

РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА. ОДРЖАН ВО 1961 ГОД.

Први клас

1. Да се реши равенката:

$$\frac{2a+x}{2b-x} - \frac{2a-x}{2b+x} = \frac{4ab}{4b^2-x^2}.$$

Дали таа равенка има решение за секое a и b ?

2. Во секој од два сада има извесно количество вода. Ако најпрво од првиот сад се прелие во вториот сад онолку вода колку што веќе има во него, а потоа од вториот сад се прелие во првиот онолку вода колку останало во него по првото преливање, во секој од двата сада ќе има по 16 литри вода. Колку литри вода имало во почетокот во првиот, а колку во вториот сад?

3. Да се реши системот равенки:

$$ax+u=1, \quad x-au=1.$$

Да се одреди: а) за кои вредности на a ќе биде истовремено x и u позитивно; б) дали постојат такви вредности на a , за кои едновременно x и u ќе бидат еднакви на нула или негативни.

4. Да се конструира триаголник ако се дадени: висината спрема едната страна, должината на тежишната линија спрема истата страна и радиусот на опишаниот круг.

5. Секоја од двата пара страни на еден ромб кои што се составуваат во две спротивни темиња на тој ромб, е продолжена за една иста должина. Ако се поврзат крајните точки на тие отсечки одејќи по ред, се добива правоаголник. Да се докаже тоа.

Втори клас

1. Да се упрости изразот

$$\left[\frac{1}{x^{1/2} - 4x^{-1/2}} + \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}} \right]^2 \cdot \sqrt{x^2 + 8x + 16}$$

2. Не решавајќи ја равенката $x^2 + px + q = 0$, да се пресмета вредноста на изразот

$$u = x_1(2x_1^2 - 3x_2^2) + x_2(2x_2^2 - 3x_1^2),$$

каде што x_1 и x_2 се корени на дадената равенка.

3. Во една права и правилна четиристрана пирамида со основен раб $a=1$ и телесна висина $h=2$ е впишан правилен паралелопипед така што неговата долна основа лежи на основата од пирамидата, а темњата на неговата горна основа лежат на бочните рабови на пирамидата.

а) Да се изрази површината на паралелопипедот $P(x)$ како функција на неговиот основен раб x .

б) Во координатниот систем xOy да се нацрта графикот на функцијата $P(x)$ и да се најде најголемата вредност на оваа функција.

в) Да се покаже во кој случај паралелопипедот ќе претставува коцка.

г) Да се покаже меѓу кои вредности треба да варира x ако P варира меѓу 1 и 2.

4. Даден е правоаголен трапез во кој што a и c се основи, а b е првиот крак, еднаков со висината. Да се докаже:

а) Ако во овој трапез дијагоналите се заемно нормални, висината претставува геометриска средина на основите.

б) Ако во овој трапез може да се впише круг, меѓу неговите страни постојат врските:

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}, \quad h = \frac{2ac}{a + c}.$$

5. Да се нацрта круг така да ги допира двете непаралелни прави (p_1) и (p_2) и допирната тетива да има должина t . Да се објасни постапката.

Трети клас

1. Да се докаже дека е:

$$а) \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b};$$

$$6) \log_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots}.$$

2. Да се реши системот равенки

$$\sqrt[4]{x^2} = 11\sqrt[4]{x} - 10, y = 3 \log_{10} x - 2.$$

3. Околу една топка со радиус R е опишан еден пресечен конус така што волуменот на конусот е двапати поголем од волуменот на топката. Да се најдат радиусите на основите и страната на овој конус.

4. Да се реши равенката

$$\cos^2 3x + \cos^2 2x = 1.$$

5. Основата ABC на една тристрана пирамида е еден рамнокрак триаголник, со краци b и агол при врвот 2α . Двете бочни страни што минуваат низ краците на основата се нормални на основата, додека третата страна гради со основата агол α .

а) Да се изразат со помош на b и α сите рабови и сите агли меѓу рабовите кои се стекнуваат во исто теме.

б) Да се пресмета радиусот на топката впишана во оваа пирамида.

Четврти клас

1. Да се докаже:

а) Ако производот од три цели броја е непарен, тогаш и нивниот збир е непарен.

б) Квадратот од секој непарен број може да се напише во вид $8r + 1$ (r е природен број или нула).

в) Бројот $n^4 - n^2$ (n цел број) е делив со 12.

