ЈБМО 2000

1. Нека x и y се реални броеви такви што
$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000.$$
Докажи дека
$$x+y=10.$$
Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно на равенствата
$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+(x+y)^3+30xy-3x^2y-3xy^2=2000,$$
$$2((x+y)^3-1000)-3xy(x+y-10)=0,$$
$$2(x+y-10)((x+y)^2+10(x+y)+100)+3xy(x+y-10)=0,$$
$$(x+y-10)(2x^2+2y^2+20x+20y+xy)=0,$$
$$(x+y-10)((x+10)^2+(y+10)^2+(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2)=0.$$
Бидејќи
$$(x+10)^2+(y+10)^2+(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2>0,$$
од последното равенство следува $x+y=10$.

2. Определи ги сите природни броеви n за кои n^2+3^n е квадрат на природен број.

Решение. Нека $n^2+3^n=m^2, m\in\mathbb{N}$. Тогаш $(m-n)(m+n)=3^n$, па затоа можни се следниве случаи:

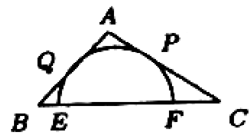
1) $m+n=3^n, m-n=1$, од каде добиваме $2n=3^n-1$. За функцијата $f(n)=3^n-2n-1$ важи $f(1)=0, f(2)=2, f(3)=20,...$ и $f(n)>0$ за $n\geq 2$. Оттука следува дека едно решение е $n=1$. (Неравенството $f(n)>0$ за $n\geq 2$ може да се докаже со индукција).

2) $m+n=3^{n-1}, m-n=3$, од каде добиваме $2n=3^{n-1}-3$. За функцијата $g(n)=3^{n-1}-2n-3$ важи $g(1)=-4, g(2)=-4, g(3)=0, g(4)=16,....$ и $g(n)>0$ за $n\geq 4$. Оттука следува дека едно решение е $n=3$. (Неравенството $g(n)>0$ за $n\geq 4$ може да се докаже со математичка индукција.)

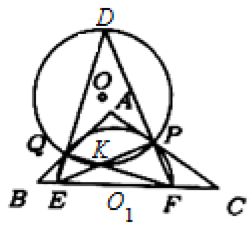
3) $m+n=3^{n-k}, m-n=3^k$ и $k<n-k$, т.е. $n>2k$, односно $n-2k\geq 1$.

Оттука добиваме $2n=3^{n-k}-3^k$. Нека $h(n)=3^{n-k}-3^k-2n$. Тогаш $h(n)>3^{n-k}-3^{\frac{n}{2}}-2n$, т.е. $h(n)>3^{\frac{n}{2}}(3^{\frac{n}{2}-k}-1)-2n$. Бидејќи $n\geq 4$, добиваме $3^{\frac{n}{2}-k}-1>1$ и $3^{\frac{n}{2}}(3^{\frac{n}{2}-k}-1)>3^{\frac{n}{2}}$, па затоа $h(n)>3^{\frac{n}{2}}-2n$. Сега лесно се докажува дека за $n\geq 4$ важи $h(n)>0$, па затоа не постојат други природни броеви n кои се решение на задачата.

3. Полукруг чиј дијаметар EF лежи на страната BC на триаголникот ABC ги допира страните AB и AC во точките Q и P, соодветно, како што е прикажано на црежот десно. Докажи дека пресечната точка K на отсечките EP и FQ припаѓа на висината на триаголникот ABC повлечена од темето A.



Решение. Нека $EQ\cap EP=D$, $EP\cap FQ=K$ и O_1 е центар на дадената полукружница. Да означиме $\measuredangle PEF=x, \measuredangle QFE=y$. Бидејќи



$$\measuredangle EQF=\measuredangle EPF=90^\circ,$$

како агли над дијаметарот EF, четириаголникот $DQKP$ е тетивен. Нека O е центарот на кружницата опишана околу четириаголникот $DQKP$. Тогаш $\overline{DO}=\overline{OK}$, $O\in DK$ и $\measuredangle QOP=2\measuredangle QDP$, т.е. $\measuredangle QOP=2(\measuredangle QDK+\measuredangle KDP)$. Точката K е ортоцентар на триаголникот EFD, па затоа $\measuredangle QOP=\measuredangle EFQ=y,$ $\measuredangle KDP=\measuredangle PEF=x$ (агли со нормални краци), што значи $\measuredangle QOP=2(x+y)$. Понатаму, четириаголникот AQO_1P исто така е тетивен, бидејќи $O_1P\perp AC$ и $O_1Q\perp AB$ (AC и AB се тангенти). Оттука следува дека

$$\begin{aligned}\measuredangle QAP&=180^\circ-\measuredangle QO_1P=180^\circ-(180^\circ-\measuredangle EO_1Q-\measuredangle FO_1P)\\&=\measuredangle EO_1Q+\measuredangle FO_1P=2(\measuredangle EFQ+\measuredangle FFP)=2(x+y).\end{aligned}$$

Бидејќи $\overline{AQ}=\overline{AP}$ (тангентни отсечки од точката A), заклучуваме дека точките O и A се совпаѓаат, па како $A\in DK$ и $DK\perp EF$, важи $AK\perp EF$, што и требаше да се докаже.

4. На тениски турнир учествувале два пати повеќе момчиња од девојчиња.

Секој пар учесници одиграл точно еден меч. Во тенисот нема нерешени резултати. Односот на бројот на бројот на победите на девојчињата спрема бројот на победите на момчињата е $7:5$. Колку учесници имало на турнирот.

Решение. Со m да го означиме бројот на мочињата, со v бројот на девојчињата и со x бројот на победите на девојчињата против момчињата. Тогаш $m=2v$, бројот на победите на момчињата против девојчињата е $2v^2-x$ и

$$\frac{\binom{v}{2}+x}{\binom{2v}{2}+2v^2-x}=\frac{7}{5}.$$

Оттука добиваме

$$5\left(\frac{v^2-v}{2}+x\right)=7\cdot\frac{4v^2-2v}{2}+14v^2-7x.$$

Со средување на полседниот израз добиваме $8x=17v^2-3v$, т.е.

$$8x=16v^2+v^2-3v.$$

Од $2v^2-x\geq 0$, т.е. $2v^2\geq x$ следува $v\geq 1$, а од $v^2-3v\leq 0$, т.е. $v(v-3)\leq 0$ следува $v\leq 3$, па затоа $1\leq v\leq 3$. Оттука со проверка добиваме $v=3$ и $m=9$.