Ристо Малчески
Самоил Малчески

КАТАЛАНОВИ БРОЕВИ

1. ВОВЕД

Фибоначиевите броеви се најчесто проучуваните броеви во комбинаториката и теоријата на броеви. Се чини дека одма по нив се Каталановите броеви, кои се наречени според белгискиот математичар Eugène Charles Catalan (1814-1894). Меѓутоа, овие броеви прв, во 1751 година, ги открил Leonhard Euler (1703-1783), но го загубил решението. Потоа во соработка со неговот ментор Cristian Goldbach (1690-1764) и со Johann Andreas von Segner (1704-1777), брилијантниот Euler во 1760 година нашол општ израз за бројот на триагулации, за кои претходно Segner нашол соодветна рекурзија. Доказот на Euler бил со помош на генераторни функции, кој е напреден математички апарат. Но, во чест на Catalan, кој нашол и докажал многу својства и идентитети на овие броеви, тие денес се нарекуваат според неговото име. Овие броеви, дваесетина години пред Euler, т.е. во 1730 година ги открил кинескиот математичар од монголско потекло Ming An-Tu (1692-1763). Меѓутоа заради изолираноста на Кина за неговите откритија во западната цивилизација не се знаело до 1839 година.

Каталановите броеви се појавуваат во многу комбинаторни проблеми, кои на прв поглед не се меѓусебно поврзани, како на пример:

- патишта во целобројна мрежа,
- триангулација на конвексен $n-$аголник,
- бинарно ставање загради во $(n+1)-$член израз,
- патишта на Duck,
- проблем на бинарни дрва,
- проблем на ракување (непресекувачки тетиви),
- Бертранов проблем на гласање

итн. Истите се дефинираат како

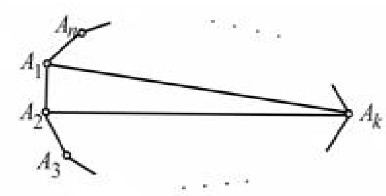
$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!},\ n\geq 1, \qquad (1)$$

па може да се пресметаат првите неколку членови на низата Каталанови броеви. Првите дванаесет членови на оваа низа се прикажани во следната табела

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_n	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012

2. ТРИАНГУЛАЦИЈА НА КОНВЕКСЕН *n*-АГОЛНИК

Даден е конвексен $n-$аголник $A_1A_2...A_n$, (цртеж десно). Под *триангулаци-ја на* $n-$ *аголникот* ќе подразбираме негова поделба на триаголници при што се исполнети условите:

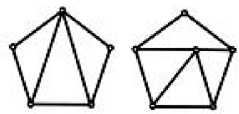


а) или триаголниците немаат заеднички точки,

б) или имаат само заедничко теме,

в) или имаат заедничка страна.

На првиот цртеж десно имаме триангулација на петаголникот, а додека на вториот цртеж немаме триангулација на петаголникот.



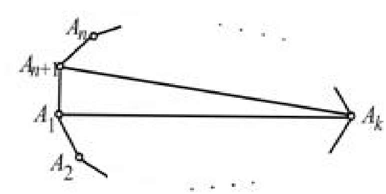
Проблемот на триангулација се состои во наоѓање на бројот T_n, $n \geq 3$ на триангулациите кои се состојат само од дијагонали на $n-$аголникот. Овие триангулации ги нарекуваме *дијагонални*. За две дијагонални триангулации на многуаголникот $A_1A_2...A_n$ ќе велиме дека се еквивалентни ако се добиени од исти дијагонали. По дефиниција ставаме $T_1 = 0$, $T_2 = 1$. Очигледно $T_3 = 1$, бидејќи триаголникот е веќе триангулиран на единствен начин и $T_4 = 2$, бидејќи четириаголникот има само две дијагонали и секоја од нив дава по една триагулација.

Да забележиме дека од едно теме на $n-$аголникот поаѓаат $n-3$ дијагонали и тие формираат $n-2$ триаголници. Збирот на внатрешните агли на секоја дијагонална триангулација мора да биде еднаков на збирот на внатрешните агли на $n-$аголникот, кој е еднаков на $(n-2)$® . Бидејќи збирот на внатрешните агли на триаголникот е еднаков на ® добиваме дека секоја дијагонална триангулација мора да има $n-2$ триаголници, па вкупниот број на страни на триаголниците е еднаков на $3(n-2) = 3n-6$, при што дијагоналите се броени двапати, а страните на $n-$аголникот се броени еднаш. Значи, $2x + n = 3n-6$, однсно $x = n-3$, што значи дека во секоја триангулација учествуваат точно $n-3$ дијагонали.

Теорема 1. Броевите $T_n, n \geq 2$ ја задоволуваат рекурзијата

$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + ... + T_{n-1}T_3 + T_nT_2. \qquad (2)$$

Доказ. Да го разгледаме многуаголникот $P = A_1...A_{n+1}$, (цртеж десно). Страната A_1A_{n+1} припаѓа на некој триаголник на секоја дијагонална триангулација на P. Третото теме на тој триаголник може да биде некое од темињата A_k, $k = 2,...,n$. Да го пресметаме бројот



на начините на кои третото теме може да биде некое од темињата $A_k, k=2,...,n$. Триаголникот $A_1A_{n+1}A_k$ го дели многуаголникот P на два помали конвексни многуаголници и тоа „долен“ $k-$аголник $A_1...A_k$ и „горен“ $(n-k+2)-$аголник $A_kA_{k+1}...A_{n+1}$. Долниот $k-$аголник може да се триангулира на T_k начини, а горниот $(n-k+2)-$аголник на T_{n-k+2} начини, па затоа вкупниот број на триангулации во овој случај е T_kT_{n-k+2}. Но, за секој $k=2,...,n$ на претходно опишаниот начин добиваме различни триангулации, па затоа

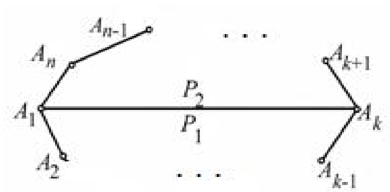
$$T_{n+1}=T_2T_n+T_3T_{n-1}+...+T_{n-1}T_3+T_nT_2\,. \blacksquare$$

Од досега изнесеното следува дека за да го определиме бројот на триангулациите, треба да ја решиме рекурзијата (2). За таа цел ќе докажеме дека броевите $T_n, n\geq 4$ задоволуваат поедноставна рекурзија.

