О ОРТОЦЕНТРУ ОШТРОУГЛОГ ТРОУГЛА

Марко Кошчица, Београд

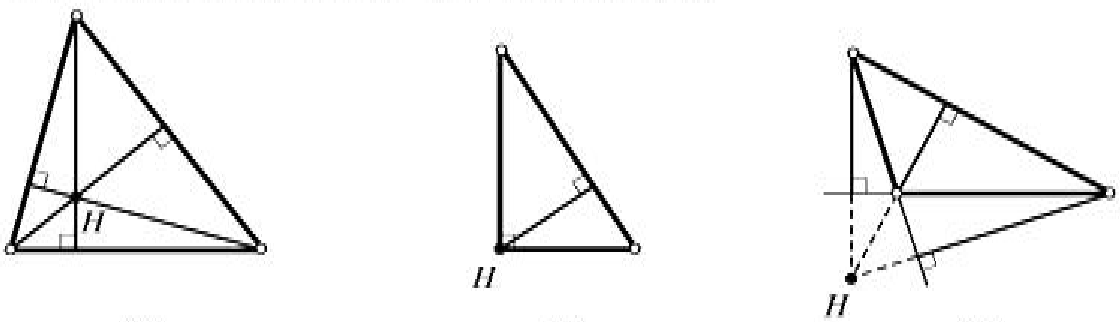
Позната је следећа теорема о висинама троугла.

Теорема 1. *Праве одређене висинама троугла секу се у једној тачки.*

Та тачка зове се ***пресек висина*** или ***ортоцентар***. Ортоцентар спада у тзв. ***значајне тачке*** троугла, а међу њима је једна од најважнијих. Из теореме 1 директно следи

Последица 1. *Кроз пресек правих које садрже две висине троугла, пролази права која садржи трећу висину тог троугла.*

Честа ознака за ортоцентар је H. Његов положај зависи од углова троугла. Тако је у оштроуглом троуглу ортоцентар унутрашња тачка (сл. 1(а)). У правоуглом је теме правог угла (сл. 1(б)). Најзад, ортоцентар тупоуглог троугла је у спољашњости троугла. Налази се са исте стране најдуже странице троугла са које је теме тупог угла (сл. 1(в)).



(а) (б) (в)

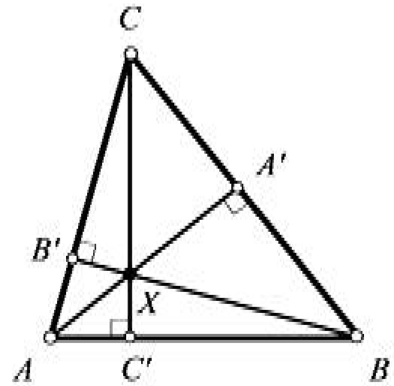
Сл.1.

Осим теореме 1, постоје и друге карактеризације ортоцентра. Кад је у питању оштроугли троугао који није једнакостраничан, важи следеће тврђење.

Теорема 2. *Нека је X тачка у унутрашњости оштроуглог ΔABC код којег је $AC \neq BC$. Тачка X је ортоцентар ΔABC ако и само ако је $CX \perp AB$ и $\measuredangle CAX = \measuredangle CBX$.*

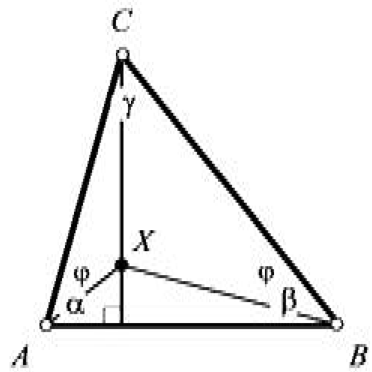
Доказ. ($\Rightarrow$) Нека су AA', BB', CC' висине оштроуглог ΔABC и нека је X ортоцентар. По теореми 1 је $AA' \cap BB' \cap CC' = \{X\}$ (сл. 2). Како се праве CX и CC' поклапају, следи $CX \perp AB$. Из правоуглих троуглова $AA'C$ и $BB'C$

имамо $\measuredangle CAX = 90^0 - \measuredangle ACA' = 90^0 - \measuredangle BCB' = \measuredangle CBX$.



