**Републички натпревар 2026**

**I година**

**1.** Најди ги сите природни броеви $a$ за кои важи

$$(a^2+2a+9)^2+3a(a^2+2a+9)-4a^2=4131.$$

**Решение.** Ќе ја разложиме левата страна на даденото равенство на множители.

*Прв начин.* Имаме

$$\begin{aligned}(a^2+2a+9)^2+3a(a^2+2a+9)-4a^2 &=\\ &=(a^2+2a+9)^2-a(a^2+2a+9)+4a(a^2+2a+9)-4a^2\\ &=(a^2+2a+9)(a^2+2a+9-a)+4a(a^2+2a+9-a)\\ &=(a^2+2a+9)(a^2+a+9)+4a(a^2+a+9)\\ &=(a^2+a+9)(a^2+6a+9)=\\ &=(a^2+a+9)(a+3)^2\end{aligned}$$

*Втор начин.* Ќе направиме замена $a^2+2a+9=x$, со што тогаш равенството добива облик:

$$\begin{aligned}(a^2+2a+9)^2+3a(a^2+2a+9)-4a^2 &= x^2+3ax-4a^2=x^2-ax+4ax-4a^2\\ &=x(x-a)+4a(x-a)=(x+4a)(x-a)\\ &=(a^2+6a+9)(a^2+a+9)=(a+3)^2(a^2+a+9).\end{aligned}$$

Сега, даденото равенство добива облик

$$(a^2+a+9)(a+3)^2=4131.$$

Бидејќи $4131=3^5\cdot 17=(3^2)^2\cdot 51=9^2\cdot 51$, а $(a+3)^2$ е полн квадрат поголем или еднаков на $4^2$, следува дека $(a+3)^2=9^2$ и $a^2+a+9=51$. Од тука $a=6$, а со проверка се потврдува дека важи $6^2+6+9=51$.

**2.** Одреди ги сите природни броеви $n$ за кои важи

$$n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2,$$

каде $d_1<d_2<d_3<d_4$ се најмалите четири природни делители на бројот $n$.

**Решение.** Знаеме дека 1 е делител на секој природен број, па најмалиот од делителите е $d_1=1$.

Да претпоставиме дека бројот $n$ е непарен. Тогаш сите негови делители се непарни, па може да запишеме

$$d_1 = 1,\ \ d_2 = 2a+1,\ \ d_3 = 2b+1,\ \ d_4 = 2c+1,$$

од каде имаме:

$$\begin{aligned} n &= 1+(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2 = \\ &= 1+4a^2+4a+1+4b^2+4b+1+4c^2+4c+1 = \\ &= 4(a^2+a+b^2+b+c^2+c+1). \end{aligned}$$

Последново повлекува дека $n$ е парен број, што противречи на претпоставката. Значи, бројот $n$ мора да е парен, односно $n$ е делив со 2, па вториот по големина делител е $d_2 = 2$. Сега важи

$$n = 1^2+2^2+d_3^2+d_4^2 = 5+d_3^2+d_4^2,$$

од каде следува дека збирот $d_3^2+d_4^2$ е непарен број, односно еден од делителите $d_3$ и $d_4$ е непарен, а другиот е парен.

Да претпоставиме дека $d_3$ е непарен, но не е прост број. Тогаш $d_3$ има барем еден прост непарен делител $p,\ 3 \le p < d_3,$ при што јасно, важи и $p|n$. Последново противречи дека $d_3$ е следниот по големина делител на $n$. Значи мора $d_3$ да е прост, односно $d_3 = p \ge 3$, каде $p$ е најмалиот непарен прост делител на $n$. Сега $n = 5+p^2+d_4^2$, каде $d_4$ е парен. За делителите важи $1<2<p<d_4$, па ќе покажеме дека првиот следен по големина парен делител е точно $d_4 = 2p$. Прво да забележиме дека НЗД$(2,p)=1$ па $2p|n$. Од друга страна, ако $d_4 = 2k < 2p$, тогаш постои прост број $q|k, q \ge 3$ и $q<p$, јасно $q$ непарен ($q \ne 2$). Но $q|n$ и $q<p$ па ова противречи изборот на $p$ како најмалиот непарен прост делител на $n$. Јасно тогаш мора да е $d_4 = 2p$ и важи

$$n = 1^2+2^2+p^2+(2p)^2 = 5+5p^2 = 5(1+p^2).$$

За $p>2$ имаме $p^2+1>5$ и уште $p^2+1$ е парен број. Заклучуваме дека $n$ е делив со 5, па оттука $d_3 = p = 5$ и $d_4 = 2p = 10$.