Теорема 2. Броевите $T_n, n\geq 4$ ја задоволуваат равенката

$$T_n=\frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)\,. \qquad (3)$$

Доказ. Да го разгледаме многуаголникот $A_1A_2...A_n$. Дијагоналата A_1A_k, $k=3,...,\ n-1$ го дели P на два многуаголника P_1 и P_2, односно на долен конвексен $k-$аголник $P_1=A_1...A_k$ и на горен конвексен $(n-k+2)-$аголник $P_2=A_1A_kA_{k+1}...A_n$, (цртеж десно). Бројот на триангулациите на P во кои учествува дијагоналата A_1A_k е еднаков на производот на бројот на триаголниците на $k-$аголникот и на $(n-k+2)-$аголникот, односно на T_kT_{n-k+2}. Од темето A_1 излегува по една дијагонала кон секое теме кое не му е соседно, односно $n-3$ дијагонали па затоа бројот на триангулациите за сите дијагонали од темето A_1 е еднаков на



$$T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3\,.$$

Последното важи за сите темиња. Според тоа

$$n(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)$$

се сите можни триангулации за сите дијагонали, и притоа секоја триангулација ја броиме двапати, еднаш од темето A_i кон темето A_j и еднаш од темето A_j кон темето A_i. Според тоа, бројот

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)$$

е број за секоја можна дијагонала што учествува во триангулација на P. Но, бидејќи секоја триангулација посебно ја броиме за секоја дијагонала, а во една триангулација учествуваат $n-3$ дијагонали добиваме дека бројот на триангулациите T_n е $n-3$ пати помал од горниот број,т.е. тој е еднаков на

$$\frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+...+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3),$$

т.е. важи формулата (3). ■

Теорема 3. За секој $n\geq 2$ важи

$$T_n=\frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}. \qquad (4)$$

Доказ. Бидејќи $T_2=1$, од (2) добиваме

$$T_{n+1}-2T_n=T_3T_{n-1}+...+T_{n-1}T_3.$$

Сега ако замениме за производот на десната страна (3) добиваме

$$T_n=\frac{n}{2(n-3)}(T_{n+1}-2T_n),$$

$$\frac{2(n-3)}{n}T_n=T_{n+1}-2T_n,$$

$$T_{n+1}=(\frac{2(n-3)}{n}+2)T_n, \quad ,$$

$$T_{n+1}=\frac{2(n-3)+2n}{n}T_n$$

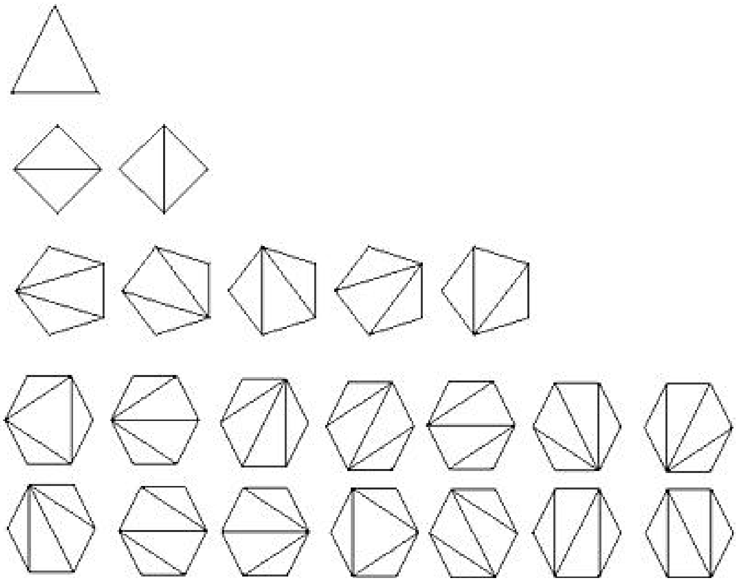
$$T_{n+1}=\frac{2(2n-3)}{n}T_n.$$

Од последната формула последователно добиваме

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=\frac{2(2n-3)}{n}T_n\\&=\frac{2^2(2n-3)(2n-5)}{n(n-1)}T_{n-1}=\frac{2^3(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{n(n-1)(n-2)}T_{n-2}=...\\&=\frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)(2n-7)...(2\cdot3-3)(2\cdot2-3)}{n(n-1)(n-2)...3\cdot2}\\&=\frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)(2n-7)...(2\cdot3-3)(2\cdot2-3)}{n(n-1)(n-2)...3\cdot2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)...3\cdot2\cdot1}{(n-1)(n-2)...3\cdot2\cdot1}\\&=\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdot...\cdot3\cdot1}{n(n-1)(n-2)...3\cdot2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-4)\cdot...\cdot6\cdot4\cdot2}{(n-1)(n-2)...3\cdot2\cdot1}\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}=\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}.\end{aligned}$$

Конечно, ако во последната формула наместо $n+1$ ставиме n ја добиваме формулата (4). ■

Од претходната теорема следува дека за секој $n\geq 1$ важи $T_{n+2}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n$. Па затоа бројот на сите триагулации на петаголникот е $T_5=\frac{1}{5-1}\binom{2(5-2)}{5-2}=\frac{1}{4}\binom{6}{3}=5$, а на шестаголникот е $T_6=\frac{1}{6-1}\binom{2(6-2)}{6-2}=\frac{1}{5}\binom{8}{4}=14$. На долните цртежи се прикажани триагулациите на триаголникот, четириаголникот, петаголникот и шестаголникот, кои се единствени до означување на темињата.



Притоа триангулациите на петаголникот се добиваат едноставно со повлекување по две дијагонали од секое теме. За добивање на триагулациите на шестаголникот прво од едно теме повлекуваме дијагонала која минува низ двете соседни темиња на избраното теме и дополнуваме до триагулација (тоа се пет случаи бидејќи дополнувањата се триангулации на петаголник – првите пет цртежи во горниот ред добиени за горното лево теме). Потоа одејќи во насока на движењето на стрелките на часовникот постапката ја повторувме за следното теме. Така добиваме нови пет триангулации - првите пет цртежи во вториот ред. Ако сега постапката ја повториме за следното теме во истата насока добиваме уште три триангулации кои претходно ги немаме и на крајот за четвртото теме ја добиваме последната триангулација.

