

# Jedan problem globalne optimizacije

Petra Corn\* Rudolf Scitovski†

## Sažetak

U radu se promatra sljedeći problem globalne optimizacije

$$\operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}^n} F(a), \quad F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx.$$

Pokazano je da ovaj problem ima jedinstveno rješenje, koje se može odrediti rješavanjem odgovarajućeg problema najmanjih kvadrata ili kao specijalni slučaj jednog općenitijeg problema najbolje aproksimacije u unitarnom vektorskom prostoru. U drugom slučaju primijenjeni su Laguerrovi ortogonalni polinomi. Rješavanje problema ilustrirano je s nekoliko numeričkih primjera.

**Glavne riječi:** *globalna optimizacija, problem najmanjih kvadrata, najbolja aproksimacija, Laguerrovi polinomi*

## On a global optimization problem

### Abstract

We consider the following global optimization problem

$$\operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}^n} F(a), \quad F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx.$$

It is shown that this problem has a unique solution, which can be determined by solving the corresponding least squares problem or as a special case of a general best approximation problem in a unitary vector space. In the latter case, Laguerre polynomials are applied. The problem solving is illustrated by several numerical examples.

**Keywords:** *global optimization, least squares problem, best approximation, Laguerre polynomials*

---

\*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: [petra.corn@gmail.com](mailto:petra.corn@gmail.com)

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: [scitowsk@mathos.hr](mailto:scitowsk@mathos.hr)

# 1 Uvod

Promatramo sljedeći problem globalne optimizacije

$$\operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}^n} F(a), \quad F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx, \quad (1)$$

gdje je  $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Problem su prvi puta 1967. godine postavili Bowman i Gerard [3, str. 327]. Morell [8] je sljedeće godine na vrlo jednostavan način dokazao da je  $\min_{a \in \mathbb{R}^n} F(a) = \frac{1}{n+1}$ , ali nije odredio vektor  $a^* \in \operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}^n} F(a)$ . F. Smithies [11] je 1970. godine za rješavanje ovog problema primijenio Laguerrove ortogonalne polinome i vrlo elegantno dobio vrijednost  $F(a^*)$ , ali i vektor  $a^*$  s komponentama

$$a_k^* = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \binom{n}{k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Najprije primijetimo da je gradijent funkcije  $F$  vektor

$$\frac{1}{2} \operatorname{grad} F(a) = H_F a + b, \quad (3)$$

gdje je

$$H_F = \begin{bmatrix} 2! & 3! & \dots & (n+1)! \\ 3! & 4! & \dots & (n+2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (n+1)! & (n+2)! & \dots & 2n! \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1! \\ 2! \\ \vdots \\ \vdots \\ n! \end{bmatrix}, \quad (4)$$



**James Joseph Sylvester**  
(1814.–1897.)  
engleski matematičar,  
temeljne doprinose dao  
u matičnoj teoriji,  
teoriji brojeva i  
kombinatorici

a da je Hessian funkcije  $F$  matrica  $2H_F$ . Prema Sylvesterovom kriteriju (vidi primjerice [7]) matrica  $H_F$  je pozitivno definitna jer su svi njezini glavni minori pozitivni:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2! & \dots & (k+1)! \\ \dots & \dots & \dots \\ (k+1)! & \dots & 2k! \end{vmatrix} = (k+1) \left( \prod_{i=1}^k i! \right)^2 > 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Zato je  $F$  strogo konveksna funkcija koja ima jedinstvenu točku globalnog minimuma [12], a koju možemo dobiti rješavanjem jednadžbe  $\operatorname{grad} F(a) = 0$ ,

$$H_F a + b = 0. \quad (6)$$

n	$a^*$	$F(a^*)$	$\det H_F$	$\text{cond } H_F$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	1
2	$(-1, \frac{1}{6})^T$	$\frac{1}{3}$	12	54.31
3	$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{24})^T$	$\frac{1}{4}$	576	4679.59
5	$(-\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{12}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{720})^T$	$\frac{1}{6}$	$\approx 7.2 \times 10^9$	$1.4 \times 10^8$
7	$(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{35}{24}, \frac{7}{24}, -\frac{7}{240}, \frac{1}{720}, -\frac{1}{40320})^T$	$\frac{1}{8}$	$\approx 1.26 \times 10^{23}$	$1.53 \times 10^{13}$