Сл. 2.

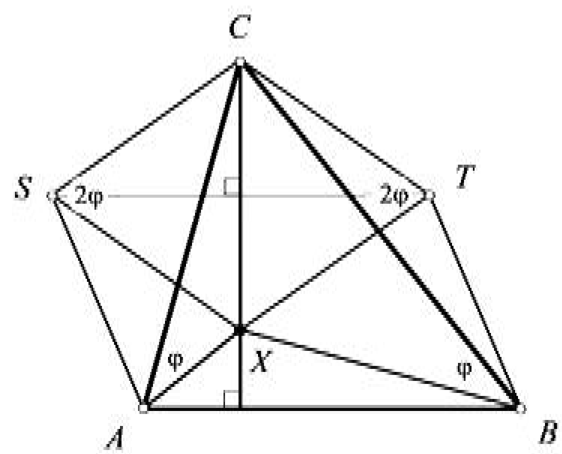
(⇐) Постоји више начина да докаже да су наведени услови довољни. Овде ће бити представљено седам. Уведимо следеће ознаке које ће бити коришћене: $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle BCA = \gamma$, $\measuredangle CAX = \measuredangle CBX = \varphi$ (сл. 3).



Сл. 3.

Први начин (елементаран)

Нека су S и T центри кругова описаних око ΔAXC и ΔBXC, редом (сл.4).



Сл. 4.

Користећи везу између централних и периферијских углова добијамо $\measuredangle CSX = 2\measuredangle CAX = 2\varphi$ и $\measuredangle CTX = 2\measuredangle CBX = 2\varphi$. Из тога следи да су углови на заједничкој основици CX једнакокраких троуглова CSX и CTX једнаки, па је $\Delta CSX \cong \Delta CTX$ (став USU). Одавде је $SA = SX = SC = TX = TC = TB$, те је четвороугао $SXTC$ ромб. Како су дијагонале ромба нормалне, следи $CX \perp ST$. Како је, по услову задатка, $CX \perp AB$, следи $ST \parallel AB$. Тврдимо да је чевороугао $ABTS$ паралеграм, тј. да је $AS \parallel BT$.

Претпоставимо супротно. С обзиром да је $SA = TB$ и $ST \parallel AB$, тада је $ABTS$ једнакокраки трапез који није паралелограм. Како је

$$\begin{aligned}\measuredangle AXC &= 180^0 - \measuredangle CAX - \measuredangle XCA = 180^0 - \varphi - (90^0 - \alpha)\\ &= 90^0 + (\alpha - \varphi) > 90^0\end{aligned}$$

угао AXC је туп, па су тачке S и X са различитих страна праве AC. (У тупоуглом троуглу центар описаног круга је спољашња тачка. Она и теме тупог угла су са различитих страна праве одређене са преостала два темена.) Сада из једнакокраког ΔSAX имамо $\measuredangle SAX = 90^0 - \frac{\measuredangle ASX}{2} = 90^0 - \measuredangle ACX = \alpha$. (Користили смо да је $\measuredangle ASX$ централни, $\measuredangle ACX$ одговарајући периферијски и да је $CX \perp AB$.) Отуда је

$$\measuredangle SAB = \measuredangle SAX + \measuredangle XAB = \alpha + (\alpha - \varphi) = 2\alpha - \varphi. \qquad (1)$$

Аналогно се добија да је

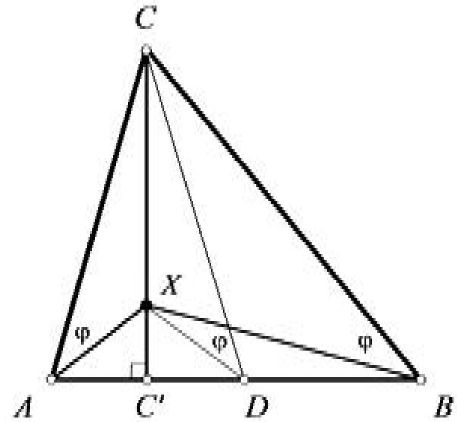
$$\measuredangle TBA = 2\beta - \varphi. \qquad (2)$$

Како су углови на основици једнакокраког трапез једнаки, из (1) и (2) следи $\measuredangle SAB = \measuredangle TBA$ и $\alpha = \beta$, односно $BC = AC$. То је немогуће због услова $AC \neq BC$.