2. Во равенката

$$x^4 - 2nx^2 + n(n-1) = 0$$

да се определи n така што корените на равенката да бидат членови на една аритметичка прогресија. За какво n тие корени ќе бидат реални?

3. Во правилен тетраедар со раб a е впишана топка. Меѓу таа топка и тетраедарот се впишани четири помали топки, меѓу овие топки и тетраедарот се впишани четири топки и т.н. Да се пресмета збирот на површините и волумените на сите овие топки.

4. Да се најде равенката на геометриското место на точките кои што имаат својство да збирот на нивните растојанија од правите

$$3x+4y=12 \text{ и } 5x-12y=34$$

изнесува 2. Колку решенија се возможни?

5.а) Да се најде равенката на централна кружница, чија тангентата е правата $\sqrt{7}x+3y-32=0$.

б) Да се најде равенката на централната елипса при која оддалеченоста на фокусот од координатниот почеток е еднаква со радиусот на кружницата под а), а се допира до дадената права.

в) Да се најде аголот под кој се сечат кружницата и елипсата.

РЕШЕНИЈА

Први клас

1. Дадената равенка има смисла само за $x \neq \pm 2b$ и под тој услов може да се доведе во вид:

$$\frac{(a+b)x-4ab}{4b^2-x^2} = 0.$$

Оваа равенка ќе биде задоволена ако е

$$(a+b)x=4ab.$$

Според тоа равенката има едно решение $x = \frac{4ab}{a+b}$ за $a \neq -b$; безброј многу решенија за $a=b=0$; и нема решение за $a=-b$.

2. Ако количеството вода во првиот сад го обележиме со x , количеството вода во вториот сад го обележиме со y , тогаш, според дадените услови, добиваме:

$$\begin{aligned} y+y-(x-y) &= 16, & x-y+(x-y) &= 16; \\ x &= 20, & y &= 12. \end{aligned}$$

3. Решение на системот е

$$x = \frac{1+a}{1+a^2}, y = \frac{1-a}{1+a^2}.$$

а) Бидејќи е $1+a > 0$ за сите вредности на a, x и y се позитивни ако е

$$0 < 1+a \text{ и } 0 < 1-a,$$

т.е.

$$-1 < a < 1.$$

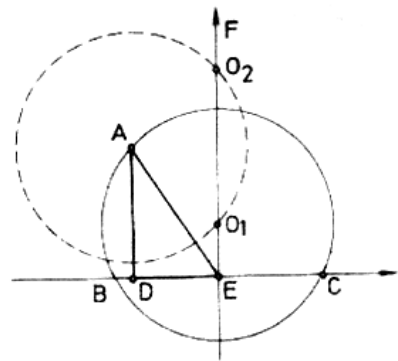
б) $x=0$ ако е $a=-1$, а $y=0$ ако е $a=1$. Според тоа не постои вредност на a за која едновременно x и y се еднакви на нула.

x е негативно за $a < -1$, y е негативно за $a > 1$. Тоа значи дека исто така не постои вредност на a за која се едновременно x и y негативни.

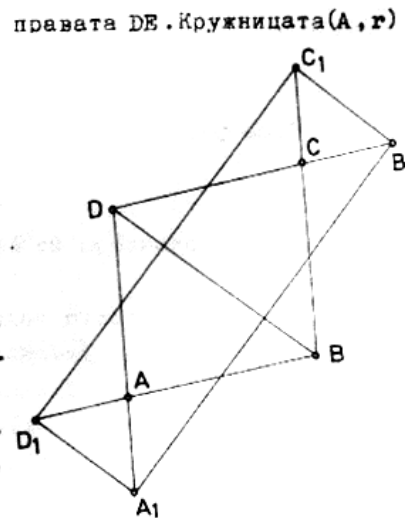
4. Нека се дадените елементи h_a , t_a и r . Ќе конструираме правоаголен триаголник ADE , чија катета AD е еднаква на дадената висина, а хипотенузата AE е рамна на дадената тежишна линија. Тогаш точката E ја претставува средината на страната BC , а центарот на опишаната кружница околу триаголникот се наоѓа на нормалата EF , повлечена низ точката E на правата DE . Кружницата (A, r) и правата EF , ако е $r \geq \sqrt{t^2 - h^2}$, се допираат, односно се сечат во две точки, од кои е една, да речеме O_1 , центарот на опишаната кружница на бараниот триаголник, ако е задоволен и условот $r=0, A > 0, E$, односно $r > \frac{t^2}{2h}$.