Tablica 1: Neka rješenja problema (1)

U Tablici 1 navedena su rješenja problema (1) za nekoliko vrijednosti od  $n \in \mathbb{N}$ , koja su dobivena korištenjem programskog sustava *Mathematica*. Može se primijetiti da porastom  $n$ , determinanta Hessiana vrlo brzo raste. Posebno je važno analizirati broj uvjetovanosti Hessiana, koji se za  $l_2$ -normu može definirati na sljedeći način [5, 9, 13]:

$$\text{cond } H_F = \frac{\sigma_1}{\sigma_n},$$

gdje su  $\sigma_1, \sigma_n$  najveća i najmanja singularna vrijednost matrice  $H_F$ . Kao što se može vidjeti u Tablici 1, već za  $n \geq 8$ , broj uvjetovanosti postaje toliko velik da direktno rješavanje jednadžbe (6) više nema smisla. Zato se prirodno postavljaju sljedeća pitanja:

- može li se problem (1) riješiti na neki drugi prihvatljiviji način?
- može li se pronaći opće rješenje problema (1)?

U ovom radu pokazat će se (vidi t. 2) da se problem (1) može riješiti kao linearni problem najmanjih kvadrata ili kao specijalni slučaj jednog općenitijeg problema najbolje aproksimacije u unitarnom vektorskom prostoru. Ako se pri tome koriste Laguerrovi ortogonalni polinomi (vidi t. 3), lako se dobiva opće rješenje problema (1) (vidi t. 3.1).

## 2 Problem najbolje aproksimacije

Neka je  $C(\mathbb{R}_+)$  vektorski prostor realnih neprekidnih funkcija definiranih na  $[0, +\infty)$ . Na tom prostoru definiramo skalarni produkt s težinskom

funkcijom  $w(x) = e^{-x}$  na sljedeći način

$$(f, g) := \int_0^{+\infty} w(x)f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C(\mathbb{R}_+), \quad (7)$$

te odgovarajuću induciranu normu

$$\|f\|^2 := (f, f) = \int_0^{+\infty} w(x)f^2(x)dx, \quad f \in C(\mathbb{R}_+). \quad (8)$$

Nadalje, ako je  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \subset C(\mathbb{R}_+)$  potprostor razapet linearno nezavisnim funkcijama  $\varphi_i(x) = x^i, i = 0, 1, \dots, n$ , onda kažemo [4, 9] da je  $f^* \in \mathcal{L}$  najbolja aproksimacija funkcije  $f \in C(\mathbb{R}_+)$  na potprostoru  $\mathcal{L} \subset C(\mathbb{R}_+)$  ako vrijedi

$$\|f - f^*\| \leq \|f - u\|, \quad \forall u \in \mathcal{L}. \quad (9)$$

Odrediti najbolju aproksimaciju funkcije  $f \in C(\mathbb{R}_+)$  na potprostoru  $\mathcal{L} \subset C(\mathbb{R}_+)$  znači pronaći  $a^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ , takav da je  $G(a^*) = \min_{a \in \mathbb{R}^{n+1}} G(a)$ , gdje je

$$G(a) = \left\| f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \right\|^2 = \int_0^{+\infty} w(x) \left( f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) \right)^2 dx. \quad (10)$$

Nužan uvjet za egzistencije vektora  $a^* \in \mathbb{R}^{n+1}$  ( $\text{grad } G(a^*) = 0$ ) vodi na rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_0)a_0 + (\varphi_0, \varphi_1)a_1 + \dots + (\varphi_0, \varphi_n)a_n &= (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, \varphi_0)a_0 + (\varphi_1, \varphi_1)a_1 + \dots + (\varphi_1, \varphi_n)a_n &= (\varphi_1, f) \\ \dots\dots\dots & \\ (\varphi_n, \varphi_0)a_0 + (\varphi_n, \varphi_1)a_1 + \dots + (\varphi_n, \varphi_n)a_n &= (\varphi_n, f). \end{aligned} \quad (11)$$



**Jørgen Pedersen Gram**  
(1850.—1916.)  
danski matematičar,  
nositelj imena metode  
Gram-Schmidtovog  
postupka iz matrice  
teorije

