Конвексне геометријске фигуре

***др Ратко Тошић*, Нови Сад**

Са конвексним фигурама ученици се упознају већ у основној школи. То је област у којој се до многих важних резултата долази елементарним методама, па се због тога задаци о конвексним фигурама често појављују на средњошколским такмичењима из математике. И поред тога се у школама ни у редовној ни у додатној настави овој проблематици не поклања довољно пажње. Зато уз овај чланак дајемо и већи број задатака од којих је велики део предлаган на домаћим, страним и разним међународним такмичењима из математике.

1. Конвексне фигуре

У овом чланку подразумевамо да су све геометријске фигуре које посматрамо подскупови једне равни.

Дефиниција 1. Фигура F је *конвексна* ако за сваке две њене тачке важи да је дуж одређена тим тачкама подскуп фигуре F.

Пример 1. Конвексне фигуре су, на пример: празан скуп, тачка, дуж, полуправа, права, полураван, раван. $\triangle$

Лако се види да скуп од n тачака није конвексна фигура, за $n > 1$.

Теорема 1. Пресек конвексних фигура је конвексна фигура.

Доказ. Нека су F_1 и F_2 конвексне фигуре и $A \in F_1 \cap F_2$, $B \in F_1 \cap F_2$. Тада је $A \in F_1$, $B \in F_1$, па за сваку тачку X дужи AB важи $X \in F_1$. Слично закључујемо да је $X \in F_2$, одакле је $X \in F_1 \cap F_2$. $\square$

Пример 2. *Угао* дефинишемо као унију или као *пресек* две (затворене) полуравни. Сваки угао са мерним бројем α, $0 < \alpha < 360°$, може се добити као унија или као пресек две полуравни. Лако се види да је сваки такав угао конвексна фигура ако и само ако се може добити као пресек две полуравни. За мерни број α конвексног угла важи: $0 \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Многоугаона линија је затворена изломљена линија без самопресека. Многоугаона линија M разбија скуп тачака равни које не припадају тој линији на два скупа (области), при чему две тачке равни припадају истој области ако се могу спојити изломљеном линијом која је дисјунктна са линијом M. Једна од те две области окарактерисана је чињеницом да у њој постоји права која је дисјунктна са линијом M, и за ту област кажемо да је *спољашња* област, док за ону другу кажемо да је *унутрашња*.

Многоугао је унија многоугаоне линије и њене унутрашње области. Дужи многоугаоне линије су *странице* многоугла. Многоугао са n страница назива се *n-угао*.

Следеће два тврђења су еквивалентна.

I Многоугао је конвексан ако за сваку његову страницу важи да цео многоугао лежи у једној полуравни одређеној правом која садржи ту страницу.

II Многоугао је конвексан ако је он пресек неколико полуравни.

Свако од ових тврђења може се усвојити као дефиниција конвексног многоугла, независно од опште дефиниције конвексне фигуре. С друге стране, оба тврђења могу се доказати ако прихватимо општу дефиницију.

Пример 3. Сваки троугао је конвексна фигура, јер је добијен као пресек три полуравни. $\triangle$

Пример 4. Нека су A, B и C три неколинеарне тачке које припадају конвексној фигури F. Доказати да је онда цео троугао ABC садржан у фигури F.

Решење. На основу дефиниције конвексне фигуре, све тачке на страницама троугла ABC припадају фигури F. Нека је сада X произвољна тачка у унутрашњости троугла ABC. Означимо са A' пресек праве AX са страницом BC. Како је $A \in F$ и $A' \in F$, следи да је и $X \in F$. $\triangle$

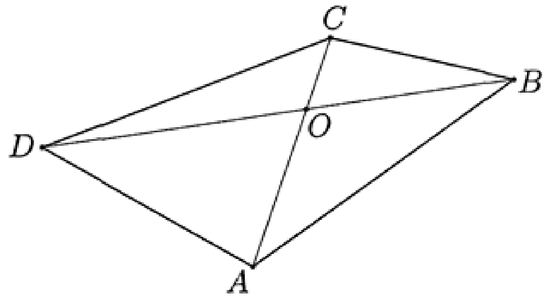
Пример 5. Ученик је залутао у шуми која покрива конвексну област површине $100\,\mathrm{km}^2$. Доказати да он може изићи из шуме а да при томе не пређе пут дужи од $30\,\mathrm{km}$.

