Емилија Целакоска
Скопје

АНАЛОГИИ И ОБОПШТУВАЊА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

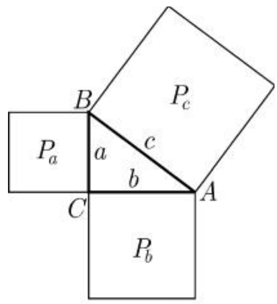
Питагоровата теорема е една од најпознатите теореми во математиката. За неа се знаело уште пред 2500 години и таа досега има повеќе од 300 докази. Да се потсетиме на неа.

Нека е даден правоаголен ΔABC со должини на страните a, b (на катетите) и c (на хипотенузата). Нека P_a, P_b, P_c се плоштините на квадратите конструирани над страните на триаголникот. (црт.1). Питагоровата теорема тврди дека **квадратот на хипотенузата има плоштина што е еднаква со збирот од плоштините на квадратите над катетите**, или покусо запишано:

$$P_c = P_a + P_b \qquad (1)$$

т.е.

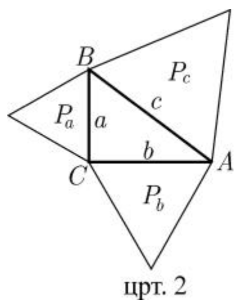
$$c^2 = a^2 + b^2 . \qquad (2)$$



црт. 1

1. Аналогија со правилни n - аголници

Можеме да си го поставиме следното прашање. Ако над страните од правоаголниот триаголник, наместо квадрати конструираме рамнострани триаголници (црт. 2), и ако P_a, P_b, P_c се нивните плоштини, дали и во тој случај ќе важи равенството (1)?

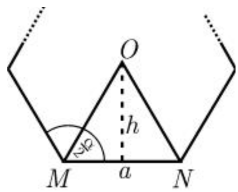


црт. 2

Без тешкотии се добива потврден одговор. Имено, знаеме дека за a, b и c равенството (2) е точно. Ако ги помножиме левата и десната страна со $\frac{\sqrt{3}}{4}$, ќе добиеме пак точно равенство $\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, а ова е равенството

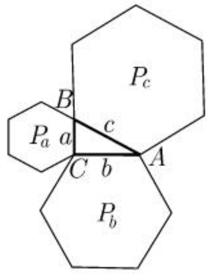
(1): $P_c = P_a + P_b$ каде што P_a, P_b, P_c сега се плоштините на рамностраните триаголници конструирани над катетите и хипотенузата.

Аналогно, ако над страните од правоаголниот ΔABC конструираме правилни шестаголници (црт. 4) и ако се потсетиме дека плоштината на правилен шестаголник со страна a се пресметува со формулата $P_a = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, тогаш, со помош на (2), лесно ќе заклучиме дека важи равенството (1).



црт. 3

Дали (1) ќе важи и кога се плоштини на правилни *n*-аголници конструирани над страните на правоаголниот ΔABC (за фиксен $n \geq 3$)?



црт. 4

Да се потсетиме дека за еден n - аголник велиме дека е **правилен** ако сите негови страни се меѓусебно еднакви и сите негови агли се меѓусебно еднакви. За правилен n - аголник знаеме дека:

- сите негови темиња се еднакво оддалечени од една негова внатрешна точка O, т.е. сите лежат на кружница со центар O;
- ако M и N се две соседни темиња, тогаш ΔOMN е рамнокрак триаголник (црт. 3) и тој се вика карактеристичен триаголник за дадениот правилен n -

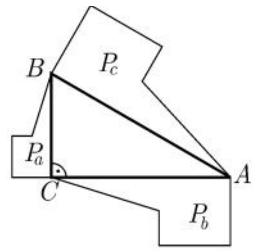
аголник;

- правилниот n - аголник е составен од n такви триаголници;
- висината h на карактеристичниот триаголник (со основа a) се пресметува со формулата $h = \frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$;
- плоштината P_a на правилен n - аголник со страна a се пресметува по формулата $P_a = n\frac{ah}{2} = \frac{na^2}{4}\sin\frac{\alpha}{2}$;
- кои било два правилни n - аголници (за ист n) се слични и нивните плоштини се однесуваат како квадратите од нивните страни.

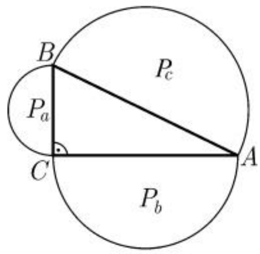
Знаејќи ја формулата за пресметување плоштина на правилен n - аголник, на ист начин како во претходните специјални случаи ($n = 3$ и $n = 6$)

ќе дојдеме до заклучокот дека важи (1): $P_c = P_a + P_b$ каде што P_a, P_b, P_c се плоштините на конструираните правилни *n*-аголници над страните a, b и c на ΔABC , соодветно.

