XIV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика ‘86-‘95
подготвена од Илија Јанев, Никола Петрески и Милчо Аврамоски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Докажи дека бројот $S=4a^2+3a+5$, каде што a е цел број, е делив со 6, ако и само ако a не е делив ниту со 2, ниту со 3.

2. Од чаша полна со млеко, Сашо испил една петина и ја дополнил со кафе. Потоа пак испил една петина од полната чаша и пак ја дополнил со кафе. Откако и по трет пат испил една петина од содржината на чашата, во неа останале $28\,cm^3$ повеќе млеко од кафе. Одреди го волуменот на чашата.

3. Во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC избрана е точка O, од која страната AC се гледа под агол од 150°. Докажи дека отсечките $m=\overline{OA}$, $n=\overline{OB}$ и $s=\overline{OC}$ се страни на правоаголен триаголник.

4. На страние AB и BC на ромбот $ABCD$, со остар агол од 60°, избрани се точките M и N, така што $\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{AB}$. Точката P е симетрична на точката N во однос на правата CD. Докажи дека $AD \parallel MP$.

XIV (89.VII.1)

При делење на произволен цел број со 6, можни остатоци се: 0, 1, 2, 3, 4 или 5. Следствено, секој цел број a може да се запише (претстави) во еден од видовите:

$$a=6k,\quad a=6k+1,\quad a=6k+2,\quad a=6k+3,\quad a=6k+4,\quad a=6k+5,$$

каде што $k\in\mathbb{N}_0$. Ќе ја разгледаме одделно секоја од овие можности.

1) Нека $a=6k$, т.е. a е делив и со 2 и со 3. Тогаш за S добиваме:

$$S=4a^2+3a+5=4\cdot 36k^2+3\cdot 6k+5=6(24k^2+3k)+5,$$

што значи дека S не е делив со 6 (има остаток 5).

2) Нека $a=6k+2$, т.е. a е делив со 2, тогаш за S наоѓаме:

$$S=4(36k^2+24k+4)+3(6k+2)+5=144k^2+114k+27=$$
$$=6(24k^2+19k+4)+3,$$

т.е. S не е делив со 6.

3) Нека $a=6k+3$, т.е. a е делив со 3, тогаш:

$$S=6(24k^2+27k+8)+2,$$ т.е. S не е делив со 6.

4) Нека $a=6k+4$, т.е. a е делив со 2, тогаш:

$$S=6(24k^2+35k+13)+3,$$ т.е. S не е делив со 6.

5) Нека $a=6k+1$, т.е. a не е делив ни со 2, ни со 3, тогаш:

$$S=4(36k^2+12k+1)+3(6k+1)+5=6(24k^2+11k+2),$$

што значи дека S е делив со 6.

6) Нека $a=6k+5$, т.е. a не е делив ни со 2, ни со 3, тогаш:

$$S=6(24k^2+43k+20)$$ е делив со 6.

Од сето ова можеме да заклучиме дека S е делив со 6 ако и само ако a не е делив ниту со 2, ниту со 3.

XIV (89.VII.2)

Прв начин. Откако Сашо испил $\frac{1}{5}$ од млекото и со $\frac{1}{5}$ ја дополнил чашата со кафе, во неа ќе има 80% млеко и 20% кафе. Од оваа содржина Сашо испил $\frac{1}{5}$ од млекото и $\frac{1}{5}$ од кафето, т.е. од млекото испил 20% од постојните 80% млеко, па во чашата останале 64% од млекото. Следствено, содржината на кафето е 36%, т.е. за 28% помала од онаа на млекото. Бидејќи Сашо испил уште $\frac{1}{5}$ од чашата, во неа останале $\frac{4}{5}$ од содржината, при што количината на млекото е за $28\,cm^3$ поголема од количината на кафето. Значи, за волуменот V на чашата имаме:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{28}{100}V=28,\quad V=125\,cm^3.$$

Втор начин. Состојбата на млекото и кафето , во волуменски единици, ќе ја претставиме во следната табела:

	млеко	кафе
Во почетокот	1	0
По првото пиење и долевање	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
По второто пиење и долевање	$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{9}{25}$
По третото пиење	$\frac{4}{5}\cdot\frac{16}{25}=\frac{64}{125}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{125}$