Да забележиме дека горниот алгоритам за наоѓање на триангулациите на шестаголникот може да се примени за наоѓање на триангулациите на седумаголникот, со тоа што за секое теме бараните триангулации ги определуваме од триангулациите на шестаголникот кои претходно ги определивме. На овој начин индуктивно можеме да ги нацртаме триангулациите на секој многуаголник.

3. ПРОБЛЕМ НА ЗАГРАДИ

Како што веќе рековме проблемот на триангулација на конвексен $n-$аголник прв го решил Ојлер, но подоцна Каталан решавајќи го проблемот на загради кој покасно ќе го формулираме ги открил броевите од облик $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, кои во негова чест се наречени *Каталанови броеви*.

Проблемот на загради е следниов:. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се еден до друг запишани броеви во произволен редослед. Од асоцијативниот закон следува дека при произволно множење на овие броеви секогаш добиваме ист резултат. На пример, три броја можеме да помножиме на два начини $x_1(x_2x_3)$ и $(x_1x_2)x_3$ и од секој начин се добиваат по $3!$ начини, т.е. по бројот на пермутациите на трите броја. Затоа вкупниот број на различни множења е $2\cdot 3! = 12$. Слично, четири броеви можеме да ги помножиме на пет начини

$$(x_1x_2)(x_3x_4) = ((x_1x_2)x_3)x_4 = (x_1(x_2x_3))x_4 = x_1((x_2x_3)x_4) = x_1(x_2(x_3x_4))$$

и овој број се зголемува за бројот на пермутациите на четирите броја, т.е. за $4!$, па затоа добиваме вкупно $5\cdot 4! = 120$ начини на множење на пет броја. Во врска со претходните примери ќе решиме две задачи:

a) На колку различни начини може да се помножат n броеви?

b) На колку различни начини може да се помножат n броеви, при што нивниот редослед не се менува?

Прво ќе ја решиме задачата под а). Со A_n да го означиме бараниот број на множења. Да го разгледаме било кој од различните A_{n-1} множења на броевите $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. На секое од овие множења го додаваме бројот x_n и тоа на два начини:

- како надворешен множител $x_n(...)$ или $(...)x_n$,
- како внатрешен множител, при што на секое од $(n-2)-$те множења за пресметување на еден од множењата на броевите $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ додавањето може да се направи на 4 начини. Имено, при множење на два соседни броја a и b, внатрешното вметнување на бројот x_n може да се направи на еден од следните четири начини: $(x_na)b, (ax_n)b, a(x_nb), a(bx_n)$.

Од претходно изнесеното следува дека бројот x_n може да се вметне или да се додаде на секој од A_{n-1} производи на броевите $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на $4(n-2)+2 = 4n-6$ начини. Значи, броевите A_n, $n = 2,3,...$ ја задоволуваат релацијата

$$A_n = (4n-6)A_{n-1}, \tag{5}$$

при што е јасно дека $A_1 = 1$. Ако сега последователно заменуваме за A_{n-1}, A_{n-2}, $..., A_1$ и добиваме

$$\begin{aligned} A_n &= (4n-6)A_{n-1} = (4n-6)(4n-10)A_{n-2} \\ &= (4n-6)(4n-10)...(4\cdot 3-6)(4\cdot 2-6)A_1 \\ &= 2(2n-3)2(2n-5)...2(2\cdot 3-3)2(2\cdot 2-3) \\ &= 2^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdot ...\cdot 3\cdot 1 \\ &= \frac{2^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdot ...\cdot 3\cdot 1}{(n-1)!}(n-1)! \end{aligned}$$

$$= \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} = (n-1)!\binom{2n-2}{n-1}$$

$$= (n-1)!\binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Во задачата под b) се бара бројот на множењата при кои не се менува редоследот на броевите. Но, ако не се менува редоследот на броеите $x_1, x_2, ..., x_n$, добиваме дека бараниот број е помал онолку пати колку што имаме пермутации на овие броеви, па затоа бројот A_n да го поделиме со бројот на пермутациите на броевите, т.е. со $n!$. Значи решение на задачата под б) е

$$Z_n = \frac{A_n}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!}\binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}$$

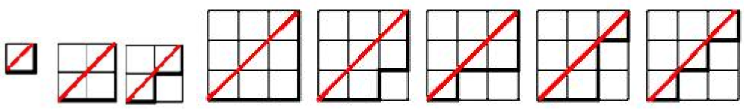
и тоа е $(n-1)$ – от Каталанов број. Со тоа докажавме дека $Z_{n+1} = C_n$.

Забелешка 1. Бидејќи множењето на броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ запишани во овој редослед, за секој фиксиран $r \in \{1, 2, ..., n\}$ може да се направи ако прво се помножат броевите $x_1, x_2, ..., x_r$, потоа се помножат броевите $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ и се најде нивниот производ или пак ако прво се помножат броевите $x_1, x_2, ..., x_{n-r}$, потоа се помножат броевите $x_{n-r+1}, x_{n-r+2}, ..., x_n$ и се најде нивниот производ заклучуваме дека броевите Z_n ја задоволуваат рекурзијата

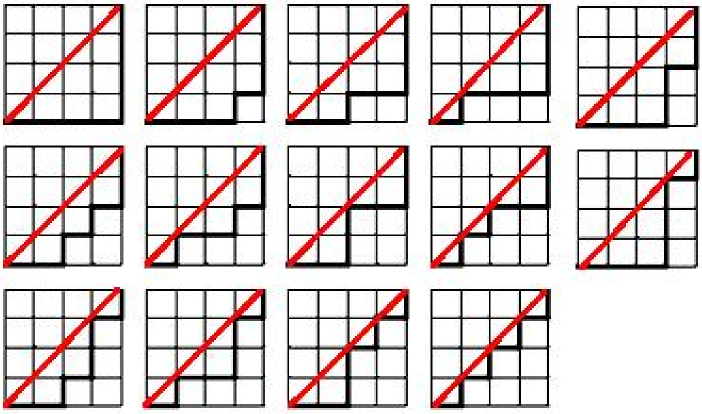
$$Z_n = Z_1 Z_{n-1} + Z_2 Z_{n-2} + \ldots + Z_{n-2} Z_2 + Z_{n-1} Z_1 .$$

4. ПАТИШТА ВО ЦЕЛОБРОЈНА МРЕЖА

Еден од попознатите проблеми кој се поврзува со Каталановите броеви се патишата во целобројна мрежа. Оваа мрежа е дел од квадратната мрежа чии прави се паралелни со координатните оски во Декартов кординатен систем и минуваат низ сите точки со цели координати. Притоа разгледуваме дел од мрежата со големина $n \times n$ и треба да определиме колку има различни најкратки патишта во овој дел кои тргнуваат од долниот лев агол и одат до горниот десен агол, но никогаш не ја преминуваат дијагоналата, односно патишта под дијагоналата од долниот лев агол до горниот десен агол по кои се движеме само нагоре и надесно (поддијагонални монотони патишта). На долните цртежи се прикажани сите вакви патишта во целобројна 1×1, 2×2 и 3×3 мрежа, кои ги има соодветно $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ и $C_3 = 5$, при што дијагоналата која не смее да се премине е црвена.