Решење. Претпоставимо да се ученик налази у тачки A. Ако он, полазећи из тачке A, пређе $15\,\mathrm{km}$ крећући се праволинијски и стигне у тачку B, затим скрене под правим углом и пређе још $15\,\mathrm{km}$ праволинијски до неке тачке C, направиће пут дужине $30\,\mathrm{km}$. Површина троугла ABC износи $112{,}5\,\mathrm{km}^2$. Сад лако закључујемо да бар једна од тачака B и C мора бити ван шуме; у противном би, на основу примера 4, цео троугао лежао у области шуме, што је немогуће, јер је површина шуме само $100\,\mathrm{km}^2$. $\triangle$

Конвексни четвороуглови имају низ интересантних особина.

Теорема 2. Четвороугао је конвексан ако и само ако му се дијагонале секу.

Доказ. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао (слика 1). Тада је $C \in \angle BAD$, па полуправа AC сече страницу BD троугла ABD. Нека је O тачка пресека. Тада је $O \in BD$. Примењујући исти поступак на теме B закључујемо да је $O \in AC$.



Слика 1

Обрнуто, претпоставимо да је $\{O\} = [AC] \cap [BD]$. Из $(OC) \cap AB = \varnothing$ и $(OD) \cap AB = \varnothing$, закључујемо да се тачке C, D и O налазе са исте стране праве AB. На исти начин се доказује аналогно својство правих BC, CD и DA, одакле следи да је четвороугао $ABCD$ добијен као пресек 4 полуравни. $\square$

Теорема 3. Збир дужина дијагонала конвексног четвороугла већи је од збира дужина две наспрамне странице.

Доказ. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао и O тачка пресека дијагонала AC и BD (слика 1). Примењујући неједнакост троугла на троуглове ABO и CDO, добијамо да је $AC+BD=(AO+OC)+(BO+OD)=(AO+BO)+(OC+OD)>AB+CD$. Слично доказујемо да је $AC+BD>AD+BC$. □

Пример 6. У равни је дат коначан скуп тачака M, тако да у њему не постоје три колинеарне тачке. Неке од датих тачака су спојене дужима, при чему из сваке тачке излази највише једна дуж. Ако се дужи AB и CD секу, дозвољено их је заменити са паром наспрамних страница AC и BD четвороугла $ABCD$. На добијени систем дужи може се применити исти поступак. Може ли се на овај начин, после коначно много корака, постићи да се никоје две дужи не секу?

Решење. Да. Нека је укупан број дужи једнак k. Постоји само коначан број начина да се нацрта k дужи са крајевима у скупу M. Сваком таквом избору дужи придружимо реалан број који је једнак збиру њихових дужина. Тај збир може имати само коначно много различитих вредности. При свакој замени дужи AB и CD, које се секу, наспрамним страницама четвороугла $ABCD$, тај збир се смањује, јер је четвороугао $ABCD$ конвексан (дијагонале му се секу) а код конвексног четвороугла је збир две наспрамне странице мањи од збира дијагонала. Како се смањивање збира дужина не може бесконачно продужавати (јер може узимати само коначно много вредности), следи да се после коначног броја замена добија k дисјунктних дужи. △

Пример 7. У равни је дато n црвених и n плавих тачака, тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да је могуће нацртати n дисјунктних дужи тако да свака има једну црвену и једну плаву крајњу тачку.