Конечно, единствениот број што го задоволува условот на задачата е

$$n = 1^2+2^2+5^2+10^2 = 1+4+25+100 = 130.$$

*Забелешка*. Доколку се претпостави дека $d_3$ е парен, јасно $d_3 \ne 2\cdot 2$, се добива повторно дека $d_3$ има непарен прост делител, па тој мора да третиот во низата подредени делители. Со тоа се добиваат истите заклу-чоци како погоре.

**3.** На еден шаховски турнир учествувале $n$ жени и $2n$ мажи. Секој од учесниците играл само по една партија со секој друг учесник. Односот на бројот на партии во кои победиле жени и бројот на партии во кои победиле мажи изнесува $7:5$. Одреди го бројот на мажи кои учествувале на турнирот, ако се знае дека ниту една партија не завршила со реми.

**Решение.** Јасно, $n \geq 1$. Нека со $x$ го означиме бројот на партии во кои жени победиле мажи. Пресметуваме колку изнесува бројот на партии што ги одиграле две жени и бројот на партии што ги одиграле двајца мажи. Ако ги означиме жените-учесници со броеви $1,2,...,n$, тогаш жената со број 1 одиграла $n-1$ партија против другите жени, жената со број 2 одиграла $n-2$ партии против другите жени, па така сѐ до $(n-1)$-та жена која одиграла само една партија против другите жени (само против $n$-тата жена). Вкупниот број на одиграни партии е

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\tfrac{n(n-1)}{2}.$$

Со слична пресметка, бројот на партии што ги одиграле двајца мажи е $\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)$. Бројот пак на партии што ги одиграле жени против мажи е $n \cdot 2n = 2n^2$. Сега, следува дека бројот на победи кои ги оствариле жените е $\frac{n(n-1)}{2}+x,$ додека бројот на победи кои ги оствариле мажите е $n(2n-1)+2n^2-x$. Според условот на задачата имаме:

$$(\tfrac{n(n-1)}{2}+x):(n(2n-1)+2n^2-x)=\tfrac{n^2-n+2x}{2}:(4n^2-n-x)=\tfrac{n^2-n+2x}{8n^2-2n-2x}=\tfrac{7}{5},$$

од каде следува:

$$7(8n^2-2n-2x)=5(n^2-n+2x)$$

$$56n^2-14n-14x=5n^2-5n+10x$$

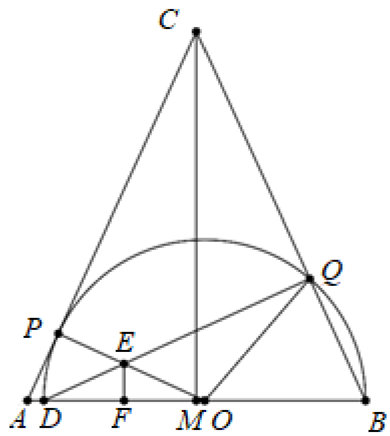
$$51n^2-9n=24x$$

$$17n^2-3n=8x$$

Бидејќи бројот на победи на жени во партиите со мажи не го надминува вкупниот број на одиграни партии, важи $x \leq 2n^2$, односно $8x \leq 16n^2$. Така се добива $17n^2-3n \leq 16n^2$, односно $n^2-3n \leq 0$. Значи $n-3 \leq 0,$ па можни вредности за $n$ се 1, 2 или 3. Со проверка се утврдува дека за $n=1$ се добива $8x=14$, а за $n=2$ се добива дека $8x=62$. Двата случаи не се можни бидејќи $x$ е природен број. Од друга страна, за $n=3$ се добива $8x=144$, т.е. $x=18$. Значи, $n=3$, па следува дека бројот на мажи кои учествувале на турнирот е шест.

**4.** Нека $ABC$ е рамнокрак триаголник таков што $\overline{AC}=\overline{BC}$. Нека $D$ е точка на страната $AB$ таква што полукружницата со дијаметар $BD$ и центар $O$ ја допира страната $AC$ во точка $P$ и ја сече страната $BC$ во точка $Q$. Радиусот $OP$ ја сече правата $DQ$ во точка $E$ така што $5\overline{PE}=3\overline{DE}$. Пресметај го односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

**Решение.** Бидејќи $OP$ е радиус и $BD$ е дијаметар на полукружницата, следува $\measuredangle APO=90°$ и $\measuredangle DQB=90°$. Од друга страна, бидејќи $\triangle ABC$ е рамнокрак, следува $\measuredangle PAO=\measuredangle QBD$, односно заклучуваме дека $\triangle PAO \sim \triangle QBD$ како правоаголни триаголници со еднакви агли. Оттука, $\measuredangle AOP=\measuredangle BDQ$, односно $\measuredangle DOE=\measuredangle ODE$. Добиваме дека $\triangle DEO$ е рамнокрак со $\overline{DE}=\overline{OE}$. Од условот на задачата имаме и дека




$$\overline{PE}=\tfrac{3}{5}\overline{DE}=\tfrac{3}{5}\overline{OE}.$$

Бидејќи $\overline{OP}=\overline{OD}$ како радиуси на полукружницата, добиваме:

$$\overline{OD}=\overline{OP}=\overline{PE}+\overline{OE}=\tfrac{3}{5}\overline{OE}+\overline{OE}=\tfrac{8}{5}\overline{OE}=\tfrac{8}{5}\overline{DE},$$

