Републички натпревар 2007

I година

1. Цената на еден билет е 50 денари. Кога цената е снижена, бројот на посетителите е зголемен за 50%, а заработувачката за 20%. За колку е снижена цената на влезниот билет?

Решение. *Прв начин.* Две лица, по старата цена би платиле 100 денари, а три лица (50% повеќе), по новата цена би платиле 120 денари (20% повеќе од 100 денари). Значи, едно лице, по новата цена, би платило 40 денари, од каде што следува дека снижувањето е 20% (од 50 денари на 40 денари).

Втор начин. Нека бројот на посетители е p, заработувачката z, а новата цена на еден билет x. Тогаш, $50p = z$ и $x \cdot \frac{150}{100} p = \frac{120}{100} z$. Ако ги поделиме последните две равенства, добиваме $\frac{50p}{x \cdot 1{,}5p} = \frac{z}{1{,}2z}$, од каде се добива дека $x = 40$. Значи, снижувањето е 20%.

Трет начин. Нека бројот на посетители е x, тогаш заработувачката е $50x$. Ако новата цена на билетот е y, тогаш бројот на посетителите е $1{,}5x$ (за 50% повеќе), а заработувачката $60x$ (за 20% повеќе од $50x$). Тогаш, $1{,}5x \cdot y = 60x$, од каде што $y = 40$. Следствено, снижувањето е 20%.

2. Природните броеви од 1 до n се поделени на две множества. Едното множество содржи два од дадените броеви, а второто множество ги содржи останатите $n-2$ броеви. Производот на двата броја од првото множество е еднаков на збирот од сите броеви од второто множество. Дали може оваа поделба да се направи за:

а) $n = 10$, б) $n = 15$?

Решение. а) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1 \le x < y \le 10$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+10-x-y = xy$, од каде $xy+x+y = 55$, со додавање на 1 од двете страни се добива $xy+x+y+1 = 56$, од каде $(x+1)(y+1) = 56$. Ако $x+1 = 7$ и $y+1 = 8$, односно ако $x = 6$ и $y = 7$, можна е поделбата на две такви множества за $n = 10$. Имено, важи

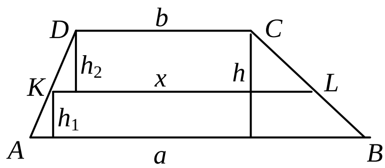
$$1+2+3+4+5+8+9+10 = 6 \cdot 7 .$$

б) Нека x и y се броевите од првото множество, при што $1 \le x < y \le 15$. Тогаш, од условот имаме $1+2+...+15-x-y = xy$, од каде $xy+x+y = 120$, па слично како претходно се добива $(x+1)(y+1) = 121$. Како $x < y$ можни се следните случаи $x+1 = 1$, $y+1 = 121$ или $x+1 = 11$, $y+1 = 11$. Во првиот случај се добива $x = 0$, $y = 120$, што не е можно затоа што $x \ge 1$ и $y \le 15$. Во вториот случај се добива $x = y = 10$, што пак не е можно затоа што треба $x \neq y$. Значи, за $n = 15$ не е можна поделбата.

3. Даден е трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$. Најди ја должината на отсечката за која се исполнети условите

- паралелна е со AB и CD
- го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини,
- нејзините крајни точки лежат на краците на трапезот.

Решение. *Прв начин.* Нека правата $p \parallel AB \parallel CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека P е плоштината на трапезот $ABCD$, а h е неговата висина, нека P_1 е плоштината на трапезот $ABLK$ со висина h_1, а P_2 плоштината на трапезот $KLCD$ со висина h_2. Нека $\overline{KL} = x$ (види цртеж) Тогаш, важи $h = h_1 + h_2$ и $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}P$. Од $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, $P_1 = \frac{a+x}{2} \cdot h_1$ и $P_2 = \frac{x+b}{2} \cdot h_2$, имаме дека $h = \frac{2P}{a+b}$, $h_1 = \frac{2P_1}{a+x} = \frac{P}{a+x}$ и $h_2 = \frac{2P_2}{x+b} = \frac{P}{x+b}$. Со замена во $h = h_1 + h_2$, добиваме



$$\frac{2P}{a+b} = \frac{P}{a+x} + \frac{P}{x+b}, \text{ т.е. } \frac{2}{a+b} = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{x+b},$$