Понатаму, од случаите $1\times1, 2\times2$ и 3×3 лесно се гледа како може да се нацртааат овие патишта, без притоа да има можност за повторување на некој пат. На потполно идентичен начин се цртаат ваквите патишта во целобројна 4×4 мрежа. Како што можеме да видиме вакви патишата има $C_4 = 14$.

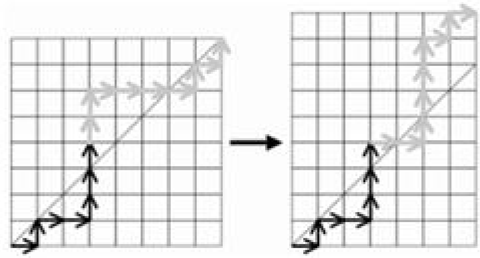


Бројот на различните патишта кои ги задоволуваат наведените услови ќе го определиме со пребројување на сите монотони патишта (патишта во кои се дозволени чекори само надесно и нагоре) низ целобројната мрежа од точката $(0,0)$ до точката (n,n) и од овој број ќе го одземеме бројот на монотоните патиштата кои ја сечат (преминуваат) дијагоналата.

Секој монотон пат можеме да го претставиме како определен редослед на вектор за чекор надесно $\vec{i} = (1,0)$ и вектор за чекор нагоре $\vec{j} = (0,1)$. Притоа имаме n чекори надесно и n чекори нагоре, т.е. вкупно $2n$ чекори. Јасно, ако чекорите редоследно ги означиме со броевите $1,2,3,...,2n-1,2n$, тогаш при избор на n од овие броеви за редните броеви на чекори надесно добиваме точно еден и само еден определен пат во целобројната мрежа. Имено, определен е единствен пат бидејќи преостанатите n броеви ги даваат редните броеви на чекорите нагоре. Значи, во целобројна $n\times n$ мрежа имаме вкупно $\binom{2n}{n}$ монотони поддијагонални патишта кои водат од долниот лев до горниот десен агол.

Сега да ги преброиме патиштата кои ја сечат дијагоналата. Да ја разгледаме првата точка која се наоѓа на недозволен пат (пат кој ја сече дијагоналата), т.е. која е над дијагоналата. По таа точка го пресликуваме делот од патот така што секој чекор надесно го заменуваме со чекор нагоре и секој чекор нагоре го заменуваме со чекор надесно. Бидејќи сме една точка над дијагоналата, сме направиле k чекори надесно и $k+1$ чекор нагоре. Значи, ни преостануваат $n-k$ чекори надесно и $n-k-1$ чекори нагоре за да дојдеме до точката (n,n) . Со пресликувањето на патот се заменуваат броевите на преостанатите чекори, што значи дека во новодобиената патека ќе имаме точно $k+(n-k-1)=n-1$ чекори надесно и

$k+1+(n-k)=n+1$ чекори нагоре. Последното значи дека ќе дојдеме до точката $(n-1,n+1)$. На ваков начин од секој недозволен монотон пат од точката $(0,0)$ до точката (n,n) можеме да добиеме единствен монотон пат од точката $(0,0)$ до точката $(n-1,n+1)$, кој често пати се нарекува рефлектиран пат. Притоа рефлектираниот пат има $n-1$ чекори надесно и $n+1$ чекори нагоре. (На долниот цртеж лево е прикажан недозволен монотон пат во 8×8 целобројна мрежа, а десно е даден соодветниот рефлектиран пат.)



Исто така, од секој монотон пат во целобројната мрежа од точката $(0,0)$ до точката $(n-1,n+1)$ можеме на единствен начин да добиеме недозволен монотон пат од точката $(0,0)$ до точката (n,n), со заменување на насоките на движење во моментот кога ќе ја премине дијагоналата во целобројната $(n-1)\times(n-1)$ мрежа. На овој начин најдовме биекција меѓу множеството од сите монотони патишта кои ја сечат дијагоналата и множеството од сите монотони патишта во целобројната мрежа од точката $(0,0)$ до точката $(n-1,n+1)$. Секој монотон пат во целобројната мрежа од точката $(0,0)$ до точката $(n-1,n+1)$ се добива со избор на $n-1$ движења во десно од множеството од $n-1+n+1=2n$ движења, т.е. со избор на $n-1$ броеви од множеството $1,2,...,2n-1,2n$. Значи, во случајов имаме $\binom{2n}{n-1}$ монотони патишта кои ја сечат дијагоналата на $(n-1)\times(n-1)$ мрежата.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот на различните патишта P_n кои ги задоволуваат наведените услови е еднаков на