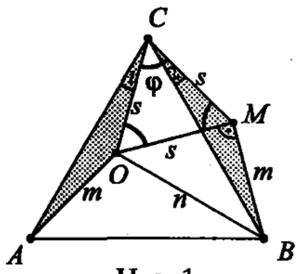
Бидејќи разликата од овие волумени е $28\,cm^3$, добиваме:

$$\left(\frac{64}{125}-\frac{36}{125}\right)V=28,\qquad V=125\,cm^3.$$

XIV (89.VII.3)

Прв начин. Нека точката O е таква што страната AC на рамностраниот ΔABC се гледа под агол од $150°$ (црт. 1). Треба да докажеме дека отсечките $m=\overline{OA}$, $n=\overline{OB}$ и $s=\overline{OC}$ се страни на правоаголен триаголник. За таа цел го ротираме ΔAOC околу темето C за $60°$ и го добиваме триаголникот BMC; притоа:

$$\Delta AOC \cong \Delta BMC\text{, т.е. } \overline{AO}=\overline{BM}=m.$$



Црт. 1

Очигледно, триаголникот COM е рамностран, бидејќи $\overline{CO}=\overline{CM}$ и $\measuredangle OCM=60°$. Оттука следува дека: $\overline{OM}=\overline{OC}=s$ и $\measuredangle OMC=60°$.

Следствено, страните на ΔBMO се еднакви на отсечките *m, n* и *s* и притоа $\measuredangle BMO=\measuredangle BMC-\measuredangle OMC=150°-60°=90°$, т.е. отсечките *m, n* и *s* се страни на правоаголен триаголник.

Втор начин. Да конструираме рамностран триаголник над отсечката $\overline{CO}=s$; нека тоа е ΔCOM (црт. 1). Ќе докажеме дека $\Delta AOC\cong\Delta BMC$. Имаме:

1) $\overline{AC}=\overline{BC}$ - како страни на ист рамностран триаголник;

2) $\measuredangle 1=\measuredangle 2$, бидејќи $\measuredangle 1=60°-\varphi$ и $\measuredangle 2=60°-\varphi$;

3) $\overline{CO}=\overline{CM}=s$, по конструкција;

па според признакот САС следува дека $\Delta AOC\cong\Delta BMC$. Но, тогаш $\overline{BM}=\overline{AO}=s$, т.е. страните на ΔBMO се токму отсечките *m, n, s.*

Бидејќи $\measuredangle BMC=\measuredangle AOC=150°$ и $\measuredangle OMC=60°$, следува дека

$$\measuredangle BMO=\measuredangle BMC-\measuredangle OMC=150°-60°=90°,$$

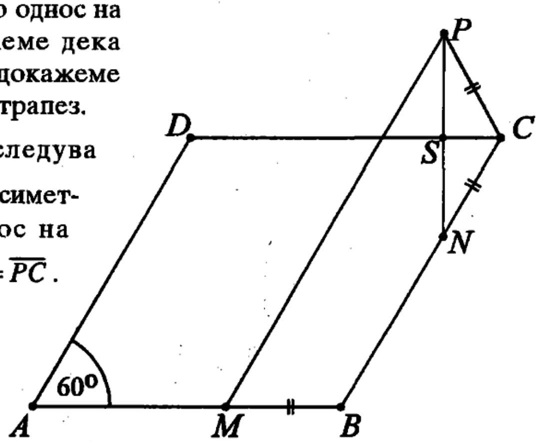
т.е. ΔOBM е правоаголен. Значи, отсечките *m, n, s* - се страни на правоаголен триаголник.

XIV (89.VII.4)

Нека точките M и N се избрани така што $\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{AB}$ и нека точката P е симетрична на точката N во однос на правата CD. Треба да докажеме дека $MP \parallel AD$ (црт. 2). За таа цел ќе докажеме дека четириаголникот $PMBC$ е трапез.

