VIII ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2021

Во секое одделение задачите од 1 – 5 се се вреднуваат најмногу со 6 поени, задачите од 5 – 8 се вреднуваат најмногу со 7 поени и задачите од 9 – 12 се вреднуваат најмногу со 12 поени.

IV одделение

1. Дадена е низа што расте, така што секој следен член се добива со додавање на истата константа на претходниот член. Збирот на три последователни членови е 60. Која е вредноста на средниот член?
   Решение. Нека првиот член е x, а c е константата. Тогаш,
   $$x+x+c+x+2c=60.$$
   Значи, $3(x+c)=60$, односно $x+c=20$ е средниот член.

2. Правоаголник, чија должина е два пати поголема од ширината, има периметар $60\,cm$. Која е вредноста на должината (во сантиметри)?
   Решение. Ако a е ширината, тогаш $2a$ е должината на правоаголникот. Според тоа, за периметарот имаме $2(a+2a)=60$, од каде добиваме $a=10\,cm$. Значи, должината на правоаголникот е $2a=20\,cm$.

3. Нека m е бројот на оските на симетрија на квадратот, а n е бројот на оските на симетрија на правоаголникот. Колку е $3m-2n$?
   Решение. Квадратот има 4 оски на симетреија, а правоаголникот има 2 оски на симетрија. Затоа $3m-2n=3\cdot 4-2\cdot 2=8$.

4. На бројот $\frac{1}{25}$ соодвествуваат $p\%$. Колку е p?
   Решение. Од $\frac{1}{25}=\frac{1\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{4}{100}=4\%$ следува $p=4$.

5. Познато е дека Миа и Ема заедно имаат 20 години, Миа и Теа заедно имаат 22 години, а Ема и Теа заедно имаат 24 години. Колку години има Теа?
   Решение. Во збирот збировите 20, 22 и 24 годините на секое од трите девојчиња се јавуваат по двапати. Затоа збирот $20+22+24=66$ е двапати поголем од збирот на годините на трите девојчиња. Според тоа, три-

те девојчиња заедно имаат $66:2=33$. Сега, бидејќи Миа и Ема заедно имаат 22 години, добиваме дека Теа има $33-20=13$ години.

6. Збирот на три последователни природни броеви е 21. Колку е разликата на најголемиот и најмалиот од тие броеви?

   Решение. Нека $a-1, a, a+1$ се трите последователни природни броеви. Тогаш $a-1+a+a+1=21$, од каде добиваме $a=7$. Значи, последователните броеви се 6, 7 и 8, па бараната разлика е $8-6=2$.

   Забелешка. Било кои три последователни природни броеви можеме да ги запишеме во облик $a, a+1, a+2$. Разликата меѓу најмалиот и најголемиот бод овие броеви е $a+2-a=2$. Значи, разликата меѓу најголемиот и најмалиот број не зависи од збирот на трите броја, т.е. задачата е предефинирана.

7. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$7\cdot((1-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7})).$$

   Решение. Имаме:

$$7\cdot((1-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}))=7\cdot(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7})=7\cdot(1-\tfrac{1}{7})=7\cdot\tfrac{6}{7}=6.$$

8. На кое место во низата непарни природни броеви се наоѓа бројот 111?

   Решение. Меѓу природните броеви кои се помали или еднакви на 112 има еднаков број парни и непарни природни броеви. Според тоа, има $112:56$ непарни броеви кои се помали или еднакви на 112. Најголем од овие броеви е бројот 111, што значи дека во низата непарни природни броеви бројот 111 се наоѓа на 56-то место.

9. Едниот пар спротивни страни на правоаголникот се $5x-2$ и $4x+4$, а другиот пар се $3y-5$ и $2y+1$. Колку е разликата на должината и ширината на правоаголникот?

   Решение. Од условот на задачата имаме $5x-2=4x+4$, од каде добиваме $x=6$. Аналогно, од $3y-5=2y+1$, од каде добиваме $y=6$. Значи, должините на страните на правоаголникот се $5\cdot6-2=28$ и $3\cdot6-5=13$ што значи дека бараната разлика е $28-13=15$.

10. Колку е збирот на првите сто природни броеви намален 50 пати?

   Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A &= 1+2+3+4+...+49+50+51+52+...+98+99+100 \\ &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(49+52)+(50+51) \\ &= 50\cdot 101, \end{aligned}$$

па затоа збирот на првите сто природни броеви намален 50 пати е еднаков на $50\cdot 101:50=101$.

11. Колку е производот на најмалиот природен број кој при делење со 5 дава остаток 2 и најмалиот природен број кој при делење со 7 дава остаток 3?
Решение. Најмалиот природен број кој при делење со 5 дава остаток 2 е бројот 2, а најмалиот природен број кој при делење со 7 дава остаток 3 е бројот 3. Значи, бараниот производ е $2\cdot 3=6$.