од каде следува $\overline{OE}=\overline{DE}=\frac{5}{8}\overline{OD}$. Нека $F$ е подножјето на висината од темето $E$ во $\triangle DOE$. Точката $F$ е средина на страната $OD$, па $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{OD}$ и $\triangle EFD \sim \triangle BQD$ како правоаголни триаголници со еден заеднички агол. Следува:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DQ}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\frac{\frac{5}{8}\overline{OD}}{\frac{1}{2}\overline{OD}}=\frac{5}{4}.$$

Нека $M$ е подножјето на висината од темето $C$ во $\triangle ABC$. Бидејќи $\triangle ABC$ е рамнокрак, $M$ е средина на страната $AB$. Тогаш $\triangle CMB \sim \triangle DQB$ како правоаголни триаголници со еден заеднички агол. Следува:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DQ}} = \frac{5}{4}.$$

Нека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$, т.е. $\overline{AB} = k\overline{BC}$. Бидејќи $\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{k\overline{BC}}{2}$, од Питагоровата теорема добиваме:

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{\overline{BC}^2 - (\frac{k\overline{BC}}{2})^2} = \overline{BC} \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}.$$

Оттука

$$\frac{5}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}},$$

па затоа $\frac{25}{16} = \frac{1}{1-\frac{k^2}{4}}$, од каде $25(1-\frac{k^2}{4}) = 16$, т.е. $\frac{25k^2}{4} = 9$. Сега $k^2 = \frac{36}{25}$, односно $k = \frac{6}{5}$. Значи, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{5}$.

**II година**

**1.** Нека $a, b, a \neq b$ се комплексни броеви при што $|a| = |b| = r > 0$. Ако $a + \bar{b} + \bar{a}b \in \mathbb{R}$, докажи дека $\frac{ab}{a+b-1} \in \mathbb{R}$.

**Решение.** *Прв начин*. Јасно, $a, b \neq 0$ и $ab \neq 0$. Од $a + \bar{b} + \bar{a}b \in \mathbb{R}$ имаме дека

$$a + \bar{b} + \bar{a}b = \overline{a + \bar{b} + \bar{a}b} = \bar{a} + b + a\bar{b},$$

па како $a\bar{a} = b\bar{b} = r^2 > 0$ и $a - b \neq 0$ добиваме

$$a + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{a}b = \frac{r^2}{a} + b + a\frac{r^2}{b},$$

$$\frac{a^2b + r^2a + r^2b^2}{ab} = \frac{r^2b + ab^2 + r^2a^2}{ab},$$

$$a^2b + r^2a + r^2b^2 = r^2b + ab^2 + r^2a^2,$$

$$ab(a-b) + r^2(a-b) - r^2(a^2 - b^2) = 0,$$

$$(a-b)(ab + r^2 - r^2(a+b)) = 0,$$

$$ab = (a+b-1)r^2.$$

Сега, ако $a + b - 1 = 0$, тогаш од последното равенство следува $ab = 0$, што не е можно. Затоа $a + b - 1 \neq 0$, па од последното равенство добиваме дека $\frac{ab}{a+b-1} = r^2 \in \mathbb{R}$

*Втор начин.* Нека $a=x+iy, b=z+it$. Од условот во задачата имаме

$$x^2+y^2=z^2+t^2>0 \qquad (1)$$

и $\mathrm{Im}(x+iy+z-it+(x-iy)(z+it))=0$, т.е. $y-t-yz+tx=0$, односно

$$t(x-1)=y(z-1). \qquad (2)$$

Тогаш,

$$\frac{ab}{a+b-1}=\frac{(x+iy)(z+it)}{(x+z-1)+i(y+t)}=\frac{(xz-yt)+i(yz+xt)}{(x+z-1)+i(y+t)}\cdot\frac{(x+z-1)-i(y+t)}{(x+z-1)-i(y+t)}$$
$$=\frac{(x+z-1)(xz-yt)+(y+t)(yz+xt)+i((x+z-1)(yz+xt)-(y+t)(xz-yt))}{(x+z-1)^2+(y+t)^2}$$
$$=\frac{(x+z-1)(xz-yt)+(y+t)(yz+xt)+iy((z-1)(z+x)+t(y+t))}{(x+z-1)^2+(y+t)^2}.$$