Пресеците на кружницата (O, r) со правата DE се темињата B и C на бараниот триаголник. Така конструираниот триаголник ABC ќе одговара по положба и големина на дадените елементи. Задачата нема решение ако е

$$r \leq \frac{t}{2h}.$$



Сл.16



Сл.17

5. Поради сличноста на триаголниците (сл.17)

$$\Delta A_1AD_1 \approx \Delta ABD \text{ и } \Delta C_1CB_1 \approx \Delta CBD$$

имаме: $A_1D_1 \parallel BD \parallel B_1C_1$.

На аналоген начин се утврдува дека е: $A_1B_1 \parallel AC \parallel C_1D_1$.

Бидејќи е $AC \perp BD$, во четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ две спротивни страни се меѓу себе паралелни, а секои две соседни страни се меѓу себе нормални.

Поради тоа четириаголникот претставува еден правоаголник.

Втори клас

1. Упростениот израз има облик: $(x+4)(\sqrt{x}-2)$.

$$\begin{aligned} 2. u &= x_1(2x_1^2 - 3x_2^2) + x_2(2x_2^2 - 3x_1^2) = 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 2x_2^3 - 3x_2x_1^2 = \\ &= 2(x_1^3 + x_2^3) - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot [2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2] = (x_1 + x_2)[2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 5x_1x_2] = \\ &= (x_1 + x_2)[2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2]. \end{aligned}$$

Бидејќи е $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, следува:

$$u = -p(2p^2 - 9q) = p(9q - 2p^2).$$

3. а) Површината на паралелопипедот е $P = 2x^2 + 4xh_1$, каде што x е работ на основата, а h_1 е висина на паралелопипедот. (сл.18).

Од сличноста на триаголниците ΔOES и ΔO_1E_1S следува:

$$\frac{x}{2} : (h - h_1) = \frac{a}{2} : h.$$

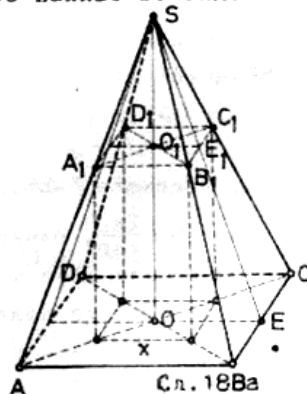
Од оваа равенка се добива: $h_1 = \frac{h(a-x)}{a}$ или за $a=1$ и $h=2$: $h_1 = 2(1-x)$.

Поради тоа изразот за P може да се напише во вид:

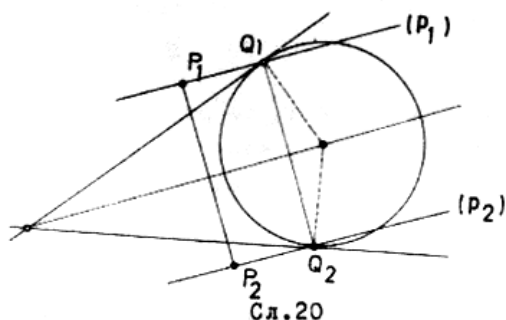
$$\begin{aligned} P &= 2x^2 + 8x(1-x) = -6x^2 + 8x = \\ &= -6\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) = -6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

б) График на функцијата $P(x)$ претставува параболата на сл.18. Ординатата на темето $T\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ на оваа парабол е најголемата вредност на таа функција.

в) Паралелопипедот ќе претставува коцка ако е $h_1 = x$, т.е. $x = 2(1-x)$, од каде што е $x = \frac{2}{3}$.



ните точки на таа отсечка се повлекуваат паралелни прави со симетралата. Пресеците на тие прави со правите (p_1) и (p_2) ќе бидат допирните точки на кружницата со правите (p_1) и (p_2) . Во тие точки се издигаат нормали на правите (p_1) и (p_2) . Пресекот на тие нормали со симетралата на аголот е центар на бараната кружница.



Трети клас

1. а) Нека е: $\log_b a = x$ и $\log_a b = y$.