12. Збирот на мерните броеви на два агли е еднаков на разликата на мерните броеви на тие агли. Поголемиот од двата агли е еднаков на 52°. Колку е производот на мерните броеви на овие два агли?
Решение. Нека a е мерниот број на помалиот агол. Од условот следува $52+a=52-a$, од каде добиваме $a=0$. Значи, бараниот производ е еднаков на $52a=52\cdot 0=0$.
Забелешка. Ако x и a се мерните броеви на помалиот и поголемиот агол. Тогаш $x+a=x-a$ од каде добиваме $a=0$. Последното значи дека $xa=x\cdot 0=0$, што значи дека задачата е предефинирана, т.е. податокот дека поголемиот од двата агли има 52° не е потребен за да истата се реши.

V одделение

1. Колку е чекорот на низата кај која збирот на секои два последователни членови зе еднаков на 2020?
Решение. Ако првиот член на низата е a и чекорот е d, тогаш вториот член е $a+d$, а третиот член е $a+d+d=a+2d$. Од условот на задачата имаме $a+a+d=a+d+a+2d$, од каде добиваме $2a+d=2a+3d$, т.е. $d=0$. Сега, од $a+a+d=2020$ добиваме $2a=2020$, т.е. $a=1010$. Значи, низата е 1010, 1010, 1010, ...
Забелешка. Како што видовме за да најдеме дека $d=0$ користевме само дека збирот на секои два последователни членови е еднаков, но не и дека тој е 2020. Според тоа, оваа задача е предефинирана.

2. Средната вредност на пет последователни членови на една низа е 7. Колку е збирот на тие членови?

   Решение. Ако a е средниот од петте последователни членови на оваа низа и d е нејзиниот чекор, тогаш членовите на низата се $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$. Збирот на овие членови на низата е
$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=5a=5\cdot 7=35.$$

3. Кој е најмалиот број прави кои може да определат четири различни точки?

   Решение. Знаеме дека низ две различни точки минува една и само една права. Сега, најмалиот број прави определен со четири различни точки се добива ако и другите две точки припаѓаат на оваа права. Значи, четири различни точки може да определат најмалку една права.

4. Разликата меѓу аголот од 80° и непознатиот намалител изнесува колку вредноста на намалителот. Колку степени изнесува непознатиот агол?

   Решение. Ако мерниот број на непознатиот агол е a, тогаш $80^\circ - a = a$ од каде добиваме $a = 40^\circ$.

5. Квадрат со страна a и правоаголник со страни $2a-5$ и $a-3$ имаат еднакви периметри. Колку е разликата на нивните плоштини?

   Решение. Од условот на задачата следува равенката
$$4a = 2((2a-5)+(a-3)),$$
   т.е. $4a = 6a-16$, чие решение е $a=8$. Значи, долината на страната на квадратот е 8, а должините на страните на правоаголникот се 11 и 5. Конечно, различката на низните плоштини е $8\cdot 8-11\cdot 5=64-55=9$.

6. Две соседни страни на даден правоаголник се природни броеви со збир 10. Која е најголемата можна вредност на плоштината на тој правоаголник?

   Решение. Двете соседни страни на правоаголникот можат да се со должини: 1 и 9; 2 и 8; 3 и 7; 4 и 6; 5 и 5. Плоштините на овие правоаголници соодветно се: $1\cdot 9=9,\ 2\cdot 8=16,\ 3\cdot 7=21,\ 4\cdot 6=24,\ 5\cdot 5=25$. Значи, најголемата можна вредност за плоштината е 25.

7. Јордан требало да реши 80 задачи, но тој решил 100 задачи. За колку проценти Јордан решил повеќе задачи отколку што требало?

Решение. Јордан решил повеќе $100-80=20$ задачи. Според тоа, тој решил $\frac{20}{80}\cdot 100\%=25\%$ повеќе од предвидениот број задачи за решавање.

8. Колку најмногу прави може да определат четири различни точки?
   Решение. Знаеме дека низ две различни точки минува една и само една права. Според тоа, четири различни точки определуваат најмногу прави кога меѓу нив нема три точки кои што лежат на една права. Тоа е случај кога точките се темиња на четириаголник и тогаш тие определуваат 6 прави, 4 ги содржат страните на четириаголникот и 2 ги содржат неговите дијагонали.