Дакле, $AS \parallel BT$ и четвороугао $ABTS$ је паралелограм. Суседни углови паралелограма су суплементни, па је $\measuredangle SAB + \measuredangle TBA = 180^0$, односно $2\alpha - \varphi + 2\beta - \varphi = 180^0$. Следи $\varphi = \alpha + \beta - 90^0 = (180^0 - \gamma) - 90^0 = 90^0 - \gamma$. Одавде је $AX \perp BC$ и $BX \perp AC$, па је X ортоцентар ΔABC.

Други начин (елементаран)

Нека је $\{C'\} = CX \cap AB$, тј. CC' је висина ΔABC из C (сл. 5). Тачка C' је унутрашња тачка дужи AB, јер су углови α и β оштри. Како је $AC \neq BC$, можемо, без умањења општости, узети да је $BC > AC$. Тада је $BC'^2 = BC^2 - CC'^2 > AC^2 - CC'^2 = AC'^2$, одакле је $BC' > AC'$. Означимо са D тачку, такву да је $C'D = AC'$ и $A - C' - D$. Тачка D је симерична с тачком A у односу на CC' и притом, због $BC' > AC'$, припада унутрашњости дужи BC'.

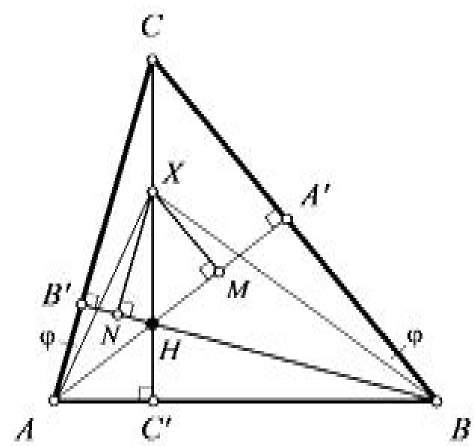


Сл. 5.

Како је $\Delta DXC \cong \Delta AXC$ (симетрични су у односу на CC'), следи $\measuredangle CDX = \measuredangle CAX = \varphi$. Сада из услова задатка $\measuredangle CAX = \measuredangle CBX = \varphi$ следи $\measuredangle CDX = \measuredangle CBX = \varphi$ и како су тачке B и D са исте стране праве CX, четвороугао $DBCX$ је тетивни. Из тога следи да је $\measuredangle XCD = \measuredangle XBD$ (периферијски углови над тетивом XD). Како је, због $\Delta DXC \cong \Delta AXC$, $\measuredangle XCD = \measuredangle XCA = 90^0 - \alpha$, следи $\measuredangle XBD = 90^0 - \alpha$, односно $\beta - \varphi = 90^0 - \alpha$. Одатле је $\varphi = \alpha + \beta - 90^0 = (180^0 - \gamma) - 90^0 = 90^0 - \gamma$. Из тога следи $AX \perp BC$ и $BX \perp AC$, па је X ортоцентар ΔABC.

Трећи начин (елементаран)

Нека су AA', BB', CC' висине и H, $\{H\} = AA' \cap BB' \cap CC'$, ортоцентар ΔABC. Претпоставимо да је $X \neq H$ (сл. 6) и да је распоред тачака $H - X - C$. Уколико је $H - X - C'$, доказ је сличан.



Сл. 6.

