

І ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2014

IV одделение

1. Мира од Тони добила 126 денари во монети и 470 денари во банкноти. Колку денари имала Мира на почетокот, ако сега има 798 денари?

Решение. Имаме: $798 - (126 + 470) = 798 - 596 = 202$ денари.

2. Пресметај го збирот на 3 броеви, ако првиот број е 484 и секој следен е 2 пати помал од предходниот.

Решение. Првиот број е 484, вториот број е $484 : 2 = 242$ и третиот број е $242 : 2 = 121$. Бараниот збир е: $484 + 242 + 121 = 847$.

3. Цифрите на бројот 44444 меѓусебно поврзи ги со знаците на основните математички операции, за да добиениот резултат е 19.

Решение. Едно решение е: $4 \cdot 4 + 4 - 4 : 4 = 16 + 4 - 1 = 19$.

4. Во една книжарница има 414 пенкала. Моливи има 2 пати повеќе, а фломастери 3 пати помалку отколку пенкала. Колку вкупно моливи и фломастери има во книжарницата?

Решение. Според условот на задачата имаме: пенкала се 414, моливи се $414 \cdot 2 = 828$ и фломастери се $414 : 3 = 138$. Според тоа, вкупно моливи и фломастери се $828 + 138 = 966$.

V одделение

1. Во една кутија имало повеќе од 50 и помалку од 60 пенкала. Од кутијата се извадени онолку пенкала колку што е збирот на цифрите на бројот на пенкалата што биле претходно во кутијата. Колку пенкала останале во кутијата?

Решение. Нека во кутијата на почеток имало $\overline{5b}$ пенкала. Тогаш останале

$$\overline{5b} - (5 + b) = 50 + b - 5 - b = 45 \text{ пенкала.}$$

2. Замислив еден број. Ако на тој број му додадам 33697, а потоа од добиениот број одземам 11245, ќе го добијам бројот 91152. Кој број го замислив?

Решение. Ако го замислив бројот x , од условот имаме

$$(x + 33697) - 11245 = 91152,$$

$$x + 33697 - 11245 = 91152,$$

$$x + 22452 = 91152,$$

$$x = 68700,$$

што значи бројот кој го замислив е 68700.

3. Даден е правоаголникот $ABCD$. Должината \overline{AB} е два пати поголема од ширината \overline{BC} . Ако точката P е средина на отсечката \overline{AB} , тогаш отсечката \overline{PD} го дели правоаголникот на четириаголник и триаголник чии периметри се разликуваат за 150 cm . Колкав е периметарот на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$. Од условот

$$L_{APDC} - L_{PBD} = 150.$$

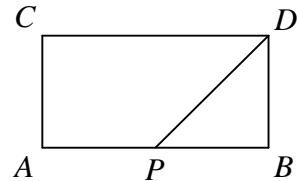
Ако замениме во горната равенка, добиваме

$$\left(\frac{a}{2} + a + b + \overline{PD}\right) - \left(\frac{a}{2} + b + \overline{PD}\right) = 150$$

$$\frac{a}{2} + a + b + \overline{PD} - \frac{a}{2} - b - \overline{PD} = 150$$

$$a = 150.$$

Должината е два пати поголема од ширината, па затоа $b = 75$. Конечно, периметарот на правоаголникот е $L = 2(a + b) = 2 \cdot 225 = 550 \text{ cm}$.



4. Во едно училиште на секои две момчиња има три девојчиња, а на секои 10 момчиња има еден наставник. Колку ученици и колку наставници има во училиштето, ако нивниот вкупен број е 312?

Решение. Според условот на задачата на секои $5 \cdot 3 = 15$ девојчиња има $5 \cdot 2 = 10$ момчиња и 1 наставник. Значи, на секои 25 ученици има 1 наставник. Бидејќи $312 = 26 \cdot 12$, бројот на ученици е $25 \cdot 12 = 300$, а бројот на наставници е $312 - 300 = 12$.

VI одделение

1. Аглите α и β се комплементни и аголот α е двапати поголем од аголот β . Колку е аголот α , а колку е аголот β ?

Решение. Според условот на задачата аглите α и β се комплементни, па затоа $\alpha + \beta = 90^\circ$ и уште $\alpha = 2\beta$, од каде добиваме дека $2\beta + \beta = 90^\circ$. Според тоа, $3\beta = 90^\circ$, односно $\beta = 30^\circ$ и оттука $\alpha = 60^\circ$.

2. На таблата е запишан бројот 147147147147. Избришани се цифри и добиен е најмалиот број делив со 9. Кој е тој број?

Решение. Ниту една од употребените цифри не е делива со девет, па затоа бројот не е едноцифрен. Бројот не може да е ниту двоцифрен (збирот на било кои две од цифрите не е број делив со 9), па останува да го најдеме најмалиот трицифрен број делив со 9. Трицифрени броеви деливи со 9 се и запишани со цифрите 1, 4 и 7 се: 117, 144, 477 и сите други броеви запишани со истите цифри, но во различни распореди како овие три. Најмал од овие броеви е 117.