9. За страните a, b, c, d на даден четириаголник важи:
   $$a+b+c=20,\ a+b+d=21,\ a+c+d=24,\ b+c+d=25.$$
   Колку е периметарот на овој четириаголник?
   Решение. Ако ги собереме дадените равенства, добиваме
   $$a+b+c+a+b+d+a+c+d+b+c+d=20+21+24+25$$
   $$3(a+b+c+d)=90,$$
   $$a+b+c+d=30.$$
   Значи, периметарот на четириаголникот е 30.

10. Броевите a и c имаат најголем можен остаток при делење со 7. Колку е остатокот на $a+c$ при делење со бројот 7.
   Решение. При делење со бројот 7 најголем можен остаток е 6. Значи, имаме $a=7x+6$ и $c=7y+6$, за некои природни броеви x и y. Според тоа,
   $$a+c=7x+6+7y+6=7x+7y+12=7(x+y+1)+5,$$
   што значи дека бараниот остаток е 5.

11. Баба му на Миле во кафез има зајаци и фазани. Таа му рекла на Миле дека во кафезот има 12 глави и 32 нозе. Колку фазани има во кафезот?
   Решение. *Прв начин*. Еден фазан има 2 нозе, а еден зајак има 4 нозе. Ако во кафезот има само фазани, тогаш треба да има $2\cdot 12=24$ нозе. Значи, во кафезот има $32-24=8$ нозе повеќе. Сега, бидејќи зајак има 2 повеќе од фазан, заклучуваме дека овие 8 нозе се на $8:2=4$ зајаци. Според тоа, во кафезот има 4 зајаци и $12-4=8$ фазани.
   Втор начин. Ако во кафезот има a зајаци, тогаш бројот на фазаните е $12-a$. Бидејќи еден фазан има 2 нозе, а еден зајак има 4 нозе добиваме

$4a+2(12-a)=32$, од каде наоѓаме $a=4$. Значи, во кафезот има 4 зајаци и 8 фазани.

12. Дедото Наце, вујкото Душко и внукот Петар едно јунско утро на езеро ловеле риби. Наце е заслужен за $\frac{3}{5}$ од вкупниот улов, Душко може да се пофали со 3 уловени риби, а Петар успеал да ја улови само најголемата риба. Колку риби тројцата заедно уловиле тоа утро?
Решение. Душко и Петар вкупно уловиле $3+1=4$ риби. Бидејќи Наце уловил $\frac{3}{5}$ од вкупниот улов, заклучуваме дека Душко и Петар уловиле $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ од вкупниот улов. Ако тројцата заедно уловиле x риби, тогаш $\frac{2}{5}x=4$, од каде добиваме $x=10$.

VI одделение

1. Во низата што расте и се добива со додавање на константа на секој претходен член, избришани се седум членови при што се добива: 2, __, __, 17, __, __, __, __, __, __, 47. Колку е разликата меѓу седмиот и четвртиот член?
Решение. Ако разликата на секои два соседни члена на низата е a, тогаш четвртиот член на низата е $2+3a$. Значи, $2+3a=17$, од каде добиваме $a=5$. Значи, низата е: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47 и разликата меу четвртиот и седмиот член на низата е $32-17=15$.

2. Точката A_1 е слика на точката $A(-2,4)$ при осна симетрија, во однос на симетралата на I и III квадрант. Колку е збирот од координатите на точката A_1?
Решение. При осна симетрија во однос на симетралата на I и III квадрант секоја точка $X(x,y)$ се пресликува во точка $X_1(y,x)$. Значи, сликата е $A_1(4,-2)$ и бараниот збир е 2.

3. Колку е збирот на внатрешните и надворешните агли кај произволен конвексен четириаголник?
Решение. Збирот на секој внатрешен и соодветниот надворешен агол кај конвексен четириаголник е еднаков на 180°.

Бидејќи имаме 4 вакви пара, бараниот збир е еднаков на $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

4. Истовремено се фрлаат зелена и црвена коцка за играње и се пресметува збирот на точките кои се појавиле на горните страни. Во колку случаи може да се добие збир 7?

   Решение. Начините за добивање на збир 7 се дадени во следнава табела:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

   Значи, збирот 7 може да се добие во 6 случаи.

5. Определи го бројот m на паровите последователни парни природни броеви кои се помали од 20 и чиј збир е содржател на бројот 4.

   Решение. Два последователни парни броја се од видот $2a$ и $2a+2$. Нивниот збир е $2a+2a+2=4a+2$, што значи дека при делење со 4 дава остаток 2. Според тоа, не постојат парови последователни парни броеви со саканото својство, т.е. $m=0$.

6. Средната вредност на пет броја запишани на таблата е 13. Милан запишал уште еден број, при што средната вредност на запишаните броеви не се променила. Кој е тој број?