Од дефиницијата за логаритам следува:

$$b^x = a, \quad a^y = b$$

$$b^x = b^{1/y}$$

Ако последната равенка ја логаритмуваме, земајќи за основа b , се добива:

$$x = \frac{1}{y}, \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

б) Користејќи ја докажаната релација под а) имаме:

$$\begin{aligned} \log_{a_1 a_2 \dots a_n} x &= \frac{1}{\log_x a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{1}{\log_x a_1 + \log_x a_2 + \dots + \log_x a_n} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}. \end{aligned}$$

2. Првата равенка на системот ќе ја напишеме во облик

$$x^{2/5} - 11x^{1/5} + 10 = 0.$$

Ако во таа равенка го замениме $x^{1/5}$ со t , се добива квадратната равенка

$$t^2 - 11t + 10 = 0.$$

Корените на таа равенка се $t_1 = 1$, $t_2 = 10$.

Од $x^{1/5} = t_1$, односно $x^{1/5} = 1$ и втората равенка на системот $y = 3 \log_{10} x - 2$ се добива: $x = 1, y = -2$.

Од $x^{1/5} = t_2$, односно $x^{1/5} = 10$ и $y = 3 \log_{10} x - 2$ се добива:

$$x = 10, y = 1.$$

3. Ќе го разгледаме оскиниот пресек на пресечениот конус (сл.21). Бидејќи е тој тангентен четириаголник, имаме:

$$2r_1 + 2r_2 = 2s \text{ или } r_1 + r_2 = s, \quad (1)$$

каде што r_1 и r_2 се радиуси на основите на пресечениот конус, а s -страна на тој конус.

Од $\triangle ADD_1$ следува:

$$s^2 = 4R^2 + (r_1 - r_2)^2. \quad (2)$$

Ако со V го обележиме волуменот на пресечениот конус, а со V_1 волуменот на топката, од условот во задачата да е $V = 2V_1$, се добива:

$$\frac{2\pi R}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \frac{8\pi R^3}{3},$$

$$r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 = 4R^2. \quad (3)$$

Од равенките (1) и (2) следува:

$$(r_1 + r_2)^2 = R^2 + (r_1 - r_2)^2, r_1 r_2 = R^2 \quad (4)$$

Ако ги собереме равенките (3) и (4) се добива

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2)^2 &= 5R^2, \\ r_1 + r_2 &= R\sqrt{5}. \end{aligned} \quad (5)$$

Според Виетовите формули од (4) и (5) следува дека r_1 и r_2 се корени на равенката

$$\begin{aligned} r^2 - R\sqrt{5}r + R^2 &= 0, \\ r_1 &= \frac{R(1+\sqrt{5})}{2}, r_2 = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}. \end{aligned}$$

Поради тоа е:

$$s = r_1 + r_2 = R\sqrt{5}.$$

4. Дадената равенка ќе ја трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 3x - \cos^2 2x &= 1, \\ \cos^2 2x - \sin^2 3x &= 0. \end{aligned}$$

Левата страна на равенката ја раставуваме на множители:
 $(\cos 2x - \sin 3x)(\cos 2x + \sin 3x) = 0.$

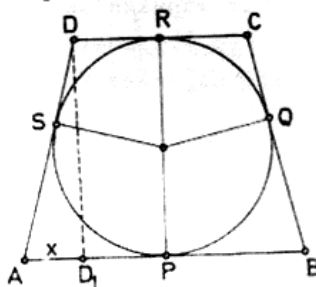
Ако косинусите ги трансформираме во синуси, се добива:

$$[\sin(\frac{\pi}{2} + 2x) - \sin 3x][\sin(\frac{\pi}{2} + 2x) + \sin 3x] = 0.$$

Користејќи ги формулите за трансформирање на збир и разлика на тригонометриските функции во производ, имаме:

$$2\cos(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) \cdot 2\sin(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = 0.$$

Со оглед на формулите за двојни агли, последниот израз



Сл.21

може да се трансформира во следниот вид:

$$\sin(5x + \frac{\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0$$

или, конечно, во вид

$$\cos 5x \cos x = 0.$$

Последната равенка е задоволена ако е $\cos 5x = 0$ или $\cos x = 0$, а овие изрази се нула ако е $5x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, односно ако е $x = \frac{(2k+1)\pi}{10}$ или ако е $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Првото решение го содржи и второто, затоа опитното решение на дадената тригонометриска равенка е $x = \frac{(2k+1)\pi}{10}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