Нека су M и N редом подножја нормала из тачке X на висине AA' и BB'. Из сличности троуглова MXH и $A'CH$, односно NXH и $B'CH$, добијамо

$XM = \frac{XH}{CH}CA'$ и $XN = \frac{XH}{CH}CB'$. Дељењем ових двеју једнакости добијамо

$$\frac{XM}{XN} = \frac{CA'}{CB'}. \quad (1)$$

Како је

$$\measuredangle XAM = \alpha - \varphi - \measuredangle MAB = \alpha - \varphi - (90^0 - \beta) = \alpha + \beta - \varphi - 90^0$$

и

$$\measuredangle XBN = \beta - \varphi - \measuredangle NBA = \beta - \varphi - (90^0 - \alpha) = \alpha + \beta - \varphi - 90^0,$$

следи $\Delta MXA \sim \Delta NXB$, па је

$$\frac{XM}{XN} = \frac{XA}{XB}. \quad (2)$$

Даље, из $\measuredangle AA'B = \measuredangle AB'A = 90^0$ следи да је четвороугао $ABA'B'$ тетивни, па је $\measuredangle B'A'C = \alpha$. Стога је $\Delta A'B'C \sim \Delta ABC$, одакле је

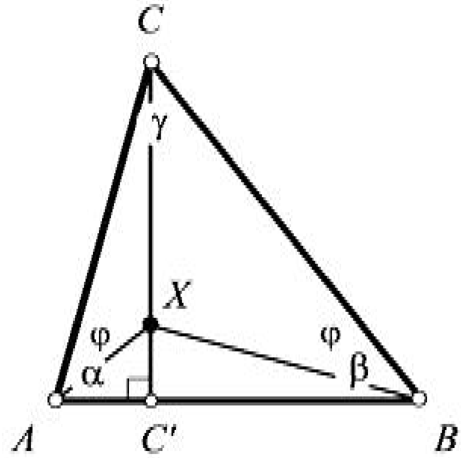
$$\frac{CA'}{CB'} = \frac{CA}{CB}. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) добијамо да је $\frac{XA}{XB} = \frac{CA}{CB}$, односно $\frac{XA}{CA} = \frac{XB}{CB}$. Како је, по услову теореме $\measuredangle CAX = \measuredangle CBX = \varphi$, следи $\Delta CAX \sim \Delta CBX$, одакле је $\measuredangle ACX = \measuredangle BCX$. То даље повлачи $90^0 - \alpha = 90^0 - \beta$, $\alpha = \beta$ и $BC = AC$. Но, то је у контрадикцији с условом $AC \neq BC$.

Дакле, $X \equiv H$, тј. X је ортоцентар ΔABC.

Четврти начин (примена тригонометрије)

Применом синусне теореме на ΔCAX и ΔCBX (сл. 7), добијамо да је $\frac{\sin \measuredangle AXC}{\sin \measuredangle CAX} = \frac{CA}{CX}$ и $\frac{\sin \measuredangle BXC}{\sin \measuredangle CBX} = \frac{CB}{CX}$.



Сл. 7.

Како је $\measuredangle AXC$ спољашњи за $\Delta AC'X$, имамо да је $\measuredangle AXC = 90^0 + (\alpha - \varphi)$. Слично је $\measuredangle BXC = 90^0 + (\beta - \varphi)$. Тако добијамо $\frac{\sin(90^0+\alpha-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{CA}{CX}$ и $\frac{\sin(90^0+\beta-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{CB}{CX}$. Деобом левих и десних страна и имајући у виду да је $\sin(90^0+\theta) = \cos\theta$, добијамо

$$\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} = \frac{CA}{CB}, \tag{1}$$

Применом синусне теореме на ΔABC имамо

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{CA}{CB}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи $\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ и $\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi) = \sin\beta\cos(\beta-\varphi)$. Користећи формуле за претварање збира тригонометријских функција у производ и обратно, добијамо следеће еквивалентне једнакости

$$\sin(2\alpha-\varphi) + \sin\varphi = \sin(2\beta-\varphi) + \sin\varphi$$

$$\sin(2\alpha-\varphi) - \sin(2\beta-\varphi) = 0$$

$$2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\varphi) = 0.$$

Из последње је $\sin(\alpha-\beta) = 0$ или $\cos(\alpha+\beta-\varphi) = 0$. По претпоставци теореме је $AC \neq BC$, односно $\alpha \neq \beta$. Како су, уз то, α и β оштри углови, следи $0^0 < |\alpha-\beta| < 180^0$, па је $\sin(\alpha-\beta) \neq 0$. Стога је $\cos(\alpha+\beta-\varphi) = 0$. Како је $0^0 < \alpha+\beta-\varphi < \alpha+\beta < 180^0$, следи $\alpha+\beta-\varphi = 90^0$. Из тога је $\varphi = \alpha+\beta-90^0 = (180^0-\gamma) - 90^0 = 90^0-\gamma$, па, као у другом доказу, закључујемо да је тачка X ортоцентар ΔABC.