   Решение. Збирот на петте запишани броја е $5 \cdot 13 = 65$. Ако Милан го запишал бројот x, тогаш од условот на задачата следува равенката $\frac{65+x}{6}=13$. Решението на последната равенка $x=13$. Значи, Милан го запишал бројот 13.

7. Во едно одделение 60% од учениците се девојчиња. Во одделението има 24 девојчиња. Колку момчиња има во ова одделение?

   Решение. Ако во одделението учат x ученици, тогаш $\frac{60x}{100}=24$, од каде добиваме $x=40$. Значи, во одделението учат $40-24=16$ момчиња.

8. Збирот на половината, третината и шестината на еден агол е еднаков на прав агол. Кој е тој агол?

   Решение. Ако x е мерниот број на бараниот агол, тогаш $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=90^\circ$.

   Решението на последната равенка е $x=90^\circ$.

9. Ако секоја од двете спротивни страни на квадратот се зголеми за 6 мерни единици, а секоја од другите две страни се намалат за 4 мерни единици, тогаш се добива правоаголник чија плоштина е еднаква со плоштината на квадратот. Колку е разликата од периметрите на правоаголникот и квадратот.

   Решение. *Прв начин*. Ако страната на квадратот е a, тогаш страните на правоаголникот се $a+6$ и $a-4$. Од еднаквоста на плоштините следува равенката $a^2=(a+6)(a-4)$. Решението на последната равенка е $a=12$. Значи, страната на квадратот е 12, а страните на правоаголникот се 18 и 8. Разликата на периметрите на правоаголникот и квадратот е
   $$2(18+8)-4\cdot 12=52-48=4\,.$$
   Втор начин. Ако страната на квадратот е a, тогаш страните на правоаголникот се $a+6$ и $a-4$. Периметарот на квадратот е $4a$, а периметарот на правоаголникот е $2(a+6+a-4)=4a+4$. Според тоа, разликата на периметрите на правоаголникот и квадратот е $4a+4-4a=4$.

   Забелешка. Во вториот начин на решавање на задачата воопшто не го искористивме условот дека правоаголникот и квадратот имаат еднакви плоштини. Последното значи дека оваа задача е предефинирана.

10. Конструирани се агли од 19° и 90°. Кој е најмалиот агол кој може да се конструира со помош собирање и одземање на овие два агли?

    Решение. Содржатели на бројот 19 се броевите: 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285, 304, 323, 342, 361, 380, ...
    Содржатели на бројот 90 се: 90, 180, 270, 360, 450, ...
    Како што можеме да видиме најмалата разлика е
    $$1^\circ=361^\circ-360^\circ=19\cdot 19^\circ-4\cdot 90^\circ\,.$$
    Тоа значи дека најмалиот агол кој може да се конструира со помош на собирање и одземање на овие два агли е еднаков на 1°.

11. Околу кружна маса седат 8 деца на места нумерирани со броевите 1, 2, 3,4, 5, 6, 7 и 8 (во насока на движење на стрелките на часовникот). Започнува следнава игра: Броејќи од првото место во насока на движењето на стрелките на часовникот секое второ дете станува и заминува од масата. Потоа постапката се повторува со децата кои то останале на масата итн. Кој е редниот број на местото на кое седи детето кое што останало на масата?

Решение. Во првиот круг станале децата со редни броеви 2, 4, 6 и 8, а останале децата со редни броеви 1, 3, 5 и 7. Во вториот круг станале децата со редни броеви 3 и 7, а останале децата со редни броеви 1 и 5. Во третиот круг станало детето со реден број 5, а останало детето со реден број 1.

12. Цената на еден производ е намалена за 15%, а потоа така добиената цена е зголемена за 5% и сегашната цена изнесува 17850 денари. Колку е стотина од почетната цена на овој производ?

Решение. Ако почетната цена е a, тогаш по намалувањето за 15% цената на производот е $0,85a$. Понатаму, кога новата цена на производот се зголемила за 5%, новата цена на производот е еднаква на $1,05 \cdot 0,85a$. Според тоа, $1,05 \cdot 0,85a = 17850$, т.е. $0,8925a = 17850$, од каде добиваме $a = 20000$. Значи, една стотина од почетната цена е $\frac{a}{100} = 200$.

VII одделение

1. Во растечка низа секој нареден член се добива од претходниот со множење со константа. Избришани се три членови од низата, при што се добива 5, __, __, __, 80. Колку е количникот на третиот и првиот член на оваа низа?

Решение. Ако a е константата со која се множи секој член на низата при добивање на следниот член, тогаш за да од првиот се добие петтиот член на низата со a множиме четири пати. Значи, $5a^4 = 80$, од каде добиваме $a^4 = 16$, т.е. $a = 2$. Значи, членовите на низата се 5, 10, 20, 40, 80, ..., а количникот на третиот и првиот член е еднаков на $20:5 = 4$.

