III ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2016

IV одделение

1. Дадена е табела со шифри. На секој производ од табелата му соодветствува по една буква (Пример: $4 \cdot 3 = 12$, 12 е шифра за буквата С).

·	3	5	6	10
4	С	К	Д	И
9	У	Е	Н	Г
2	Ј	А	С	К
7	М	Ч	Е	О

Искористи ја табелата за да ја дешифрираш следнава порака:

6 10 12
21 54 70 90 27
12 10 20 10 21
24 10
27 35 10 21
21 10 42 45 21 10 42 40 20 10

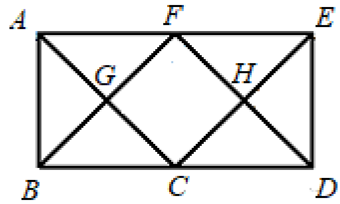
Решение. Ако ги помножиме соодветните броеви, добиваме

·	3	5	6	10
4	С=12	К=20	Д=24	И=40
9	У=27	Е=45	Н=54	Г=90
2	Ј=6	А=10	С=12	К=20
7	М=21	Ч=35	Е=42	О=70

Значи, шифрирана порака е:

6 10 12
Ј А С
21 54 70 90 27
М Н О Г У
12 10 20 10 21
С А К А М
24 10
Д А
27 35 10 21
У Ч А М
21 10 42 45 21 10 42 40 20 10
М А Т Е М А Т И К А

2. Колку триаголници има на цртежот десно. Испиши ги!



Решение. На цртежот се триаголниците

$ABG, BCG, CDH, DEH, EFH, FAG,$

$ABC, ABF, CDE, DEF, ACE, BDF.$

Значи, вкупно има 12 триаголници.

3. Учениците во IV-1 играле една игра. Марија замислила еден број и ѝ го кажала на Елена. Таа на бројот му додала 10 и добиениот број му го кажала на Даме. Тој новиот број го поделил со 9 и резултатот го кажал на Симе. Симе, пак, бројот што му го кажал Даме го помножил со 2. На крај на таблата Симе го напишал следбеникот на својот број, а тоа е бројот 181. Кој број го замислила Марија?

Решение. Задачата ќе ја решиме одеји одназад нанапред. Бројот на Симе е претходникот на бројот 181, а тоа е бројот 180. Го добил кога бројот на Даме го помножил со 2, што значи дека бројот на Даме е $180:2=90$. Даме го добил овој број кога бројот на Елена го поделил со 9, па значи бројот на Елена е $90\cdot 9=810$. Елена го добила својот број кога на бројот на Марија му додала 10 и затоа дека бројот што го замислила Марија е $810-10=800$.

4. За нумерирање на страниците на една книга искористени се 639 цифри. Колку страници има книгата?

Решение. Едноцифрени броеви се 9 (од 1 до 9). Значи, за првите 9 страници се употребени 9 цифри. Двоцифрени броеви се 90 (од 10 до 99). За овие броеви се искористени $90\cdot 2=180$ цифри. Досега, за првите $90+9=99$ страници, се искористени $180+9=189$ цифри. Остануваат неискористени уште $639-189=450$ цифри. За трицифрен број се користат 3 цифри, па затоа со овие 450 цифри може да се запишат $450:3=150$ броеви, т.е. да се нумерираат уште 150 страници.

Конечно, книгата има: $9+90+150=249$ страници.

V одделение

1. Петцифрен број исто се чита и одлево и оддесно. Збирот на неговите цифри е 24, а збирот на крајните цифри е 14. Кој е тој број, ако средната цифра е најмала, и не е 0?

Решение. Крајните цифри се $14:2=7$. Збирот на трите средни цифри е $24-14=10$. Бидејќи цифрите лево и десно се еднакви, средната цифра мора да е парна. Најмала парна цифра е 2. Тогаш цифрите пред и по неа се $(10-2):2=4$. Значи, бараниот број е 74247.