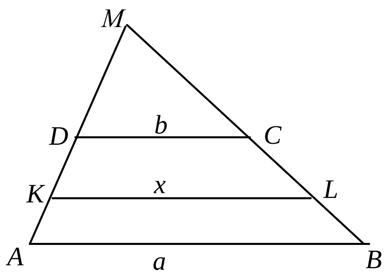
односно

$$2(a+x)(x+b) = (a+b)(x+b) + (a+b)(a+x).$$

Со средување на последното равенство се добива $2x^2 = a^2 + b^2$, од каде

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{(\tfrac{a}{\sqrt{2}})^2 + (\tfrac{b}{\sqrt{2}})^2}\,.$$

Решение Б. Нека правата $p \parallel AB \parallel CD$ ги сече краците AD и BC во точките K и L соодветно и го преполовува трапезот $ABCD$ на два енаквоплоштни дела. Нека $\overline{KL} = x$. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M (види цртеж) Тогаш, триаголниците $\triangle ABM$, $\triangle KLM$ и $\triangle DCM$ се слични, па следи дека



$$P_{ABM} : P_{KLM} : P_{DCM} = a^2 : x^2 : b^2,$$

односно $P_{ABM} = ka^2$, $P_{KLM} = kx^2$ и $P_{DCM} = kb^2$. Од условот $P_{ABLK} = P_{KLCD}$ добиваме

$$P_{ABM}-P_{KLM}=P_{KLM}-P_{DCM}\text{, т.е } ka^2-kx^2=kx^2-kb^2,$$

од каде се добива $x^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, па $x=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}$.

4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<1.$$

Решение. Од равенството $c-a=(c-b)+(b-a)$ добиваме

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-b}{c+a}+\frac{b-a}{c+a}=(a-b)(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a})+(b-c)(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a})$$
$$=\frac{(a-b)(c-b)}{(a+b)(c+a)}+\frac{(b-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(a-b)(b-c)}{c+a}(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b})=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Од неравенствата $|a-b|<a+b$, $|b-c|<b+c$ и $|c-a|<c+a$ се добива бараното неравенство, односно

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|=\left|\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|=\frac{|a-b||b-c||a-c|}{(a+b)(b+c)(c+a)}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$

II година

1. Ако за реалните коефициенти a,b,c, $a\neq 0$, на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ важи $\frac{b+c}{a}\leq -1$, докажи дека равенката има реални решенија.

Решение. Ако $\frac{b+c}{a}\leq -1$ го помножиме со a^2, добиваме $ab+ac\leq -a^2$, односно $ac\leq -a^2-ab$. Тогаш

$$b^2-4ac\geq b^2+4a^2+4ab=(b+2a)^2\geq 0,$$

а оттука следува дека дадената равенка има реални решенија

2. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB}=\overline{AC}$. Симетралата на аголот ABC ја сече страната AC во точка D. Ако важи $\overline{BC}=\overline{AB}+2\overline{AD}$, пресметај ја големината на аглите на триаголникот.

Решение. Нека $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=\overline{AC}=b$ и $\overline{AD}=p$. Од условите во задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a=b+2p \\ \frac{a}{b}=\frac{b-p}{p} \end{cases}$$

(втората равенка важи бидејќи AD е симетрала на аголот ABC). Тогаш

$$b+2p=\frac{b(b-p)}{p},\ b^2-2bp=2p^2,$$

односно $(b-p)^2=3p^2$. Значи, $b=p(1+\sqrt{3})$ и $a=p(3+\sqrt{3})$. Бидејќи

$$\cos\measuredangle ABC=\frac{a}{2b}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

следува $\measuredangle ABC=\measuredangle ACB=30^\circ$ и $\measuredangle CAB=120^\circ$.

3. Најди ги сите природни броеви за кои важи

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-1)^2=49+20\sqrt[3]{6}.$$

Решение. Ќе ја воведеме смената $\sqrt[3]{a}=x\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{b}=y\sqrt[3]{36}$.