Пети начин (помоћу скаларног производа вектора)

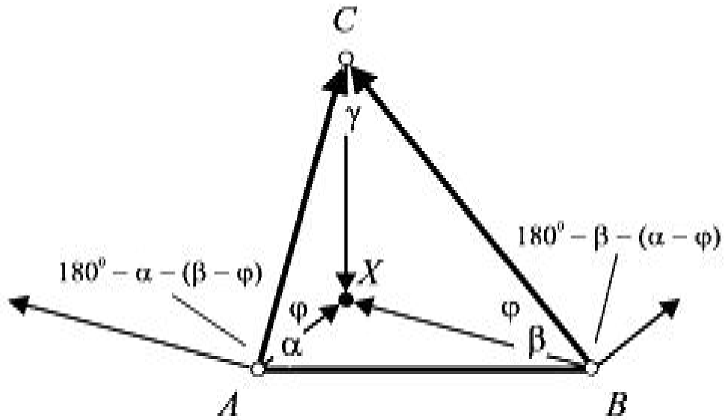
Скаларни производ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ дефинише се као

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |u|\cdot|v|\cdot\cos\measuredangle(u,v).$$

За скаларни производ важи следеће тврђење.

Лема 1. *Ако су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ненула вектори, тада је $\vec{u}\perp\vec{v}$ ако и само ако је $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.*

По услову теореме је $CX \perp AB$, па је, на основу леме 1, $\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$. Показаћемо да је и $\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ (сл. 8). Притом ћемо користити комутативност скаларног производа, као и дистрибутивност према операцији сабирања вектора.



Сл. 8.

Тако имамо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AX}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CX}\right)\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+0+\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AX}\right)\cdot\overrightarrow{AC}\\ &=\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

односно

$$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

Како је $\measuredangle\left(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{BC}\right)=180^0-\beta-(\alpha-\varphi)=\gamma+\varphi$ и $\measuredangle(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{AC})=180^0-\alpha-(\beta-\varphi)=\gamma+\varphi$, тј. $\measuredangle\left(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{BC}\right)=\measuredangle(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{AC})$ (сл. 8), из (1) добијамо да је

$$AX\cdot BC\cdot\cos(\gamma+\varphi)=BX\cdot AC\cdot\cos(\gamma+\varphi).$$

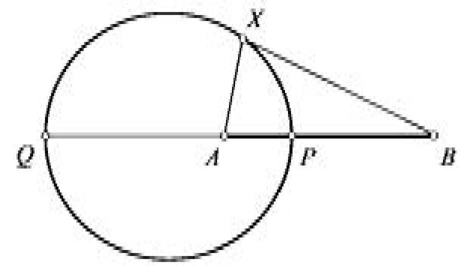
Претпоставимо да је $\cos(\gamma+\varphi)\neq 0$. Тада последња једнакост, након деобе са $\cos(\gamma+\varphi)$, прелази у $AX\cdot BC=BX\cdot AC$, одакле је

$$AX:BX=AC:BC. \qquad (2)$$

У даљем доказу користићемо следеће тврђење из еуклидске планиметрије.

Лема 2. *Нека су A и B две утврђене тачке у равни и λ ($\lambda\neq 1$) позитиван реалан број. Скуп свих тачака X у равни за које важи $AX:BX=\lambda$ је круг са пречником PQ, где су P и тачке праве AB, такве да је $AP:BP=AQ:BQ=\lambda$. Притом је $A-P-B$ и $Q-A-B$ за $\lambda<1$, односно $A-B-Q$ за $\lambda>1$.*

Тај круг се зове ***Аполонијев круг***. На сл. 9 приказан је Аполонијев круг за $\lambda < 1$.