2. Колку е вредноста на изразот $T + S - P$, каде што со T се означени темињата, со S ѕидовите, а со P рабовите на 7-аголна призма?

Решение. Ако со T се означени темињата, со S ѕидовите, а со P рабовите на произволна призма, тогаш точна е формулата $T + S = P + 2$, од каде добиваме $T + S - P = 2$.

Забелешка. Како што можеме да видиме условот дека призмата е седумаголна не е потребен за да се реши задачата.

3. Колку оски на симетрија има дадена полуправа?

Решение. Јасно, правата која ја содржи дадената полуправа е нејзина оска на симетрија. Други оски на симетрија на полуправата не постојат (Зошто?). Значи, дадена полуправа има една оска на симетрија.

4. Во една фабрика 25% од вработените се жени, а бројот на вработените мажи е за 100 поголем од бројот на вработените жени. Колку вработени има оваа фабрика?

   Решение. Ако во фабриката има a вработени, тогаш бројот на вработените жени е $0,25a$, а бројот на вработените мажи е $0,25a+100$. Според тоа, $0,25a+0,25a+100=a$, од каде добиваме $a=200$.

5. Средната вредност на група од n броеви е 45. Ако кон групата се додаде 5, тогаш средната вредност е 25. Најди го n?

   Решение. Од условот на задачата следува равенката $45n+5=25(n+1)$. Решението на последната равенка е $n=1$.

6. Даден е квадар што може да се подели со две паралелни рамнини на три еднакви коцки. Нека k е односот на плоштините од квадарот и една од коцките. Колку е $3k$?

   Решение. Ако со a ја означиме должината на работ на коцката, тогаш плоштината на коцката е $6a^2$. Понатаму, плоштината на квадарот е $2a^2+4\cdot 3a\cdot a=14a^2$. Значи, $3k=3\cdot\frac{14a^2}{6a^2}=7$.

7. За три години од сега Ведран ќе има четири пати повеќе години отколку што имал пред девет години. Колку години има Ведран?

   Решение. Нека Ведран има x години. Тогаш $x+3=4(x-9)$, од каде добиваме $x=13$. Значи, Ведран има 13 години.

8. Една отсечка е поделена на три дела во размер 4:7:6. Колку е должината на отсечката во *cm* ако се знае дека растојанието меѓу средишните точки на двата крајни дела е 144 *cm*.

   Решение. Деловите на отсечката се $4a, 7a, 6a$. Од условот на задачата следува дека $2a+7a+3a=144$, т.е. $a=12$. Значи, должината на отсечката е $4a+7a+6a=17a=17\cdot 12=204\ cm$.

9. Едниот пар спротивни страни на правоаголникот се $3x+y$ и $2x-y+7$, а другиот се $x+2y-2$ и $2x-y+1$. Пресметај ја вредноста на изразот $2L-P$, каде L и P се мерните броеви на периметарот и плоштината на правоаголникот, соодветно.

Решение. Имаме $3x+y=2x-y+7$ и $x+2y-2=2x-y+1$. Решението на добиениот систем е $x=3, y=2$. Сега, лесно се добива дека должините на страните на правоаголикот се 11 и 5. Конечно,

$$2L-P=2\cdot 2(11+5)-11\cdot 5=64-55=9.$$

10. Првата и втората цевка го полнат базенот за 3 часа, првата и третата за 4 часа, а втората и третата за 6 часа. За колку минути трите цевки заедно би го наполниле празниот базен?

Решение. Ако со x,y и z се соодветно часовите за кои првата, втората и третата цефка самостојно го полнат базенот, тогаш

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$$

Ако ги собереме горните равенства и добиеното равенство го поделиме со 2, добиваме $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{8}$. Според тоа, за 1 час трите цевки заедно полнат $\frac{3}{8}$ од базенот, па затоа целиот базен ќе го наполнат за $\frac{8}{3}\cdot 60=160$ min.

11. Ако $\frac{a}{b}$ е нескратлива дропка таква то $\frac{a}{b}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$, пресметај ја вредноста на збирот $a+b$.

Решение. Имаме,

$$\frac{a}{b}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{5}}}$$

$$=2+\frac{1}{2+\frac{5}{12}}=2+\frac{1}{\frac{29}{12}}=2+\frac{12}{29}=\frac{70}{29},$$

па затоа $a+b=99$.

12. Нека за позитивните броеви a,b,c важи $ab=6, bc=12, ca=8$. Пресметај ја вредноста на збирот $a+b+c$.