Тогаш

$$\begin{aligned}(x\sqrt[3]{6}+y\sqrt[3]{36}-1)^2&=x^2\sqrt[3]{36}+6y^2\sqrt[3]{6}+1+12xy-2x\sqrt[3]{6}-2y\sqrt[3]{36}\\&=(x^2-2y)\sqrt[3]{36}+(6y^2-2x)\sqrt[3]{6}+12xy+1.\end{aligned}$$

Од

$$(x^2-2y)\sqrt[3]{36}+(6y^2-2x)\sqrt[3]{6}+12xy+1=49+20\sqrt[3]{6}$$

го добиваме системот

$$\begin{aligned}&x^2-2y=0\\&6y^2-2x=20\\&12xy+1=49\end{aligned}$$

чиешто решение е $x=y=2$. Значи, $a=48, b=288$, а заради симетричност, решение е и $a=288$, $b=48$.

4. Од сите точки P кои лежат на страните AB, BC или CA на правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C=90^\circ$) најди ја онаа за која збирот $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ е најмал.

Решение. Ако точката P е на катетата BC тогаш $\overline{BP}+\overline{CP}=a$. Тогаш $\overline{AP}+a$ е најмал ако $\overline{AP}=b$. Слично, ако P е на катетата AC збирот има најмала вредност кога е еднаков на збирот на катетите $a+b$. Нека P е на хипотенузата AC. Тогаш $\overline{BP}+\overline{AP}=c$, а $\overline{CP}+c$ има најмала вредност ако $\overline{CP}=h_c$. Останува да ги споредиме збировите $a+b$ и $c+h_c$. Од $c^2=a^2+b^2$ и следува $c^2+h_c{}^2>a^2+b^2$. Бидејќи $ch_c=ab$, добиваме

$$c^2+2ch_c+h_c{}^2>a^2+2ab+b^2,$$

$$(c+h_c)^2>(a+b)^2$$

и затоа $a+b<c+h_c$. Значи, најмалата вредност на збирот $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ е $a+b$, а тогаш $P\equiv C$.

III година

1. Докажи дека секое решение на неравенката

$$\log_3(2x-3)+\log_5(4x^2-9)>2$$

го задоволува и неравенството

$$\log_5(4x^2-9)\cdot\log_5(100x^2-225)>2\log_3(2x-3)-\log_3{}^2(2x-3)\,.$$

Решение. Второто неравенство го трансформираме до облик

$$\log_5(4x^2-9)\cdot\log_5(25(4x^2-9))>2\log_3(2x-3)-\log_3{}^2(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow\qquad \log_5(4x^2-9)\cdot(2+\log_5(4x^2-9))>2\log_3(2x-3)-\log_3{}^2(2x-3)\,.$$

За дефиниционата област на функциите, во двете неравенства треба да важи

$$\begin{cases}2x-3>0\\4x^2-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3>0\\2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\x>-\frac{3}{2}\end{cases},\ \text{односно}\ x\in(\tfrac{3}{2},+\infty)\,.$$

Нека $x_0\in(\frac{3}{2},+\infty)$ е решение на првото неравенство. Нека $u(x)=\log_3(2x-3)$ и $v(x)=\log_5(4x^2-9)$. Од првото неравенство, за x_0 важи

$$u(x_0)+v(x_0)>2 \qquad (1)$$

Со воведените ознаки, второто неравенство станува

$$v(x)\cdot(2+v(x))>2u(x)-u^2(x)\,,$$

$$v(x)\cdot(2+v(x))-2u(x)+u^2(x)>0\,.$$

$$2v(x)+v^2(x)-2u(x)+u^2(x)>0$$

$$v^2(x)+(u(x)-2)^2+2(u(x)+v(x)-2)>0\,. \qquad (2)$$

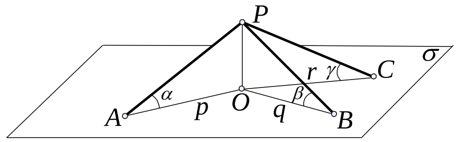
Останува само да провериме дали добиеното неравенство (2), кое е еквивалентно со второто неравенство, е точно за x_0. Со оглед на тоа дека секогаш важи $v^2(x_0)\ge 0,(u(x_0)-2)^2\ge 0$, а од (1) имаме и $u(x_0)+v(x_0)>2$, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (2) во x_0. Значи x_0 го задоволува второто неравенство.