Треба да покажеме дека

$$y((z-1)(z+x)+t(y+t))=0. \qquad (3)$$

Јасно, ако $y=0$ тогаш важи (3). Затоа нека $y\neq 0$. Од (1) имаме

$$(x-z)(z+x)=(t-y)(y+t).$$

Ако $x-z=0$, тогаш од $a\neq b$ следува $y+t=0$ па од (2) следува дека $-y(x-1)=y(x-1)$ и отука $x=z=1$. Сега е јасно дека е точно равенството (3). Ако $x-z\neq 0$, тогаш $z+x=\frac{(t-y)(y+t)}{x-z}$ и ако сеземе предвид (2) добиваме

$$y((z-1)(z+x)+t(y+t))=y((z-1)\frac{(t-y)(y+t)}{x-z}+t(y+t))$$
$$=y(y+t)((z-1)\frac{t-y}{x-z}+t)$$
$$=y(y+t)\frac{zt-zy-t+y+tx-tz}{x-z}$$
$$=y(y+t)\frac{t(x-1)-y(z-1)}{x-z}=0.$$

т.е. точно е равенството (3).

**2.** Најди го реалниот параметар $a$ така што системот

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a+1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \end{cases}$$

има точно три реални решенија.

**Решение.** Јасно $x,y,a\neq 0$ и $2a+1>0$. Втората равенка е еквивалентна со $x+y=\frac{1}{a}xy$. Ако ја квадрираме, добиваме $x^2+2xy+y^2=\frac{1}{a^2}x^2y^2$, па ако од последната равенка ја одземеме првата равенка од системот добиваме $\frac{1}{a^2}x^2y^2-2xy-(2a+1)=0$. Последната равенка е квадратна по $xy$ и нејзините решенија се $xy=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{2a+1}{a^2}}}{\frac{1}{a^2}}=\frac{1\pm\frac{a+1}{a}}{\frac{1}{a^2}}=a^2\pm a(a+1)$.

Ако $xy=2a^2+a=a(2a+1)$, тогаш $x+y=2a+1$, па $x$ и $y$ се решенија на квадратната равенка $z^2-(2a+1)z+a(2a+1)=0$. Ако $xy=-a$ тогаш $x+y=-1$, па $x$ и $y$ се решенија на квадратната равенка $z^2+z-a=0$. Ако првата квадратна равенка има две различни решенија, тогаш $(x,y)$ и $(y,x)$ се решенија на системот, а ако има едно решение $x=y$ тогаш $(x,x)$ е решение на системот. Истото важи и за втората равенка. Бараме системот да има точно три реални решенија, значи можни се два случаи: првата равенка да има две реални решенија, а втората едно, или обратното. Дискриминантата на првата равенка е $D_1=(2a+1)^2-4a(2a+1)=(2a+1)(1-2a)$, а на втората $D_2=(-1)^2+4a=1+4a$. Ако првата равенка има две реални решенија, а втората едно, важи $D_1>0, D_2=0$ и тогаш

$$(2a+1)(1-2a)>0, \quad 1+4a=0.$$

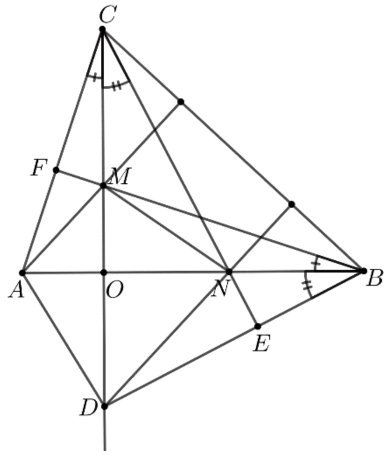
Бидејќи $2a+1>0$, треба $1-2a>0$ и $a=-\frac{1}{4}$, па заклучуваме дека $a=-\frac{1}{4}$ е решение на овој систем (од неравенка и равенка). Ако втората равенка има две реални решенија, а првата едно, важи $D_1=0, D_2>0$ и тогаш

$$(2a+1)(1-2a)=0, \quad 1+4a>0.$$

Бидејќи $2a+1>0$, треба $1-2a=0$ и $a>-\frac{1}{4}$ па заклучуваме дека $a=\frac{1}{2}$ е решение на овој систем од неравенка и равенка).

Значи, системот има точно три реални решенија кога $a=-\frac{1}{4}$ или $a=\frac{1}{2}$.

**3.** Нека во триаголникот $ABC$ аголот во темето $C$ е остар. Нека $O$ е подножјето на висината спуштена од темето $C$ и нека $N$ е точка од отсечката $OB$. Точката $M$ од висината $OC$ е избрана така што $\measuredangle OBM=\measuredangle ACO$, а точката $D$ е надворешна точка за триаголникот $ABC$, лежи на полуправата $CO$ и $\measuredangle OBD=\measuredangle OCN$. Докажи дека триаголниците $AOD$ и $MON$ имаат еднакви плоштини.




