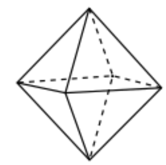
10 – 11 классы, сложный вариант, 15 марта 2026 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4

1. Каждую грань правильного октаэдра (см. рисунок) разбили средними линиями на правильные треугольники (всего получилось 32 одинаковых маленьких правильных треугольника). Какое наибольшее число этих треугольников можно закрасить так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих вершин?



Михаил Евдокимов

5

2. Имеется двести шариков ста цветов, по два шарика каждого цвета. Ведущий разложил их произвольным образом в сто коробочек, по два шарика в коробочку, где что лежит — игрок не знает. За ход игрок указывает на любые две коробочки, после чего ведущий незаметно для игрока выбирает по шарику из этих коробочек и меняет их местами. Если в какой-то момент в каждой коробочке будут лежать разноцветные шарики, игрок получит приз. Может ли игрок действовать так, чтобы гарантированно получить приз, как бы ведущий ни менял шарики?

Николай Чернятьев

6

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, L — точка пересечения его диагоналей. Описанная окружность треугольника ABD пересекает сторону BC в точке Y, а описанная окружность треугольника BCD пересекает сторону AB в точке X. Докажите, что углы XLA и YLC равны.

Фёдор Нилов

9

4. Назовём набор из k последовательных натуральных чисел *неудачным*, если невозможно у каждого из этих чисел выбрать по простому делителю так, чтобы среди выбранных делителей не было одинаковых. При каждом ли натуральном k количество неудачных наборов из k последовательных натуральных чисел конечно?

Юрий Богомолов, Александр Тертерян

10

5. Существует ли выпуклый пятиугольник со свойством: для каждой точки на его границе найдётся квадрат, вписанный в пятиугольник, и такой, что выбранная точка является одной из вершин квадрата? (Квадрат считается вписанным, если все его вершины лежат на границе пятиугольника.)

Егор Морозов

10

6. На клетчатой доске $2n\times 2n$ расставлены $2n$ ладей (n — натуральное число). Докажите, что можно выбрать либо n горизонталей, либо n вертикалей и снять все ладьи с выбранных n рядов так, что оставшиеся ладьи не будут бить друг друга.

Виталий Грибенник, Михаил Савватеев

12

7. Петя загадал многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. За один ход Вася может назвать любой многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, а в ответ Петя должен сообщить

• достигается ли максимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно;

• достигается ли минимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно.

Докажите, что Вася может последовательно задавать вопросы так, чтобы в какой-то момент он перестал их задавать и назвал такое число t, что $|P(2026)-t|<10^{-100}$.

Леонид Шатунов