Сл. 9.

Како важи (2) и како је $AC \neq BC$, тачке C и X припадају Аполонијевом кругу за тачке A и B и $\lambda = \frac{AC}{BC} \neq 1$. По услову теореме, тачке C и X леже са исте стране праве AB и притом је $CX \perp AB$. То значи да нормала CX на AB има две заједничке тачке с једним од полукругова с пречником PQ Аполонијевог круга. Контрадикција.

Према томе, $\cos(\gamma + \varphi) = 0$. Тиме је доказано да је скаларни производ $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, па је, на основу леме 1, $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BC}$, тј. $AX \perp BC$. Како је већ $CX \perp AB$, X је ортоцентар ΔABC.

Шести начин (помоћу аналитичке геометрије)

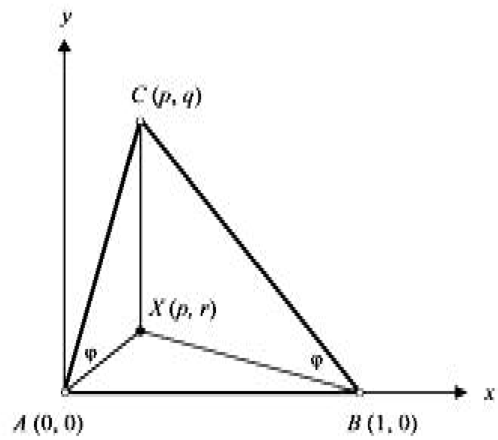
У доказу ћемо користити следеће познате резултате из аналитичке геометрије.

Лема 3. *Ако права пролази кроз тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, где је $x_1 \neq x_2$, њен коефицијент правца једнак је* $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Лема 4. *Ако је α оштар угао између правих датих једначинама $y = k_1 x + n_1$ и $y = k_2 x + n_2$, које нису узајамно нормалне, тада је* $\operatorname{tg} \alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Лема 5. *Праве дате једначинама $y = k_1 x + n_1$ и $y = k_2 x + n_2$ су узајамно нормалне ако и само ако је $k_1 k_2 = -1$.*

Изаберимо Декартов правоугли координатни систем у равни ΔABC, тако да тачке A и B имају редом координате $(0,0)$ и $(1,0)$ (сл. 10).



Сл. 10.

Нека тачка C има координате (p, q). Како су углови α и β оштри, то је $0 < p < 1$. Како је и угао γ оштар, тачка C је у спољашњости круга k с пречником AB. Његова једначина је $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. С обзиром да тачка $\left(p, \sqrt{p(1-p)}\right)$ лежи на кругу k, а $C(p, q)$ је у његовој спољашњости, следи $q > \sqrt{p(1-p)}$. Даље, тачка X је у унутрашњости ΔABC и притом је $CX \perp AB$. Отуда је $X(p, r)$, где је $0 < r < q$.

Означимо са k_{MN} коефицијент правца праве која пролази кроз тачке M и N, чије су апсцисе различите. Тада је, на основу леме 3, $k_{AC} = \frac{q}{p}$, $k_{AX} = \frac{r}{p}$, $k_{BC} = \frac{q}{p-1}$ и $k_{BX} = \frac{r}{p-1}$. Оштар угао између правих AC и AX једнак је φ, па је, на основу леме 4,

$$\operatorname{tg} \varphi = \left|\frac{\frac{r}{p} - \frac{q}{p}}{1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{r}{p}}\right| = \frac{\frac{q}{p} - \frac{r}{p}}{1 + \frac{qr}{p^2}} = \frac{p(q-r)}{p^2 + qr}. \qquad (1)$$