Како што спомнавме веќе, кои било два истоимени правилни многуаголници се слични. (На пример кои било два правилни петаголници се слични.) Трите правилни многуаголници што ги конструираме над страните од правоаголниот триаголник се слични меѓу себе и за нив важи формулата (1), т.е. Питагоровата теорема. Затоа се наметнува прашањето: Дали таа важи и за кои било многуаголници (или уште повеќе: кои било геометриски ликови) конструирани над страните на правоаголниот триаголник, што се слични меѓу себе, како на пример оние на црт. 5 и црт. 6? Одговорот е потврден. За проблемот на црт. 5 разгледај ја задачата 2.



црт. 5

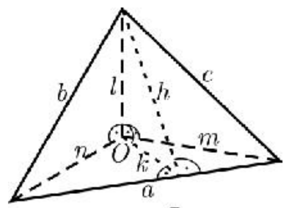


црт. 6

2. Стереометриска аналогија на Питагоровата теорема

Питагоровата теоема може да се разгледува како решение на следнава задача. Во триаголник со прав агол при темето *O*, дадени се должините *a* и *b* на страните чијашто заедничка точка е темето *O*; треба да се најде должината на страната што лежи спроти точката *O*. Аналогна задача во простор може да се формулира на следниот начин. Во тетраедар со право трисидно ќоше со теме *O*, дадени се плоштините *A*, *B* и *C* на трите ѕида, чијашто заедничка точка е темето *O*. Да се најде плоштината *S* на ѕидот што лежи спроти точката *O*.

Значи треба да ја изразиме *S* со помош на *A*, *B* и *C*. За таа цел ќе ги користиме ознаките од црт.7, на кој е претставен тетраедар со правоаголно ќоше во темето *O*.



црт. 7

Плоштината *S* можеме да ја изразиме со вообичаената формула $S = \frac{ah}{2}$, каде што *a* е основата, а *h* е висината на триаголникот. Имајќи го предвид црт.7 ги добиваме следниве равенства:

$$S=\frac{ah}{2};\ h^2=k^2+l^2;\ \ A=\frac{ak}{2};\ a^2=m^2+n^2;\ \ b^2=n^2+l^2;$$

$$c^2=l^2+m^2;\ \ A=\frac{mn}{2};\ B=\frac{nl}{2};\ C=\frac{lm}{2}.$$

Ќе тргнеме од $S=\frac{ah}{2}$, т.е од $4S^2=a^2h^2$ и ќе ги користиме горните равенства. Имаме:

$$\begin{aligned}4S^2&=a^2h^2=a^2(k^2+l^2)=4A^2+a^2l^2=4A^2+(n^2+m^2)l^2\\&=4A^2+(nl)^2+(ml)^2\\&=4A^2+4B^2+4C^2.\end{aligned}$$

Кратејќи со 4 го добиваме равенството $S^2=A^2+B^2+C^2$.

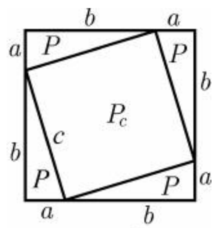
Резултатот што го добивме е аналоген со Питагоровата теорема, т.е. на формулата (2). (Да забележиме дека аналогна формула на (2) може да изгледа и $S^3=A^3+B^3+C^3$, но таа не е точна.)

3. Обопштување со напуштање на правиот агол

Равенството (2) е еквивалентно со равенството $c^2+2ab=a^2+b^2+2ab$, т.е. со $(a+b)^2=c^2+2ab$. Оттука е јасно дека Питагоровата теорема е еквивалентна со равенството

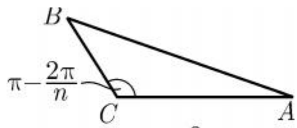
$$P_{a+b}=P_c+4P\,, \qquad (3)$$

каде што $P=\frac{ab}{2}$ е плоштината на дадениот правоаголен ΔABC. На тој факт се темели еден од најпростите и најпопуларните докази на Питагоровата теорема, покажан на црт. 8. Со зборови, равенството (3) можеме да го искажеме на следниот начин. **Плоштината на квадратот „издигнат“ над збирот од катетите од еден правоаголен триаголник е еднаков со збирот од четири плоштини на триаголникот и плоштината на квадратот над хипотенузата.**

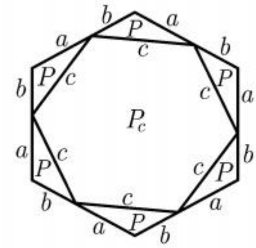


црт. 8

Да забележиме дека квадратот (со страна $a+b$) има темиња кои се совпаѓаат со темињата при правиот агол на четирите складни правоаголни триаголници. Правиот агол, изразен во радијани, изнесува $\frac{\pi}{2}$, т.е. $\frac{2\pi}{4}$ (па и $\pi-\frac{2\pi}{4}$) . Да разгледаме сега триаголник кој наместо прав агол при едно теме има агол еднаков на $\pi-\frac{2\pi}{n}$, за фиксен $n\geq 3$. Нека е даден ΔABC со должини на страните a, b и c и плоштина P, така што аголот при C да е еднаков на $\gamma=\pi-\frac{2\pi}{n}$ за фиксирано $n\geq 3$ (црт. 9).