2. Дадена е точка P која не лежи на рамнината σ. Низ точката P се повлечени прави a,b и c кои ја сечат рамнината σ во точките A,B,C, и со неа зафаќаат агли α,β и γ, соодветно, чиј збир е еднаков на 90°. Проекциите на отсечките PA,PB и PC врз рамнината σ имаат должини еднакви на p,q и r, соодветно. Определи го растојанието од точката P до рамнината σ.

Решение. Нека O е проекција на точката P врз рамнината σ. Според претпоставките од задачата $\measuredangle PAO=\alpha$, $\measuredangle PBO=\beta$ и $\measuredangle PCO=\gamma$. Триаголниците

$AOP, BOP\ COP$ се правоаголни, па затоа $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \operatorname{tg}\beta$ и $\frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \operatorname{tg}\gamma$. Бидејќи $\overline{OA} = p, \overline{OB} = q$ и $\overline{OC} = r$, и ако $\overline{OP} = H$, тогаш

$$\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{H}{p},\ \operatorname{tg}\beta = \tfrac{H}{q},\ \operatorname{tg}\gamma = \tfrac{H}{r}. \qquad (1)$$



Од условот на задачата $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$, добиваме $\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$, па според тоа

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \tfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} \qquad (2)$$

Сега, од (1) и (2) добиваме дека $\frac{H}{r} = \frac{1-\frac{H}{p}\frac{H}{q}}{\frac{H}{p}+\frac{H}{q}}$, т.е. $\frac{H^2}{r} = \frac{pq-H^2}{p+q}$, па затоа

$$H = \sqrt{\frac{pqr}{p+q+r}}.$$

3. Ако a,b,c се должини на страните на произволен триаголник, тогаш важи

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3. \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 > 0,$$

т.е. со неравенството

$$a(b^2+c^2-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) - 2abc > 0. \qquad (2)$$

Ако ги означиме аглите во триаголникот со α,β,γ, од косинусната теорема важат следниве три равенства:

$$2bc\cos\alpha = b^2+c^2-a^2,\ 2ca\cos\beta = c^2+a^2-b^2 \text{ и } 2ab\cos\gamma = a^2+b^2-c^2.$$

Ги заменуваме во (2) и добиваме

$$2abc\cdot\cos\alpha + 2abc\cdot\cos\beta + 2abc\cdot\cos\gamma - 2abc > 0$$

$$2abc(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1) > 0. \qquad (3)$$

За аглите во триаголникот важи $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, па користејќи познати тригонометриски трансформации добиваме

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 &= 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\tfrac{\gamma}{2} = 2\cos(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\gamma}{2})\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\tfrac{\gamma}{2}\\ &= 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\tfrac{\gamma}{2} = 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - \sin\tfrac{\gamma}{2})\\ &= 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - \sin(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\alpha+\beta}{2})) = 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - \cos\tfrac{\alpha+\beta}{2})\\ &= 2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(-2)\sin\tfrac{\alpha}{2}\cdot\sin(-\tfrac{\beta}{2}) = 4\sin\tfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\tfrac{\beta}{2}\cdot\sin\tfrac{\gamma}{2} > 0\end{aligned}$$

бидејќи, $0^\circ < \alpha,\beta,\gamma < 180^\circ$ од каде $0^\circ < \frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2} < 90^\circ$, односно $\sin\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\beta}{2},\sin\frac{\gamma}{2} > 0$

Според тоа, точно е неравенствотото (3) кое е еквивалентно со неравенството (2), т.е. со неравенството (1).

4. На страната BC на правоаголникот $ABCD$ ($\overline{AB} > \overline{BC}$) избрана е точка K таква што $\overline{BK} = 4\overline{KC}$, а на страната CD избрана е точка M таква што $\overline{CM} = 4\overline{MD}$. Пресметај го односот $\overline{AB} : \overline{BC}$ кога аголот $\angle KAM$ прима најголема можна вредност.