Оштар угао између правих BC и BX је такође φ, па је

$$\operatorname{tg} \varphi = \left|\frac{\frac{r}{p-1} - \frac{q}{p-1}}{1 + \frac{q}{p-1} \cdot \frac{r}{p-1}}\right| = \frac{\frac{q}{p-1} - \frac{r}{p-1}}{1 + \frac{qr}{(p-1)^2}} = \frac{(1-p)(q-r)}{(p-1)^2 + qr}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) је $\frac{p(q-r)}{p^2+qr} = \frac{(1-p)(q-r)}{(p-1)^2 + qr}$, што након трансформисања даје

$$(1-2p)qr = p(1-p)(1-2p). \qquad (3)$$

Како је $AC^2 = p^2 + q^2$ и $BC^2 = (p-1)^2 + q^2$ и како је, по услову теореме, $AC \neq BC$, следи $p^2 \neq (p-1)^2$. Отуда је $0 \neq 1 - 2p$, лева и десна страна (3) се могу скратити са $1 - 2p$ и добијамо да је $r = \frac{p(1-p)}{q}$. Из тога следи

$$k_{AX} \cdot k_{BC} = \frac{r}{p} \cdot \frac{q}{p-1} = \frac{\frac{p(1-p)}{q}}{p} \cdot \frac{q}{p-1} = -1 \ .$$

На основу леме 5, праве AX и BC су узајамно нормалне и X је ортоцентар ΔABC.

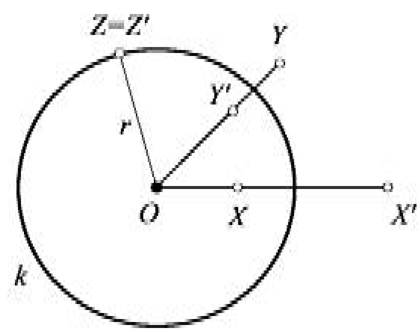
Седми начин (помоћу инверзије у односу на круг)

Пре него што представимо још један доказ теореме 1, даћемо дефиницију и основне особине инверзије у односу на круг.

Дефиниција. Нека је ε раван и $k(O,r)$ круг у тој равни. ***Инверзија*** у односу на круг k је пресликавање $\psi_k\colon \varepsilon\backslash\{O\} \longrightarrow \varepsilon\backslash\{O\}$ које тачки $X \neq O$ придружује тачку X', $\psi_k(X) = X'$, такву да важи:

1^0 X' припада полуправој OX;

2^0 $OX \cdot OX' = r^2$ (сл. 11)



Сл. 11.

Круг k, тачка O и r^2 – квадрат полупречника круга k, зову се редом *круг*, *центар* и *коефицијент инверзије*. Инверзија, између осталих, има следеће особине.

Лема 6. *Инверзија у односу на круг* $k(O,r)$ *је бијективно пресликавање скупа* $\varepsilon\backslash\{O\}$ на $\varepsilon\backslash\{O\}$.

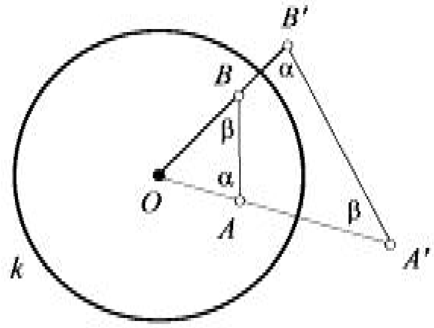
Лема 7. *Инверзија у односу на круг* k *је инволуција, тј. за сваку тачку* $X \in \varepsilon\backslash\{O\}$, *из* $\psi_k(X) = X'$ следи $\psi_k(X') = X$.

Лема 8. (*а*) *Тачка* X *је фиксна* (*инваријантна*) *тачка инверзије* ψ_k, *ако и само ако* $X \in k$.

(*б*) *Инверзија* ψ_k *пресликава унутрашњост круга* k (*без тачке* O) *на спољашњост и обратно* (*сл.* 11).