**Решение.** Нека $CN$ ја сече $BD$ во точка $E$, а $BM$ ја сече $AC$ во точка $F$. Триаголниците $CON$ и $BEN$ се слични ($\measuredangle EBN = \measuredangle OCN$ по услов и $\measuredangle ENB = \measuredangle ONC$ како накрсни агли) па затоа $\measuredangle NEB = \measuredangle NOC = 90°$. Значи $CE$ и $BO$ се висини во триаголникот $DBC$ кои се сечат во $N$, па затоа $DN$ е нормална на $BC$. Слично, од $\triangle FMC \sim \triangle OMB$ следува дека $BF$ е висина во триаголникот $ABC$ па $M$ е ортоцентарот на триаголникот $ABC$ и затоа $AM$ е нормална на $BC$. Тогаш, $AM$ и $DN$ се паралелни па $DNMA$ е трапез на кој пресек на дијагоналите му е точката $O$ па затоа $P_{\triangle AOD} = P_{\triangle MON}$.

**4.** Докажи дека равенката $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 4$ има бесконечно многу решенија во множеството на природни броеви.

**Решение.** Да претпоставиме дека едно решение на равенката е подредениот пар природни броеви $(x_1, y_1)$ каде што $x_1 \le y_1$. Со средување на дадената равенка, ја добиваме равенката

$$x^2 - (4y-1)x + y^2 + y = 0,$$

која е квадратна по $x$. Едно нејзино решение е $x_1$, па според Виетовите формули имаме дека второто решение е $4y_1 - 1 - x_1$. Да забележиме дека

$$4y_1 - 1 - x_1 \ge 4x_1 - 1 - x_1 = 3x_1 - 1 \ge 2x_1 > 0,$$

значи и $4y_1 - 1 - x_1$ е природен број. Сега следува дека и $(4y_1 - 1 - x_1, y_1)$ е решение на дадената равенка. Од тоа што равенката е симетрична, добиваме дека $(x_2, y_2) = (y_1, 4y_1 - 1 - x_1)$ е исто така решение. За да го завршиме доказот, да забележиме дека

$$x_2 + y_2 = 5y_1 - 1 - x_1 > x_1 + y_1$$

и дека (1,1) е едно решение на дадената равенка. Значи, користејќи ја опишаната постап-ка може да генерираме бесконечно многу решенија, или низа решенија во облик:

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,6) \to (6,21) \to \cdots$$

**III година**

**1.** Докажи дека за секој реален број $x$ важи

$$\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \cos^3 2x.$$

**Решение.** За секој реален број $x$ важи

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x\\ &= 2\sin x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x\\ &= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x\\ &= \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x\sin x\cos x\\ &= \cos^3 x - \sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x\cos x\\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x = \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x\\ &= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Значи,

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \text{ и } \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}. \qquad (1)$$

Со замена на последните равенства од (1) во левата страна на даденото равенство, имаме дека

$$\begin{aligned}\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x &= \sin 3x \cdot \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} + \cos 3x \cdot \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\\ &= \frac{3\sin 3x\sin x - \sin^2 3x + 3\cos 3x\cos x + \cos^2 3x}{4}\\ &= \frac{3(\cos 3x\cos x + \sin 3x\sin x) + \cos^2 3x - \sin^2 3x}{4}\\ &= \frac{3\cos 2x + \cos 6x}{4}.\end{aligned}$$

Од $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, следува

$$\cos 6x = \cos(3\cdot 2x) = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x.$$

Конечно добиваме дека

$$\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \frac{3\cos 2x + \cos 6x}{4} = \frac{3\cos 2x + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x}{4} = \cos^3 2x,$$

за секој реален број $x$, што и требаше да се докаже.

**2.** Во множеството на реалните броеви реши ја равенката

$$x\log_3^2(x-1)+4(x-1)\log_3(x-1)-16=0.$$

**Решение.** Јасно, $x-1>0$, т.е. $x>1$. Воведуваме смена $\log_3(x-1)=t$. Тогаш дадената равенка преминува во облик $xt^2+4(x-1)t-16=0$. Со решавање на квадратната равенка по $t$, добиваме

$$t_{1,2}=\frac{-4(x-1)\pm\sqrt{16(x-1)^2+64x}}{2x}=\frac{-4(x-1)\pm\sqrt{16x^2+32x+16}}{2x}$$

$$=\frac{-4(x-1)\pm\sqrt{16(x+1)^2}}{2x}=\frac{-4(x-1)\pm 4(x+1)}{2x},$$

односно $t_1=\frac{-4x+4-4x-4}{2x}=-4$ и $t_2=\frac{-4x+4+4x+4}{2x}=\frac{4}{x}$. Според тоа, разгледуваме два случаи:

*Случај 1.* Го заменуваме $t_1=-4$ во $\log_3(x-1)=t$ и ја добиваме равенката $\log_3(x-1)=-4$, од каде следува дека $x=\frac{82}{81}$.