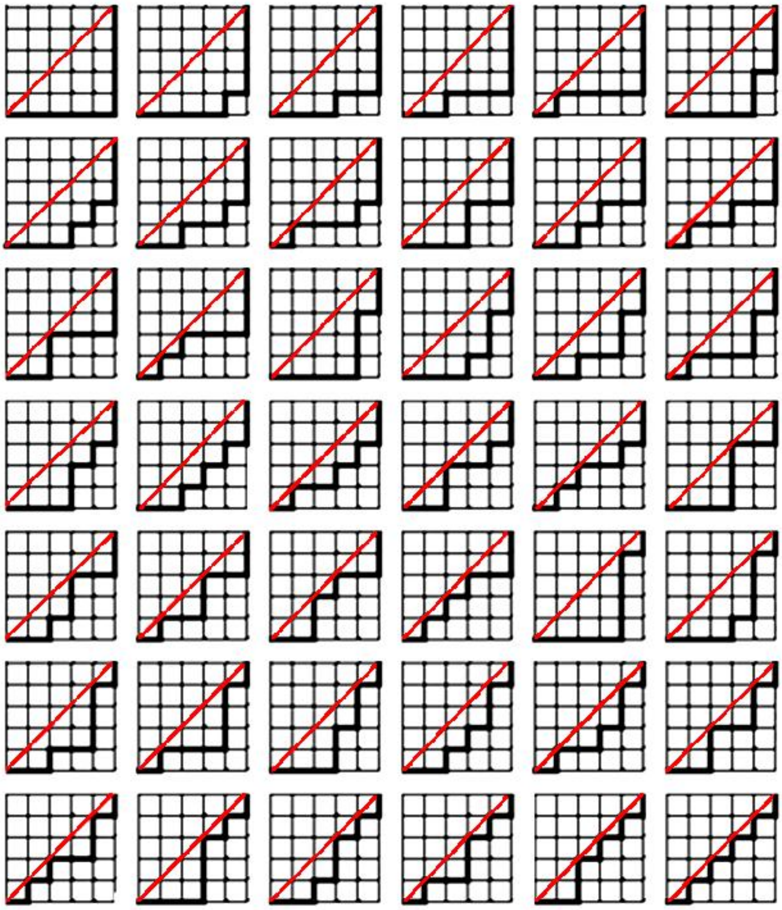
$$P_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$
$$=\frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n,$$

што значи дека тоа е $n-$тиот Каталанов број.

Од претходните разгледувања следува дека бројот на поддијагоналните патишта од долниот лев агол до горниот десен агол по кои се движеме само горе и десно во 5×5 е еднаков на

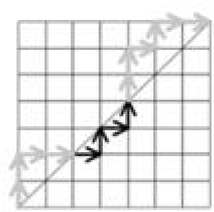
$$C_5=\frac{1}{5+1}\binom{2\cdot 5}{5}=\frac{1}{6}\cdot\frac{10!}{5!5!}=42\,.$$

Овие патишта се прикажани на долниот цртеж.



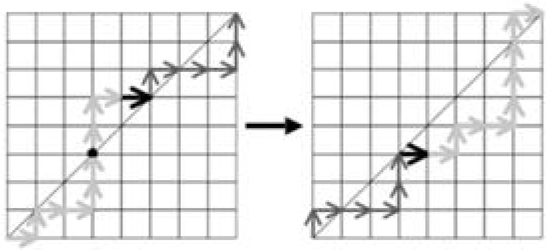
Во продолжение ќе дадеме уште еден начин за пребројување на поддијагоналните патиштата во целобројна $n \times n$ мрежа, од кое ќе биде појасно зошто во бројот на сите патишта во целобројната $n \times n$ мрежа се дели со $n+1$, по што се добива бројот на поддијагоналните патишта.

Нека е даден произволен монотон пат од долниот лев до горниот десен агол во целобројната $n \times n$ мрежа. Бројот на вертикални чекори над дијагоналата го нарекуваме пречекорување на патот. На пример, на цртежот десно, чекорите над дијагоналата се означени со светли стрелки, па како имаме 5 вертикални светли стрелни пречекорувањето на овој пат е 5.



Нека е даден монотон пат со ненулто пречекорување. Од овој пат за да конструираме нов ненулти пат чие пречекорување е за еден помало постапуваме на следниов начин:

- тргнуваме по патот и одиме додека за прв пат не ја надминеме дијагоналата,
- продолжуваме по патот додека тој повторно за прв пат не ја допре дијагоналата и со $\overrightarrow{i*}$ да го означиме првиот таков чекор што ќе се достигне,
- го заменуваме местата на делот од патот што е пред $\overrightarrow{i*}$ со делот од патот што е по $\overrightarrow{i*}$, со тоа што двата дела ги поврзуваме со транслатираниот чекор $\overrightarrow{i*}$.

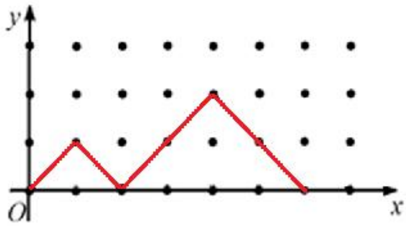


На горниот лев цртеж црната точка го означува моментот кога патот за прв пат ќе ја помине дијагоналата, со црно е означен чекорот $\overrightarrow{i*}$, а со светла и темно сива боја се означени деловите од патот кои ги заменуваат местата. На десниот цртеж е прикажан патот кој се добива по настанатата промена. На овој начин бројот на пречекорувањата се намали од 3 на 2. Всушност со овој алгоритам пречекорувањата се намалуваат за 1, бидејќи по преместувањето првиот вертикален чекор кој е над дијагоналата (во црната точка) оди под дијагоналата, а сите останати вертикални чекори остануваат на иста страна од дијагоналата.

Овој процес е реверзибилен, бидејќи за било кој пат P со пречекорување помало од n постои точно еден пат од кој со примена на горниот алгоритам се добива патот P. Оттука следува дека бројот на патиштата со пречекорување n е еднаков на бројот на патиштата со пречекорување $n-1$, кој е еднаков на бројот на патштата со пречекорување $n-2$ итн. на бројот на патиштата со пречекорување 1 и на бројот на патиштата со пречекорување 0 (без пречекорување). Со други зборови, множеството од сите монотони патишта го поделивме на $n+1$ дисјунктни подмножества, секој со еднаков број елементи, кои соодветствуваат на сите можни отстапувања од 0 до n. Конечно, бидејќи имаме $\binom{2n}{n}$ монотони патишта, добиваме дека бројот на различните патишта P_n кои ги задоволуваат наведените услови е $P_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$.

5. ПЛАНИНСКИ ПАТИШТА НА DYCK

Покрај триангулацијата и проблемот на загради, друга важна реализација на Каталановите броеви е поврзана со патиштата на Dyck.



Да ја разгледаме целобројната решетка во првиот квадрант на Oxy рамнината. *Плански пат на* Dyck ја нарекуваме секоја непрекината искршена линија со целобројни темиња, која се состои од вектори $\vec{a}(1,1)$ и $\vec{b}(1,-1)$ и која почнува од координатниот почеток и завршува на Ox оската (цртеж десно). Притоа, делот од искршената линија кој се состои од еден вектор $\vec{a}$ (искачување) или еден вектор $\vec{b}$ (слегување) го нарекуваме *чекор во патот на* Dyck, а бројот на чекорите од кои е составен патот на Дик го нарекуваме *должина на патот на* Dyck.