Решение. Ги множиме дадените равенства и добиваме $a^2b^2c^2=576$. Но, броевите a,b,c се позитивни, па затоа $abc=24$. Сега,

$$a = abc:(bc) = 24:12 = 2,$$
$$b = abc:(ac) = 24:8 = 3,$$
$$c = abc:(ab) = 24:6 = 4.$$

Значи, $a+b+c=9$.

VIII одделение

1. Една низа започнува со 4, а правилото за добивање на секој следен член гласи: „Помножи го претходникот со 2, додај 1 и пресметај остаток при делење со 10“. Кој е 2021. член на низата?

   Решение. За вториот член на низата добиваме $4\cdot 2+1=9$ и $9=10\cdot 0+9$, т.е. вториот член на низата е 9. За третиот член на низата добиваме $9\cdot 2+1=19$ и $19=10\cdot 1+9$, т.е. третиот член на низата е 9. Продолжувајќи понатаму, добиваме дека сите следни членови на низата се еднакви на 9. Значи, 2021. член на низата е 9.

2. Мерните броеви на плоштината и волуменот на коцка изразени во иста мерна единица се еднакви. Колку е збирот на овие мерни броеви?

   Решение. Од условот на задачата имаме $6a^2 = a^3$, од каде добиваме $a=6$. Значи, $P=V=216$ и $P+V=432$.

3. Во даден триаголник, еден внатрешен агол е 120°. Колку е мерниот број на тапиот агол меѓу симетралите на острите агли?

   Решение. Збирот на острите агли на триаголникот е еднаков на $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Бараниот агол е еднаков на $180^\circ - \frac{60^\circ}{2} = 150^\circ$. Направи цртеж!

4. Една кошула поевтинила за 50%. Колку е процентот за кој треба да поскапи кошулата за да се добие првобитната цена?

   Решение. Ако цената на кошулата е a, по поевтинувањето ќе биде $c=0,5a$. Значи, $a=\frac{c}{0,5}=2c=(1+\frac{100}{100})c$, од каде следува дека за да се добие почетната цена кошулата треба да поскаши 100%.

5. Пресметај го збирот на броителот и именителот на нескратливата дропка еднаква на вредноста на изразот $2021\frac{1}{3}-2020\frac{1}{2}$.

Решение. Имаме $2021\frac{1}{3}-2020\frac{1}{2}=1\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{8-3}{6}=\frac{5}{6}$. Значи, бараниот збие е $5+6=11$.

6. Колку е мерниот број на аголот под кој се сечат симетралите на остриот и тапиот агол што лежат на основата на паралелограмот?

Решение. Збирот на аглите што лежат на основата на паралелограмот е еднаков на 180°. Значи, збирот на аглите кои симетралите на овие агли ги формираат со основата на парелограмот е еднаков на $\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$. Затоа аголот под кој се сечат симетралите на остриот и тапиот агол што лежат на основата на паралелограмот е еднаков на 90°.

7. Во правоаголен триаголник висината повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на делови со должини $18\,cm$ и $8\,cm$. Колку е шестина од плоштината на овој триаголник?

Решение. Јасно должината на хипотенузата е $c=18+8=26\,cm$. Од Питагоровата теорема следува $h^2=a^2-18^2, h^2=b^2-8^2$. Според тоа,

$$2h^2=a^2+b^2-18^2-8^2=c^2-18^2-8^2=26^2-18^2-8^2=288,$$

т.е. $h=12\,cm$. Конечно, $\frac{1}{6}P=\frac{1}{6}\cdot\frac{26\cdot 12}{2}=26\,cm^2$.

8. Упрости го изразот $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}, a\neq 0, b\neq 0$.

Решение. Имаме:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{ab}=\frac{2a\cdot 2b}{ab}=4.$$

9. Едниот пар спротивни страни на правоаголникот се $x+y-1$ и $2x-y+2$ а другиот се $x+y-3$ и $3x-2y-1$. Пресметај ја вредноста на изразот $P-L-d$, каде L, P и d се мерните броеви на периметарот, плоштината и дијагоналата на правоаголникот, соодветно.

Решение. Имаме $x+y-1=2x-y+2$ и $x+y-3=3x-2y-1$. Решението на добиениот систем е $x=5, y=4$. Сега, лесно се добива дека должините на страните на правоаголикот се 8 и 6, а дијагоналата е 10. Конечно,

$$P-L-d=48-28-10=10\,.$$

10. Разговараат брат и сестра, при што братот ѝ вели на сестрата: „Дај ми три денари за да имам два пати повеќе од тебе“ Сестрата вели: “„Не бате, ти дај ми три денари па да имаме подеднакво“. Колку пари имаат заедно двете деца?