Решење. Постоји $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ различитих начина да се нацрта n дужи тако да свака спаја једну црвену и једну плаву тачку, при чему је свака тачка – крајња тачка тачно једне дужи. Направимо било које од тих могућих спајања. Уколико се међу нацртаним дужима неке две секу, извршимо замену из претходног примера. При томе, очигледно, увек се може извршити таква замена да свака од две нове дужи спаја тачке различитих боја. После сваке замене, укупна дужина дужи се смањује. Следи да се после коначног броја замена постиже да никоје две дужи немају заједничких тачака. △

Задаци

1. Које су од следећих фигура конвексне: кружница, круг, круг из кога је одстрањена једна тачка, троугао из кога је одстрањена једна тачка?

2. За које природне бројеве n је могуће одстранити n тачака конвексног многоугла, тако да добијена фигура буде конвексна?
Решење. За $n \leqslant m$, где је m број страница многоугла.

3. Из конвексног многоугла одстрањена је једна његова унутрашња тачка. Да ли се добијена фигура може разбити на две конвексне фигуре?

4. Доказати да је збир дужина дијагонала конвексног четвороугла мањи од обима а већи од полуобима тога четвороугла.

5. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао. Доказати да је $AB + CD < AC + BD$.
6. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао, такав да је $AB + BD \leqslant AC + CD$. Доказати да је $AB < AC$.
7. Конвексан четвороугао смештен је цео у унутрашњости другог конвексног четвороугла. Може ли збир дужина дијагонала унутрашњег четвороугла бити већи од збира дијагонала спољашњег четвороугла: (а) 2 пута; (б) 1,99 пута?
8. Обим конвексног четвороугла једнак је 4. Доказати да његова површина није већа од 1.
9. Нека је O тачка у унутрашњости конвексног четвороугла $ABCD$ површине S, таква да је $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Доказати да је $ABCD$ квадрат, а O његов центар.
10. Темена конвексног четвороугла леже на страницама јединичног квадрата, на свакој страници по једно теме. Доказати да обим четвороугла није мањи од $2\sqrt{2}$.

2. Конвексни омотач

Дефиниција 2. *Конвексни омотач* фигуре F је најмања конвексна фигура која садржи фигуру F као подскуп (тј. она је подскуп сваке конвексне фигуре која садржи F).

Конвексни омотач фигуре F означаваћемо са $H(F)$.

Дефиниција 3. Права l је *права ослонца* фигуре F, ако са фигуром F има заједничких тачака, док су све остале тачке фигуре F са исте стране праве l.

У раду са конвексним фигурама у равни, корисно је имати у виду следеће чињенице:

- за сваку праву постоје две њој паралелне праве које су праве ослонца дате ограничене конвексне фигуре F;
- конвексни омотач скупа од n тачака, $n > 2$, је дуж или конвексан многоугао;
- конвексни омотач многоугла је конвексан многоугао.

Теорема 4. Нека је S коначан скуп тачака. Тачка $A \in S$ је теме конвексног омотача $H(S)$ ако и само ако постоји права ослонца a кроз тачку A, која нема других заједничких тачака са $H(S)$.

Доказ. Конвексни омотач $H(S)$ је конвексан многоугао. Ако је A теме тога многоугла, онда очигледно постоји права a, таква да је $A \in a$, док све остале тачке тога многоугла леже у истој отвореној полуравни са граничном правом a. Ако A није теме конвексног омотача $H(S)$, онда је она у његовој унутрашњости или на некој његовој страници. У оба случаја лако се види да не постоји права a кроз A са наведеном особином. $\square$

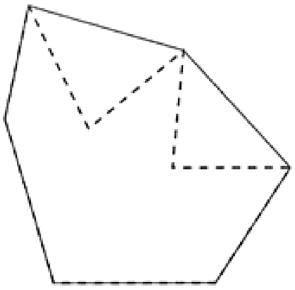
Пример 8. На светском конгресу корњача било је 2000 делегата. После завршетка конгреса корњаче су се разишле. Све корњаче крећу се једнаким брзинама по различитим правама, међу којима нема паралелних правих. Доказати да ће после извесног времена корњаче да се налазе у теменима једног конвексног 2000-угла.