Во врска со патот на Dyck точно е следново тврдење.

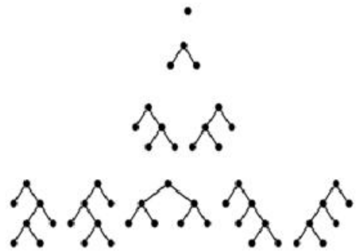
Бројот на патиштата на Dyck D_n *со должина* $2n$ *е еднаков на* $n-$*от Каталанов број* C_n, *т.е.* $D_n = C_n$

Точноста на ова тврдење следува од тоа што проблемот на планинските патишта на Dyck е еквивалентен на проблемот на патиштата во целобројна мрежа. Имено, секој пат во целобројната мрежа е даден со низа која содржи n вектори $\vec{i}$ и n вектри $\vec{j}$, при што во низата одејќи од лево кон десно во секој момент бројот на векторите $\vec{i}$ е поголем или еднаков на бројот на векторите $\vec{j}$. Сега, ако секој вектор $\vec{i}$ го замениме со вектор $\vec{a}$ и секој вектор $\vec{j}$ го замениме со вектор $\vec{b}$, добиваме пат на Dyck. Бидејќи различните почетни низи даваат различни нови низи, а исти почетни низи даваат исти нови низи важи $P_n \le D_n$. На потполно идентичен начин заменувајќи ги во пат на Dyck векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сооодветно со векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$, добиваме дека $D_n \le P_n$. Сега, од последните две неравенства следува $D_n = P_n = C_n$.

6. ПРОБЛЕМ НА БИНАРНИ ДРВА

Дрво е сврзан граф без циклуси, т.е. сврзан граф во кој сите ребра се ациклични. Бинарните дрва се дефинираат индуктивно на следниов начин: Бинарното дрво е или празно или се состои од едно истакнато теме кое се нарекува корен и подреден пар бинарни дрва кои се нарекуваат лево и десно поддрво (поддрвата може да се празни). Темињата од кои излегува повеќе од едно ребро се нарекуваат внатрешни темиња. Задачата е да се пресмета бројот B_n на бинарни дрва со n внатрешни темиња. На цртежот десно во редовите одгоре надолу соодветно се прикажани бинарни дрва со нула, едно, две и три внатрешни темиња.

За $n \geq 1$ ќе го пресметаме бројот B_n на бинарни дрва со n внатрешни темиња. Можеме да броиме вака: го расекуваме дрвото меѓу коренот и поддрвата и ги броиме сите можности: во левото поддрво може да има 0 темиња, а во десното $n-1$ теме, потоа во левото може да има 1 теме, а во десното $n-2$ темиња, па во левото 2 темиња, а во десното $n-3$ темиња итн. Во општ случај добиваме подреден пар (B, B') на бинарни дрва со вкупно $n-1$ внатрешни темиња, од кои во B се k темиња, а во B' преостанатите $n-k+1$ теме, каде $k = 0,1,2,...,n-1$. Оттука, заради комбинаторните принципи на производ и збир добиваме дека



$$B_n = B_0 B_{n-1} + B_1 B_{n-2} + B_2 B_{n-3} + ... + B_{n-3} B_2 + B_{n-2} B_1 + B_{n-1} B_0 .$$

Сега, ако во последната формула наместо n ставиме $k+2$, добиваме

$$T_{k+2} = T_2 T_{k+1} + T_3 T_k + ... + T_k T_3 + T_{k+1} T_2 ,$$

што значи дека ја добиваме релацијата (2) за триангулација на $(k+2)-$аголник.

Оттука следува дека $B_n = T_{n+2} = C_n$.

7. ПРОБЛЕМ НА РАКУВАЊЕ

Во овој дел ќе го разгледаме следниот проблем:

На колку различни начини $2n$ луѓе распоредени околу тркалезна маса може да се ракуваат така што рацете нема да им се прекрстуваат?

Всушност овој проблем е еквивалентен на следнава заадача:

На кружницата се дадени $2n$ точки. На колку начини овие точки можат да се поделат на n парови така што меѓу $n-$те тетиви определени со овие парови точки не постојат две кои се сечат?

Решението на проблемот е како што следува.

Со a_n да го означиме бараниот број поделби, а точките на кружницата да ги означиме со $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n}$, во ист редослед како што се поставени на кружницата. Точката A_1 може, при дадените услови со тетива да се поврзе само со една од точките $A_2, A_4, ..., A_{2n-2}, A_{2n}$ (точки со парни индекси), бидејќи ако се поврзе со точка со непарен индекс, од секоја страна на тетивата која излегува од A_1 ќе има непарен број точки, па по повлекување на другите $n-1$ тетива барем една од нив сигурно ќе ја сече тетивата од A_1.

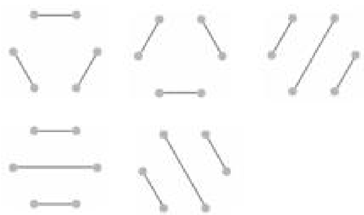
Да го определиме бројот на различните начини на поврзувања на точките, кога A_1 е поврзана со точката A_{2k} . Од едната страна на тетивата $A_1 A_{2k}$ има

$2k-2=2(k-1)$ точки и тие можат да се поврзат на R_{k-1} начин. Од другата страна на тетивата A_1A_{2k} се наоѓаат $2(n-k)$ точки и тие можат да се поврзат на R_{n-k} начини. Од принципот на производ следува дека бројот на поврзувањата на точките со n тетиви, при кои точката A_1 е поврзана со точката A_{2k} е еднаков на $R_{k-1}R_{n-k}$. Понатаму, ако сумираме по k од принципот на збир следува дека

$$R_n = R_0R_{n-1} + R_1R_{n-2} + ... + R_{k-1}R_{n-k} + ... + R_{n-2}R_1 + R_{n-1}R_0 , \qquad (1)$$

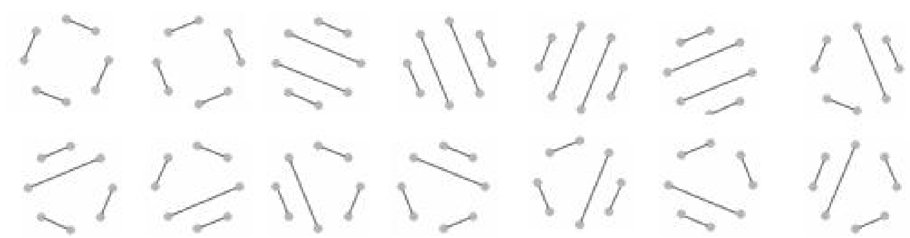
Јасно, $R_0 = R_1 = 1$. Горната формула е иста со формулата добиена за бинарните дрва, па затоа $R_n = B_n = C_n$.