2. Во триаголникот ABC важи:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=19,\ \overline{AB}+\overline{AC}=20 \text{ и } \overline{AC}+\overline{BC}=25.$$

Определи ги периметарот на триаголникот и должините на неговите страни.

Решение. Ако ги собереме дадените три равенства, добиваме

$$2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})=19+20+25$$
$$2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})=64$$
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=32$$

односно периметарот на триаголникот е 32. Од тоа што $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=32$ и $\overline{AB}+\overline{BC}=19$ добиваме

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=32$$
$$19+\overline{AC}=32$$
$$\overline{AC}=32-19$$
$$\overline{AC}=13.$$

Ако во $\overline{AB}+\overline{AC}=20$ замениме $\overline{AC}=13$ добиваме $\overline{AB}+13=20$, т.е. $\overline{AB}=7$. Ако во $\overline{AC}+\overline{BC}=25$ замениме $\overline{AC}=13$ добиваме $\overline{BC}+13=25$, т.е. $\overline{BC}=12$.

VI одделение

1. Две прави се сечат во точка S. Збирот на острите агли кои при тоа се формираат е еднаков на половина од големината на тапиот агол. Определи ги големините на острите и тапите агли.

Решение. Нека α е остриот, а β тапиот агол. Од условот на задачата следува $2(\alpha+\alpha)=\beta$. Значи $\beta=4\alpha$. Понатаму, $\alpha+\beta=180°$, па затоа $\alpha+4\alpha=180°$. Значи, $5\alpha=180°$, т.е. $\alpha=36°$, а $\beta=4\alpha=4\cdot 36°=144°$.

2. Правоаголник има страни со должини $3{,}8cm$ и $1{,}2cm$. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот чии должини на страни се еднакви на половина од должините на страните на дадениот правоаголник.

Решение. Должините на страните на новиот правоаголник се еднакви на $3,8:2=1,9cm$ и $1,2:2=0,6cm$. Периметарот на новиот правоаголник е еднаков на $2\cdot(1,9+0,6)=2\cdot 2,5=5cm$, а неговата плоштина е еднаква на $1,9\cdot 0,6=1,14cm^2$.

3. Кој е најмалиот четирицифрен број делив со 9, кој има две парни и две непарни цифри? Одговорот да се образложи!

Решение. За да еден број биде делив со 9 збирот на неговите цифри треба да биде делив со 9. Бидејќи бројот има две парни и две непарни цифри, збирот на неговите цифри е парен. Значи, збирот на цифрите на бараниот број мора да биде најмалку 18. Овој број ќе биде најмал ако цифрата на местото на илјадитите е 1, а цифрата на стотките е 0. Според тоа, останатите цифри се 8 и 9. Конечно, најмалиот четирицифрен број кој ги задоволува условите на задачата е 1089.

4. Три вторници од некој месец паднале на парни датуми. Кој ден од седмицата бил 21-от ден од тој месец?

Решение. За да има три вторници на парен датум, во месецот треба да има пет вторници и тоа во вториот, деветтиот, шеснаесеттиот, дваесет и третиот и триесеттиот ден во месецот. Ако се помалку на број, тогаш нема да има три вторници на парен датум. Бидејќи вторник е 23-тиот ден во месецот, добиваме дека 21-от ден во истиот месец се паднал во недела.

VII одделение

1. Во едно складиште има 1 тон краставици кои содржат 94% вода. По извесно време количеството вода во краставиците се намалило на 92%. Определи ја новата вкупна маса на краставиците?

Решение. Во 1 тон краставици има 94% вода и $\frac{6}{100}\cdot 1000kg=60kg$ сува материја. Откако количеството вода се намалило на 92%, овие $60kg$ сува материја сочинуваат 8% од вкупната маса на краставиците**,** т.е. важи $\frac{8}{100}x=60$, па затоа $x=750kg$. Значи, масата на краставиците по калирањето изнесувала $750kg$.