Решение. Нека точките K и M се такви да $\overline{BK} = 4\overline{KC}$ и $\overline{CM} = 4\overline{MD}$. Нека $\measuredangle BAK = \alpha, \measuredangle MAD = \beta$ и $\measuredangle KAM$ прима најголема можна вредност. Да го означиме односот кој го бараме со $\overline{AB} : \overline{BC} = x$ ($x > 0$). Јасно $\alpha + \beta$ прима најмала вредност, односно $tg(\alpha + \beta)$ е најмал ($\alpha + \beta < 90^\circ$, па $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) > 0$). Имаме

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BK}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{4}{5}\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}\frac{1}{x}$ и $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\overline{MD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1}{5}\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1}{5}x$.

Сега имаме

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta} = \frac{\frac{4}{5x} + \frac{x}{5}}{1 - \frac{4}{5x}\frac{x}{5}} = \frac{25}{21}\left(\frac{4}{5x} + \frac{x}{5}\right).$$

Овде може да се примени неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, од каде добиваме

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) \geq \frac{25}{21} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{5x} \cdot \frac{x}{5}} = \frac{50}{21} \cdot \frac{2}{5} = \frac{20}{21}.$$

Најмалата вредност за $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$ е $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{20}{21}$, а се достигнува кога $\frac{4}{5x} = \frac{x}{5}$, односно за $x^2 = 4$. Добивме $x = 2$, од каде бараниот однос е $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$ и во овој случај аголот $\measuredangle KAM$ е најголем.

IV година

1. Природните броеви k и n се поголеми од 1. Во една група од kn луѓе, секој член на групата се познава со повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите луѓе од групата. Дали постојат $k+1$ луѓе од групата кои попарно се познаваат меѓу себе? (Да се докаже за било кои k и n кои ги поседуваат дадените својства).

Решение.Тврдењето ќе го докажеме со принципот на математичка индукција. За $k = 2$ групата на луѓе има $2n$ членови. Било кој човек од групата се познава со повеќе од $(2-1)n = n > 1$ членови на групата, па според тоа, постојат барем двајца кои се познаваат меѓу себе. Секој од нив се познава со повеќе од n членови на групата. Нека множеството на луѓе со кои се познава едниот го означиме со A а множеството луѓе со кои се познава другиот го означиме со B .Според тоа $|A| > n$ и $|B| > n$. Користејќи ја формулата $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, добиваме

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|> n+n-|A\cap B|=2n-|A\cap B|.$$

Ако $|A\cap B|=0$, тогаш $|A\cup B|>2n$, што не е можно. Значи, $|A\cap B|>0$, односно $A\cap B\neq\varnothing$.Значи, постои барем еден член на групата кој припаѓа на множеството A и кој припаѓа на множеството B. Значи, тој се познава и со едниот и со другиот избран член на групата кои што ги избравме. Бидејќи двата члена на групата ги избравме да се познаваат, добиваме дека тројцата се познаваат меѓу себе. Според тоа тврдењето е точно за $k=2$.

Нека тврдењето е точно за $k=m$, односно во група во која има mn луѓе во која сечкој човек од групата се познава со повеќе од $(m-1)n$, постојат барем $m+1$ од нив кои попарно се познаваат меѓу себе.

За $k=m+1$, нека имаме група од $(m+1)n$ луѓе, во која секој од нив се познава со повеќе од mn луѓе од групата. Ќе избереме еден член на групата, кој според претпоставката се познава со повеќе од mn членови на групата. Значи, можеме да избереме точно mn членови од групата со кои тој се познава. Од новата група составена од mn членови секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив (од почетната група се отстранети најмногу $n-1$ член со кои тој се познава, па според тоа тој се познава со не помалку од $mn-(n-1)$ член од избраната груп;а. Или од групата од mn членови кои се избрани, секој од нив се познава со повеќе од mn членив од почетната група од $(m+1)n$ луѓе. Бидејќи се отстранети n членови од почетната група, тој се познава со повеќе од $mn-n$ членови од избраната група). Значи, во избраната група од mn членови на групата, секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив. Според индуктивната претпоставка, постојат $m+1$ луѓе од избраната група од mn луѓе кои попарно се познаваат. Тие заедно со на почеток избраниот човек, формираат група од $m+2$ луѓе во која секои двајца се познаваат.

Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно, односно во група од kn луѓе во која секој познава повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите, постојат $k+1$ член од групата така што било кои два од нив попарно се познаваат.

2. Даден е триаголникот ABC со внатрешни агли α,β и γ кои образуваат геометриска прогресија со количник 2. Притоа аголот α е најмал. Докажи дека $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$, каде што a,b и c се должините на страните на триаголникот, кои лежат спроти алите α,β,γ, соодветно.

Решение. Бидејќи аглите образуваат геометриска прогресија со количник 2 и α е најмалиот агол имаме $\beta=2\alpha,\gamma=4\alpha$, од каде што следува дека $\alpha=\frac{\pi}{7}$. Од синусната теорема важи $a=2R\sin\alpha; b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$. Тогаш

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}\right)=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 4\alpha}.$$

Од $3\alpha+4\alpha=7\alpha=\pi$, следува дека $3\alpha=\pi-4\alpha$, па затоа

$$\sin 3\alpha=\sin(\pi-4\alpha)=\sin 4\alpha .$$

Конечно,

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R\sin\alpha}=\frac{1}{a} .$$

3. Низата од реални броеви (a_n) е зададена со $a_1=5; a_2=19$ и за $n\geq 3$, $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$. Најди го a_{2007}.

Решение. Со принципот на математичка индукција, ќе докажеме дека

$$a_n=3^{n+1}-2^{n+1},\ n\geq 1 .$$

Имено, $a_1=3^2-2^2$; $a_2=3^3-2^3$. Нека за $k\leq n-1$ важи $a_k=3^{k+1}-2^{k+1}$. Тогаш

$$\begin{aligned}a_n&=5a_{n-1}-6a_{n-2}=(3+2)(3^n-2^n)-3\cdot 2(3^{n-1}-2^{n-1})\\&=3^{n+1}+2\cdot 3^n-3\cdot 2^n-2^{n+1}-2\cdot 3^n+3\cdot 2^n=3^{n+1}-2^{n+1}.\end{aligned}$$

Оттука следува дека $a_{2007}=3^{2008}-2^{2008}$.

4. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ така што за $m,n\in\mathbb{N}$ и $m>n$ важи

$$f(f(m+n)+f(m-n))=8m .$$

Решение. Ако ставиме $k=m+n, l=m-n$ добиваме $f(f(k)+f(l))=4(k+l)$. Ќе докажеме дека f е инјекција. Нека $f(k)=f(l)$. Тогаш

$$4(k+l)=f(f(k)+f(l))=f(f(k)+f(k))=8k ,$$

па $k=l$.

Од друга страна,

$$f(f(k)+f(k))=4\cdot 2k=4((k-1)+(k+1))=f(f(k-1)+f(k+1)) .$$

Бидејќи f е инјекција, следува дека $f(k)+f(k)=f(k+1)+f(k-1)$, односно

$$f(k+1)=2f(k)-f(k-1) .$$

За $k=2$ имаме

$$f(3)=2f(2)-f(1)=2(f(2)-f(1))+f(1) ,$$

и за $k=3$ имаме

$$f(4)=2f(3)-f(2)=3(f(2)-f(1))+f(1) .$$

Со индукција се докажува дека

$$f(n)=(n-1)(f(2)-f(1))+f(1)$$

односно

$$f(n)=n(f(2)-f(1))+2f(1)-f(2) .$$

Значи, $f(n)=an+b$, каде што $a,b\in\mathbb{Z}$ ($a=f(2)-f(1), b=2f(1)-f(2)$.

Последниов израз го заменуваме во почетниот и добиваме:

$$f(a(m+n)+b+a(m-n)+b)=8m \Leftrightarrow f(2am+2b)=8m \Leftrightarrow a(2am+2b)+b=8m$$
$$\Leftrightarrow 2a^2m+2ab+b=8m .$$

Бидејќи последното равенство важи за секој $m\in\mathbb{N}$, добиваме дека

$$a^2=4,\ b(2a+1)=0,$$

односно $a=\pm 2, b=0$.

За $a=-2$, се добива $f(n)=-2n$, но тоа не е пресликување од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{N}$. Затоа, $f(n)=2n$ е единствено решение на дадената равенка.