Решење. Претпоставимо да су брзине свих корњача вектори дужине 1. Посматрајмо корњаче као тачке које се крећу по одговарајућим правама. Уочимо тачку A која се креће по правој a. Пројекција брзине сваке друге дате тачке на праву a је вектор дужине мање од 1. Ако у сваком тренутку посматрамо праву a' која пролази кроз променљиву тачку A и нормална је на a, тада ће после извесног времена свих преосталих 1999 тачака да се налазе у истој отвореној полуравни са граничном правом a'. Како то важи за сваку од 2000 датих тачака, следи да ће после извесног времена (кад се за сваку тачку испуни наведени услов) свака тачка бити теме конвексног омотача скупа датих тачака (теорема 4), одакле следи тврђење. $\triangle$

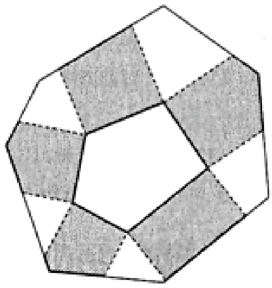
Задаци

11. (а) Нека је M неконвексан многоугао и M' његов конвексни омотач. Доказати да је обим многоугла M' мањи од обима многоугла M.

(б) У унутрашњости конвексног многоугла смештен је други конвексан многоугао. Доказати да обим спољашњег многоугла није мањи од обима унутрашњег многоугла.



Слика 2



Слика 3

Решење. (а) При прелазу од неконвексног многоугла на његов конвексни омотач, неке изломљене линије састављене од страница многоугла замењују се дужима (слика 2). Треба још узети у обзир да је изломљена линија дужа од дужи која спаја њене крајње тачке.

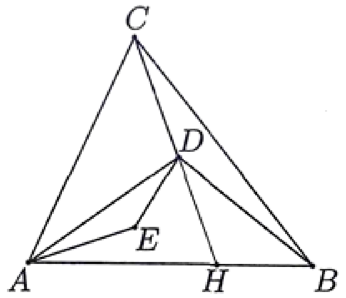
(б) Конструишимо над страницама унутрашњег многоугла полутраке окренуте према спољашњости. Паралелне полуправе које ограничавају полутраке нормалне су на одговарајуће странице унутрашњег многоугла (слика 3). Означимо са p део обима спољашњег многоугла који је покривен полутракама. Обим унутрашњег многоугла није већи од p, док је обим спољашњег многоугла већи од p.

12. У равни је дато $n \geqslant 3$ тачака, тако да не припадају све једној правој. Доказати да постоји кружница која пролази кроз три дате тачке тако да се у унутрашњости кружнице не налази ниједна од датих тачака.

13. У равни је дато 2000 тачака. За сваки пар тачака посматра се њихово растојање. За неке парове тачака то растојање има минималну вредност (може бити више таквих парова). Доказати да се између датих тачака може изабрати тачка A таква да се највише три дате тачке налазе на минималном растојању од тачке A.

14. У равни је дато n тачака тако да су сваке четири темена конвексног четвороугла. Доказати да су те тачке темена конвексног n–угла.

15. (Happy End Problem) У равни је дато 5 тачака тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да међу њима постоје 4 тачке које су темена конвексног четвороугла.



Слика 4

Решење. Посматрајмо конвексни омотач скупа датих тачака. Ако је он четвороугао или петоугао, све је јасно. Претпоставимо сада да је конвексни омотач троугао ABC и да се преостале две тачке, D и E, налазе у унутрашњости троугла (слика 4). Тачка E налази се у унутрашњости једног од троуглова ABD, BCD, CAD; ради одређености претпоставимо да се налази у унутрашњости троугла ABD. Означимо тачку пресека правих CD и AB са H. Тачка E је у унутрашњости једног од троуглова ADH и BDH. Ако је, на пример, у унутрашњости троугла ADH, онда је $AEDC$ конвексан четвороугао.

16. У равни је дато 9 тачака тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да међу њима постоји 5 тачака које су темена конвексног петоугла.

17. У равни је дато неколико правилних многоуглова. Доказати да конвексни омотач скупа њихових темена има бар n страница.

18. У равни је смештено 2000 подударних кругова, тако да никоја два немају заједничких унутрашњих тачака. Доказати да међу њима постоји круг који додирује највише три од преосталих кругова.