2. Збирот на три броја е 16. Првиот број е $8\frac{2}{3}$, а вториот е за $1\frac{1}{2}$ помал од првиот. Одреди го третиот број.

Решение. Од условот на задачата следува

$$8\frac{2}{3}+(8\frac{2}{3}-1\frac{1}{2})+x=16 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{26}{3}+\frac{26}{3}-\frac{3}{2}+x=16 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{95}{6}+x=16 \quad \Leftrightarrow$$
$$x=16-\frac{95}{6} \quad \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{1}{6}.$$

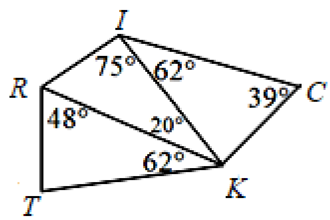
3. Ако p е прост број, тогаш $p+2017$ сложен број. Докажи!

Решение. Ако $p=2$, тогаш

$$p+2017=2019=3\cdot 673.$$

Ако $p\geq 3$, тогаш бидејќи е прост број, тој е непарен број. Но, тогаш $p+2017$ е парен број поголем од 2, па затоа е сложен број.

4. Која отсечка има најголема должина во фигурата на цртежот десно?



Решение. Го разгледуваме триаголникот RKT. Бидејќи збирот на внатрешните агли во триаголник е 180°, добиваме дека

$$\measuredangle RTK=180^\circ-48^\circ-62^\circ=70^\circ.$$

Бидејќи спроти најголем агол лежи најдолга страна, следува дека RK е најдолга во овој триаголник. Меѓутоа, од триаголникот RIK следува дека

$$\measuredangle IRK=180^\circ-75^\circ-20^\circ=85^\circ,$$

па бидејќи $\measuredangle IRK$ е најголем агол, најголема страна во овој триаголник ќе биде IK, што значи дека IK е подолга од RK. Понатаму, од триаголникот ICK,

$$\measuredangle IKC=180^\circ-62^\circ-39^\circ=79^\circ,$$

па IC е подолга од IK. Значи, отсечката IC е најдолга.

VIII одделение

1. Пресметај ги аглите на триаголникот ABC ако се знае дека големината на едниот од аглите е еднаква на $\frac{2}{5}$ од големината на вториот и $\frac{1}{4}$ од големината на третиот агол.

Решение. Од условот на задачата следува дека $\alpha=\frac{2}{5}\beta$ и $\alpha=\frac{1}{4}\gamma$. Според тоа, $\beta=\frac{5}{2}\alpha$ и $\gamma=4\alpha$, па затоа

$$180^\circ=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\frac{5}{2}\alpha+4\alpha.$$

Значи, $\alpha=24^\circ$, па затоа $\beta=60^\circ$ и $\gamma=96^\circ$.

2. Нека $A=2x^3-3x^2+x;\ B=x^3+x^2-3x;\ C=5x^2$. Сведи го на полином во нормален вид изразот: $C\cdot(A-B)$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}C\cdot(A-B)&=5x^2\cdot(2x^3-3x^2+x-(x^3+x^2-3x))\\&=5x^2\cdot(2x^3-3x^2+x-x^3-x^2+3x)\\&=5x^2\cdot(x^3-4x^2+4x)\\&=5x^5-20x^4+20x^3.\end{aligned}$$

3. Ако $a:7=b:3=c:2=d:5$, докажи дека важи равенството

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{(7a+3b+2c+5d)^2}{87}.$$

Решение. Нека $a:7=b:3=c:2=d:5=k$. Тогаш

$$a=7k, b=3k, c=2k, d=5k,$$

па затоа

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+d^2&=49k^2+9k^2+4k^2+25k^2=87k^2\\&=\frac{87^2k^2}{87}=\frac{(87k)^2}{87}=\frac{(49k+9k+4k+25k)^2}{87}\\&=\frac{(7a+3b+2c+5d)^2}{87},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

4. Докажи дека разликата на квадратите на секои два непарни природни броеви е делива со 8.