*Случај 2.* Го заменуваме $t_2=\frac{4}{x}$ во $\log_3(x-1)=t$ и ја добиваме равеката $\log_3(x-1)=\frac{4}{x}$, односно $x-1=3^{\frac{4}{x}}\Leftrightarrow(x-1)^x=3^4\Leftrightarrow(x-1)^x=81$.

За $x=4$, добиваме дека важи $(x-1)^x=3^4=81$.

За $x>4$ добиваме дека $(x-1)^x>81$. Од друга страна, за $1<x<4$, добиваме дека $0<(x-1)^x<3^x<81$.

Според тоа, решенијата на дадената равенка се $x=\frac{82}{81}$ и $x=4$.

**3.** Нека $a,b,\ a>b$ се природни броеви така што бројот $a$ дава остаток 1 при делење со $b$. Неравенката $|\log a-\log x|<\log b$ има точно 10 решенија по $x$ во множеството природни броеви. Најди ја минималната вредност на $a+b$.

**Решение.** Јасно $b\neq 1$ бидејќи 1 е делител на секој природен број и притоа $\log b>0$. Користејќи ги својствата на логаритми и апсолутна вредност, неравенката преминува во облик $-\log b<\log\frac{a}{x}<\log b,$ од каде следува дека $\log\frac{bx}{a}>0$ и $\log\frac{ab}{x}>0$, односно $x>\frac{a}{b}$ и $ab>x$. Од условот дека $a$ дава остаток 1 при делење со $b$, добиваме дека постои природен број $k$, така што $a=bk+1$. Според тоа,

$$ab > x > \tfrac{a}{b} \Leftrightarrow (bk+1)b > x > \tfrac{bk+1}{b} \Leftrightarrow (bk+1)b > x > k + \tfrac{1}{b}.$$

Последното неравенство го одредува интервалот на кој се наоѓаат решенијата за $x$. Бидејќи $b \neq 1$ не е делител на $a$, а станува збор за природни броеви, горното неравенство преминува во $(bk+1)b - 1 \geq x \geq k+1$. Неравенката има точно 10 решенија во множеството на природни броеви, па за должината на интервалот на кој припаѓаат решенијата важи

$$b(bk+1) - 1 - (k+1) + 1 = 10,$$

односно $k(b^2 - 1) + b = 11$.

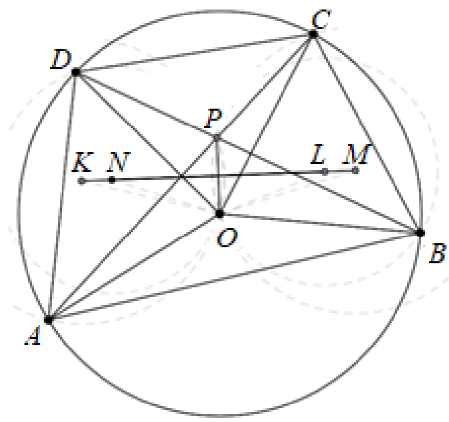
*Случај* 1. Ако $b = 2$, тогаш $3k = 9, k = 3, a = 7, a+b = 9$.

*Случај* 2. За $b \geq 3$, $11 = k(b^2-1) + b \geq 8k + 3$, па затоа $k = 1$ и $b = 3,$ $a = 4,$ $a+b = 7$.

Значи, минималната вредност на $a+b$ е 7.

**4.** Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник со центар на опишана кружница $O$ и $\overline{AB} > \overline{CD}$, така што аглите $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BCD$ се тапи. Нека $P$ е пресекот на дијагоналите $AC$ и $BD$. Нека центрите на опишаните кружници на триаголниците $AOP$, $BOP$, $COP$, $DOP$ се $K, L, M, N$ соодветно. Докажи дека $\overline{KL} = \overline{MN}$.

**Решение.** Од услов аглите $\measuredangle ADC = \alpha$ и $\measuredangle BCD = \beta$ се тапи и $O$ лежи на различна страна од $D, C$ спрема $AC, BD$ соодветно. Според тоа, користејќи ја тетивноста на $ABCD$ и својството за централен и периферен агол, имаме




$$\measuredangle AOC = 2(180^\circ - \alpha) = 360^\circ - 2\alpha$$

и слично

$$\measuredangle BOD = 360^\circ - 2\beta.$$

Одовде, бидејќи $\overline{OC} = \overline{OA}$, триаголникот $OAC$ е рамнокрак, па затоа важи $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = \alpha - 90^\circ$. Слично $\measuredangle OBD = \measuredangle ODB = \beta - 90^\circ$.