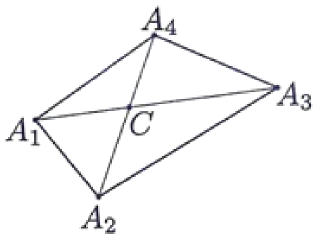
19. У равни је дато 2000 тачака тако да међу њима не постоје три колинеарне, нити четири које су темена тетивног четвороугла. Доказати да постоји кружница која садржи три дате тачке и у чијој се унутрашњости налази тачно 1000 датих тачака.

3. Хелијева теорема

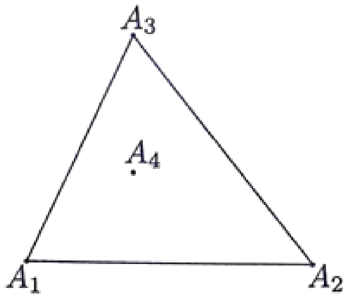
Једна од најважнијих теорема комбинаторне геометрије, Хелијева теорема, односи се на конвексне скупове.

Теорема 5. (Хелијева теорема) Ако је у равни дато n конвексних фигура, тако да сваке три имају заједничку тачку, онда све фигуре имају заједничку тачку.

Доказ. Доказ дајемо индукцијом по броју фигура n. Нека је $n = 4$. Означимо дате фигуре са F_1, F_2, F_3, F_4. Нека је: $A_1 \in F_2 \cap F_3 \cap F_4$, $A_2 \in F_1 \cap F_3 \cap F_4$, $A_3 \in F_1 \cap F_2 \cap F_4$, $A_4 \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$.



Слика 5



Слика 6

Могући су следећи случајеви.

(1) $A_1A_2A_3A_4$ је конвексан четвороугао (слика 5). Нека је C тачка пресека дијагонала A_1A_3 и A_2A_4. Доказаћемо да тачка C припада пресеку све четири фигуре. Тачке A_1 и A_3 припадају пресеку $F_2 \cap F_4$; према томе цела дуж A_1A_2 лежи у том пресеку, па је и $C \in F_2 \cap F_4$. Аналогно следи да цела дуж A_2A_4 лежи у пресеку $F_1 \cap F_3$, па је и $C \in F_1 \cap F_3$. Следи да је $C \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$.

(2) Конвексни омотач скупа $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ је троугао. Нека, на пример, тачка A_4 лежи у унутрашњости троугла $A_1A_2A_3$ или на некој његовој страници (слика 6). Како тачке A_1, A_2, A_3 припадају конвексној фигури F_4, све тачке троугла $A_1A_2A_3$ припадају тој фигури, па је $A_4 \in F_4$, тј. $A_4 \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$.

(3) Случај кад су тачке A_1, A_2, A_3, A_4 колинеарне лако се решава.

Претпоставимо сада да тврђење теореме важи за неки природан број $n \geqslant 4$. Доказаћемо да тврђење важи и за $n+1$ конвексних фигура. Нека су $F_1, F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}$ конвексне фигуре такве да сваке три имају заједничку тачку. Посматрајмо уместо њих n фигура $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F'_n$, где је $F'_n = F_n \cap F_{n+1}$. Јасно је да је и F'_n конвексна фигура. Докажимо да сваке три нове фигуре имају заједничку тачку. То је потребно проверити само за тројке фигура које садрже F'_n. Међутим, на основу доказа за $n = 4$, следи да четири фигуре F_i, F_j, F_n, F_{n+1} увек имају заједничку тачку, па према томе и фигуре F_i, F_j и F'_n. По претпоставци индукције фигуре $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F'_n$ имају заједничку тачку, према томе и фигуре $F_1, F_2, \ldots, F_n, F_{n+1}$ имају заједничку тачку. □

Пример 9. У равни је дато n тачака тако да се сваке три могу покрити кругом полупречника 1. Доказати да се свих n тачака могу покрити кругом полупречника 1.