3. Плоштината на еден квадрат е 25 cm^2 . Неговата страна е зголемена двапати. Колкави се плоштината и периметарот на новодобиениот квадрат?

Решение. Бидејќи $P = a^2 = 25$, страната на квадратот е $a = 5 \text{ cm}$. Кога страната на квадратот ќе ја зголемиме двапати, се добива дека страната на новиот квадрат е $b = 10 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на новодобиениот квадрат е $L = 4b = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$, а неговата плоштина е $P = b^2 = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$.

4. Ако меѓу цифрите на еден двоцифрен број запишан со исти цифри се допишат две нули, добиениот број е 91 пати поголем од почетниот двоцифрен број. Докажи!

Решение. Нека \overline{aa} е двоцифрениот број запишан со исти цифри. Него можеме да го запишеме во облик $\overline{aa} = 11a$. Ако меѓу цифрите на бројот запишеме две нули, се добива бројот $\overline{a00a}$. Него можеме да го запишеме во облик $\overline{a00a} = 1001a$. Сега,

$$\overline{a00a} : \overline{aa} = 1001a : 11a = 1001 : 11 = 91$$

што требаше да се докаже.

VII одделение

1. Бојан запишал на табла два броја. Потоа Марко го запишал нивниот збир. Бојан ги собрал трите претходни броја и го запишал нивниот збир. Одреди го збирот на сите четири броеви, ако знаеш дека Марко го запишал бројот 5.

Решение. Да ги означиме броевите со a и b . Од условот на задачата следува дека $a + b = 5$. Значи на таблата се запишани следните четири броеви: $a, b, a + b, a + b + (a + b)$, односно бараниот збир е

$$a + b + (a + b) + (a + b + (a + b)) = 20.$$

2. Локална продавница продава кошули со 40% попуст. Продажната цена на една кошула со овој попуст е 12 евра. Пресметај ја продажната цена пред попустот и вредноста на попустот?

Решение. Да забележиме дека продажната цена е 60% од продажната цена пред попустот. Последново може да го запишеме во равенка од облик $12 = 0,6x$. Решението на последната равенка е 20 евра. Оттука, попустот е 8 евра.

3. Пет рибари јадат пет риби за пет дена. За колку дена десет рибари ќе изедат десет риби?

Решение. Ако пет рибари јадат пет риби за пет дена, тогаш другите пет рибари јадат пет риби за пет дена. Значи, десет рибари за пет дена ќе изедат десет риби.

4. Дадени се два еднакви квадрати со плоштина од 100 cm^2 . Страната на едниот квадрат се зголемила за 2 cm , а периметарот на другиот квадрат за 16 cm . Кој од добиените квадрати ќе има поголема плоштина и за колку?

Решение. Ако плоштината на дадените квадрати е 100 cm^2 , тогаш нивните страни се по 10 cm . Должината на страната на едниот од добиените квадрати е 12 cm . Ако периметарот на другиот квадрат се зголемил за 16 cm , тогаш неговата страна се зголемила за $16 : 4 = 4 \text{ cm}$. Неговата страна е 14 cm .

Плоштината на првиот квадрат е $P_1 = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$, а плоштината на другиот квадрат е $P_2 = 14 \cdot 14 = 196 \text{ cm}^2$. Разликата на нивните плоштини е

$$P_2 - P_1 = 196 - 144 = 52 \text{ cm}^2.$$

VIII одделение

1. Покажи дека вредноста на изразот

$$(3x^2 - 2x + 5) + (-x^2 - 2x + 1) + (-2x^2 + 4x - 2)$$

не зависи од x .

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(3x^2 - 2x + 5) + (-x^2 - 2x + 1) + (-2x^2 + 4x - 2) &= \\ &= 3x^2 - 2x + 5 - x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 4x - 2 = 4.\end{aligned}$$

2. Арабела е 7 пати постара од Хелга. После 5 години збирот на нивните години ќе биде 98. Колку години има сега Хелга?

Решение. Нека Хелга има x години. Тогаш Арабела има $7x$ години. Според тоа,

$$x + 5 + 7x + 5 = 98.$$

Решението на последнава равенка е $x = 11$.

3. Во тетивниот четириаголник $ABCD$ (A и C се спротивни темиња), даден е аголот при темето $\sphericalangle A = 75^\circ$ и $\sphericalangle C = \frac{3}{4}\sphericalangle B$. Определи го аголот кај темето D ?

Решение. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па затоа $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$. Значи, $\sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle A$, т.е. $\sphericalangle C = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Од $\sphericalangle C = \frac{3}{4}\sphericalangle B$ имаме $\sphericalangle B = \frac{4}{3}\sphericalangle C = \frac{4}{3} \cdot 105^\circ = 140^\circ$. Конечно, $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$, па затоа $\sphericalangle D = 180^\circ - \sphericalangle B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

4. Нека a, b, c, d, e се пет различни цели броеви за кои важи:

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12.$$

Докажи дека $a + b + c + d + e = 17$.