Matrica sustava jednadžbi (11) u literaturi se naziva Gramova matrica i označava s  $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , a budući da su funkcije  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  linearno nezavisne [4], ona je pozitivno definitna (vidi primjerice [7]). Istovremeno, ta je matrica do na pozitivnu konstantu jednaka Hessianu funkcije  $G$ . Dakle, funkcija  $G$  strogo je konveksna na skupu  $\mathbb{R}^{n+1}$ , pa postiže jedinstveni globalni minimum [10, 12] na vektoru  $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)^T$ , koji možemo dobiti rješavanjem sustava (11). Najbolja aproksimacija  $f^*$  funkcije  $f$  na potprostoru  $\mathcal{L}$  je prema tome  $f^* = a_0^* \varphi_0 + a_1^* \varphi_1 + \dots + a_n^* \varphi_n$ .

**Napomena 2.1.** Determinanta Gramove matrice u oznaci  $\Gamma(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , je pozitivna [7, str. 347] ako su funkcije  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  linearno nezavisne. Geometrijski, broj  $\sqrt{\Gamma(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)}$  predstavlja volumen paralelotopa određenog vektorima  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Osim toga, u tom slučaju vrijedi [7, str. 381]

$$\inf_{a \in \mathbb{R}^{n+1}} G(a) = \min_{a \in \mathbb{R}^{n+1}} G(a) = \frac{\Gamma(f, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\Gamma(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)}. \quad (12)$$

**Napomena 2.2.** Funkcija  $F$  iz problema (1) u ovim oznakama može se zapisati kao

$$F(a) = \left\| 1 + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\|^2,$$

gdje je norma  $\|\cdot\|$  zadana s (8), a optimizacijski problem (1) može se promatrati kao linearni problem najmanjih kvadrata [4, str. 101] ili kao problem najbolje aproksimacije konstantne funkcije  $x \mapsto 1$  na potprostoru  $\mathcal{L} \subset C(\mathbb{R}_+)$  razapetom linearno nezavisnim funkcijama  $\varphi_i(x) = x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pri tome  $C(\mathbb{R}_+)$  je unitarni vektorski prostor sa skalarnim produktom definiranim sa (7). Zato je u ovom slučaju Gramova matrica pozitivno definitna i zadana s (4). Za različite  $n \geq 1$  rješenja ovog problema najmanjih kvadrata, odnosno problema najbolje aproksimacije u unitarnom prostoru, podudaraju se s onima prikazanim u Tablici 1.

### 3 Određivanje najbolje aproksimacije pomoću Laguerrovih polinoma

Ako funkcije  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  iz prethodne točke čine ortogonalan sustav funkcija, tj. ako vrijedi

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad i \neq j \quad i \quad \|\varphi_i\| \neq 0 \quad \text{za sve } i = 0, 1, \dots, n, \quad (13)$$

onda je matrica sustava (11) dijagonalna, a rješenje se može eksplicitno zapisati [9]

$$a_i^* = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (14)$$

Sustav ortogonalnih funkcija na prostoru  $C(\mathbb{R}_+)$  sa skalarnim produktom (7), odnosno normom (8), uz težinsku funkciju  $w(x) = e^{-x}$  čine poznati Laguerrovi<sup>1</sup> polinomi koji se mogu definirati na sljedeći način (vidi primjerice [1])

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

---

<sup>1</sup>Edmond Laguerre (1834.–1886.), francuski matematičar

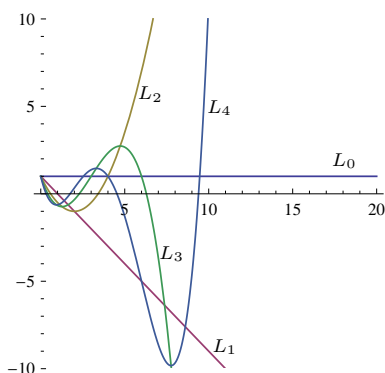
Laguerrovi polinomi mogu se dobiti Gram-Schmidtovim<sup>2</sup> postupkom ortogonalizacije baznih funkcija  $1, x, \dots, x^n, \dots$  na unitarnom vektorskom prostoru  $C(\mathbb{R}_+)$  snabdjevenim skalarnim produktom (7) ili kao rješenja linearnih diferencijalnih jednačbi drugog reda

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Niže je navedeno prvih pet Laguerrovih polinoma, a njihovi grafovi prikazani su na Slici 1. Neka njihova svojstva, koja ćemo koristiti, navedena su u Lemi 3.1.