Решење. Круг полупречника 1 са центром O покрива неке тачке ако и само ако кругови полупречника 1 са центрима у тим тачкама покривају тачку O. Зато се задатак може преформулисати на следећи начин. *У равни је дато n тачака тако да свака три круга полупречника 1 са центрима у тим тачкама имају заједничку тачку. Доказати да онда сви кругови имају заједничку тачку.* Ово тврђење, међутим, непосредно следи из Хелијеве теореме. △

Пример 10. Четири полуравни једне равни распоређене су тако да покривају целу раван, тј. свака тачка равни је унутрашња тачка бар једне од те четири полуравни. Доказати да неке три од тих полуравни такође покривају целу раван.

Решење. За сваку од 4 полуравни посматрајмо полураван са истом граничном правом, која је допуњава до равни. Те 4 допунске полуравни немају заједничку тачку, јер таква тачка не би била покривена ни једном од 4 полазне равни. Из Хелијеве теореме следи да 4 полуравни (као конвексни скупови) имају празан пресек само ако неке три од њих имају празан пресек. Међутим, тада три њима допунске полазне полуравни покривају целу раван. △

Разни задаци

18. Колико страница може имати конвексан многоугао чије су све дијагонале исте дужине?

Решење. Највише 5.

19. Доказати да је збир дужина дијагонала конвексног петоугла $ABCDE$ већи од обима а мањи од двоструког обима тога петоугла.

20. Доказати да се у сваком конвексном петоуглу могу изабрати три дијагонале тако да се од њих може саставити троугао.

21. Доказати да се у конвексан многоугао површине S и обима p може сместити круг полупречника $\dfrac{S}{p}$.

22. У унутрашњости конвексног многоугла површине S_1 и обима p_1 смештен је конвексан многоугао површине S_2 и обима p_2. Доказати да је $\dfrac{2S_1}{p_1} > \dfrac{S_2}{p_2}$.

23. Доказати да се у сваки конвексан многоугао површине 1 може сместити троугао чија површина није мања од: (а) $\dfrac{1}{4}$; (б) $\dfrac{3}{8}$.

24. Конвексан n-угао смештен је у квадрат странице 1. Доказати да постоје три темена A, B и C тога многоугла, таква да површина троугла ABC није већа од: (а) $\dfrac{8}{n^2}$; (б) $\dfrac{16\pi}{n^3}$.

25. У унутрашњости конвексног многоугла смештена је дуж MN. Доказати да дужина дужи MN није већа од дужине најдуже странице или најдуже дијагонале тог многоугла.

26. Конвексан многоугао површине веће од 0,5 смештен је у квадрат странице 1. Доказати да се у тај многоугао може сместити дуж дужине $\dfrac{1}{2}$ паралелна некој страници квадрата.

27. Доказати да се од страница конвексног многоугла обима p могу саставити две дужи чије се дужине разликују највише за $\dfrac{p}{3}$.

28. Доказати да се сваки конвексан многоугао површине 1 може сместити у правоугаоник површине 2.

29. У равни је дато $n \geqslant 4$ тачака, тако да међу њима не постоје три колинеарне. За сваке три дате тачке постоји четврта која са њима чини скуп темена једног паралелограма. Доказати да је $n = 4$.

30. Колико најмање тачака може да се уочи у унутрашњости конвексног n-угла, тако да се у сваком троуглу са теменима у теменима тога n-угла налази бар једна од уочених тачака?

31. Доказати да се у сваком конвексном многоуглу, осим паралелограма, могу изабрати три странице чијим се продужавањем добија троугао који садржи дати многоугао.

32. У равни су дати конвексни многоуглови F и G. Нека је H скуп средишта свих дужи AB таквих да је $A \in F$, $B \in G$.

(а) Доказати да је H конвексан многоугао.

(б) Колико страница може имати многоугао H ако F и G имају n_1 и n_2 страница редом?

(в) Коју вредност може имати обим многоугла H, ако F и G имају обиме p_1 и p_2 редом?