Сега бројот на тетивите да го означиме како број на ракувања. Јасно, за $n=1$ имаме $R_1 = 1$ ракување на 2 лица, за $n=2$ имаме $R_2 = 2$ ракувања 4 лица и истите нагледно лесно се прикажуваат.



За $n=3$ имаме $R_3 = 5$ распореди на ракувања на 6 лица, односно на повлекување на тетиви во кружница на која се дадени шест точки и кои не се сечат, и истите се прикажани на цртежот десно. Овие ракувања се добиени ако прво преку една страна означиме три страни со точки кои се темиња на правилен шестаголник, потоа ги означиме другите три страни и на крајот три пати означиме пар спротивни страни и дијагоналата која е паралелна на нив.

За $n=4$ имаме $R_4 = 14$ распореди на ракувања на 8 лица, односно на повлекување на тетиви во кружница на која се дадени осум точки и кои не се сечат, и истите се прикажани на цртежот десно. Цртежите се добиени така што е земен правилен осумаголник и прво се нацртани по четири страни преку една, а потоа другите четири страни. Понатаму, земени се паровите паралелни спротивни страни и на нив паралелните дијагонали и на тој начин се добиени уште четири случаи. Последните осум распореди се добиваат така што се зема по една страна и на неа најблиската паралелна дијагонала, а потоа другите четири темиња се поврзуваат така што се добиваат две страни на осумаголникот.



8. ПРОБЛЕМ НА BERTRAND НА ГЛАСАЊЕ

На некои избори има два кандидати A и B за кои гласаат $2n$ гласачи. Резултатот од изборите бил нерешен, т.е. секој кандидат добил по n гласови и немало неважечки ливчиња. На колку начини можеме да ги преброиме резултатите од гласањето, така што во текот на броењето B никогаш нема да има повеќе гласови од A.

На секој глас на A му го придружуваме векторот $\vec{i}$, а на секој глас на B му придружуваме векторот $\vec{j}$ од патиштата во целобројна мрежа. Така, бидејќи во секој момент бројот на гласовите на A е поголем или еднаков на бројот на гласовите на B, за секој распоред на броењето на гласовите добиваме точно еден пат во целобројна мрежа. Понатаму, за различни распореди на гласовите имаме различни патишта, па затоа $G_n \le P_n$. Важи и обратното, односно од секој пат во целобројна мрежа бидејќи секогаш имаме повеќе чекори надесно отколку нагоре, добиваме единствен распоред на броењето на гласовите кој ги задоволува условите на задачата. Притоа за различните патишта имаме различни распореди на броење на гласовите, па заклучуваме дека $P_n \le G_n$. Од последните две неравенства следува дека $G_n = P_n = C_n$.

Теорема 4. Каталановиот број C_n е еднаков на:

1) Бројот T_{n+2} на триангулациите на конвексен многуаголник со $n+2$ темиња.
2) Бројот Z_{n+1} на различните начини на множење на фиксирани $n+1$ броеви.
3) Бројот B_n на бинарните дрва со n внатрешни темиња.
4) Бројот P_n на поддијагоналните патишта во целобројна $n \times n$ мрежа.
5) Бројот D_n на планинските патишта на Dyck.
6) Бројот G_n на начините на пребројување во проблемот на Bertrand на гласање.
7) Бројот R_n на различните распореди на ракувања на $2n$ луѓе на тркалезна маса при што рацете не се прекрстуваат.

Доказ. Во претходните разгледувања докажавме дека се точни равенствата

$$P_n = C_n,\ T_{n+2} = C_n,\ Z_{n+1} = C_n,$$

$$D_n = P_n = C_n, \quad B_n = T_{n+2} = C_n,$$

$$R_n = B_n = C_n \text{ и } G_n = P_n = C_n,$$

од што следува точноста на теоремата.

9. КАТАЛАНОВИТЕ БРОЕВИ И ПАСКАЛОВИОТ ТРИАГОЛНИК

Во точка 2, при изведувањето на формулата за бројот на поддијагоналните патишта во целобројна $n\times n$ мрежа докажавме дека важи $C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$. Според тоа, во $2n-$тиот ред на Паскаловиот триаголник разликата на средниот член и неговиот соседен член е еднаква на C_n, т.е. на $n-$тиот Каталанов број. Но што станува со непарните редови? Ако искористме дека

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}=2\binom{2n-1}{n-1} \text{ и } \binom{2n}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n-2},$$

добиваме

$$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=2\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2}=\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2},$$

т.е. во $(2n-1)-$виот ред на Паскаловиот триаголник разликата на еден од двата средни членови и неговиот соседен член кој не е среден е еднаква на $n-$тиот Каталанов број.

Понатаму, од формулата $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ добиваме $\binom{2n}{n}=(n+1)C_n$, што значи дека Каталановите броеви се делители на средните членови на парните редови во Паскаловиот триаголник. Така, имаме:

$$1=1\cdot 1,\quad 2=1\cdot 2,\quad 6=2\cdot 3,\quad 20=5\cdot 4,\quad 70=14\cdot 5,\quad 252=42\cdot 6,\quad 924=132\cdot 7,\quad ....$$

Уште една поврзаност на Каталановите броеви и Паскаловиот триаголник може да се најде ако во релацијата $C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$ на последниот член последователно се искористи Паскаловото правило за биномните коефициенти

$$\binom{r}{s}=\binom{r-1}{s}+\binom{r-1}{s-1}$$

и равенството $\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}=1$. Имаме:

$$\begin{aligned}
C_n&=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n}-\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2}\\
&=\binom{2n}{n}-\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-2}{n-2}-\binom{2n-2}{n-3}\\
&=\binom{2n}{n}-\binom{2n-1}{n-1}-\binom{2n-2}{n-2}-\binom{2n-3}{n-3}-\binom{2n-3}{n-4}\\
&=\dots=\binom{2n}{n}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-k}{n-k}-\binom{n+1}{0}\\
&=\binom{2n}{n}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-k}{n-k}-\binom{n}{0}\\
&=\binom{2n}{n}-\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n-k}.
\end{aligned}$$