Од $\overline{MB}+\overline{BN}=\overline{AB}=\overline{BC}$ следува $\overline{MB}=\overline{NC}$. Бидејќи точката P е симетрична на точката N во однос на правата CD, следува дека $\overline{NC}=\overline{PC}$. Значи:

(1) $$\overline{MB}=\overline{PC}.$$



Црт. 2

Очигледно, $\measuredangle ABC=120°$, а $\measuredangle PCB=\measuredangle PCS+\measuredangle SCN=60°+60°=120°$. Значи:

(2) $$\measuredangle MBC=\measuredangle PCB$$

Од (1) и (2) следува дека четириаголникот $PMBC$ е рамнокрак трапез, т.е. $MP \parallel BC$. Но $BC \parallel AD$, па конечно следува дека $MP \parallel AD$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Ако $a+b+c=1$, тогаш $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$. Докажи!

2. Еден велосипедист тргнал од селото A кон градот B, оддалечен 28 *km*. Кога поминал 2 *km*, велосипедистот го стигнал камион, којшто по извесно време стигнал во градот B, се задржал во него 22 минути и на враќање кон селото A го сретнал велосипедистот на растојание 8 *km* од градот B. Одреди ги брзините на камионот и на велосипедистот, ако велосипедистот пристигнал во градот B во исто време кога и камионот пристигнал во селото A.

3. Од темето C на паралелограмот $ABCD$ ($\overline{AC} > \overline{BD}$) спуштени се нормалите CE и CF на продолжението на страните AB и AD. Докажи дека $\overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \overline{AF} = \overline{AC}^2$.

4. Во правилна четириаголна пирамида со основен раб 12 *cm* и висина 8 *cm*, вишана е коцка, така што една нејзина страна лежи на основата на пирамидата, а четири темиња лежат на бочните рабови на пирамидата. Одреди го односот на плоштините на коцката и пирамидата.

XIV (89.VIII.1)

За кои било реални броеви x и y важи:

$$(x-y)^2 \geq 0, \ x^2+y^2-2xy \geq 0, \text{ т.е. } x^2+y^2 \geq 2xy,$$

при што знакот за еднаквост важи само ако $x=y$.

Со квадрирање на равенството $a+b+c=1$ добиваме:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$$

$$a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2) \geq 1$$

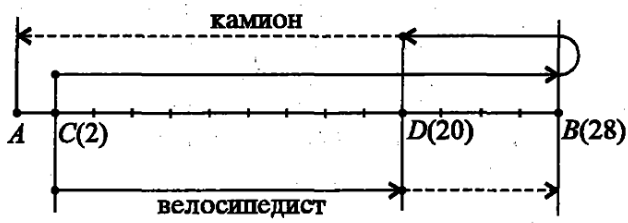
$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 1$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$$

Притоа, знакот за еднаквост важи само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

XIV (89.VIII.2)

Нека x е брзината на велосипедистот, а y - брзината на камионот. Велосипедистот и камионот се сретнуваат во точките C и D оддалечени 2 km и 20 km од селото A. Додека велосипедистот го минал патот $\overline{CD}=18\,km$, камионот го изминал патот $\overline{CB}+\overline{BD}=34\,km$ и притоа се задржал 22 минути, т.е. $\frac{11}{30}$ од часот, во градот B. Значи, велосипедистот се движел $\frac{18}{x}$ часа, а камионот $\frac{34}{y}+\frac{11}{30}$ часа, т.е.



Црт. 3

(1) $$\frac{18}{x}=\frac{34}{y}+\frac{11}{30}.$$

Додека велосипедистот го изминал патот $\overline{DB}=8\,km$, камионот го изминал патот $\overline{DA}=20\,km$, т.е. неговата брзина е 2,5 пати поголема од брзината на велосипедистот. Значи:

(2) $$y=2{,}5x.$$

Заменувајќи (2) во (1) добиваме:

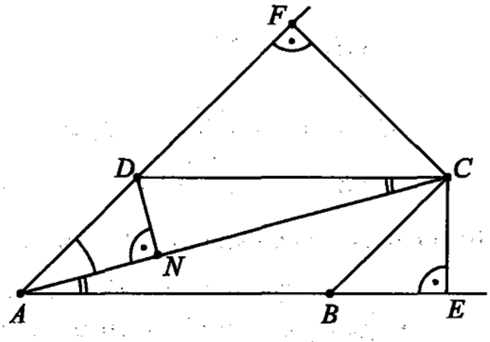
$$\frac{18}{x}=\frac{34}{2{,}5x}+\frac{11}{30}\quad /\cdot 30x$$

$$540=408+11x,\quad x=12;\ \text{тогаш}\ y=30.$$

Следствено, брзината на велосипедистот е 12 km/h, а на камионот 30 km/h.