Решение. Нека двата броеви се $2m+1$ и $2n+1$, каде m и n се природни броеви такви што $m,n \geq 0$. Тогаш

$$\begin{aligned}(2m+1)^2-(2n+1)^2 &= 4m^2+4m-4n^2-4n\\ &= 4(m-n)(m+n)+4(m-n) \;\mathbf{(10)}\\ &= 4(m-n)(m+n+1).\end{aligned}$$

Можни се следниве два случаја:

- броевите m и n се со иста парност и тогаш множителот $(m-n)$ е парен број, па затоа изразот е делив со 8.
- броевите m и n се со различна парност и тогаш множителот $(m-n+1)$ е парен број, па затоа изразот е делив со 8.

IX одделение

1. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е $36cm$. Разликата на должините на кракот и основата е $3cm$. Определи ја плоштината на триаголникот.

Решение. Ако со a ја означиме основата, а со b кракот на триаголникот, тогаш од условите на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a+2b=36 \\ b-a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2(3+a)=36 \\ b=3+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+6=36 \\ b=3+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=30 \\ b=3+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=13 \end{cases}$$

Од Питагоровата теорема следува дека висината на триаголникот е

$$h^2=13^2-5^2, \text{ т.е. } h=12cm.$$

Според тоа, плоштината на триаголникот е $P=\frac{10\cdot 12}{2}=60cm^2$.

2. Колку цифри има бројот

$$[1{,}125\cdot(10^9)^5]:[\tfrac{3}{32}\cdot 10^{-4}].$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}[1{,}125\cdot(10^9)^5]:[\tfrac{3}{32}\cdot 10^{-4}] &= [\tfrac{1125}{1000}\cdot 10^{45}]:[\tfrac{3}{32}\cdot 10^{-4}]\\ &= (\tfrac{9}{8}:\tfrac{3}{32})\cdot(10^{45}:10^{-4})\\ &= (\tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{32}{3})\cdot 10^{45-(-4)}\\ &= 12\cdot 10^{49}.\end{aligned}$$

Овој број во својот запис ги има цифрите 1 и 2, а потоа уште 49 нули, што значи дека вкупниот број на цифри е 51.

3. Определи го бројот на цели броеви x за кои важи

$$\frac{1}{4}<\frac{2-x}{7}<\frac{11}{12}.$$

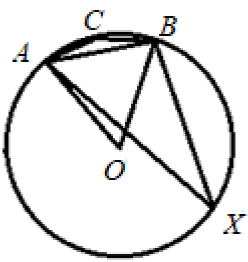
Решение. Имаме

$$\frac{1}{4}<\frac{2-x}{7}<\frac{11}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{21}{84}<\frac{12(2-x)}{84}<\frac{77}{84} \quad \Leftrightarrow \quad 21<12(2-x)<77.$$

Бидејќи x е цел број, следува дека и $2-x$ е цел број, па оттука добиваме дека $2-x\in\{2,3,4,5,6\}$, односно $x\in\{0,-1,-2,-3,-4\}$. Значи, пет цели броеви ги задоволуваат условите на задачата.

4. Едната страна на триаголник има должина $10cm$, а аголот наспроти неа е еднаков на 150^0. Пресметај ја плоштината на кругот опишан околу тој триаголник.

Решение. Нека ABC е дадениот триаголник, $\overline{AB}=10cm$ и $\measuredangle ACB=150^\circ$, цртеж десно. Тогаш $\measuredangle AXB=30^\circ$, како периферен агол. Според тоа, соодветниот централен агол е $\measuredangle AOB=60^\circ$. Значи, триаголникот AOB е рамностран, па затоа



$$\overline{AB}=\overline{AO}=\overline{BO}=10cm.$$

Според тоа, плоштината на кругот опишан околу дадениот триаголник е $P=100\pi\ cm^2$.