33. Циркуска арена (кружног облика) осветљава се са n рефлектора. Сваки рефлектор осветљава конвексну област. Познато је да ако се искључи било који рефлектор да ће арена и даље бити цела осветљена, а ако се искључе било која два рефлектора, арена неће бити цела осветљена. За које бројеве n је то могуће?

34. Да ли сваки петоугао има бар две странице такве да цео петоугао лежи у истој полуравни чија је гранична права та страница.

35. (а) Да ли постоји шестоугао такав да се из неке његове унутрашње тачке ниједна његова страница не види цела?

(б) Да ли постоји осмоугао такав да се из неке његове спољашње тачке ниједна његова страница не види цела?

36. Многоугао је такав да се из неке тачке види цела његова контура. Доказати да се из сваке тачке равни види у потпуности бар једна страница многоугла.

37. (а) Доказати да сваки n-угао ($n \geqslant 4$) има бар једну унутрашњу дијагоналу (тј. такву која цела лежи у унутрашњости n-угла).

(б) Колико најмање унутрашњих дијагонала може имати n-угао?

38. Доказати да се сваки многоугао може изрезати на троуглове дијагоналама без заједничких унутрашњих тачака.

39. Доказати да је збир унутрашњих углова сваког n-угла једнак $(n-2) \cdot 180°$.

40. Колико највише оштрих углова може имати неконвексан n-угао?

41. На неконвексан многоугао примењује се следећа операција: ако он лежи цео са једне стране праве AB, где су A и B несуседна темена многоугла, онда се једна од две изломљене линије, на које је обим многоугла подељен тачкама A и B, преслика централно симетрично у односу на средиште дужи AB. Доказати да ће се после коначног броја таквих операција добити конвексан многоугао.

42. Доказати да се конвексан многоугао не може разрезати на коначно много неконвексних четвроуглова.

43. (Теорема Минковског) Почетак координатног система је центар симетрије конвексне фигуре F, чија је површина већа од 4. Доказати да фигура F садржи бар једну тачку са целобројним координатама, различиту од координатног почетка.

44. Доказати да је конвексан многоугао централно–симетрична фигура ако и само ако се може разрезати на паралелограме.

45. Конвексни многоугао M може се разрезати на конвексне централно–симетричне многоуглове. Доказати да је M централно–симетричан многоугао.

46. Доказати да се конвексан 22-угао не може разрезати дијагоналама на 7 петоуглова.

47. У конвексном n-углу повучене су све дијагонале, које га разбијају на многоуглове. Доказати да сваки тај многоугао има не више од n страница.

48. Доказати да се сваки конвексан n-угао може разрезати на конвексне петоуглове.

49. Да ли је могуће разбити једнакостранични троугао на 1000000 конвексних многоуглова тако да свака права има непразан пресек са бар 40 многоуглова?

50. Дат је конвексан петоугао чији су сви углови тупи. Доказати да се могу наћи две дијагонале тога петоугла, такве да два круга чији су пречници те дијагонале покривају цео петоугао.

Решење. Нека је AB најдужа страница петоугла. Посматрајмо траку чије су граничне праве нормале на страницу AB у тачкама A и B. Како су углови EAB и ABC тупи, тачке E и C леже у спољашњости траке. Због тога тачка D припада траци; у противном би једна од страница ED и DC била дужа од странице AB. Нека је D_1 ортогонална пројекција тачке D на AB. Тада кругови над пречницима AD и BD у потпуности покривају четвороуглове $AEDD_1$ и $BCDD_1$ редом.

51. Доказати да се у конвексном n-углу не може изабрати више од n дијагонала тако да сваке две имају заједничку тачку.

52. У равни је дато $n > 2$ тачака, међу којима не постоје три колинеарне. Доказати да међу затвореним изломљеним линијама са теменима у датим тачкама, најмању дужину има многоугаона линија.

53. Дат је конвексни многоугао код кога не постоје две паралелне странице. За сваку страницу посматрамо угао под којим се она види из темена које је на највећем растојању од праве одређене том страницом. Доказати да је збир свих тих углова једнак 180°.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2013/14 година