Со примена на горната формула за $n = 3, 4, 5$ добиваме

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 10 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

$$\begin{aligned} C_3 &= \binom{6}{3} - \sum_{k=1}^{3} \binom{6-k}{3-k} \\ &= \binom{6}{3} - \binom{5}{2} - \binom{4}{1} - \binom{3}{0} \\ &= 20 - 10 - 4 - 1 = 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= \binom{8}{4} - \sum_{k=1}^{4} \binom{8-k}{4-k} \\ &= \binom{8}{4} - \binom{7}{3} - \binom{6}{2} - \binom{5}{1} - \binom{4}{0} \\ &= 70 - 35 - 15 - 5 - 1 = 14, \end{aligned}$$

и

$$C_5 = \binom{10}{5} - \sum_{k=1}^{5} \binom{10-k}{5-k} = \binom{10}{5} - \binom{9}{4} - \binom{8}{3} - \binom{7}{2} - \binom{6}{1} - \binom{5}{0} = 252 - 126 - 56 - 21 - 6 - 1 = 42 .$$

ЗАДАЧИ

1. Наставникот по физичко во сала наредил 30 ученици, така да се наоѓаат во темиња на правилен триесетаголник. На колку начини може да се изберат 15 парови кои ќе си додаваат со одбојкарски топки (се претпоставува дека движењето на топката е праволиниско), така што ќе бидеме сигурни дека никои две топки нема да се судрат.

2. За низата нули и единици со должина $2n$ ($2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$) ќе велиме дека е *урамнотежена* ако содржи n нули и n единици. За урамнотежената $2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$ ќе велиме дека е *добра* ако во ниту еден нејзин почетен дел нема повеќе нули од единици. Во спротивно ќе велиме дека $2n$-низата е *лоша*.
   Докажи, дека бројот на добрите $2n$-низи над азбуката $\{0,1\}$ е
   $$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n .$$

3. Пред билетарница стојат $2n$ лица. Секој од нив сака да купи по еден билет кој чини 50 денари. Меѓу лицата во редот точно n лица имаат по 50 денари, а останатите имаат по една банкнота од по 100 денари. На почетокот касата на билетарницата е празна. Колкав е бројот на распоредите на лицата така што продавачката може да врати кусур на секое лице кое купува билет, без тоа дополнително да се задржува на касата?

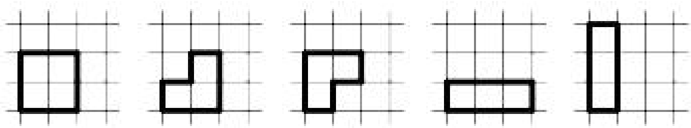
4. Кловн стои на работ на базен и држи вреќа во која има n сини и n црвени топчиња. Од вреќата без гледање извлекува топче по топче. Кога ќе извлече сино топче прави чекор кон базенот, а кога ќе извлече црвено топче прави чекор од базенот (се претпоставува дека сите чекори се со иста должина). На колку начини кловнот може да ги извлече топчињата, а притоа да не падне во базенот?

5. На хоризонтална права се земени $2n$ точки. Определи го бројот на начините на поврзување на овие точки со дисјунктни лаци така што сите лаци се на иста страна од правата и секој лак поврзува две точки. На долниот цртеж се дадени сите поврзувања за 6 точки.

6. Докажи дека бројот на табелите $2\times n$, пополнети со природните броеви од 1 до $2n$, такви што броевите во секој ред и во секоја колона монотоно растат е еднаков на C_n. На пример, за $n=3$ ги распоредуваме броевите од 1 до 6, при што се добиваат следниве пет табели:

1	2	3		1	2	4		1	3	4		1	2	5		1	3	5
4	5	6		3	5	6		2	5	6		3	4	6		2	4	6

7. Докажи, дека бројот на затворените непресекувачки искршени линии со должина $2n+2$, чии страни се заемно нормални и се составени од една или повеќе единечни отсечки и е еднаков на C_n.



8. Докажи, дека бројот на низите од n природни броеви од 0 до n, чиј збир е делив со $n+1$ (броевите во низата може да се повторуваат и нивниот редослед не е важен) е еднаков на C_n. На пример, за $n=3$ имаме $n+1=4$ и низите се: $0,0,0$ $0,1,3$ $0,2,2$ $1,1,2$ $2,3,3$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Davis, T., Catalan Numbers, http://www.geometer.org/mathcircles, 2001.

[2] Graham, L., Knuth, D., Patashnik, O., Concrete Mathematics: a foundation for computer science, Addison-Wesley, New York, 1989.

[3] Hilton, P., Pedersen, J., Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses

[4] Hong, S. D., Invesigating Catalan numbers with Pascal’s triangle, International journal od mathematical education in science and technology, Taylor & Francis Grooup, 2021
[5] https://brilliant.org/wiki/catalan-numbers/
[6] https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/CatalanInPascal.shtml
[7] https://www.oreilly.com/library/view/fibonacci-and-catalan/9780470631577/chapter21.html
[8] Mahendra J., Rieper, R.G., Continued fractions and Catalan problems, 2000
[9] Merris, R., Combinatorics, 2nd ed., John Wiley and Sons, 2003
[10] Pak, I. History of Catalan numbers, https://www.math.ucla.edu/~pak/papers/cathist4.pdf
[11] Richard P. Stanley, Catalan Numbers, Cambridge University Press 2015.
[12] Rosen, K.H., Discrete Mathematics and Its Applications, McGraw-Hill, 1998
[13] Wikipedia, Catalan Numbers, 2023., https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan number
[14] Wikipedia, Eugene Charles Catalan, 2023., https://en.wikipedia.org/wiki/Eugne Charles Catalan
[15] Wilf, H.S., Generatingfunctionology, Academic Press, 1994
[16] Малчески, Р., Малческа, В., Математика 5 – дискретна математика, Армаганка, 2020, Скопје
[17] Попов, Л., Соколов, А., Числа Каталана, ЦПМ, кружок по математики, 2019-2020
[18] Стефановић, Д., Балтић, В., Симић, С., Ћирић, М., Дискретна математика, Друштво математичара Србије, Београд, 2008