Нека со $R_{\triangle AOP}$, $R_{\triangle BOP}$, $R_{\triangle COP}$ и $R_{\triangle DOP}$ ги означиме радиусите на опишаните кружници на триаголниците $AOP$, $BOP$, $COP$ и $DOP$, соодветно. Од синусна теорема во $\triangle AOP$ имаме $\dfrac{\overline{OP}}{\sin(\alpha-90^\circ)}=2R_{\triangle AOP}$, т.е. $R_{\triangle AOP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\alpha}$. Слично добиваме $R_{\triangle BOP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\beta}$, $R_{\triangle COP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\alpha}$ и $R_{\triangle DOP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\beta}$. Од косинусна теорема, за $\triangle KLO$ имаме дека

$$\begin{aligned}\overline{KL}^2&=R_{\triangle AOP}^2+R_{\triangle BOP}^2-2R_{\triangle AOP}R_{\triangle BOP}\cos\measuredangle KOL\\&=\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\beta}-\frac{\overline{OP}^2}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cos\left(\measuredangle KOL\right).\end{aligned}$$

Слично, од косинусна теорема, за $\triangle NMO$ имаме дека

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2&=R_{\triangle COP}^2+R_{\triangle DOP}^2-2R_{\triangle COP}R_{\triangle DOP}\cos\measuredangle MON\\&=\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\beta}-\frac{\overline{OP}^2}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cos\measuredangle MON.\end{aligned}$$

Останува да се споредат аглите $\measuredangle KOL$ и $\measuredangle MON$. Триаголникот $KOP$ е рамнокрак, па повторно користејќи го својството за централен и периферен агол ($\measuredangle OKP$ централен за $\measuredangle OAP$) добиваме

$$2\measuredangle KOP+2(\alpha-90^\circ)=180^\circ \text{ т.е. } \measuredangle KOP=180^\circ-\alpha\ .$$

Слично $\measuredangle POL=180^\circ-\beta$, $\measuredangle PON=180^\circ-\beta$, $\measuredangle POM=180^\circ-\alpha$. Тогаш,

$$\measuredangle KOP+\measuredangle POL=360^\circ-(\alpha+\beta)=\measuredangle PON+\measuredangle POM,$$

односно $\measuredangle KOL=\measuredangle MON$ што со споредување на горните равенства дава $\overline{KL}^2=\overline{MN}^2$, т.е. $\overline{KL}=\overline{MN}$, што и требаше да се докаже.

**IV година**

**1.** Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за сите $x,y\in\mathbb{N}$ важат следниве услови:

*i*) $f(f(2026))=2027$;

*ii*) $f(xy)=f(x)f(y)$;

i*ii*) $f(x)\le x$.

**Решение.** Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција што ги исполнува дадените услови. Нека $x,y\in\mathbb{N}$ се произволни. Тогаш, според *ii*) имаме:

$$f(f(xy))=f(f(x)f(y))=f(f(x))\cdot f(f(y)).$$

Според *iii*) важи $f(f(x))\le f(x)\le x$. Од $2026=2\cdot1013$ следува дека

$$2027=f(f(2026))=f(f(2))\cdot f(f(1013))\le f(2)\cdot f(1013)\le 2\cdot1013=2026,$$

што е контрадикција. Оттука заклучуваме дека таква функција не постои.

*Забелешка*. Задачата може да се реши и без користење на вториот услов.

**2.** Докажи дека равенката $x-[\sqrt{x}]^2=2026$ има бесконечно многу решенија во $\mathbb{R}$.

**Решение.** Нека $x$ е решение на равенката. Јасно, $x>1$. Нека $k=[\sqrt{x}]$, $k\geq 1$. Од $\sqrt{x}<[\sqrt{x}]+1$ следува $x<(k+1)^2$, па од $x=k^2+2026<(k+1)^2$ добиваме дека $k>\frac{2025}{2}$. Оттука, $x=k^2+2026$, каде што $k>\frac{2025}{2}$ е природен број.

Ќе покажеме дека за секое $k\in\mathbb{N}$, такво што $k>\frac{2025}{2}$, бројот $x=k^2+2026$ е решение на равенката. Имаме

$$k^2<k^2+2026=k^2+2025+1<k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

од каде следува дека

$$[\sqrt{x}]=[\sqrt{k^2+2026}]=k \text{ и } x-[\sqrt{x}]^2=(k^2+2026)-k^2=2026,$$

т.е. $x$ е решение на равенката.

Од претходните разгледувања следува дека дадената равенка има бесконечно многу решенија. Тоа се природните броеви $x=k^2+2026$, каде што $k$ е произволен природен број поголем или еднаков на $[\frac{2025}{2}]+1$.