Решение. Нека братот и сестрата имаат x и y денари соодветно. Тогаш $x+3=2(y-3)$ и $x-3=y+3$. Решението на последниот систем е $x=21$ и $y=15$. Значи, децата заедно имаат $21+15=36$ денари.

11. Ако x и y при делење со 7 даваат еднакви остатоци, колку е остатокот што се добива при делењето на $x^2-y+x-y^2$ со 7?

Решение. Нека $x=7a+k$, $y=7b+k$. Тогаш

$$\begin{aligned}x^2-y+x-y^2&=x^2-y^2+x-y=(x-y)(x+y)+(x-y)=(x-y)(x+y+1)\\&=(7a+k-7b-k)(7a+k+7b+k+1)\\&=7(a-b)(7a+7b+2k+1),\end{aligned}$$

што значи дека $x^2-y+x-y^2$ е делив со 7, т.е. бараниот остаток е 0.

12. Дропката $\frac{59}{143}$ на единствен начин може да се запише како збир на две правилни нескратливи дропки. Колку е збирот на броителите на овие две дропки?

Забелешка. Задачата е грешна. Имено, за дадената дропка важи

$$\frac{59}{143}=\frac{2}{143}+\frac{57}{143},\quad \frac{59}{143}=\frac{3}{143}+\frac{56}{143},\quad \frac{59}{143}=\frac{2}{11}+\frac{3}{13},$$

што значи дека истата може на повеќе начини да се запише како збир на две правилни нескратливи дропки. Во официјалното решение на задачата е презентиран последниот од горните три записи (ги има повеќе од три). За да ова биде решение на задачата истата треба да се преформулира како што следува:

Дропката $\frac{59}{143}$ на единствен начин може да се запише како збир на две правилни позитивни нескратливи дропки со двоцифрени именители. Колку е збирот на броителите на овие две дропки?

Решение. Имаме

$$\frac{59}{143}=\frac{59}{11\cdot13}=\frac{a}{11}+\frac{b}{13}=\frac{13a+11b}{143},$$

па затоа

$$13a+11b=59,$$
$$11(a+b-5)=2(2-a).$$

Сега, бидејќи 2 и 11 се заемно прости, треба 11 да е делител на $2-a$, односно $2-a=11k$, па како дропките треба да се позитивни добиваме $a=2$. Значи, $11(b-3)=0$, па затоа $b=3$ и бараното претставување е $\frac{59}{143}=\frac{2}{11}+\frac{3}{13}$, што значи дека збирот на броителите е $2+3=5$.

IX одделение

1. Во растечката низа $a_1,a_2,a_3,...$ секој следн член се добива со множење на претходниот член со константа. Неколку членови на низата се избришани и е добиено: 3, __, 12, __, __, __, 192, … Пресметај ја вредноста на изразот $a_2a_6:a_4^2$?

   Решение. Бидејќи низата е растечка и секој следен член се множи со константа, заклучуваме дека низата има облик
   $$a_1=a,a_2=ac,a_3=ac^2,a_4=ac^3,a_5=ac^4,a_6=ac^5,a_7=ac^6,....$$
   каде $c>1$. Според тоа,
   $$a_2a_6:a_4^2=ac\cdot ac^5:(ac^3)^2=a^2c^6:(a^2c^6)=1.$$
   Забелешка. При решавањето на задачата воопшто не употребивме дека низата има вид 3, __, 12, __, __, __, 192, …, што значи дека задачата е предефинирана. Исто така, забележуваме дека не го искористивме и условот дека низата е растечка, што значи дека и овој услов не е потребен.

2. Ако x и y при делење со 7 даваат еднакви остатоци, колку е остатокот што се добива при делењето на x^3-y^3 со 7?

   Решение. Нека $x=7a+k$, $y=7b+k$. Тогаш
   $$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(7a+k-7b-k)(x^2+xy+y^2)$$
   $$=7(a-b)(x^2+xy+y^2),$$
   што значи дека x^3-y^3 е делив со 7, т.е. бараниот остаток е 0.

3. Колку е разликата на броителот и именителот на нескратливата дропка која е еднаква на $1\frac{1}{2}-x$, каде x е 5% од 1?

Решение. Имаме, $x=\frac{5}{100}\cdot 1=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$, па затоа

$$1\frac{1}{2}-x=\frac{3}{2}-\frac{1}{20}=\frac{30-1}{20}=\frac{29}{20},$$

што значи дека бараната разлика е $29-20=9$.

4. Определи ја вредноста на параметарот k за која графиците на функциите $y=3x+5k$ и $y=7x+2k+6$ се сечат во точка која лежи на $y-$оската.