XIV (89.VIII.3)

Нека *CE* и *CF* се нормални на страните *AB* и *AD* на паралелограмот *ABCD* (црт. 4). Треба да докажеме дека $\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}^2$. За таа цел повлекуваме $DN\perp AC$, па имаме:



Црт. 4

1) $\Delta AND \sim \Delta AFC$ како правоаголни триаголници со заеднички остар агол кај темето *A*, од каде што следува:

$$\overline{AN}:\overline{AD}=\overline{AF}:\overline{AC}$$

(1) $$\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}\cdot\overline{AN}$$

2) $\Delta AEC \sim \Delta CND$, како правоаголни триаголници кои имаат еднаков по еден остар агол, т.е. $\measuredangle EAC=\measuredangle NCD$, како наизменични, од каде што следува:

$$\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{NC}:\overline{CD},\qquad (\overline{CD}=\overline{AB})$$

(2) $$\overline{AB}\cdot\overline{AE}=\overline{AC}\cdot\overline{NC}$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме:

$$\begin{aligned}\overline{AD}\cdot\overline{AF}+\overline{AB}\cdot\overline{AE}&=\overline{AC}\cdot\overline{AN}+\overline{AC}\cdot\overline{NC}\\&=\overline{AC}(\overline{AN}+\overline{NC})\\&=\overline{AC}\cdot\overline{AC}.\end{aligned}$$

Значи, докажавме дека $\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}^2$.

XIV (89.VIII.4)

Ќе ги користиме ознаките на цртежот 5. Очигледно е дека $\Delta AOS \sim \Delta PQS$, од каде што следува:

$$\overline{AO}:\overline{OS}=\overline{PQ}:\overline{QS}$$

Имајќи предвид дека:

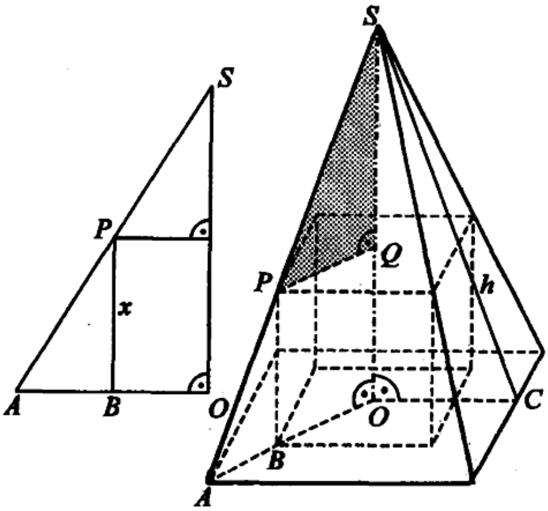
$$\overline{AO}=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

$$\overline{OS}=8$$

$\overline{BP}=x,$ раб на коцката

$$\overline{QS}=8-x$$

$$\overline{PQ}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$$



Црт. 5

добиваме:

$$6\sqrt{2}:8=\frac{x\sqrt{2}}{2}:(8-x)$$

$$6\sqrt{2}(8-x)=8\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2} \qquad /:2\sqrt{2}$$

$$3(8-x)=2x, \qquad x=4{,}8.$$

Значи, работ на коцката е 4,8 *cm*, па нејзината плоштина е:

$$P_k=6\cdot x^2=6\cdot 4{,}8^2=138{,}24; \qquad P_k=138{,}24\,cm^2.$$

За да ја одредиме плоштината на пирамидата, треба да ја најдеме нејзината апотема h. Применувајќи ја Питагоровата теорема за правоаголниот ΔOCS наоѓаме:

$$h^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+H^2=36+64=100, \quad h=10\,cm.$$

Тогаш:

$$P_n=B+M=a^2+4\cdot\frac{a\cdot h}{2}=144+240; \quad P_n=384\,cm^2$$

За односот на плоштините на коцката и пирамидата наоѓаме:

$$P_k:P_n=138{,}24:384=13824:38400=9:25.$$

Следствено, бараниот однос е 9:25.