5. а) Од $\triangle ABC$ (сл.22) следува:

$$BC = a = 2b \sin \alpha,$$

$$AD = h = b \cos \alpha.$$

Од $\triangle ADS$ следува:

$$AS = h = b \tan \alpha = b \cos \alpha \tan \alpha = b \sin \alpha,$$

$$DS = h = \frac{h}{\sin \alpha} = b,$$

Најпосле имаме:

$$BS = CS = \sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{b^2 + b^2 \sin^2 \alpha} = b \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}.$$

Понатаму е:

$$\begin{aligned} \tan \angle ASB &= \frac{AB}{AS} = \frac{1}{\sin \alpha}; \angle ASB = \angle ASC = \\ &= \angle SBC = \angle SCB; \angle BSC = \pi - 2 \angle ASB. \end{aligned}$$

б) Бидејќи триаголниците BAC и BSC се еднакви краки, центарот O на впишаната топка лежи во рамнината ADS , а топката ги допира триаголниците BAC и BSC низ отсечките AD и SD . Страните SAB и SC , поради тоа што се нормални на основата, ја допираат впишаната топка низ оној од нејзините големи кругови, кој е паралелен со основата и чија проекција на основата е еден ист таков круг, имајќи го својот центар O_1 на отсечката AD и допирајќи ги рабовите AB и AC на основата.

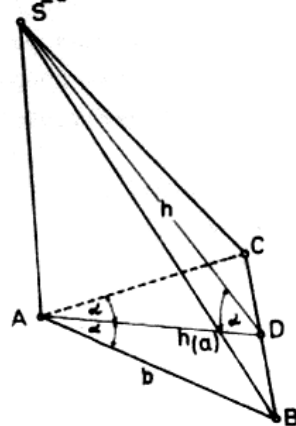
Од $\triangle OO_1D$ и AO_1N наоѓаме:

$$O_1D = r \cotg \frac{\alpha}{2}, \quad AO_1 = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Следствено:

$$AO_1 + O_1D = AD = b \cos \alpha,$$

$$b \cos \alpha = \frac{r}{\sin \alpha} + r \cotg \frac{\alpha}{2},$$



Сл.22

$$b \cos \alpha = \frac{r(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha)}{\sin \alpha},$$

од каде што е

$$r = \frac{b \cos \alpha \sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha} = \frac{b \sin 2\alpha}{2(2 + \cos \alpha)}.$$

Четврти клас

1.а) Ако производот на три цели броја е непарен број, тогаш сите три множители се непарни броеви, а збирот од три непарни броеви е непарен број.

б) Непарниот број нека е $N = 2n+1$, каде што n е природен број.
 $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1.$

$n(n+1)$ е парен број, зашто тој е производ на два последователни броја од кои едниот мора да е парен број. Според тоа можеме да напишеме

$$N^2 = 4 \cdot 2p + 1 = 8p + 1.$$

в)
$$n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n+1)(n-1).$$

Бидејќи $n-1$, n и $n+1$ се три последователни броја, нивниот производ е делив со 3. Ако n е парен број, тогаш n^2 е деливо со 4, а ако n е непарен број, тогаш множителите $n-1$ и $n+1$ се парни броеви, така што нивниот производ е делив со 4. Според тоа целиот производ е делив и со 3 и со 4, а од тоа следува дека е делив и со 12.

2. Ако се употреби смената $x^2 = y$, дадената равенка добива вид:

$$y - 2my + m(m-1) = 0.$$

Корени на таа равенка се: $y_{1,2} = m \pm \sqrt{m}$. Тие се реални за $m > 0$.

Од $x^2 = y$ се добива:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{m + \sqrt{m}}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{m - \sqrt{m}}.$$

Да ги напишеме корените по ред:

$$-\sqrt{m + \sqrt{m}}, -\sqrt{m - \sqrt{m}}, \sqrt{m - \sqrt{m}}, \sqrt{m + \sqrt{m}}.$$

За да претставуваат овие броеви последователни членови на една аритметичка низа, треба да биде

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

а нивните плоштини, односно волумени ќе бидат

$$P_2 = \frac{P_1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi a^2}{6}, \quad V_2 = \frac{V_1}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216}.$$

Ако постапката се настави, ќе се добијат точки со радиуси

$$r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad r_2 = \frac{a\sqrt{6}}{24}, \quad r_3 = \frac{a\sqrt{6}}{48}, \dots$$