Решение. Според условот на задачата броевите $4-a, 4-b, 4-c, 4-d, 4-e$ се цели и различни меѓу себе. Лесно се забележува дека броевите $-1, 1, 2, -2, 3$ се единствените пет различни меѓу себе цели броеви чиј производ е 12. Оттука добиваме дека

$$(4-a) + (4-b) + (4-c) + (4-d) + (4-e) = -1 + 1 + 2 - 2 + 3 = 3,$$

од што следува дека $a + b + c + d + e = 17$.

VIII одделение осмолетка

1. Една работа двајца работници можат да ја завршат за 24 часа. По 10 часа заедничко работење едниот работник се разболел и престанал да работи, а другиот преостанатиот дел од работата сам го завршил за 35 часа. За колку часа би ја завршил работата секој работник сам?

Решение. Нека првиот, вториот работник може да ја заврши работата за x , y часа, соодветно. Тогаш за еден час првиот, вториот би завршил $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ дел од работата, соодветно. Од условите на задачата следува

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \\ 1 - \frac{10}{24} = \frac{35}{y} \end{cases}$$

од каде добиваме дека $x = 40h$, $y = 60h$.

2. Во трапезот $ABCD$ краците се продолжени до меѓусебниот пресек во точката O .

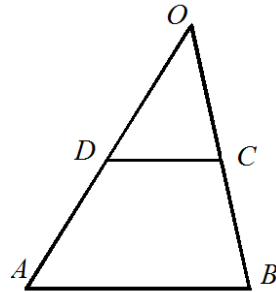
а) Одреди ја должината на отсечката CO ако $\overline{AD} = 5cm$, $\overline{BC} = 4cm$ и $\overline{DO} = 3cm$.

б) Пократката основа на трапезот е $3cm$, одреди ја должината на подолгата основа.

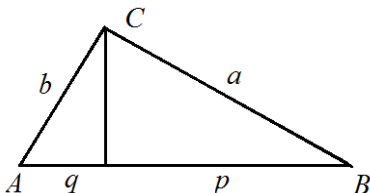
Решение. а) Од Талесовата теорема за пропорционални отсечки следува дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CO}}$, од каде

добиваме дека $\overline{CO} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DO}}{\overline{AD}} = 2,4cm$.

б) Од $\overline{DC} = 3cm$ и $\frac{\overline{AD} + \overline{DO}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}$, следува дека $\overline{AB} = \frac{(\overline{AD} + \overline{DO}) \cdot \overline{DC}}{\overline{DO}} = 8cm$.



3. Катетите на правоаголен триаголник се однесуваат како $3:7$, а висината ја дели хипотенузата на отсечки, од кои едната е за $2cm$ подолга од другата. Одреди ја должината на хипотенузата.



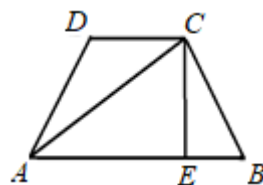
Решение. Нека $b:a = 3:7$. Тогаш можеме да запишеме дека $a = 7k$ и $b = 3k$, за некој реален број k . Тогаш за должината на хипотенузата, од Питагоровата теорема, добиваме $c = k\sqrt{58}$.

Нека хипотенузата, со висината, е поделена на отсечки со должини p и q (види цртеж). Јасно е дека $p > q$.

Од Евклидовата теорема знаеме дека важи $a^2 = pc, b^2 = qc$, од каде што добиваме дека $p = \frac{a^2}{c}, q = \frac{b^2}{c}$. Од условот на задачата имаме дека важи $p - q = 2$ и изразувајќи се преку k , ја добиваме равенката $\frac{49k}{\sqrt{58}} - \frac{9k}{\sqrt{58}} = 2$. Со нејзино решавање се добива $k = \frac{\sqrt{58}}{20}$ и конечно $c = \frac{58}{20} = 2,9 \text{ cm}$.

4. Дијагоналата на рамнокрак трапез има должина 6 cm и со поголемата основа зафаќа агол од 45° . Определи ја плоштината на трапезот.

Решение. Ќе повлечеме висина CE . Да забележиме дека $\triangle AEC$ е рамнокрак правоаголен. При тоа $\overline{AE} = \frac{a+b}{2}$ и $\overline{CE} = h$. Бидејќи $\overline{AE} = \overline{CE}$, доби-



ваме дека $\frac{a+b}{2} = h$. Плоштината на трапезот е еднаква плоштината на квадрат со страна h . Бидејќи неговата дијагонала е $d = 6 \text{ cm}$, добиваме $P = \frac{d^2}{2} = \frac{6^2}{2} = 18 \text{ cm}^2$.