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_3(x) = \frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6),$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2) \quad L_4(x) = \frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24).$$



Slika 1: Grafovi Laguerrovih polinoma

**Lema 3.1.** *Neka su  $L_0, L_1, \dots, L_n, \dots$  Laguerrovi polinomi zadani s (15).*

---

<sup>2</sup>Erhard Schmidt (1876.–1959.) estonsko-njemački matematičar

Tada vrijedi

$$(i) \quad (L_m, L_n) := \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{ako je } m \neq n, \\ 1 & \text{ako je } m = n, \end{cases} \quad (17)$$

$$(ii) \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

$$(iii) \quad L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} ((2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)), \quad n \geq 1, \quad (19)$$

$$(iv) \quad L_n(0) = 1, \quad \forall n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

*Dokaz.* Dokažimo najprije tvrdnju (i). Neka je  $n \in \mathbb{N}$  proizvoljan. Pokažimo najprije da za  $m < n$  vrijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x) dx = 0. \quad (21)$$

Primjenom metode parcijalne integracije, dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x) dx &= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = \frac{m}{n!} \int_0^{\infty} x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx = \dots \\ &= (-1)^m \frac{m!}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^m e^{-x}) dx = (-1)^m \frac{m!}{n!} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^m e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Na sličan način može se pokazati da za  $m = n$  vrijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n L_n(x) dx = n!. \quad (22)$$

Kombinirajući (21) i (22) dobivamo (17). Prijeđimo na dokaz tvrdnje (ii). Koristeći Leibnizovu formulu [6, str. 142], dobivamo

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x}) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n).$$

Kako je  $\frac{d^k}{dx^k} (e^{-x}) = (-1)^k e^{-x}$  i  $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n) = \frac{n!}{k!} x^k$ , iz prethodnog izraza lako dobivamo (ii).

Dokaz tvrdnje (iii) može se vidjeti u [2, str. 837].

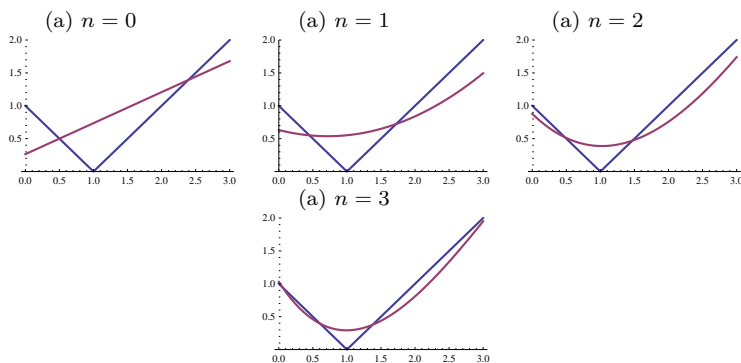
Dokaz tvrdnje (iv) može se provesti matematičkom indukcijom. Očigledno vrijedi:  $L_0(0) = 1$ ,  $L_1(0) = 1$ . Pretpostavimo da vrijedi  $L_j(0) = 1$ , za sve  $0 \leq j \leq n$  i dokažimo da je  $L_{n+1}(0) = 1$ . Prema (iii) vrijedi

$$L_{n+1}(0) = \frac{1}{n+1} ((2n+1)L_n(0) - nL_{n-1}(0)) = \frac{1}{n+1} ((2n+1) - n) = 1. \quad \square$$

**Primjer 1.** Funkciju  $f : [0, +\infty)$ ,  $f(x) = |x - 1|$  aproksimirat ćemo pomoću Laguerreovih polinoma. Sukladno (14), najbolja  $l_2$ -aproksimacija na  $[0, +\infty)$  uz težinsku funkciju  $w(x) = e^{-x}$  je

$$f^*(x) = \sum_{i=0}^n (f, L_i(x)) L_i(x).$$

Na Slici 2 prikazane su aproksimacije funkcije  $f$  za  $n = 0, 1, 2, 3$ .



Slika 2: Najbolje  $l_2$ -aproksimacije funkcije  $x \mapsto |x - 1|$  na  $[0, +\infty)$  uz težinsku funkciju  $w(x) = e^{-x}$

### 3.1 Rješavanje optimizacijskog problema (1) pomoću Laguerrovih polinoma

Budući da je stupanj Laguerrovog polinoma  $L_j$  jednak  $j$ , postoje brojevi  $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ , takvi da vrijedi

$$1 + a_1x + \dots + a_nx^n = k_0L_0(x) + k_1L_1(x) + \dots + k_nL_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Specijalno zbog (20) za  $x = 0$  dobivamo

$$1 = k_0 + k_1 + \dots + k_n. \quad (24)$$



Zato funkcija  $F$  zadana s (1) postaje

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1x + \dots + a_nx^n)^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} (k_0L_0(x) + k_1L_1(x) + \dots + k_nL_n(x))^2 dx \\ &= k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2 =: G(k_0, k_1, \dots, k_n), \end{aligned} \quad (25)$$

gdje je korišteno svojstvo ortogonalnosti (17) Laguerrovih polinoma. Zato se problem (1) svodi na sljedeći problem uvjetnog ekstrema [10]:

$$\begin{aligned} &\operatorname{argmin}_{k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}} G(k_0, k_1, \dots, k_n), \\ &\text{uz uvjet } k_0 + k_1 + \dots + k_n = 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Problem (26) riješit ćemo Lagrangeovom metodom neodređenih multiplikatora. U tu svrhu definiramo pomoćnu funkciju

$$\Phi(k_0, k_1, \dots, k_n, \lambda) := k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_n^2 + \lambda(k_0 + k_2 + k_3 + \dots + k_n - 1). \quad (27)$$

Iz nužnog uvjeta lokalnog minimuma funkcije  $\Phi$  dobivamo jednostavni sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial k_i} &= 2k_i + \lambda = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ k_0 + k_2 + k_3 + \dots + k_n &= 1, \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$\lambda^* = -\frac{2}{n+1}, \quad k_0^* = k_1^* = \dots = k_n^* = \frac{1}{n+1}. \quad (28)$$

Optimalna vrijednost funkcije  $G$ , odnosno  $F$ , je

$$G(k_0^*, k_1^*, \dots, k_n^*) = (n+1) \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}. \quad (29)$$

Pokažimo još da su optimalne vrijednosti  $a_1^*, \dots, a_n^*$  koeficijenata, koji se pojavljuju u zapisu funkcije  $F$ , zadane s (2). Naime, koristeći (18) u (23), dobivamo

$$\begin{aligned} &1 + a_1^*x + \dots + a_n^*x^n \\ &= \frac{1}{n+1} \left( 1 + \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \dots + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right). \end{aligned}$$

Izjednačavajući koeficijente uz jednake potencije, dobivamo

$$a_k^* = \frac{1}{n+1} \left( \binom{k}{k} \frac{(-1)^k}{k!} + \binom{k+1}{k} \frac{(-1)^k}{k!} + \dots + \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = \frac{1}{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=k}^n \binom{i}{k},$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Ako u prethodnom izrazu iskoristimo identitet

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (30)$$

konačno dobivamo

$$a_k^* = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \binom{n}{k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

## Literatura

- [1] A.S. Ackleh, E.J. Allen, R.B. Kearfott, P. Seshaiyer, *Classical and Modern Numerical Analysis. Theory, Methods and Practice*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [2] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*, Sixth Edition, Elsevier, 2005.
- [3] F. Bowman, F.A. Gerard, *Higher Calculus*, Cambridge University Press, 1967.
- [4] E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [5] G.H. Golub, C.F. van Loan, *Matrix Computations*, The J.Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [6] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2004.
- [7] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
- [8] L.J. Mordell, *The minimum value of a definite integral*, The Mathematical Gazette **52**(1968), 135–136.

- [9] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2004.
- [10] R. Scitovski, N. Truhar, Z. Tomljanović, *Metode optimizacije*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2014.
- [11] F. Smithies, *Two remarks on note by Mordell*, The Mathematical Gazette **54**(1970), 260–261.
- [12] E. Süli, D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [13] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2010.