Решение. Точката лежи на $y-$оската, па затоа $x=0$. Според тоа, важи $5k=2k+6$, од каде добиваме $k=2$.

5. Триаголник со страни a,b,c е сличен со триаголник со страни $2a,3b$ и $4{,}5c$ во некој редослед. Преместај ја вредноста на коефициентот на сличност k.

Решение. Од сличноста следува $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k$ каде a_1,b_1,c_1 се страните $2a,3b$ и $4{,}5c$ во некој редослед. Според тоа, $\frac{a_1}{a}\cdot\frac{b_1}{b}\cdot\frac{c_1}{c}=k^3$, од каде добиваме $\frac{2a\cdot 3b\cdot 4{,}5c}{abc}=k^3$. Значи, $k^3=27$, односно $k=3$.

6. Точката A_1 е слика на точката $A(1,-4)$ при ротација за агол -90° и центар на ротација кординатниот почеток. Колкава е разликата меѓу ордината и апсцисата на точката A_1?

Решение. При ротација на точка $C(x,y)$ околу координатниот почеток за агол -90° се добива точката $C_1(y,-x)$. Значи, во нашиот случај точката $A(1,-4)$ се пресликува во точката $A_1(-4,-1)$ и бараната разлика е $-1-(-4)=3$.

7. Плоштината на кружен исечок има пет пати поголема бројна вредност од должината на кружниот лак на исечокот. Колку е бројната вредност на радиусот.

Решение. Ако мерниот број на аголот на кружниот исечок е α, тогаш од условот на задачата следува равенството

$$\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}=5\cdot\frac{2\pi r\alpha}{360^\circ},$$

од каде добиваме $r=10$.

8. Ако $x^2+y^2-6x-10y+34=0$, колку е $x+y$?

Решение. Имаме

$$x^2+y^2-6x-10y+34=0,$$
$$x^2-6x+9+y^2-10y+25=0,$$
$$(x-3)^2+(y-5)^2=0,$$

од каде бидејќи збир на квадрати на два броја е еднаков на нула ако тие се еднакви на нула следува $x=3, y=5$. Конечно, $x+y=8$.

9. Нека a и b се должините на страни правоаголник за кои се исполнети равенствата $(3a-18)(5b-20)=0$ и $a-b=2$. Колку е разликата $P-L$ каде P и L се бројните вредности на плоштината и периметарот на правоаголникот?

Решение. Имаме, $a=b+2$, па затоа

$$(3(b+2)-18)(5b-20)=0,$$
$$3(b-4)\cdot 5(b-4)=0,$$
$$(b-4)^2=0,$$
$$b=4.$$

Значи, $a=4+2=6$. Според тоа, $P=6\cdot 4=24$ и $L=2(6+4)=20$, па затоа $P-L=24-20=4$.

10. Аголот меѓу дијаметарот и тетива долга 20 cm повлечени од иста точка на кружницата изнесува 60°. Колку е радиусот на кружницата?

Решение. Според Талесовата теорема крајните точки на дијаметарот и тетивата се темиња на правоаголен триаголник во кој дијаметарот е хипотенуза и едниот остар агол е еднаков на 60° (направи цртеж). Тоа значи дека овој правоаголен триаголник е половина од рамностран триаголник, во кој дијаметарот е неговата страна, а дадената тетива е половина од другата страна. Значи, должината на дијаметарот е еднаква на $2\cdot 20=40\,cm$, па затоа радиусот на кружницата е еднаков на $20\,cm$.

11. Едно семејство го сочинуваат мајка, татко, неколку сестри и браќа. Еден од браќата вели: „Јас имам браќа исто колку и сестри“, а една од сестрите додава: „Јас имам двапати повеќе браќа од сестри“. Колку деца има во ова семејство?

Решение. Нека во семејството има x браќа и y сестри. Од условот на задачата следува системот равенки $x-1=y$ и $2(y-1)=x$. Решението на овој систем е $x=4, y=3$. Според тоа, во семејството иам $x+y=7$ деца.

12.Даден е рамнокрак трапез со висина $8\,cm$, крак $10\,cm$ и плоштина $64\,cm^2$. Пресметај ја плоштината на правоаголникот чии страни се основите на трапезот?

Решение. Од Питагоровата теорема следува $(\frac{a-b}{2})^2 = 10^2 - 8^2$, па затоа $\frac{a-b}{2} = 6$, т.е. $a-b=12$. Понатаму, од плоштината на триаголникот следува $\frac{a+b}{2}\cdot 8 = 64$, т.е. $a+b=16$. Решението на системот

$$a-b=12\,,\ a+b=16$$

е $a=14\,cm, b=2\,cm$. Конечно, $ab=28\,cm^2$.