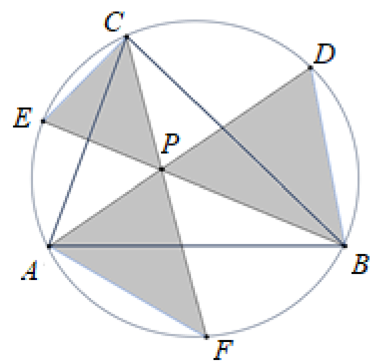
**3.** Нека $P$ е внатрешна точка на триаголникот $ABC$. Ги дефинираме аглите $\alpha=\measuredangle BPC-\measuredangle BAC$, $\beta=\measuredangle CPA-\measuredangle CBA$, $\gamma=\measuredangle APB-\measuredangle ACB$. Докажи дека

$$\overline{PA}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\alpha}=\overline{PB}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBA}{\sin\beta}=\overline{PC}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\gamma}.$$

**Решение.** Ги продолжуваме отсечките $AP, BP$ и $CP$ до нивниот пресек со опишаната кружницата на $\triangle ABC$ во точките $D, E$ и $F$, соодветно. Да го разгледаме $\triangle PEC$. Имаме $\measuredangle PEC=\measuredangle BEC=\measuredangle A,$ како агли над иста кружен лак. Понатаму,

$\measuredangle BPC=180^\circ-\measuredangle EPC=\measuredangle PEC+\measuredangle ECP$,

па добиваме дека



$$\measuredangle ECP = \measuredangle BPC - \measuredangle PEC = \alpha .$$

Оттука, согласно синусната теорема за $\triangle PEC$, добиваме дека важи $\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PE}}$. Слично се покажува и дека $\frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PF}}$. Значи, доволно е да покажеме дека $\frac{\overline{PA} \cdot \overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{PA}}{\overline{PF}}$, т.е. $\frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PF}}$. Сега, $CF$ и $BE$ се тетиви на опишаната кружница што се сечат во точката $P$, па важи теоремата за степен на точка во однос на кружница (за $P$ во внатрешноста на кружницата) и добиваме $\overline{PC} \cdot \overline{PF} = \overline{PB} \cdot \overline{PE}$, од каде заклучуваме дека последното равенство е точно.

На сличен начин се докажува и второто равенство (користиме синусна теорема во $\triangle PDB$), со што доказот на двојното равенство од задачата е комплетиран.

**4.** Васил формирал низа така што ги запишал редоследно првите цифри на 2027 броеви, $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^{2026}$. Притоа, забележал дека првата цифра на бројот $3^{2026}$ е 7 и дека цифрата 9 се појавува 93 пати како прва цифра. Ако цифрата 1 се појавува во низата вкупно $S$ пати, а цифрата 2 вкупно $T$ пати, најди го бројот $S+T$.

**Решение.** Ја разгледуваме низата $a_n$ формирана од првите цифри на броевите $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^{2026}$. Прво, да забележиме дека при множење со 3, најголемиот едноцифрен број 9 дава производ 27. Значи, при множење на било кој број со 3, преносот од соседна цифра врз претходната може да биде 0, 1 или 2. Според тоа, да ги разгледаме можните случаи на следна прва цифра во низата.

1) Ако првата цифра на бројот $3^k$ е 1, тогаш со пренос при множење првата цифра на бројот $3^{k+1}$ може да биде $3 \cdot 1 + 0 = 3$, $3 \cdot 1 + 1 = 4$ или $3 \cdot 1 + 2 = 5$.
2) Ако првата цифра на бројот $3^k$ е 2, тогаш со пренос при множење првата цифра на бројот $3^{k+1}$ може да биде $3 \cdot 2 + 0 = 6$, $3 \cdot 2 + 1 = 7$ или $3 \cdot 2 + 2 = 8$.
3) На сличен начин се утврдува дека:

| Прва цифра во $3^k$ | Прва цифра во $3^{k+1}$ |
|---|---|
| 3 | 9, 1 |
| 4, 5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 6 | 1, 2 |
| 7, 8, 9 | 2 |

Оттука, заклучуваме дека низата може да се претстави преку дисјунктни подредувања (блокови) од следниот облик:

$$p_1 = (1,3,9),\ p_2 = (1,3),\ p_3 = (1,4),\ p_4 = (1,5),\ p_5 = (2,6),\ p_6 = (2,7),\ p_7 = (2,8).$$

Бидејќи првата цифра на $3^{2026}$ е 7, јасно е дека последните два члена на оваа низа се 2 и 7, односно таа завршува со блокот $p_6$.

Нека $N_i$ е бројот на блокови од облик $p_i$, за $i = 1,2,\ldots,7.$ Имаме:

$$3N_1 + 2(N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7) = 2027.$$

Бидејќи цифрата 9 се појавува 93 пати како првата, знаеме дека $N_1 = 93$, па во последното равенство се добива:

$$3 \cdot 93 + 2(N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7) = 2027$$

$$N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 = 874$$

Добиваме

$$S + T = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 = 93 + 874 = 967\,.$$