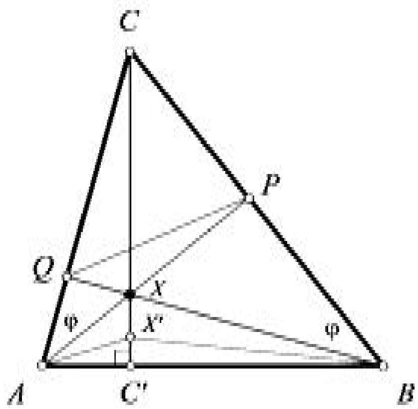
Лема 9. *Нека је* ψ_k *инверзија у односу на круг* $k(O,r)$ *и нека су* $A, B \in \varepsilon\backslash\{O\}$ *тачке неколинеарне са центром* O *(сл. 12). Ако је* $\psi_k(A) = A'$ *и* $\psi_k(B) = B'$, *тада је*

(*а*) $\measuredangle OA'B' = \measuredangle OBA$ *и* $\measuredangle OB'A' = \measuredangle OAB$;
(*б*) $\Delta OA'B' \sim \Delta OBA$;
(*в*) *тачке* A, A', B, B' *припадају једном кругу.*



Сл. 12.

Пређимо сад на доказ теореме 1. Нека је $CX \cap AB = \{C'\}$, $AX \cap BC = \{P\}$ и $BX \cap BC = \{Q\}$ (сл. 13).



Сл. 14.

Како је $\measuredangle QAP = \measuredangle QBP$, четвороугао $ABPQ$ је тетивни. Ако је k_1 описани круг око $ABPQ$ и p_1 потенција тачке C у односу на k_1, тада је

$$p_1 = CP \cdot CB = CQ \cdot CA. \tag{1}$$

Ако са ψ_k означимо инверзију у односу на круг $k(C, \sqrt{p_1})$, тада је, на основу (1), $\psi_k(P) = B$ и $\psi_k(Q) = A$. Нека је $\psi_k(X) = X'$. Тврдимо да је $X' = C'$.

Претпоставимо супротно, тј. $X' \neq C'$. Како је четвороугао $ABPQ$ тетивни, важи

$$\measuredangle CPQ = \measuredangle BAQ = \alpha \tag{2}$$
$$\measuredangle CQP = \measuredangle ABP = \beta \tag{3}$$
$$\measuredangle PQX = \measuredangle PQB = \measuredangle PAB = \alpha - \varphi \tag{4}$$
$$\measuredangle QPX = \measuredangle QPA = \measuredangle QBA = \beta - \varphi. \tag{5}$$

Из (3) и (4) добијамо да је $\measuredangle CQX = \measuredangle CQP + \measuredangle PQX = \beta + (\alpha - \varphi) = \alpha + \beta - \varphi$. Слично, из (1) и (5) следи $\measuredangle CPX = \measuredangle CPQ + \measuredangle QPX = \alpha + (\beta - \varphi) = \alpha + \beta - \varphi$, одакле је

$$\measuredangle CQX = \measuredangle CPX. \tag{6}$$

Сада из леме 9(а) и (6) добијамо

$$\measuredangle CX'A = \measuredangle CQX = \measuredangle CPX = \measuredangle CX'B. \tag{7}$$

Тачке C и X' могу бити са исте стране праве AB, као на сл. 14, или са различитих страна. Међутим, лако се види да у оба случаја из (7) следи $\measuredangle AX'C' = \measuredangle BX'C'$. Како је, због услова $CX \perp AB$, $\measuredangle X'C'A = \measuredangle X'C'B = 90^0$, на основу става (USU) следи $\Delta AC'X' \cong \Delta BC'X'$. То повлачи $AC' = BC'$, затим $\Delta AC'C \cong \Delta BC'C$ и $AC = BC$. Но то је у контрадикцији с условом теореме $AC \neq BC$.

Дакле, $X' \equiv C'$. Користећи поново лему 9(а), добијамо да је $\measuredangle XQC = \measuredangle AC'C = 90^0$, тј. $BX \perp AC$, па је тачка X ортоцентар ΔABC.

Литература

[1] Митровић М., Огњановић С., Вељковић М., Петковић Љ., Лазаревић Н., *Геометрија, уџбеник са збирком задатака за први разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2000.

[2] Лукић М., *Инверзија*, srb.imomath.com.

[3] Ђукић Д., *Инверзија*, srb.imomath.com.

[4] Матић И., *Инверзија*, srb.imomath.com.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2016/17 година