а зборови на нивните плоштини, односно волумени, се респективно:

$$S_1^P = \frac{\pi a^2}{6}, \quad S_2^P = 4\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi a^2}{6}\right) = \frac{\pi a^2}{6}, \quad S_3^P = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{\pi a^2}{6}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi a^2}{6}, \dots$$

$$S_1^V = \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216}, \quad S_2^V = 4 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216},$$

$$S_3^V = 4 \cdot \left(\frac{1}{64} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216}\right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216}, \dots$$

Според тоа, ако процесот се продолжи во бесконечност, вкупниот збир на плоштините на точките ќе биде

$$\begin{aligned} S^P &= \frac{\pi a^2}{6} + \frac{\pi a^2}{6} + \frac{1}{4} \frac{\pi a^2}{6} + \frac{1}{16} \frac{\pi a^2}{6} + \dots = \\ &= \frac{\pi a^2}{6} + \frac{\pi a^2/6}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi a^2}{6} + \frac{4\pi a^2}{18} = \frac{7\pi a^2}{18}. \end{aligned}$$

Вкупниот збир на волумените ќе биде

$$\begin{aligned} S^V &= \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216}\right) + \frac{1}{64} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216}\right) + \dots \\ &= \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216} + \frac{\pi \sqrt{6} a^3/432}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\pi \sqrt{6} a^3}{216} + \frac{8\pi \sqrt{6} a^3}{7 \cdot 432} = \\ &= \frac{14\pi \sqrt{6} a^3 + 8\pi \sqrt{6} a^3}{7 \cdot 432} = \frac{22\pi \sqrt{6} a^3}{7 \cdot 432} = \frac{11\pi \sqrt{6} a^3}{7 \cdot 216}. \end{aligned}$$

4. Равенка на бараното геометриско место на точките ќе биде:

$$\pm \frac{3x+4y-12}{5} \pm \frac{5x-12y-34}{13} = 2.$$

Според тоа точките со даденото својство се наоѓаат на правите:

$$8x-y-57=0, \quad 7x+56y-58=0, \quad 16x-2y-49=0, \quad \text{и} \quad 7x+56y+72=0.$$

5. а) Нормалното растојание на правата $\sqrt{7}x+3y-32=0$ од координатниот почеток е радиусот на кружницата $x^2+y^2=r^2$. Поради тоа е:

$$r = \frac{32}{\sqrt{7+9}} = 8.$$

Равенката на кружницата, со центар во координатниот почеток, а кој ја допира дадената права, е

$$x^2 + y^2 = 64$$

б) Бараната елипса има равенка $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, каде што a и b се полуоските на елипсата.

Со оглед на тоа дека е за оваа елипса $e=8$, имаме

$$a^2 - b^2 = 64 \quad (1)$$

Од друга страна, пак, имајќи предвид дека елипсата ја допира правата $\sqrt{7}x + 3y - 32 = 0$, треба да биде задоволена и равенката

$$7a^2 + 9b^2 = 32^2. \quad (2)$$

Решение на системот равенки (1) и (2) е: $a=10$, $b=6$.

Равенката на бараната елипса е

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \text{ или } 9x^2 + 25y^2 = 900.$$

в) Агол под кој се сече кружницата и елипсата е аголот што го градат нивните тангенти во заедничките точки.

Од системот равенки

$$x^2 + y^2 = 64, \quad 9x^2 + 25y^2 = 900$$

се добиваат координатите на кружницата и елипсата. Тие точки се:

$$M_1\left(\frac{5\sqrt{7}}{2}, \frac{9}{2}\right), M_2\left(\frac{5\sqrt{7}}{2}, -\frac{9}{2}\right), M_3\left(-\frac{5\sqrt{7}}{2}, -\frac{9}{2}\right), M_4\left(-\frac{5\sqrt{7}}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

Равенката на тангентата на кружницата во точката $M\left(\frac{5\sqrt{7}}{2}, \frac{9}{2}\right)$

е: $5\sqrt{7}x + 9y = 128$.

Равенката на тангентата на елипсата во таа точка е:

$$\sqrt{7}x + 5y = 5.$$

Поради тоа за аголот меѓу овие две тангенти се добива:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{5} + \frac{5\sqrt{7}}{9}}{1 + \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{7}}{5}.$$

Задачите се превземени од книгата

Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е.

Бубески