црт. 9



црт. 10

Да поставиме ист таков триаголник до ΔABC така што страната a од едниот и страната b од другиот да формираат отсечка со должина $a+b$ слично како на црт. 8. На црт. 10 тоа е покажано за $n=6$. Очигледно е дека на овој начин се формира правилен n -аголник чија плоштина е збир од плоштините на правилниот n - аголник со страна c впишан во правилниот n-аголник со страна $a+b$ и n триаголници складни со дадениот ΔABC. Значи, добиваме формула слична на (3):

$$P_{a+b}=P_c+nP\,, \tag{4}$$

каде што, сега, P_{a+b} е плоштината на n-аголникот со страна $a+b$, а P_c е плоштината на правилниот n - аголник со страна c. За да добиеме формула слична на (2), згодно е да размислуваме геометриски: можеме да ја смениме мерната единица за плоштина. Обично, плоштина се мери во квадратни единици, но ние сега ќе мериме плоштина во “правилно-n-аголни единици”. Имено, ако означиме дека еден правилен n-аголник со страна 1 има плоштина 1, тогаш правилен n-аголник со страна x има плоштина x^2. (Во тоа можеш сам да се увериш ако го искористиш последното од наведените својства за правилен n-аголник. Ова е најочигледно кај рамностраниот триаголник, но обиди се да го потврдиш и кај шестаголник, на пример.)

Да ги означиме плоштините со нови ознаки според новата мерна единица. P ќе стане S, итн. соодветно. Тогаш (4) нема да ја смени формата и ќе биде $S_{a+b} = S_c + nS$. Добиваме : $(a+b)^2 = c^2 + nS$, т.е

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - nS \,, \tag{5}$$

а соодветно со нашата нова мерна единица сега можеме да запишеме

$$S_c = S_a + S_b + 2ab - nS \,. \tag{6}$$

Формулата (5) е аналогна со формулата (2), а формулата (6) е аналогна со формулата (1). Се рабира, доколку меревме во квадратни единици, (на сличен начин како во делот 1 со црт.3) ќе добиевме дека правилен n-аголник со страна x има плоштина $P_x = \frac{nx^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, па оттука имаме дека $P_x : S_x = \frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$. Плоштината на ΔABC е $P = \frac{ab}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = S\frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, од каде што следува дека

$$S = \frac{4ab}{n}\sin^2\frac{\pi}{n} \,. \tag{7}$$

Ако S од (7) се замени во (5) ќе се добие

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \frac{2\pi}{n}) \,, \tag{8}$$

а тоа е косинусната теорема за нашиот ΔABC со агол $\gamma = \pi - \frac{2\pi}{n}$. За $n = 4$ формулата (8) се сведува на (2), што значи дека (8) е обопштување на Питагоровата теорема.

Неколку задачи:

1. Над секоја од страните на еден правоаголен ΔABC нацртај по еден триаголник, така што тие триаголници да се слични меѓу себе. Докажи дека плоштината P_c на триаголникот над хипотенузата c е еднаква со збирот на плоштините P_a, P_b на триаголниците над катетите a и b.

Помош. Искористи го својството: Плоштините на два слични триаголници се однесуваат како квадратите од нивните соодветни страни: $P_a : P_b = a^2 : b^2$; $(P_a + P_b) : P_b = (a^2 + b^2) : b^2$, итн.

2. Реши го проблемот во врска со црт. 5, т.е докажи ја точноста на равенството (1).

Помош. Секој многуаголник може да се разбие на конечно многу триаголници. Потоа примени го резултатот од задача 1.

3. Покажи дека плоштината на полукругот над хипотенузата е еднаква со збирот на плоштините на полукруговите над катетите. (црт. 6)

4. Детално образложи како се добиваат формулите при крајот на делот 3:

а) $P_x = \frac{nx^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$; **б)** $P = \frac{ab}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$; **в)** $P = S\frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$;

г) $S = \frac{4ab}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}$; **д)** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \frac{2\pi}{n})$.

Литература

1. Г. Поја: *Математическое открìитие*, Москва 1976
2. Darko Veljan: *An Analogue of the Pythagorean Theorem*, El. Math. *51* (1996)
3. *Understanding the Pythagorean Relationship Using Interactive Figures*, National Council of Teachers of Mathematics, based on an idea provided by Colette Laborde

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија