Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 11
ОЛИМПИСКИ ТЕМИ – ТРЕТ ДЕЛ

Скопје, 2019

Рецензент
Проф. д-р Слаѓана Брсаковска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

51:373.3(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математички талент 11 : олимписки теми. Д. 3 / Ристо Малчески, Алекса Малчески, Самоил Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 247 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 245-247

ISBN 978-608-4904-88-5
1. Малчески, Алекса [автор] 2. Малчески, Самоил [автор]
а) Математика - Основно образование - Задачи од натпревари
COBISS.MK-ID 111827210

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Книгава Математички талент 11 на извесен начин е продолжение на книгите Математички талент 7 и 8. Во истата се дадени 301 целосно решени задачи од ибластите кои се застапени на математичките олимпијади за учениците до 15,5 години, т.е. од областите алгебра, теорија на броеви, геометрија и комбинаторика. За разлика од книгите кои за оваа намена се дел од оваа серија збирки, во предметнава книга не е направена оиделба на задачите внатре во разработуваните области. Последново е направено се со цел учениците, кои претпоставуваме дека претходно ги разработиле задачите во првите две книги со олимписки теми, да вложат дополнителен напор се со цел да согледаат во кој дел од разгледуваната област припаѓа задачата која ја репаваат.

Рецензентот д-р Сава Гроздев, придонесе со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно му благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје　　　　　　　　　　　　　　　　Авторот
ноември, 2019 г.

I АЛГЕБРА

1. Во множеството на целите броеви дефинираме операција * за која важи:
   $i)$ $m*(n+s)=(m*n)-s$ за секои цели броеви m,n,s,
   $ii)$ $(n+s)*m=(n*m)+2s$ за секои цели броеви m,n,s,
   $iii)$ $1*1=1$.
   Најди формула за $a*b$, $a,b\in\mathbb{Z}$.

2. Нека
   $$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1997\cdot 1998} \text{ и } B=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}.$$
   Докажи, дека $\frac{A}{B}$ е природен број.

3. Нека $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{2002}$ се природни броеви такви што
   $$\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+\frac{1}{a_3^3}+\ldots+\frac{1}{a_{2002}^3}=\frac{1}{2}.$$
   Докажи дка барем три од овие броеви се еднакви меѓу себе.

4. а) Дадени се реални броеви a,b и c такви што $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Докажи, дека $a=b=c$.

   б) Определи ја вредноста на изразот $x+y$, ако $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$ и изразот $-4x^2+36y-8$ прима најголема вредност.

5. Определи ја вредноста на изразот
   $$w=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}.$$

6. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}$ се такви што $x+y+z=xyz$ Докажи дека
   $$x(1-y^2)(1-z^2)=y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

7. Нека a,b,c се реални броеви такви што $\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0$. Докажи, дека
   $$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0.$$

8. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$. Ако
$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=\tfrac{1007}{1008},$$
докажи дека
$$\tfrac{ab}{(b+c)(c+a)}+\tfrac{bc}{(c+a)(a+b)}+\tfrac{ca}{(a+b)(b+c)}=2017.$$

9. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои постојат реални броево x и y такви што $a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0, c^3+cx+y=0$. Докажи, дека $a+b+c=0$.

10. Ако a,b,c се реални броеви такви што
$$a+b+c=0 \text{ и } a^4+b^4+c^4=50,$$
пресметај ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

11. Реалните броеви a,b,c,d се такви што важи
$$abc-d=1,\quad bcd-a=2,\quad cda-b=3,\quad dab-c=-6.$$
Докажи дека $a+b+c+d\neq 0$.

12. За реалните броеви x,y,z,k важи $x\neq y\neq z\neq x$ и
$$x^3+y^3+k(x^2+y^2)=y^3+z^3+k(y^2+z^2)=z^3+x^3+k(z^2+x^2)=2008.$$
Определи го производот xyz.

13. Природните броеви a,x и y се поголеми од 100 и важи $y^2-1=a^2(x^2-1)$. Определи ја најмалата можна вредност на $\tfrac{a}{x}$.

14. Определи ја најмалата вредност на изразот
$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}},\ x>0.$$

15. Докажи дека за $a,b,c\neq 0$ важи
$$\left|\tfrac{|b-a|}{|ab|}+\tfrac{b+a}{ab}-\tfrac{2}{c}\right|+\tfrac{|b-a|}{|ab|}+\tfrac{b+a}{ab}+\tfrac{2}{c}=4\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b},\tfrac{1}{c}\}.$$

16. Од првите $2k$ $(k\geq 1)$ природни броеви се избрани k броеви такви што збирот на секои два од овие броеви е различен од $2k+1$. Нека S е збирот на избраните броеви, а T е збирот на нивните квадрати.

а) Определи го T .

б) Докажи дека за $k=1009$ броевите може да се изберат така што $S=1009^2$.

в) Пресметај го T за $k=1009$ и $S=1009^2$.

17. Определи ја 2005-тата цифра после децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$, каде
$$a=0,\underbrace{444...444}_{2005}.$$

18. Нека n е ориродeн број, $A=\underbrace{44...44}_{2n}$ и $B=\underbrace{88...88}_{n}$. Докажи, дека бројот $A+2B+4$ е точен квадрат.

19. Пресметај го збирот
$$\frac{1}{4\cdot1^4+1}+\frac{2}{4\cdot2^4+1}+...+\frac{2009}{4\cdot2009^4+1}.$$

20. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што
$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

21. За секој природен број дефинираме $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$. Пресметај го збирот $f(1)+f(2)+...+f(40)$.

22. Разложи го на множители изразот
$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

23. За реалните броеви a,b,c и d важи
$$a+b+c+d=0$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3=0.$$
Докажи, дека збирот на некои два од овие броеви е еднаков на 0.

24. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи, дека равенката $x^2+ax+a^2-6=0$ нема решенија во множеството реални броеви.

25. Нека x, y се реални броеви за кои важи: $x^2+y^2=2$ и $(x^3+y^3)^2=8$. Пресметај ја вредноста на изразот x^4+y^4.

26. Нека a,b,c се позитивни рационални броеви. Докажи дека бројот

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca})^2}$$

е рационален.

27. Нека $k>1$ е природен број и $n>2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ се такви што не се сите еднакви меѓу себе и ги задоволуваат идентитетите

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=...=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}.$$

Определи:

а) го производот $x_1x_2...x_n$ како функција од k и n

б) ја најмалата вредност за k за која постојат $n,x_1,x_2,...,x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

28. Докажи дека за секој природен број $n>1$ бројот

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}$$

е ирационален.

29. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}(1+4x^2)y=4z^2\\(1+4y^2)z=4x^2\\(1+4z^2)x=4y^2.\end{cases}$$

30. Нека x и y се реални броеви такви што $x^{2017}+y^{2017}>x^{2016}+y^{2016}$. Докажи, дека

$$x^{2018}+y^{2018}>x^{2017}+y^{2017}. \qquad (1)$$

31. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=4$. Определи ја најмалата вредност на изразот $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}$.

32. Даден е природен број n. Нека

$$A=x_1+x_2+...+x_s\text{, каде } x_1x_2...x_s=n,\ x_i>1,\quad x_i\in\mathbb{N}.$$

Определи ја најголемата можна вредност на A.

33. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+y+z$, ако x,y,z се

реални броеви такви што $x \geq 4, y \geq 5, z \geq 6$ и $x^2 + y^2 + z^2 \geq 90$.

34. Докажи дека за позитивните релани броеви a,b,c важи

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c\ .$$

35. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b и c важи:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc\ . \qquad (1)$$

36. Нека $x, y, z > -1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2\ .$$

37. Докажи дека за секои реални броеви x, y, z важи

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \max\{\frac{3(x-y)^2}{4}, \frac{3(y-z)^2}{4}, \frac{3(z-x)^2}{4}\}\ .$$

38. Нека $k > 1$ е природен број и $n > 2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ се такви што не се сите еднакви меѓу себе и ги задоволуваат равенствата

$$x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3} = x_3 + \frac{k}{x_4} = ... = x_{n-1} + \frac{k}{x_n} = x_n + \frac{k}{x_1}\ .$$

Определи:

а) го производот $x_1 x_2 ... x_n$ како функција од k и n,

б) ја најмалата вредност на k за која постојат $n, x_1, x_2, ..., x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

39. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2} + ... + \frac{x_n^3}{x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{3}\ .$$

40. Нека

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + ... + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{\frac{1996 \cdot 1997}{2}}}\ .$$

Докажи, дека $S > 1001$.

41. Квадрат со димензии 3×3 е поделен на 9 единечни квадратчиња, во кои се распоредени 9 различни природни броеви, по еден број во секое квадратче. Производот на трите броја запишани во секој ред и

во секоја колона е еднаков. Определи ја најмалата можна вредност на овој производ.

42. За броевите $a_1, a_2, ..., a_{20}$ важи

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{20} \geq 0,$$

$$a_1 + a_2 = 20 \text{ и}$$

$$a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 20.$$

Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2.$$

43. Нека a, b, c се реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека најмногу два од броевите $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}$ и $2c - \frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

44. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a, b, c \geq -3$ и $a + b + c = 0$. Докажи дека

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq -\frac{3^4}{4}.$$

Кога важи знак за равенство?

45. Нека a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажи дека

$$(\frac{1+a^2}{4bc})^2 + (\frac{1+b^2}{4ca})^2 + (\frac{1+c^2}{4ab})^2 \geq 3.$$

46. Нека a, b, c, d, e се реални броеви такви што $a + b + c + d + e = 0$ и нека

$$A = ab + bc + cd + de + ea \text{ и } B = ac + ce + eb + bd + da.$$

Докажи дека $2005A + B \leq 0$ или $2005B + A \leq 0$.

47. Нека a, b, c, d и x, y, z, t се реални броеви такви што

$$0 \leq a, b, c, d \leq 1, \; x, y, z, t \geq 1 \text{ и } a + b + c + d + x + y + z + t = 8.$$

Докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 28.$$

Кога важи знак за равенство?

48. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{... + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n}}}}}} < 2.$$

49. Определи го најголемиот природен број k таков што за секои природни броеви m,n за кои важи $m^3+n^3>(m+n)^2$ важи

$$m^3+n^3\geq(m+n)^2+k\,.$$

50. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{32y}+\frac{2}{z}$, каде x,y и z се позитивни реални броеви.

51. Докажи, дека за позитивните реални броеви a,b,c,d,e важи неравенството

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{d}+\frac{a}{e}\leq(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4\,.$$

52. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq1\,.$$

53. Нека a, b, c се позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=3$. Определи ја најмалата (минималната) вредност што може да ја има изразот

$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}\,.$$

54. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b и c важат неравенствата

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\leq1\leq\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\,. \qquad (1)$$

55. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab}\leq0\,.$$

56. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}\geq3.$$

Кога важи знак за равенство?

57. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{(x+y)^3}{z}+\frac{(y+z)^3}{x}+\frac{(z+x)^3}{y}+9xyz\geq 9(xy+yz+zx).$$

Кога важи знак за равенство?

58. Нека a,b,c се реални броевви такви што $0<a\leq b\leq c$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc\ .$$

Кога важи занк за равенство?

59. Нека $x,y,z\in(0,1)$. Докажи дека

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leq\frac{1}{3}\ .$$

60. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $ab+bc+ca=3$. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+5}}+\frac{b}{\sqrt{b^3+5}}+\frac{c}{\sqrt{c^3+5}}\leq\frac{\sqrt{6}}{2}\ .$$

61. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што

$$a^3+b^3+c^3+d^3=4\ .$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}+\frac{1}{d^4+3}\geq 1\ .$$

62. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ .$$

Кога важи знак за равенство?

63. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=1$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот

$$A(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}\ .$$

64. Збирот на позитивните броеви a,b,c,d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\leq\frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\ .$$

65. Збирот на позитивните броеви a,b,c и d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\leq\frac{1}{a^3b^3c^3d^3}\ .$$

66. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$.

Докажи, дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3(a+b+c)\,.$$

Кога важи знак за равенство?

67. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)}+\frac{1}{bc(c+1)(a+1)}+\frac{1}{ca(a+1)(b+1)}\geq\frac{3}{(1+abc)^2}\,.$$

68. Нека x,y,z се позитивни реални броеви за кои важи

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ и } x^4+y^4+z^4=\frac{1}{3}\,.$$

Докажи дека

$$(x^2+1)x\sqrt{2(1-x^2)}+(y^2+1)y\sqrt{2(1-y^2)}+(z^2+1)z\sqrt{2(1-z^2)}\geq\frac{8}{3}\,.$$

69. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (1)$$

70. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}\,.$$

71. Нека x,y,z,m,n се позитивни реални броеви и $m+n\geq 2$. Докажи го неравенството

$$x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)}+y\sqrt{zx(y+mx)(y+nz)}+z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)}\leq$$
$$\leq\frac{3(m+n)(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\,.$$

72. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=2017$. Докажи, дека

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}\,.$$

Кога важи знак за равенство?

73. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=2$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\,.$$

74. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=\frac{2}{3}$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

75. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.$$

76. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи, дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

77. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq(1+2a)(1+2b)(1+2c).$$

78. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{2}.$$

79. Докажи дека за позитивни реални броеви x,y и z важи неравенството

$$(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})\geq 4(\tfrac{x}{xy+1}+\tfrac{y}{yz+1}+\tfrac{z}{zx+1})^2.$$

80. Нека a,b,c се страни на триаголник за кои важи $a+b+c=6$. Докажи дека

$$\sqrt{(a+1)(b+1)}+\sqrt{(b+1)(c+1)}+\sqrt{(c+1)(a+1)}\geq 2(\sqrt{3-a}+\sqrt{3-b}+\sqrt{3-c})+3$$

81. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}}}+\frac{y}{\sqrt{\sqrt[4]{z}+\sqrt[4]{x}}}+\frac{z}{\sqrt{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}}\geq\frac{\sqrt[4]{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}.$$

82. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Бројот 74^{2015} запиши го како збир од квадрати на седум различни дропки со ист именител.

2. За еден природен број ќе велиме дека е *скоро квадратен* ако може да се претстави како производ на два последователни природни броја. Докажи дека секој скоро квадратен природен број може да се претстави како количник на два скоро квадратни природни броја.

3. Со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се составени девет (не задолжително различни) деветцифрени броеви, при што секоја цифра во секој број е употребена точно по еднаш. На колку најмногу нули може да завршува збирот на овие девет броја?

4. Докажи дека за секој природен број n постои природен број кој се запишува само со цифрите 0 и 1 и кој е делив со n.

5. Дали постои бесконечна низа природни броеви таква што на секој k збирот на секои k последователни броеви е делив со $k+1$?

6. Докажи, дека броевите од 1 до 16 може да се наредат во низа така што збирот на секои два соседни броеви е точен квадрат на природен број.

7. Докажи дека за секој природен број m постои природен број n таков што $m+n+1$ е точен квадрат и е $mn+1$ точен куб на некои природни броеви.

8. Определи го најмалиот природен број N со следново својство: ако од множеството $\{1,2,...,N\}$ произволно се избришат 2016 елементи секогаш меѓу преостанатите елементи ќе има 2016 броеви чиј збир е еднаков на N.

9. Нека a,b,c,d,e,f се ненулти цифри (може да има и еднакви) такви што броевите $\overline{abc}, \overline{def}$ и $\overline{abcdef}$ се точни квадрати.

   а) Докажи, дека бројот $\overline{abcdef}$ може барем на два начина да се запише како збир на три квадрати.
   б) Дади пример на вакви броеви.

10. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што
$$a(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^6+2b^6+3c^6+4d^6)=\overline{abcd}\ .$$

11. Определи го најголемиот природен број p таков што бројот 5^7 може да се запише како збир на p последователни природни броеви.

12. Одреди ги сите природни броеви n за кои збирот на парните броеви поголеми од n^3-n^2, а помали од n^3+n^2, е помал од 2018.

13. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат природни броеви a,b и c такви што $a+b+c=3n$ и $ab+ac+bc=n^3$.

14. Одреди го најмалиот природен број делив со 63 чиј збир на цифри е 63.

15. Десетцифрениот природен број $n=\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ е запишан со различни цифри и е делив со 11. Ако $S_1=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ и $S_2=a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$ докажи дека или $7\,|\,S_1$ или $7\,|\,S_2$.

16. Дали постои природен број n, таков што збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $n(4n+1)$ е еднаков на 2017.

17. Броевите од 1 до 1998 се поделени во две дисјунктни множества $\{a_1,a_2,...,a_{999}\}$ и $\{b_1,b_2,...,b_{999}\}$ такви што за секој i важи $|a_i-b_i|=1$ или 6. Определи ја цифрата на единиците на збирот $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$.

18. Во множеството рационални броеви најди ги сите решенија (a,b) на равенката
$$(a+b\sqrt{2})^2=11+14\sqrt{2}\ .$$

19. Дали постојат рационални броеви x,y,z и t такви што
$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}\ ?$$

20. Определи ги сите природни броеви n за кои
$$\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}$$
е рационален број.

21. Определи ги сите цели броеви a такви што $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}$ е рационален број.

22. Нека x е реален број така што броевите x^3 и x^2+x се рационални. Докажи дека бројот x е рационален.

23. Нека x, y, z се реални броеви такви што xy, yz, zx се рационални броеви различни од нула. Докажи:

    а) бројот $x^2+y^2+z^2$ е рационален, и

    б) ако $x^3+y^3+z^3$ е рационален број различне од 0, тогаш броевите x, y, z се рационални.

24. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b=1$. Ако a^3 и b^3 се рационални броеви, тогаш a и b се рационални броеви. Докажи!

25. Дали постои природен број n таков што $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?

26. Нека $x+\sqrt{y}, y+\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ се цели броеви. Докажи дека x и y се цели броеви.

27. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $(ab+1)\,|\,(a^2-1)$.

28. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството
$$a^3+4a=b^2.$$
Докажи, дека бројот a е од видот $2t^2, t\in\mathbb{N}$.

29. Нека a и b се различни природни броеви поголеми од 10^6 и такви што $ab\,|\,(a+b)^3$. Докажи дека $|a-b|>10^4$.

30. Даден е природен број n. Определи ги сите природни броеви кои може да се запишат во обликот
$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\ldots+\frac{n}{a_n}$$
за некои природни броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

31. Нека m е бројот на различните прости делители на бројот $n\geq 2$. Докажи дека $2^{2m}<4n$.

32. Нека p е прост број за кој постојат различни природни броеви u и v такви што p^2 е аритметичка средина на u^2 и v^2. Докажи дека $2p-u-v$ е или точен квадрат или е удвоен квадрат.

33. Нека p е прост број и $a_1, a_2, a_3, ...$ е низа природни броеви такви што
$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p,$$
за секој природен број n. Докажи дека за секој природен број n бројот a_{n+1} е делител на бројот $a_n + a_{n+2}$.

34. Нека $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ се сите делители на природниот број $n > 1$. Докажи дека $d_1 + d_2 + ... + d_k > k\sqrt{n}$.

35. Нека n е природен број и нека $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ се различни цели броеви такви што равенката
$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2n}) - (-1)^n (n!)^2 = 0 \qquad (1)$$
има целобројно решение r. Докажи дека $r = \frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{2n}}{2n}$.

36. Нека a и b се природни броеви такви што $ab \,|\, (a^2+b^2)$. Докажи дека $a = b$.

37. Нека $n > 1$, $a_1 < a_2 < ... < a_n$ се природни броеви и нека
$$\mathrm{NZS}(a_i, a_j) = [a_i, a_j].$$
Докажи дека
$$\frac{1}{[a_1,a_2]} + \frac{1}{[a_2,a_3]} + ... + \frac{1}{[a_{n-1},a_n]} < 1$$

38. а) На колку нули завршува бројот $2019!$?
б) На колку нули завршува бројот $n!$?

39. Определи ги сите непразни подмножества A на множеството $\{2,3,4,...\}$ такви што за секој $n \in A$ броевите n^2+4 и $[\sqrt{n}]+1$ припаѓаат на A. (Со $[x]$ е означен најголемиот цел број кој е помал или еднаков на реалниот број x.)

40. Нека A е множество природни броеви кое го содржи бројот 1 и содржи барем уште еден број различен од 1.

Ако од $m, n \in A, m \neq n$, следува $\frac{m+1}{\text{NZD}(m+1, n+1)} \in A$, тогаш $A = \mathbb{N}$. Докажи!

41. Нека n е природен број и p е прост број така што важи $n \mid p-1$ и $p \mid n^6 - 1$. Докажи дека барем еден од броевите $p-n$ или $p+n$ е точен квадрат.

42. Нека е даден простиот број p. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $\frac{4a+p}{b} + \frac{4b+p}{a}$ и $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ се природни броеви.

43. Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36 \mid p-7$.

44. Најди ги сите природни броеви n такви што n има цифри колку што има различни прости делители и збирот на различните прости делители е еднаков со збирот на степените на истите делители.

45. Определи ги сите природни броеви $n > 2$, такви што $n = a^3 + b^3$, каде што a е најмалиот природен делител на n поголем од 1 и b е произволен природен делител на n.

46. Определи ги сите прости броеви p, q, r, s такви што нивниот збир е прост број и броевите $p^2 + qr$ и $p^2 + qs$ се квадрати на природни броеви.

47. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $p^3 + p^2 + p + 1$ е точен квадрат.

48. Нека p е прост број и a е цел број. Докажи дека ако за секој природен број n бројот $n^2 - 5$ не е делив со p, тогаш постојат бесконечно многу цели броеви m такви што $p \mid m^5 + a$.

49. Докажи, дека за секој природен број n барем еден од броевите $A = 2n-1, B = 5n-1, C = 13n-1$ не е точен квадрат.

50. Докажи дека 1023 е делител на $7^{6^n} + 4^{6^n - 1} - 5$ за секој природен број n.

51. Нека a е природен број таков што $\mathrm{NZD}(a,10)=1$. Докажи дека последните две цифри на a^k за $k=1,2,...$, периодично се повторуваат.

52. Нека со a_n го означиме збирот на цифрите на бројот 1189^n, $n\in\mathbb{N}$. Определи ја најмалата вредност на a_n.

53. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот 36^n-6 е производ на два или повеќе последователни природни броеви.

54. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $n^4+8n+11$ е производ на два или повеќе последователни природни броеви.

55. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $n^3-2n^2+3n+21$ е степен на бројот 3.

56. Антон на таблата ги запишал вредностите на $3!$, $4!$, $5!$, $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ и $10!$. Потоа избришал една од нив и се покажало дека производот на останатите е квадрат на природен број n. Определи ја цифрата на илјадитите на бројот n.

57. Природните броеви m и n се такви што бројот $m-n$ е непарен. Докажи дека бројот $(m+3n)(5m+7n)$ не е точен квадрат.

58. Во множеството природни броеви решија равенката
$$\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}=\tfrac{4}{5}.$$

59. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{\mathrm{NZS}(x,y)}+\tfrac{1}{\mathrm{NZD}(x,y)}=\tfrac{1}{2}.$$

60. Докажи дека равенката
$$a^3+b^3+c^3+d^2+e^2=2008$$
има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

61. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a^3+b^3+3ab=1$.

62. Определи ги сите решенија на равенката
$$p-x^4=4$$
каде p е прост број, а x е цел број.

63. Определи ги сите природни броеви a,b,c такви што

$$a+b+c=15$$
$$(a-3)^2+(b-5)^2+(c-7)^2=540.$$

64. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2+u^2=3(x+y+z+u).$$

65. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x+y)^2(x^2+y^2)=2009.$$

66. Определи ги сите парови цели броеви (m,n) кои ја задоволуваат равенката

$$m^5-n^5=16mn.$$

67. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

68. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$9x^2y^2+9xy^2+6x^2y+18xy+x^2+2y^2+5x+7y+6=0.$$

69. Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+3y=u^2 \\ y^2+3x=v^2. \end{cases}$$

70. Докажи дека равенката

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=2000$$

нема решенија во множеството цели броеви.

71. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3-y^3=999. \qquad (1)$$

72. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^3+b^3+c^3=2001.$$

73. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) такви што

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$

каде p е прост број поголем од 3.

74. Определи ги сите прости броеви $p_1, p_2, p_3, ..., p_{13}$ такви што $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq ... \leq p_{13}$,

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{12}^2 = p_{13}^2 \qquad (1)$$

и еден од броевите е еднаков на $2p_1 + p_9$.

75. Определи природен број n за кој постои цел број x таков што

$$499 \cdot (1997^n + 1) = x^2 + x.$$

76. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$125 \cdot 2^n - 3^m = 271.$$

77. Определи ги сите прости броеви a, b, c и природни броеви k кои што ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

78. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (x, y, z) такви што

$$xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) = 1.$$

79. Одреди ги сите парови (p, q) каде p и q се природни броеви за кои важи

$$(p+1)^{p-1} + (p-1)^{p+1} = q^q.$$

80. Докажи, дека бројот $2^n + 3^n + 5^n + 6^n$ не е точен куб за ниту еден природен број n.

81. Определи ги сите прости броеви p такви што

$$13 \mid (2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5).$$

82. Определи ги сите прости броеви од облик $1 + 2^p + 3^p + ... + p^p$ каде p е прост број.

83. Определи ги сите прости броеви p и q, $p \leq q$ за кои

$$pq \mid (5^p - 2^p)(7^q - 2^q).$$

84. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се подели на две дисјунктни подмножества такви што производите на елементите во двете подмножества се еднакви.

III ГЕОМЕТРИЈА

1. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ACB = 50^\circ$ и $\measuredangle CBA = 70^\circ$. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката A кон страната BC, O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и E е точката на кружницата која е дијаметрално спротивна на точката A. Определи ја големината на $\measuredangle DAE$.

2. Околу $\triangle ABC, b \geq c$ опишана е кружница. Од средината E на лакот BC кој не ја содржи точката A повлечен е дијаметар ED. Докажи дека $\measuredangle DEA = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, каде β и γ се аглите на триаголникот во темињата B и C, соодветно.

3. На катетите CA и CB на рамнокракиот правоаголен триаголник ABC избрани се точки D и E, соодветно, такви што $\overline{CD} = \overline{CE}$. Од точките D и C повлечени се нормали кон правата AE кои ја сечат хипотенузата AB во точките K и L, соодветно. Докажи дека $\overline{KL} = \overline{LB}$.

4. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ со агли $\measuredangle BAC = 70^\circ$ и $\measuredangle ABC = 80^\circ$ земена е точка M. Ако $\measuredangle ACM = 10^\circ$ и $\measuredangle CBM = 20^\circ$, докажи дека $\overline{AB} = \overline{MC}$.

5. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ на симетралата на аголот B е дадена точка M таква што $\overline{AM} = \overline{AC}$ и $\measuredangle BCM = 30^\circ$. Докажи, дека $\measuredangle AMB = 150^\circ$.

6. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle C = \measuredangle A + 90^\circ$. Нека D точката на продолжението на страната BC преку темето C за која важи $\overline{AC} = \overline{AD}$. Точката E припаѓа на полурамнината определена со правата BC која не ја содржи точката A и е таква што $\measuredangle EBC = \measuredangle A$ и $\measuredangle EDC = \frac{1}{2}\measuredangle A$. Докажи, дека $\measuredangle CED = \measuredangle ABC$.

7. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L \in AC$ е симетралата на $\measuredangle ABC$, а $AH, H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A. Докажи, дека $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB$ ако и само ако $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB + 90^\circ$.

8. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A < 90^\circ$. Во надворешноста на $\triangle ABC$ се конструирани рамнокраки триаголници ABE и ACZ со основи AB и AC, соодветно. Ако точката D е средина на страната BC и важи $DE \perp DZ$ и $\overline{EZ} = 2 \cdot \overline{ED}$, докажи дека $\measuredangle AEB = 2 \cdot \measuredangle AZC$.

9. Триаголникот AOB со ротација во рамнината околу темето O за агол 90° се пресликува во триаголник A_1OB_1, при што A_1 е слика на A и B_1 е слика на B. Докажи дека тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1 е нормална на правата A_1B.

10. На страната AC на $\triangle ABC$ избрана е точка K таква што $\overline{AK} = 2\overline{KC}$ и $\measuredangle ABK = 2\measuredangle KBC$. Нека F е средина на AC, а L е проекцијата на A врз BK. Докажи, дека правите FL и BC се заемно нормални.

11. Нека A_1, B_1 и C_1 се точки на страните BC, CA и AB, соодветно на $\triangle ABC$ такви што $\overline{AB_1} = \overline{C_1B_1}$ и $\overline{BA_1} = \overline{C_1A_1}$. Нека D е симетричната точка на точката C_1 во однос на правата AB ($D \neq C$). Докажи дека CD е нормална на правата која минува низ центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABC и A_1B_1C.

12. Даден е правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle A = 90^\circ, \measuredangle C = 30^\circ$. Кружницата ω минува низ точката A и ја допира страната BC во нејзината средина K. Нека ω ги сече страната AC и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките N и M, соодветно. Докажи, дека $MN \perp BC$.

13. Нека M и N се средините на страните BC и AB на триаголникот ABC, соодветно и точката D лежи на страната BC. Докажи, дека ако $P = AD \cap MN$, тогаш $AP \perp BP$ ако и само ако AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$.

14. Низ точката P која лежи на основата BC на рамнокракиот триаголник ABC, повлечени се прави паралелни со краците на триаголникот. Ако Q и R се пресечните точки на правите со краците AB и AC, соодветно, а P_1 е симетрична точка на P во однос на правата QR, тогаш P_1 лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи!

15. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Опишаната кружница ω околу $\triangle HAB$ по втор пат ја сече отсечката BC во точката D. Правата DH ја сече отсечката AC во точката P, а Q е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ADP$. Докажи дека центарот на ω лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

16. Нека ABC е триаголник и нека D и E се точки на неговата опишана кружница, така што $D \in AB$ кој не ја содржи C, $E \in AC$ кој не ја содржи B и $BD \| CE$. Нека пресекот на правите DA и CE е F, а пресекот на правите EA и BD е G. Нека P е вториот пресек на опишаните кружници на $\triangle ABG$ и $\triangle ACF$. Докажи дека правата AP минува низ средината на страната BC.

17. Нека ABC е рамнокрак триаголник и $\measuredangle BAC = 100^\circ$. Нека D е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ABC$ и страната AC. Докажи, дека $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{BC}$.

18. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се избрани точки E и F такви што DE е симетрала на $\measuredangle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C која е нормална на DE, ја сече страната AD во точката L и ја сече дијагоналата BD во точката H. Нека DE ја сече AC во точката N.

    а) Докажи, дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.

    б) Ако $HN \| AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.

    в) Ако $HN \| AD$, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е квадрат.

19. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка од страната AD, така што $\overline{AE} : \overline{ED} = m$. Нека F е точка од CE, така што $BF \perp CE$, и точката G е симетрична на F во однос на AB. Ако точката A е центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, најди ја вредноста на m.

20. Кружниците ω_1 и ω_2 се сечат во две точки A и B. Нека t_1 и t_2 се тангентите на ω_1 и ω_2, соодветно, низ точката A. Нека вториот пресек на ω_1 и t_2 е C, а вториот пресек на ω_2 и t_1 е D. На полуправата AB, по B, се дадени точки P и E такви што $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$. Опишаната кружница на $\triangle BCE$ ја сече t_2 по втор пат во

точка Q, а опишаната кружница на $\triangle BDE$ ја сече t_1 по втор пат во точка R. Докажи дека точките P,Q и R се колинеарни.

21. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $\measuredangle ADC = 30^\circ$ и $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$. Докажи, дека дијагоналата BD е симетрала на аголот $\measuredangle ABC$.

22. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што
$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = \measuredangle BOC + \measuredangle DOA.$$
Докажи, дека постои кружница k која ги допира кружниците опишани околу триаголниците AOB, BOC, COD и DOA.

23. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A = 20^\circ$ и $\measuredangle B = \measuredangle C = 80^\circ$. Нека K и L се точки на страните AB и AC, соодветно такви што $\measuredangle KCB = 30^\circ$ и $\measuredangle LBC = 60^\circ$. Определи го $\measuredangle KLB$.

24. Даден е $\triangle ABC$. Точките D и E се подножјата на нормалите повлечени од темето A на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C. Докажи дека $DE \| BC$.

25. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е центар на припишаната кружница наспроти темето A. Нека оваа кружница ги допира правите AB и BC во точките E и F, соодветно и точката J е пресекот на BD и EF. Докажи дка $\measuredangle CJB = 90^\circ$.

26. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\measuredangle DAC = \measuredangle BDC = 36^\circ$, $\measuredangle CBD = 18^\circ$ и $\measuredangle BAC = 72^\circ$. Ако P е пресечната точка на дијагоналите AC и BD, определи го $\measuredangle APD$.

27. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A = 100^\circ$ и $\measuredangle B = \measuredangle C = 40^\circ$. Точката M е во внатрешноста на триаголникот и важи $\measuredangle MBC = 20^\circ$ и $\measuredangle MCB = 30^\circ$. Определи го $\measuredangle CAM$.

28. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A = 20^\circ$ и $\measuredangle B = \measuredangle C = 80^\circ$. Нека K и L се точки на страните AB и AC, соодветно такви што $\measuredangle KCB = 50^\circ$ и $\measuredangle LBC = 60^\circ$. Определи го $\measuredangle BLK$.

29. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\measuredangle ABC < 90^\circ$ и $\overline{AB} < \overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D. Ако $\measuredangle EDA = \measuredangle FDC$, опереди го $\measuredangle ABC$.

30. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D и отсечките AD и CE се сечат. Ако $\measuredangle ABF = \measuredangle DCE$, определи го $\measuredangle ABC$.

31. Впишаната кружница во триаголникот е проектирана на страните на тој триаголник. Докажи, дека шесте крајни точки на овие проекции припаѓаат на иста кружница.

32. Нека C е кружница со центар во O и радиус R. Од точката A на кружницата C конструираме тангента t на кружницата. Низ центарот O повлекуваме права d која тангентата ја сече во точка M и кружницата ја сече во точките B и D (B лежи меѓу O и M). Ако $\overline{AM} = R\sqrt{3}$, докажи дека:

а) Триагоникот AMD е рамнокрак.

б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на кружницата C.

33. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$ таков што $\overline{AE} = \overline{AB}$, $\measuredangle EAB = 36^\circ$, $\measuredangle ECD = 18^\circ$ и $\measuredangle EDB = 72^\circ$. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle BCE$. Ако AE е тангента на кружницата k, докажи дека средината на отсечката BD, средината на лакот BE и точката A се колинеарни (лежат на една права).

34. Даден е остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H. Докажи дека средините на отсечките AB и CH и пресечната точка на симетралите на аглите $\measuredangle CAH$ и $\measuredangle CBH$ се колинерани точки.

35. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB, BC, CD и DE во точките P, Q, R и S, соодветно (различни од темињата на петаголникот). Докажи, дека правите PS и AE се паралелни.

36. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Нека точките M и N се внатрешни точки на страните DE и CD, соодветно такви што $\measuredangle AMN = 90^\circ$ и $\overline{AN} = \overline{CM}\sqrt{2}$. Определи го аголот $\measuredangle BAM$.

37. Нека ABC е остроаголен триаголник. Правите l_1 и l_2 се нормали на AB во точките A и B, соодветно. Нека точката M е средина на отсечката AB. Нормалите повлечени од точката M на правите AC и BC ги сечат l_1 и l_2 во точките E и F, соодветно. Ако D е пресек на правите EF и MC, докажи дека $\measuredangle ADB = \measuredangle EMF$.

38. Ако I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$, I_a е центар на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$ и D е втората пресечна точка на на AI со опишаната кружница околу $\triangle ABC$, тогаш $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DI} = \overline{DI_a}$.

39. Нека е даден $\triangle ABC$ и нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишни линии во триаголникот кои се сечат во точка T и притоа важи $\overline{BA_1} = \overline{A_1T}$. На продолжението на CC_1 избираме точка C_2 таква што $\overline{C_1C_2} = \frac{\overline{CC_1}}{3}$, а на продолжението на BB_1 избираме точка B_2 таква што $\overline{B_1B_2} = \frac{\overline{BB_1}}{3}$. Докажи дека четириаголникот TB_2AC_2 е правоаголник.

40. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека S_a, S_b, S_c, S_d се центрите на впишаните кружници во триаголниците BCD, CDA, DAB, ABC, соодветно. Докажи дека четириаголникот $S_aS_bS_cS_d$ е правоаголник.

41. Темињата A и B на рамностран $\triangle ABC$ лежат на кружница k со радиус 1, а темето C се наоѓа во внатрешноста на кружницата k. Точката $D \neq B$ лежи на кружницата k и важи $\overline{AD} = \overline{AB}$. Правата DC ја сече кружницата k уште во точката E. Определи ја должината на отсечката CE.

42. Нека е дадена полукружница k со центар O и дијаметар AB. Нека C е точка од k таква што $CO \perp AB$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече k во точка D, а OC во точка G. Докажи дека $\overline{AD} = \overline{DG} = \overline{DC}$.

43. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што $\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ$. Докажи, дека $\measuredangle OBC = \measuredangle ODC$.

44. Во остроаголниот $\triangle ABC$ точките D и E се подножја на висините повлечени од темињата A и B, соодветно, $\overline{AC} > \overline{BC}$ и $\overline{AB} = 2\overline{DE}$. Со O и I да ги означиме центарите на опишаната и вписаната кружница, соодветно. Определи го $\measuredangle AIO$.

45. Во паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BD}$. Нека K е точка на AB, различна од A таква што $\overline{KD} = \overline{AD}$. Нека M е точката симетрична на точката C во однос на K, а N е точката симетрична на точката B во однос на A. Докажи, дека $\overline{DM} = \overline{DN}$.

46. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABK. Правите BK и AD се сечат во точка P. Докажи, дека должината на отсечката која ги поврзува средините на отсечките KD и CP е еднаква на половината од должината на страната на квадратот.

47. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез таков што $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}, AB \| DC$ и $\overline{AB} > \overline{CD}$. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD и нека точката N е симетрична на точката B во однос на правата AC. Докажи, дека четириаголникот $ANDE$ е тетивен.

48. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат под агол од 90° во точката O. Нека K, L, M и N се ортогоналните проекции на точката O на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Докажи, дека четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

49. Дадена е полукружница k со центар O и дијаметар AB. Нека C е точката од k таква што $CO \perp AB$. Симетралата на $\angle ABC$ ја сече k во точката D. Нека E е точката од AB таква што $DE \perp AB$ и нека F е средината на CB. Докажи дека четириаголникот $EFCD$ е тетивен.

50. (задача на Наполеон). Даден е $\triangle ABC$, над чии страни кон надворешноста на триаголникот се конструирани рамнострани триаголници $\triangle BCP, \triangle CAQ$ и $\triangle ABR$. Докажи,

а) $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$.

б) Правите AP, BQ и CR се сечат во една точка.

в) Центрите на рамностраните $\triangle BCP, \triangle CAQ$ и $\triangle ABR$ се темиња на рамностран триаголник.

51. (Теорема на Микел). Четири прави кои по парови не се паралелни определуваат четири триаголници. Докажи, дека опишаните кружници околу овие триаголници минуваат кон една точка.

52. Рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB}=\overline{AC}$) е впишан во кружница ω. Нека P е произволна точка од лакот BC кој не ја содржи A. Точките I_B и I_C се центрите на впишаните кружници цо триаголниците ABP и ACP, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle PI_BI_C$ минува низ постојана точка која не зависи од изборот на точката P.

53. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle C=90^\circ, \measuredangle A=30^\circ$ и $\overline{BC}=1$. Во $\triangle ABC$ е впишан рамностран триаголник (на секоја страна на $\triangle ABC$ лежи по едно теме на впишаниот рамностран триаголник). Определи ја најмалата можна должина на страната на впишаниот рамностран триаголник.

54. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека H е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB. Докажи, дека збирот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC, \triangle BCH$ и $\triangle ACH$ е еднаков на $\overline{CH}$.

55. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, AC и AB во точките D, E и F, соодветно. Со K и L да ги означиме се подножјата на нормалите повлечени од точките F и E на страната BC, соодветно. Нека вторите пресечни точки на овие нормали со впишаната кружница се M и N, соодветно. Докажи, дека $\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}$.

56. Нека $ABCD$ е четириаголник со должини на страни $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b,$ $\overline{CD}=c, \overline{DA}=d$. Докажи, дека плоштината на четириаголникот е помала или еднаква на $\frac{ac+bd}{2}$.

57. Две кружници k_1 и k_2 со радиуси R и r, соодветно се сечат во точките C и D, а допираат права l во точките A и B. Докажи дека радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ABC и ABD се еднакви и изрази ги овие радиуси со помош на R и r.

58. Правоаголник е поделен со отсечки паралелни со неговите страни на квадрати 1×1. Во секој квадрат е запишан еден број. Збирот на сите броеви во секој ред е 1, а збирот на сите броеви во секоја колона е 2. Може ли плоштината на тој правоаголник да е 2004?

59. Даден е конвексен 2004–аголник чии должини на страни се поголеми од 2. Околу секое теме е опишана кружница со радиус 1. Пресметај го збирот на плоштините на деловите од круговите зафатени со внатрешните агли на многуаголникот.

60. Во правоаголен трапез $ABCD, (AB \| CD)$ аголот при темето B е еднаков на 75°. Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A на правата BC. Ако $\overline{BH}=\overline{CD}$ и $\overline{AD}+\overline{AH}=8$, пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$.

61. Нека ABC е остроаголен триаголник, A', B' и C' се симетричните точки на темињата A, B и C во однос на правите BC, CA и AB, соодветно и нека кружниците опишани околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат и во точката A_1. Точките B_1 и C_1 се аналогно дефинирани. Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 имаат една заедничка точка.

62. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A, земени се точки X и Y такви што $\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$. Нека M е средината на тетивата AX. Докажи дека $\overline{BM}+\overline{CM} > \overline{AY}$.

63. Нека $\triangle ABC$ што $\measuredangle BCA \geq 90^\circ$. Тогаш точно е неравенството

$$\overline{AB}^2 \geq \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 . \tag{1}$$

64. Даден е $\triangle ABC$ со страни a, b и c и радиус на опишана кружница R. Нека I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а P_1, P_2 и P_3 се плоштините на $\triangle ABI$, $\triangle BCI$ и $\triangle CAI$, соодветно. Докажи дека

$$\frac{R^4}{P_1^2}+\frac{R^4}{P_2^2}+\frac{R^4}{P_3^2}\geq 16$$

65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека h_a, h_b, h_c се висините, t_a, t_b, t_c тежишните линии на повлечени кон страните a, b, c соодветно, r е

радиусот на впишаната и R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Докажи, дека $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}\le 1+\frac{R}{r}$. Кога важи знак за равенство.

66. Даден е правоаголник $ABCD$. Нека M,N,P и Q се произволни точки на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Ако со p и S ги означиме периметарот и плоштината на четириаголникот $MNPQ$, докажи дека

    а) $p\ge \overline{AC}+\overline{BD}$,

    б) ако $p=\overline{AC}+\overline{BD}$, тогаш $S\le \frac{1}{2}P_{ABCD}$.

67. Четири точки во рамнината определуваат шест отсечки со должини $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5\le a_6$. Докажи дека $a_1\sqrt{2}\le a_6$.

68. Нека A,B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c, соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, докажи дека
$$r^2\le \frac{1}{9}(r_a^2+r_b^2+r_c^2).$$

69. Докажи дека еден триаголник е рамностран ако и само ако отсечките кои ја поврзуваат која и да е негова внатрешна точка со темињата на триаголникот се страни на триаголник.

IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. На шаховски турнир секој игра со секого по една партија. Натпреварувачите се мајстори и велемајствори. На крајот од турнирот се покажало дека сите велемајстори ги победиле сите мајстори и во тие партии ги освоиле половината од бодовите кои може да се освојат на турнирот. Ако во секоја партија победникот добива 1 поен, поразениот 0 поени, а во случај на реми (нерешен исход) секој од двата играчи добива по половина поен, докажи дека бројот на учесниците на турнирот е квадрат на некој природен број.

2. Здравко, Борис, Невен, Славко и Милан играат тениски турнир во парови. Секои двајца како партнери мора да играат против сите парови кои може да се формираат од преостанатите играчи. Секои двајца играчи може да бидат во пар најмногу еднаш во текот на денот. Кој е најмалиот број денови потребен да се одигра ваков турнир?

3. Нека n трицифрени броеви ги задоволуваат следните својства:
   (1) Сите броеви не ја содржат цифрата 0.
   (2) Збирот на цифрите на секој број е 9.
   (3) Цифрите на единиците на било кои два броја се различни.
   (4) Цифрите на десетките на било кои два броја се различни.
   (5) Цифрите на стотките на било кои два броја се различни.
   Определи ја најголемата можна вредност за n.

4. Определи го бројот на пермутациите на броевите 0, 1, 2, ..., 9 кај кои:
   а) броевите 0 и 1 се соседни,
   б) броевите 0 и 1 се соседни и 0 е пред 1,
   в) бројот 0 се наоѓа пред бројот 1,
   г) броевите 0 и 1 не се соседни.
   пермутации е еднаков на $10!-2\cdot 9!=(10-2)\cdot 9!=8\cdot 9!$.

5. Нека $p_1, p_2, ..., p_k$ се различни прости броеви. Определи го бројот на природни броеви од облик $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k = p_1p_2...p_k$.

6. Претставувањето на природниот број n како збир на природни броеви, при што редоследот на собирците е важен, го нарекуваме *подредено разбивање* на бројот n. На пример, имаме 8 подредени разбивања на бројот 4 и тоа:

   $$4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=1+3=3+1=2+2.$$

   Докажи, дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1}.

7. За еден број со 2017 цифри ќе велиме дека е *лош*, ако секој број формиран од три негови последователни цифри не е делив со 3. Определи го бројот на лошите броеви во чиј декаден запис учествуваат само цифрите 1, 6 и 8.

8. Во НБА има 30 тимови, секој од кои треба во текот на една сезона да одигра по 82 натпревари. Дали е можно тимовите да се поделат во две конференции (не задолжително со еднаков број тимови) – Источна и Западна, и натпреварувањето да се организира така што бројот на натпреварите меѓу тимовите од различните конференции да е еднаков на половина од бројот на сите натпревари?

9. Определи го бројот на решенија во множеството природни броеви на равенката:

   а) $x+y=2008$, б) $x+y+z=2008$ и

   в) $x+y+z+t=2008$.

10. Од кутија која содржи 10 различни топчиња без гледање едноподруго се врши избор на 4 топчиња. Определи го бројот на различните избори:

    а) ако редоследот на извлечените топиња е важен и изборот се врши со враќање на извлеченото топче,

    б) ако редоследот на извлечените топќиња не е важен и изборот се врши со враќање,

    в) ако редоследот на извлечените топчиња е важен и изборот се врши без враќање,

    г) ако редоследот на извлечените топчиња не е важен и изборот се врши без враќање.

11. Во азбука која се состои од 3 букви a,b и c, определи го бројот на зборовите кои имаат тоно n букви. Колку зборови имаат должина n, а во кои буквата a се појавува парен број пати?

12. Во рамнина се дадени две множества од паралелни прави $p_1, p_2,...,$ p_{13} и $q_1, q_2, \ldots, q_7$ такви што правите од првото се сечат со правите од второто. Колку паралелограми се определени со тие прави?

13. На една забава има 15 луѓе, некои од кои меѓусебно се ракувале. Докажи дека постојат две лица кои се разкувале еднаков број пати.

14. На еден натпревар учествуваат $n \geq 4$ натпреварувачи. Меѓу секои 4 натпреварувачи постои барем еден кој ги познава преостанатите три натпреварувачи. Докажи дека постои натпреварувач кој ги познава сите други натпреварувачи. (познанството е симетрична релација, т.е. ако A го познава B, тогаш B го познава A.)

15. На една забава се наоѓаат 8 луѓе, од кои секој не разговара најмногу со 3 луѓе. Докажи дека може да се формираат четири пара така што луѓето во секој пар меѓусебно разговараат.

16. Во група од 12 златници еден е лажен. Лажниот златник се разликува од исправните само по неговата маса. Со помош на три мерења на вага без тегови определи го лажниот златник, како и дали тој е полесен или потежок од исправните златници.

17. Група од 65 момчиња треба да поделат 2020 џамлии. Докажи дека при било каква поделба на џамлиите секогаш ќе постојат две момчиња кои добиле еднаков број џамлии.

18. Докажи дека од 20 природни броја може да се изберат два броја така што нивниот збир или нивната разлика е делива со 20.

19. Нека A е множество од 65 цели броеви кои даваат различни остатоци при делење со 2016. Докажи, дека постои подмножество $B = \{a, b, c, d\}$ на множеството A такво што $2016 | (a+b-c-d)$.

20. Дадени се 9 прави такви што секоја од нив дели даден квадрат $ABCD$ на два трапези, чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Докажи дека најмалку три од дадените девет прави минуваат низ иста точка.

21. На едно тестирање учествувале 67 ученици. Тестот се состоел од 6 прашања. Ученик кој точно одговорил на $k-$тото прашање добива k бодови, а додека ученик кој неточно одговорил на $k-$тото прашање добива $-k$ бодови.

а) Докажи дека постојат најмалку два ученика кои идентично одговориле на сите прашања.

б) Докажи дека постојат најмалку четири ученици кои освоиле ист број на бодови.

22. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 1 на произволен начин се сместени 51 точка. Докажи дека постои круг со радиус помал од $\frac{1}{7}$ кој содржи најмалку 3 од дадените точки.

23. На свера се дадени 5 точки. Докажи дека постои полусвера кој содржи барем 4 од дадените точки.

24. Докажи дека во круг со радиус $r=19$ не може да се сместат 400 точки така што растојанието меѓу секои две од овие точки е поголемо од 2.

25. На произволен начин од множеството $\{1,2,\dots,25\}$ се избрани 17 различни броеви. Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два различни броја чиј производ е точен квадрат.

26. Нека A подмножество од множеството $\{0,1,2,3,...,1997\}$ кое содржи повеќе од 1000 елементи. Докажи дека A содржи број од облик $2^k, k\in\mathbb{N}$ или постојат два различни броја $a,b\in A$ такви што $a+b=2^k, k\in\mathbb{N}_0$.

27. На еден натпревар учествувале 110 ученици кои решавале 5 задачи. Познато е дека секоја задача ја решиле најмалку 60 ученици. Докажи дека постојат два ученика кои заедно ги решиле сите задачи.

28. Множество S се нарекува *соседно*, ако има точно четири елементи и за секој $x\in S$ барем еден од броевите $x-1$ или $x+1$ припаѓа на S. Определи го бројот на соседни подмножества од множеството $\{1,2,\dots,n\}$.

29. Нека S е множество од n различни реални броеви, а A_S е множеството од аритметичките средини на паровите броеви од S. За дадено $n\geq 2$ определи го најмалиот можен број елементи во множеството A_S.

30. Од множеството $\{1,2,3,...,2n\}$ се избрани $n+1$ броеви. Докажи дека меѓу нив може да се најдат два броја такви што:

а) едниот е делител на другиот,

б) броевите се заемно прости,

в) нивниот збир е $2n$ или е избран бројот n.

31. Определи го бројот на триелементните подмножества на множеството $S=\{1,2,3,...,19,20\}$ такви што производот на нивните елементи е делив со 4.

32. Множествата $M=\{1,2,3,...,27\}$ и $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}\subset\{1,2,3,...,14\}$ го имаат следново својство: секој елемент од M може да се запише како збир на еден или два (не задолжително различни) елементи на A. Определи ја најмалата можна вредност на k.

33. Нека n е природен број и $S=\{n,n+1,n+2,...,5n\}$.

    а) Докажи, дека ако множеството S е поделено на две дисјунктни множества, тогаш постојат три броја x,y,z (не задолжително различни) кои припаѓаат на исто подмножество на S и за кое важи $x+y=z$.

    б) Дали тврдењето под а) важи ако наместо множеството S го разгледуваме множеството $S'=\{n,n+1,n+2,...,5n-1\}$.

34. Нека A е множество со n^2, ($n\geq 2$) елементи, $\mathcal{F}$ е фамилија подмножества од A такви што секое од нив има n елементи и секои две различни множества од $\mathcal{F}$ имаат најмногу еден заеднички елемент. Докажи,

    а) фамилијата $\mathcal{F}$ има најмногу n^2+n елементи,

    б) горната граница може да се достигне за $n=3$.

35. За едно множество M што содржи 4 елементи велиме дека е „парно сврзано" ако за секој елемент x во M, барем еден од броевите $x-2$ или $x+2$ припаѓа на M. Нека S_n е бројот на „парно сврзани" подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Определи го најмалиот број n така што $S_n\geq 2011$.

36. Дали е можно во рамнината да се обележат 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки (сите различни) така што се исполнети условите:
    - За секоја црвена точка A постои сина точка која е поблиска до точката A од било која зелена точка,
    - За секоја сина точка B постои зелена точка која е поблиска до точката B од било која црвена точка, и
    - За секоја зелена точка C постои црвена точка која е поблиска до

точката C од било која сина точка.

37. Даден е конвексен 17-аголник. Сите страни и сите дијагонали се обоени со 3 различни бои. Докажи дека постои триаголник чии страни се обоени со иста боја.

38. Во рамнината се дадени 2019 плави и црвени точки такви што на секоја единечна кружница со центар во плава точка се наоѓаат точно две црвени точки. Определи го најголемиот можен број на плави точки.

39. Дефинираме боење на рамнината на следниот начин:
    - избираме природен број m,
    - нека $K_1, K_2, ..., K_m$ се различни кругови со ненулти радиуси такви што $K_i \subset K_j$ или $K_j \subset K_i$ за $i \neq j$,
    - точките од рамнината кои што се надвор од произволен од избраните кругови се различно обоени од точките кои што се внатре во кругот.

    Во рамнината се дадени 2019 точки такви што било кои три од нив не се колинеарни. Определи го максималниот број на бои со кои дадените точки можат да се обојат?

40. Секоја точка од рамнината е обоена во црвена или плава боја. Докажи дека постои многуаголник со еднобојни темиња од барем еден од следниве видови:
    - рамностран триаголник со должина на страна 2,
    - рамностран триаголник со должина на страна $\sqrt{3}$,
    - ромб со должина на страна 1.

41. Дадена е правоаголна табла со димензии 2017×2018. Дали може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати?

42. Во табела со димензии $2n \times 2n$ се запишани природни броеви кои се помали или еднакви на 10, при што броевите кои се запишани во квадрати со заеднички теме се заемно прости. Докажи, дека постои број кој се појавува барем $\frac{2n^2}{3}$ пати.

43. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со правоаголници со димензии 4×1.

44. Дали може да се покрие табла со димензии 12×12 со правоаголници 1×8 и 8×1?

45. Определи го бројот на табелите со m редици и n колони, $m,n\in\mathbb{N}$, елементи $+1$ и -1 такви што производот на елементите во секој ред и секоја колона е еднаков на:
а) $+1$ б) -1

46. Во едно од полињата на квадратна 41×41 табла е маскиран тенк. Стрелец со еден истрел погодува едно поле. Ако0 го погоди полето во кое е тенкот, тогаш тенкот се преместува во соседно поле, а во спротивно останува во полето во кое се наоѓа. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна. По истрелот стрелецот не знае дали го погодил или не го погодил тенкот. За да се уништи тенкот треба да е погоден двапати. Кој е најмалиот број истрели со кој стрелецот сигурно ќе го уништи тенкот?

47. Квадрат, поделен на единечни квадратчиња, може да се расече на n складни фигури со по k квадратчиња во секоја фигура. Докажи дека истиот квадрат може да се расече и на k складни фигури со по n квадратчиња во секоја фигура.

48. Дали може шаховската фигура скокач да помине по табла со димензии $4\times n$ така што на секое поле ќе застане точно по еднаш и во последниот потег да се врати на почетното поле.

49. Колку најмногу скокачи (коњи) може да се распоредат на шаховска табла со димензии 5×5 така што секој од нив напаѓа точно по два од останатите скокачи (коњи).

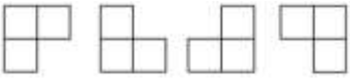
50. Нека m и n се непарни броеви. Докажи дека шаховската фигура скокач не може да помине по табла со димензии $m\times n$ така што на секое поле ќе застане точно по еднаш и во последниот потег да се врати на почетното поле.

51. На таблата се запишани броевите 0, 1, 2 и 4. Дозволено е да се изберат било кои два броја и секој од нив да се зголеми за 1. Дали може со конечно многу повторувања на оваа операција да се добиат четири еднакви броја?

52. Горјан има голем сад кој на почетокот е празен. Тој секоја секунда или става едно топче во садот или од него вади две топчиња.

Дали може по 3^{1999} секунди во садот да има точно $3^{1000}+2$ топчиња.

53. L-тримино е фигура која може да има еден од четирите облици прикажани на цртежот (секој од нив се состои од 3 единечни квадрати):



Дадена е табла 5×5, која се состои од 25 единични квадрати и неограничен број на L-тримина. Нека k е даден природен број, таков што $k\leq25$.

Двајца играчи, A и B, ја играат следата игра: играта ја почнува играчот A и наизменично бојат (со иста боја) по еден единичен квадрат, кој што претходно не е обоен. Велиме дека играта е завршена, кога на таблата се обоени вкупно k единечни квадрати.

Велиме дека L-тримината *добро* ги покриваат необоените единични квадрати на таблата ако тие не се преклопуваат и секое од нив покрива точно три необоени единични квадрати на таблата.

Играчот B победува ако секое *добро* прекривање со L-тримина остава непокриени најмалку три необоени единични квадрати. Најди ја најмалата можна вредност за k за која играчот B има победничка стратегија.

54. На секое поле на табла со димензии $n\times n$ ($n\geq2$) се наоѓа жетон. Во еден чекор го поместуваме секој жетон на едно четирите дијагонални соседни полиња на полето на кое се наоѓа жетонот (на некое поле може да има и повеќе жетони). Определи го најголемиот број полиња на кои со повеќекратно реализирање на наведената операција може да нема ниту еден жетон.

55. На таблата се запишани n природни броеви. Може да се допишуваат само броеви од видот $\frac{a+b}{a-b}$, каде a и b се веќе запишани броеви.

Определи го најмалиот природен број n така што додавајќи броеви на погоре опишаниот начин може да се добие било кој природен број. За вака определениот број n определи ги почетните броеви (испитај ги сите можности).

56. Темињата на правилем многуаголник со 1000 страни се обоени во три бои: црвена, жолта и плава. Во еден потез е дозволено да се земат две соседни различно обоени темиња и тие да се пребојат во третата боја.

Докажи дека по конечен број вакви потези сите темиња може да се обојат во една боја.

57. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределиле по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.
Определи го најмалиот можен број тегови во кутијата.

58. Определи множество S со најмал број точки со кои се определени седум различни прави.

59. Дали може во рамнината да се нацртаат 82 кружници такви што вкупниот број точки во кои се сечат овие кружници е 2008 и секоја кружница се сече со некоја друга кружница?

60. Докажи дека секој конвексен четириаголник со плоштина 1 може да се смести во правоаголник со плоштина 2.

61. Во рамнината се дадени 4000 точки такви што секои три точки не се колинеарни. Докажи дека може да се конструираат 1000 четириаголници кои меѓусебно не се сечат и чии темиња се дадените точки.

62. Дали постои конвексен многуаголник кој може да се расече на конкавни четириаголници?

63. Нека $A_1A_2A_3...A_n$ е правилен многуаголник. Определи пермутација $B_1,B_2,B_3,...,B_n$ на темињата на многуаголникот така што должината на искршената линија $B_1B_2B_3...B_n$ ќе биде најголема.

64. Определи го најмалиот природен број n таков што коцка со должина на раб $n\,cm$ може да се расече на 1996 коцки чии должини на рабови изразени во сантиметри се исто така природни броеви.

65. Дадени се $n \geq 4$ точки во рамнина, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека постои триаголник таков што сите точки се во неговата внатрешност, а на неговите страни лежи точно по една точка од дадените точки.

66. На кружница се запишани 100 цели броеви. Секој од запишаните броеви е поголем од збирот на двата броја запишани по него во насока на движењето на стрелката на часовникот. Определи го најголемиот можен број позитивни броеви.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I АЛГЕБРА

1. Во множеството на целите броеви дефинираме операција * за која важи:

   $i)$ $m*(n+s)=(m*n)-s$ за секои цели броеви m,n,s,

   $ii)$ $(n+s)*m=(n*m)+2s$ за секои цели броеви m,n,s,

   $iii)$ $1*1=1$.

   Најди формула за $a*b$, $a,b\in\mathbb{Z}$.

   Решение. Имаме:

$$1*b=1*(1+(b-1))=1*1-(b-1)=2-b\ .$$

   Понатаму,

$$a*b=(1+(a-1))*b=1*b+2(a-1)=2-b+2a-2=2a-b\ .$$

2. Нека

$$A=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{1997\cdot1998}\ \text{ и }\ B=\frac{1}{1000\cdot1998}+\frac{1}{1001\cdot1997}+...+\frac{1}{1998\cdot1000}\ .$$

   Докажи, дека $\frac{A}{B}$ е природен број.

   Решение. Имаме

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+...+\frac{1}{1997\cdot1998}=\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{4-2}{3\cdot4}+...+\frac{1998-1997}{1997\cdot1998}\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1998})\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{999})\\&=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}\end{aligned}$$

   и

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{1000\cdot1998}+\frac{1}{1001\cdot1997}+...+\frac{1}{1998\cdot1000}\\&=\frac{1}{2998}(\frac{1998+1000}{1000\cdot1998}+\frac{1997+1001}{1001\cdot1997}+...+\frac{1000+1998}{1998\cdot1000})\\&=\frac{1}{2998}(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998})\\&=\frac{2}{2998}(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1996}+...+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1000})\\&=\frac{1}{1499}(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1996}+...+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1000}).\end{aligned}$$

Сега лесно се гледа дека $\frac{A}{B}=1499$ и тоа е природен број.

3. Нека $a_1,a_2,a_3,...,a_{2002}$ се природни броеви такви што

$$\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+\frac{1}{a_3^3}+...+\frac{1}{a_{2002}^3}=\frac{1}{2}.$$

Докажи дка барем три од овие броеви се еднакви меѓу себе.

Решение. Нека претпоставиме дека меѓу броевите $a_1,a_2,a_3,...,a_{2002}$ нема повеќе од два еднакви меѓу себе. Јасно, $a_i\neq 1$, за $i=1,2,...,2002$. Затоа

$$\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+\frac{1}{a_3^3}+...+\frac{1}{a_{2002}^3}\le\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{1002^3}+\frac{1}{1002^3}$$
$$=2(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{1002^3}).$$

Понатаму, за $n\ge 2$ важи

$$\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\frac{n+1-(n-1)}{(n-1)n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)})=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}).$$

Затоа важи

$$\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+\frac{1}{a_3^3}+...+\frac{1}{a_{2002}^3}\le 2(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{1002^3})$$
$$\le 2(\frac{1}{2}(1-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+...+\frac{1}{2}(\frac{1}{1001}-2\cdot\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}))$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}<\frac{1}{2},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

4. а) Дадени се реални броеви a,b и c такви што $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Докажи, дека $a=b=c$.

б) Определи ја вредноста на изразот $x+y$, ако $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$ и изразот $-4x^2+36y-8$ прима најголема вредност.

Решение. а) Ако $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, тогаш од својствата на пропорциите следува

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1,$$

од каде добиваме $a=b=c$.

б) Од условот $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$, односно $\frac{x}{3y}=\frac{3y}{6x-15y}=\frac{6x-15y}{x}$, ако го искористиме тврдењето под а) добиваме $x=3y=6x-15y$. Затоа $x+y=4y$ и

$$-4x^2+36y-8=-36y^2+36y-8=1-(36y^2-36y+9)=1-(6y-3)^2 .$$

Јасно последниот израз прима најголема вредност ако и само ако $6y-3=0$, т.е. ако и само ако $y=\frac{1}{2}$. Конечно, $x+y=4y=4\cdot\frac{1}{2}=2$.

5. Определи ја вредноста на изразот

$$w=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)} .$$

Решение. Нека $A=(a+b-c)^2, B=(c+b-a)^2, C=(c+a-b)^2$ и $D=(a-b)(b-c)(c-a)$. Тогаш

$$\begin{aligned} w&=\frac{A}{(a-c)(b-c)}+\frac{B}{(b-a)(c-a)}+\frac{C}{(c-b)(a-b)}=\frac{-A(a-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D}\\ &=\frac{A(a-c+c-b)-B(b-c)-C(c-a)}{D}=\frac{(b-c)(A-B)+(c-a)(A-C)}{D}\\ &=\frac{4b(b-c)(a-c)+4a(c-a)(b-c)}{D}=\frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{D}=4, \end{aligned}$$

бидејќи

$$\begin{aligned} A-B&=(a+b-c)^2-(c+b-a)^2\\ &=(a+b-c+c+b-a)(a+b-c-c-b+a)\\ &=4b(a-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-C&=(a+b-c)^2-(c+a-b)^2\\ &=(a+b-c+c+a-b)(a+b-c-c-a+b)\\ &=4a(b-c). \end{aligned}$$

6. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}$ се такви што $x+y+z=xyz$ Докажи дека

$$x(1-y^2)(1-z^2)=y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz .$$

Решение. Ако го искористиме дадениот услов добиваме

$$\begin{aligned} &x(1-y^2)(1-z^2)=y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=\\ &=x(1-x^2-z^2+x^2z^2)+y(1-z^2-x^2+z^2x^2)+z(1-x^2-y^2+x^2z^2)\\ &=x+y+z-xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z+x)+xy^2z^2+yz^2x^2+zx^2y^2\\ &=xyz-xy(xyz-z)-yz(xyz-x)-zx(xyz-y)+xy^2z^2+yz^2x^2+zx^2y^2\\ &=4xyz-zx^2y^2-xy^2z^2-yz^2x^2+xy^2z^2+yz^2x^2+zx^2y^2=4xyz. \end{aligned}$$

7. Нека a,b,c се реални броеви такви што $\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0$. Докажи, дека

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0.$$

Решение. Од условот на задачата следува

$$\frac{1}{bc-a^2}=-(\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2})=-\frac{ca-b^2+ab-c^2}{(ca-b^2)(ab-c^2)}.$$

Оттука следува

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}=\frac{a}{bc-a^2}\cdot\frac{b^2+c^2-ca-ab}{(ca-b^2)(ab-c^2)}=\frac{b^2a+c^2a-a^2b-a^2c}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)}.$$

Аналогно се добива дека

$$\frac{b}{(ca-b^2)^2}=\frac{c^2b+a^2b-b^2c-b^2a}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)} \text{ и } \frac{c}{(ab-c^2)^2}=\frac{a^2c+b^2c-c^2a-c^2b}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)}.$$

Ако ги собереме последните три равенства добиваме

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=$$
$$=\frac{b^2a+c^2a-a^2b-a^2c+c^2b+a^2b-b^2c-b^2a+a^2c+b^2c-c^2a-c^2b}{(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)}=0.$$

8. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$. Ако

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=\tfrac{1007}{1008},$$

докажи дека

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=2017.$$

Решение. Имаме

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(ab)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}$$
$$=\frac{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3}{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}$$
$$=\frac{\frac{1007}{1008}-3}{\frac{1007}{1008}-1}=2017.$$

9. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои постојат реални броево x и y такви што $a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0, c^3+cx+y=0$.

Докажи дека $a+b+c=0$.

Решение. Ако од првото равенство го одземеме второто добиваме

$$\begin{aligned}0&=a^3+ax+y-b^3-bx-y=a^3-b^3+x(a-b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2+x),\end{aligned}$$

па бидејќи $a\neq b$, добиваме дека важи $a^2+ab+b^2+x=0$. Аналогно, ако од првото равенство го одземеме третото равенство добиваме $a^2+ac+c^2+x=0$. Сега, со одземање на последните две равенства наоѓаме

$$0=ab+b^2-ac-c^2=(b-c)(b+c)+a(b-c)=(b-c)(a+b+c).$$

Конечно, бидејќи $b\neq c$, од последното равенство следува $a+b+c=0$.

10. Ако a,b,c се реални броеви такви што

$$a+b+c=0 \text{ и } a^4+b^4+c^4=50,$$

пресметај ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

Решение. Од $a+b+c=0$ следува $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$. Ако го квадрираме последното равенство добиваме

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)),$$

од каде следува

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4&=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8abc(a+b+c))\\&=2(ab+bc+ca)^2-4abc(a+b+c)+8abc(a+b+c)\\&=2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c).\end{aligned}$$

Од последното равенство, ако ги искористиме условите $a+b+c=0$ и $a^4+b^4+c^4=50$ следува $50=2(ab+bc+ca)^2$, т.е. $(ab+bc+ca)^2=25$.

Конечно, ако искористиме дека $ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}<0$, од последното равенство добиваме $ab+bc+ca=-5$.

11. Реалните броеви a,b,c,d се такви што важи

$$abc-d=1,\quad bcd-a=2,\quad cda-b=3,\quad dab-c=-6.$$

Докажи дека $a+b+c+d\neq 0$.

Решение. Јасно, a,b,c,d се различни од 0, бидејќи ако било кој од нив е еднаков на 0, тогаш не е можно да се исполнети сите четири равенства. Нека претпоставиме дека $a+b+c+d=0$. Ако ги собереме дадените равенства од условот на задачата и искористиме дека $a+b+c+d=0$ добиваме $abc+bcd+cda+dab=0$. Значи,

$$0=ab(c+d)+cd(a+b)=ab(c+d)-cd(c+d)=(c+d)(ab-cd).$$

Ако $c+d=0$, тогаш $a+b=0$, па ако ги собереме првото и четвртото равенство од условот на задачата добиваме $-5=ab(c+d)-(c+d)=0$, што е противречност.

Нека $ab=cd$ и $a+b\neq 0$. Аналогно добиваме

$$0=bc(a+b)+ad(b+c)=-bc(b+c)+ad(b+c)=(b+c)(ad-bc).$$

Ако $b+c=0$, тогаш собирајќи ги третото и четвртото равенство од условот на задачата повторно добиваме противречност. Затоа останува $ad=bc$. Аналогно ја отфрламе можноста $b+d=0$ и заклучуваме дека $ac=bd$. Множејќи ги $ab=cd$ и $ad=bc$ добиваме $a^2bd=c^2bd$, односно $a^2=c^2$, па затоа $(a-c)(a+c)=0$. Но, $a+c\neq 0$, па затоа $a=c$. Сега од $a\neq 0$ и $ab=cd$ следува $b=d$, Според тоа,

$$0=a+b+c+d=2a+2b=2(a+b),\text{ т.е. } a+b=0,$$

што противречи на $a+b\neq 0$. Конечно, од последната противречност следува тврдењето на задачата.

12. За реалните броеви x,y,z,k важи $x\neq y\neq z\neq x$ и

$$x^3+y^3+k(x^2+y^2)=y^3+z^3+k(y^2+z^2)=z^3+x^3+k(z^2+x^2)=2008.$$

Определи го производот xyz.

Решение. Од $x^3+y^3+k(x^2+y^2)=y^3+z^3+k(y^2+z^2)$ и $z\neq x$ следува

$$x^3-z^3=+k(z^2-x^2)$$
$$(x-z)(x^2+xz+z^2)=-k(x-z)(x+z)$$
$$x^2+xz+z^2=-k(x+z).$$

Аналогно се добива $y^2+yz+z^2=-k(y+z)$. Ако ги одземеме последните две равенства и поделиме со $x-y\neq 0$, добиваме

$$x+y+z=-k. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека $x+z\neq 0$. Навистина, ако $x+z=0$, тогаш од

$$x^2+xz+z^2=-k(x+z)=0, \qquad (2)$$

па затоа $0=(x+z)^2=x^2+xz+z^2+xz=xz$. Според тоа, $x+z=0$ и $xz=0$, од каде следува $x=z=0$, што противречи на $z\neq x$. Од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned}&x+y+z=-k=\tfrac{x^2+xz+z^2}{x+z}\\&(x+z)(x+y+z)=x^2+xz+z^2\\&xy+yz+zx=0.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}2008&=x^3+y^3+k(x^2+y^2)=x^3+y^3-(x+y+z)(x^2+y^2)\\&=x^3+y^3-x^3-x^2y-x^2z-xy^2-y^3-y^2z\\&=-(x^2y+xy^2+y^2z+x^2z)\\&=-(x^2y+x^2z+xyz+y^2z+xy^2+xyz-2xyz)\\&=-x(xy+xz+yz)-y(yz+xy+xz)+2xyz=2xyz\end{aligned}$$

па затоа $xyz=1004$.

13. Природните броеви a,x и y се поголеми од 100 и важи

$$y^2-1=a^2(x^2-1).$$

Определи ја најмалата можна вредност на $\frac{a}{x}$.

Решение. Нека претпоставиме дека $a<2x$. Тогаш

$$y^2=a^2(x^2-1)+1>a^2x^2-2ax+1=(ax-1)^2\text{, т.е. } y>ax-1.$$

Од друга страна, од $a>1$ следува

$$y^2=a^2x^2-a^2+1<a^2x^2\text{, т.е. } y<ax.$$

Според тоа, $ax-1<y<ax$, што не е можно во множеството природни броеви. Значи, $a\geq 2x$ и за $\frac{a}{x}=2$ доволно е да избереме $x=101, a=2x$ и $y=2x^2-1$.

14. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}},\ x>0.$$

Решение. Ја воведуваме смената $x+\frac{1}{x}=t$. Тогаш

$$\begin{aligned}&x^3+\tfrac{1}{x^3}=(x+\tfrac{1}{x})^3-3x\tfrac{1}{x}(x+\tfrac{1}{x})=t^3-3t,\\&x^6+\tfrac{1}{x^6}=(x^3+\tfrac{1}{x^3})^2-2=(t^3-3t)^2-2=t^6-6t^4+9t^2-2,\end{aligned}$$

па затоа

$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}}=\frac{t^6-(t^6-6t^4+9t^2-2)-2}{t^3+t^3-3t}=\frac{6t^4-9t^2}{2t^3-3t}$$

$$=3t=3(x+\tfrac{1}{x})\geq 3\cdot 2=6.$$

Значи, најмалата вредност на изразот е $A=6$ и таа се достигнува за $x=1$.

15. Докажи дека за $a,b,c\neq 0$ важи

$$\left|\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}-\frac{2}{c}\right|+\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}+\frac{2}{c}=4\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b},\tfrac{1}{c}\}\,.$$

Решение. Имаме

$$\left|\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}-\frac{2}{c}\right|+\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}+\frac{2}{c}=\left||\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}-\tfrac{2}{c}\right|+|\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{2}{c}\,.$$

Ќе разгледаме два случаја.

1. *случај*. Нека $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$. Тогаш од дифиницијата на апсолутната вредност следува:

$$\left||\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}-\tfrac{2}{c}\right|+|\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{2}{c}=$$

$$=|\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}-\tfrac{2}{c}|+|\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{2}{c}$$

$$=|\tfrac{2}{a}-\tfrac{2}{c}|+\tfrac{2}{a}+\tfrac{2}{c}.$$

Имаме два подслучаја.

1.1. Ако $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{c}$, тогаш $\frac{1}{a}=\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}$ и затоа од дефиницијата на апсолутната вредност следува

$$|\tfrac{2}{a}-\tfrac{2}{c}|+\tfrac{2}{a}+\tfrac{2}{c}=\tfrac{2}{a}-\tfrac{2}{c}+\tfrac{2}{a}+\tfrac{2}{c}=\tfrac{4}{a}=4\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b},\tfrac{1}{c}\}\,.$$

1.1. Ако $\frac{1}{a}<\frac{1}{c}$, тогаш $\frac{1}{c}=\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}$ и затоа од дефиницијата на апсолутната вредност следува

$$|\tfrac{2}{a}-\tfrac{2}{c}|+\tfrac{2}{a}+\tfrac{2}{c}=\tfrac{2}{c}-\tfrac{2}{a}+\tfrac{2}{a}+\tfrac{2}{c}=\tfrac{4}{c}=4\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b},\tfrac{1}{c}\}.$$

2. *случај*. Нека $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. Тогаш од дифиницијата на апсолутната вредност следува:

$$\left||\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}-\tfrac{2}{c}\right|+|\tfrac{1}{a}-\tfrac{1}{b}|+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{2}{c}=$$

$$=|\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}-\tfrac{2}{c}|+|\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{2}{c}$$

$$=|\tfrac{2}{b}-\tfrac{2}{c}|+\tfrac{2}{b}+\tfrac{2}{c}.$$

Имаме два подслучаја.

1.1. Ако $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$, тогаш $\frac{1}{b} = \max\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\}$ и затоа од дефиницијата на апсолутната вредност следува

$$|\frac{2}{b} - \frac{2}{c}| + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{2}{b} - \frac{2}{c} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{4}{b} = 4\max\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\}.$$

1.1. Ако $\frac{1}{b} < \frac{1}{c}$, тогаш $\frac{1}{c} = \max\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\}$ и затоа од дефиницијата на апсолутната вредност следува

$$|\frac{2}{b} - \frac{2}{c}| + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{2}{c} - \frac{2}{b} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{4}{c} = 4\max\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\}.$$

16. Од првите $2k$ $(k \geq 1)$ природни броеви се избрани k броеви такви што збирот на секои два од овие броеви е различен од $2k+1$. Нека S е збирот на избраните броеви, а T е збирот на нивните квадрати.

а) Определи го T.

б) Докажи дека за $k = 1009$ броевите може да се изберат така што $S = 1009^2$.

в) Пресметај го T за $k = 1009$ и $S = 1009^2$.

Решение. а) Нека избраните броеви се a_1, a_2, …, a_k. Бидејќи збирот на било кои два од овие броеви не е $2k+1$, добиваме дека за секој a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ постои точно еден број b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ кој е меѓу останатите броеви (не е меѓу избраните) таков што $a_i + b_i = 2k+1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Оттука следува:

$$\sum_{i=1}^{k} b_i^2 = \sum_{i=1}^{k} (2k+1-a_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} (2k+1)^2 - 2(2k+1)\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} a_i^2$$
$$= k(2k+1)^2 - 2(2k+1)S + \sum_{i=1}^{k} a_i^2.$$

На двете страни на последното равенство додаваме $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ и добиваме

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 = k(2k+1)^2 - 2(2k+1)S + 2\sum_{i=1}^{k} a_i^2 .$$

Во левата страна на последното равенство се содржат квадратите на сите природни броеви од 1 до $2k$. Бидејќи $\sum_{i=1}^{2k} i^2 = \frac{2k(2k+1)(4k+1)}{n}$, добваме дека

$$T=\sum_{i=1}^{k}a_i^2=(2k+1)S-\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}.$$

б) Ако избраните броеви се 1, 3, 5, …, 2013, 2015, 2017, тогаш

$$S=1+3+5+\cdots+2015+2017=1009^2.$$

в) Ос претходно изнесеното следува

$$T=\sum_{i=1}^{1009}a_i^2=2019\cdot1009^2-\frac{1009\cdot1010\cdot2019}{3}=\frac{2017\cdot1009\cdot2019}{3}=\frac{2017\cdot2018\cdot2019}{6}.$$

17. Определи ја 2005-тата цифра после децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$, каде

$$a=0,\underbrace{444...444}_{2005}.$$

Решение. Имаме

$$a=0,\underbrace{444...444}_{2005}=\tfrac{4}{9}\cdot0,\underbrace{999...999}_{2005}=\tfrac{4}{9}\cdot(1-0,\underbrace{000...000}_{2004}1)=\tfrac{4}{9}\cdot(1-\tfrac{1}{10^{2005}}).$$

Ако го искористиме неравенството

$$(1-\tfrac{1}{10^{2005}})^2<1-\tfrac{1}{10^{2005}}<1,$$

добиваме

$$\sqrt{a}=\sqrt{\tfrac{4}{9}\cdot(1-\tfrac{1}{10^{2005}})}=\tfrac{2}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10^{2005}}}<\tfrac{2}{3}<0,\underbrace{666...666}_{2004}7$$

и

$$\sqrt{a}=\sqrt{\tfrac{4}{9}\cdot(1-\tfrac{1}{10^{2005}})}=\tfrac{2}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10^{2005}}}>\tfrac{2}{3}\sqrt{(1-\tfrac{1}{10^{2005}})^2}$$
$$=\tfrac{2}{3}\cdot(1-\tfrac{1}{10^{2005}})=\tfrac{2}{3}\cdot0,\underbrace{999...999}_{2005}=0,\underbrace{666...666}_{2005}.$$

Од последните две неравества следува дека првите 2005 цифри после децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$ се еднакви на 6.

18. Нека n е ориропден број, $A=\underbrace{44...44}_{2n}$ и $B=\underbrace{88...88}_{n}$. Докажи, дека бројот $A+2B+4$ е точен квадрат.

Решение. Имаме

$$A=\underbrace{44...44}_{2n}=4\cdot\underbrace{11...11}_{2n}=\tfrac{4}{9}\cdot\underbrace{99...99}_{2n}=\tfrac{4}{9}(10^{2n}-1).$$

Аналогно, $B=\frac{8}{9}(10^n-1)$. Според тоа,

$$A+2B+4=\tfrac{4}{9}(10^{2n}-1)+\tfrac{16}{9}(10^{n}-1)+4=\tfrac{4\cdot10^{2n}-4+16\cdot10^{n}-16+36}{9}$$
$$=\tfrac{(2\cdot10^{n})^{2}+2\cdot2\cdot10^{n}\cdot4+4^{2}}{9}=(\tfrac{2\cdot10^{n}+4}{3})^{2}.$$

Збирот на цифрите на бројот $2\cdot10^{n}+4$ е 6, па затоа тој се дели со 3, што значи дека $\frac{2\cdot10^{n}+4}{3}$ е орироден број, со што тврдењето на задачата е докажано.

19. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{4\cdot1^{4}+1}+\frac{2}{4\cdot2^{4}+1}+...+\frac{2009}{4\cdot2009^{4}+1}.$$

Решение. Имаме

$$4k^{4}+1=4k^{4}+4k^{2}+1-4k^{2}=(2k^{2}+1)^{2}-(2k)^{2}$$
$$=(2k^{2}+2k+1)(2k^{2}-2k+1)$$
$$=(k^{2}+(k+1)^{2})(k^{2}+(k-1)^{2}),$$

па затоа

$$\frac{k}{4k^{4}+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4k}{4k^{4}+1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2k^{2}+2k+1)-(2k^{2}-2k+1)}{(2k^{2}+2k+1)(2k^{2}-2k+1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2k^{2}-2k+1}-\frac{1}{2k^{2}+2k+1})$$
$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{k^{2}+(k-1)^{2}}-\frac{1}{k^{2}+(k+1)^{2}}).$$

Сега добиваме

$$\frac{1}{4\cdot1^{4}+1}+\frac{2}{4\cdot2^{4}+1}+...+\frac{2009}{4\cdot2009^{4}+1}=$$
$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{0^{2}+1^{2}}-\frac{1}{1^{2}+2^{2}})+(\frac{1}{1^{2}+2^{2}}-\frac{1}{2^{2}+3^{2}})+...+(\frac{1}{2008^{2}+2009^{2}}-\frac{1}{2009^{2}+2010^{2}}))$$
$$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2009^{2}+2010^{2}})=\frac{2009^{2}+2010^{2}-1}{4(2009^{2}+2010^{2})}.$$

20. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што

$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$400=20^{2}=(a+b+c+d)^{2}$$
$$=a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$=a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}+300,$$

па затоа $a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}=100$. Според тоа,

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2&=\\ &=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\ &=3\cdot 100-2\cdot 150=0.\end{aligned}$$

Оттука следува дека $a=b=c=d$ и како $a+b+c+d=20$, добиваме $a=b=c=d=5$.

Втор начин. Како и во првиот начин добиваме дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2=100.$$

Ако искористиме дека $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$, добиваме

$$150=ab+ac+ad+bc+bd+cd\le\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)=150,$$

па затоа $a=b=c=d=5$.

21. За секој природен број дефинираме $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$. Пресметај го збирот

$$f(1)+f(2)+...+f(40).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2n+1+\sqrt{(2n+1)(2n-1)}+2n-1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\ &=\frac{\sqrt{2n+1}^2+\sqrt{(2n+1)(2n-1)}+\sqrt{2n-1}^2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}\\ &=\frac{\sqrt{2n+1}^3-\sqrt{2n-1}^3}{\sqrt{2n+1}^2-\sqrt{2n-1}^2}=\frac{\sqrt{2n+1}^3-\sqrt{2n-1}^3}{2}.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}f(1)+f(2)+...+f(40)&=\frac{\sqrt{3}^3-\sqrt{1}^3}{2}+\frac{\sqrt{5}^3-\sqrt{3}^3}{2}+...+\frac{\sqrt{81}^3-\sqrt{79}^3}{2}\\ &=\frac{\sqrt{81}^3-\sqrt{1}^3}{2}=\frac{729-1}{2}=364.\end{aligned}$$

22. Разложи го на множители изразот

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

Решение. Забележуваме дека важи

$$(a+2b-3c)+(b+2c-3a)+(c+2a-3b)=0.$$

Нека x,y и z се реални броеви такви што $x+y+z=0$. Тогаш

$$-z^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$$

$$=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+y^3-3xyz$$

па затоа точно е равенство

$$x^3+y^3+z^3=3xyz. \qquad (1)$$

Конечно, ако во (1) ставиме

$$x=a+2b-3c,\ \ y=b+2c-3a,\ \ z=c+2a-3b,$$

добиваме

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3=$$
$$=3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b).$$

23. За реалните броеви a,b,c и d важи

$$a+b+c+d=0$$
$$a^3+b^3+c^3+d^3=0.$$

Докажи, дека збирот на некои два од овие броеви е еднаков на 0.

Решение. Од $a+b+c+d=0$ следува дека $a+b+c=-d$. Ако последното равенство го степенуваме на трета добиваме

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3=-d^3.$$

Оттука и од вториот услов следува

$$3a^2b+3ab^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2=0$$
$$3ab(a+b)+3ac(a+b)+3bc(a+b)+3c^2(a+b)=0$$
$$3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=0$$
$$3(a+b)(a(b+c)+c(b+c))=0$$
$$3(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Конечно, од последното равенство следува дека еден од множителите $a+b,b+c,c+a$ мора да е еднаков на нула, што и требаше да се докаже.

24. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи, дека равенката $x^2+ax+a^2-6=0$ нема решенија во множеството реални броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека дадената равенка има решенија во множеството реални броеви. Равенката е еквивалентна со равенката $(x+\frac{a}{2})^2=6-\frac{3a^2}{4}$. Оттука следува $6-\frac{3a^2}{4}\geq 0$, односно $a^2\leq 8$. Но, a е позитивен реален број, па затоа $a^3\leq 8a$, т.е $6(a+1)\leq 8a$, од каде добиваме $a\geq 3$. Според тоа, $a^2\geq 9>8\geq a^2$, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решенија во множеството реални броеви.

25. Нека *x*, *y* се реални броеви за кои важи: $x^2+y^2=2$ и $(x^3+y^3)^2=8$. Пресметај ја вредноста на изразот x^4+y^4.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}8&=(x^2+y^2)^3=x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6\\&=x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)=x^6+y^6+6x^2y^2\end{aligned}$$

и

$$8=(x^3+y^3)^2=x^6+3x^3y^3+y^6,$$

па затоа

$$x^6+3x^3y^3+y^6=x^6+y^6+6x^2y^2, \text{ т.е. } x^2y^2(3-xy)=0.$$

Од ппоследното равенство добиваме:

1) ако $x=0$, тогаш $y^2=2$ и $x^4+y^4=4$,

2) ако $y=0$, тогаш $x^2=2$ и $x^4+y^4=4$,

3) ако $xy=3$, тогаш

$$0\le x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=2^2-2\cdot 3^2=-14<0,$$

што е противречност.

26. Нека a,b,c се позитивни рационални броеви. Докажи дека бројот

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca})^2}$$

е рационален.

Упатство. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca})^2=\frac{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c))^2}{(abc(ab+bc+ca))^2}.$$

Понатаму, бидејќи a,b,c се позитивни рационални броеви добиваме

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca})^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)}{abc(ab+bc+ca)},$$

а тоа е рационален број бидејќи и броителот и именителот се рационални броеви.

27. Нека $k>1$ е природен број и $n>2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ се такви што не се сите еднакви меѓу себе и ги задоволуваат идентитетите

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=...=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}.$$

Определи:

а) го производот $x_1x_2...x_n$ како функција од k и n

б) ја најмалата вредност за k за која постојат $n,x_1,x_2,...,x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

Решение. а) Ако $x_i=x_{i+1}$ за некој i (по претпоставка дека $x_{n+1}=x_1$), тогаш од дадениот идентитет следува дека сите x_i се еднакви, што претставува контрадикција. Според тоа, $x_1\neq x_2$ и

$$x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}.$$

Аналогно добиваме

$$x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}=k^2\frac{x_3-x_4}{(x_2x_3)(x_3x_4)}=...=k^n\frac{x_1-x_2}{(x_2x_3)(x_3x_4)...(x_1x_2)}.$$

Бидејќи $x_1\neq x_2$ добиваме

$$x_1x_2...x_n=\pm\sqrt{k^n}=\pm k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k}.$$

Ако една од овие две вредности, позитивна или негативна, е достигната, тогаш другата ќе биде исто така постигната со промена на знаците на сите x_i бидејќи n е непарен број.

б) Од претходниот резултат, бидејќи n е непарен број, заклучуваме дека k е полн квадрат, од каде $k\geq 4$. За $k=4$ нека $n=2019$ и $x_{3j}=4, x_{3j-1}=1, x_{3j-2}=-2$ за $j=1,2,...,673$. Според тоа, бараната најмала вредност е $k=4$.

28. Докажи дека за секој природен број $n>1$ бројот

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}$$

е ирационален.

Решение. Нека претпоставиме дека за некој природен број $n>1$ бројот

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}=a_1$$

е рационален. Можни се два случаја.

Прв случај. Бројот n не е точен квадрат. Тогаш од даденото равенство следува

$$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}} = a_1^2-1=a_2\,, \qquad (1)$$

па затоа како квадрат на рационален број намален за 1 бројот a_2 е рационален. Повторувајќи ја оваа постапка добиваме

$$\sqrt{n}=a_{n-1}^2-n+1=a_n$$

е рационален број. Значи, $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, каде p и q се заемно прости броеви. Според тоа, $n=\frac{p^2}{q^2}$, каде p и q се заемно прости броеви и како n е природен број добиваме $q=1$, што противречи на претпоставката дека n не е точен квадрат. Според тоа, во овој случај дадениот број е ирационален.

Втор случај. Бројот n е точен квадрат. Од (1) следува дека бројот a_2 е рационален. Повторувајќи ја оваа постапка добиваме дека бројот $\sqrt{n-1+\sqrt{n}}=a_{n-2}^2-n+2=a_{n-1}$ е рационален. Нека $n=k^2$, каде $k>1$ е природен број. Значи, $k^2-1+k=\frac{p^2}{q^2}$ и како k^2-1+k е природен број мора да е $q=1$, што значи $k^2-1+k=p^2$. Но, $k>1$, па затоа

$$k^2<k^2-1+k=p^2<k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

што повоторно е противречност, бидејќи меѓу k и $k+1$ не постои природен број. Конечно, од добиената противречност следува дека и во овој случај дадениот број е ирационален.

29. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}(1+4x^2)y=4z^2\\(1+4y^2)z=4x^2\\(1+4z^2)x=4y^2.\end{cases}$$

Решение. Ако некој x,y или z е еднаков на нула, тогаш $x=y=z=0$. Во спротивно мора да важи $x>0,y>0,z>0$. Ако ги помножиме дадените равенки, тогаш

$$xyz(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64z^2x^2y^2$$

и како $xyz\neq 0$ добиваме

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64xyz\,.$$

Понатаму, за позитивни реални броеви x, y и z важи

$$1+4x^2 \geq 4x, 1+4y^2 \geq 4y,\ \ 1+4z^2 \geq 4z\,,$$

добиваме

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) \geq 64xyz$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Конечно, единствени решенија на системот се $x=y=z=0$ и $x=y=z=\frac{1}{2}$.

30. Нека x и y се реални броеви такви што $x^{2017}+y^{2017}>x^{2016}+y^{2016}$. Докажи, дека

$$x^{2018}+y^{2018}>x^{2017}+y^{2017}\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека

$$x^{2017}+y^{2017} \geq x^{2018}+y^{2018}\,.$$

Ако ги собереме последното неравенство и неравенството

$$x^{2017}+y^{2017}>x^{2016}+y^{2016}$$

последователно добиваме

$$2x^{2017}+2y^{2017}>x^{2018}+y^{2018}+x^{2016}+y^{2016}$$

$$0>x^{2018}-2x^{2017}+x^{2016}+y^{2018}-2y^{2017}+y^{2016}$$

$$0>x^{2016}(x-1)^2+y^{2016}(y-1)^2$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува неравенството (1).

31. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=4$. Определи ја најмалата вредност на изразот $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}$.

Решение. Ако земеме предвид дека за секои ненегативни реални броеви a,b,c важи $\frac{a}{\sqrt{a+1}+1} \geq \frac{a}{\sqrt{a+b+c+1}+1}$ и до искористиме условот $x+y+z=4$, добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}-3 &= (\sqrt{2x+1}-1)+(\sqrt{2y+1}-1)+(\sqrt{2z+1}-1)\\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{2y}{\sqrt{2y+1}+1}+\frac{2z}{\sqrt{2z+1}+1}\\ &\geq \frac{2x+2y+2z}{\sqrt{2x+2y+2z+1}+1}=\frac{8}{\sqrt{9}+1}=2.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}\geq 5\,.$$

Но, во последното неравенство знак за равенство важи, на пример, за $x=4,\ y=z=0$, па заклучуваме дека бараната минимална вредност на изразот е 5.

32. Даден е природен број n. Нека

$$A=x_1+x_2+...+x_s\text{, каде } x_1x_2...x_s=n,\ x_i>1,\quad x_i\in\mathbb{N}\,.$$

Определи ја најголемата можна вредност на A.

Решение. Нека $x_1x_2...x_s=n$ и $x_i>1, 1\leq i\leq s$. За секои природни броеви $m,n>1$ важи $nm\geq n+m$. Навистина

$$\begin{aligned}&nm\geq n+m &&\Leftrightarrow\\ &nm-n-m\geq 0 &&\Leftrightarrow\\ &nm-n-m+1\geq 1 &&\Leftrightarrow\\ &(n-1)(m-1)\geq 1,\end{aligned}$$

при што равенство важи само кога $n=m=2$. Од докажаното неравенство и од $x_1x_2...x_s=n,\ x_i>1,\quad x_i\in\mathbb{N}$ следува

$$n=x_1x_2...x_s\geq x_1x_2...x_{s-1}+x_s\geq...\geq x_1x_2+x_3+...+x_s\geq x_1+x_2+...+x_s\,.$$

Според тоа, $A\leq n$, при што најголемата вредност може да биде n, на пример, кога производот се состои од еден множител еднаков на n.

33. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+y+z$, ако x,y,z се реални броеви такви што $x\geq 4, y\geq 5, z\geq 6$ и $x^2+y^2+z^2\geq 90$.

Решение. Нека $x=4+a, y=5+b, z=6+c$. Тогаш $a,b,c\geq 0$ и важи

$$\begin{aligned}&(4+a)^2+(5+b)^2+(6+c)^2\geq 90 &&\Leftrightarrow\\ &a^2+8a+b^2+10b+c^2+12c\geq 13.\end{aligned}$$

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c+6)^2&=a^2+12a+b^2+12b+c^2+12c+2ab+2bc+2ca+36\\ &\geq a^2+8a+b^2+10b+c^2+12c+36\\ &\geq 13+36.\end{aligned}$$

Според тоа, $(a+b+c+6)^2\geq 49$, од каде следува $a+b+c+6\geq 7$, т.е. $a+b+c\geq 1$. Последното неравенство е еквивалелнтно со неравенството $x+y+z\geq 16$ и како во последното неравенство знак за равенство важи за $x=4, y=5, z=7$, заклучуваме дека бараната најмала вредност на изразот $x+y+z$ е 16.

34. Докажи дека за позитивните релани броеви a,b,c важи

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c\,.$$

Решение. Бидејќи a,b,c се поозитивни релани броеви, даденото неравенство е еквивалелнтно со неравенството кое се добива кога множиме со $(a+b)(b+c)(c+a)$. Притоа, по средувањето добиваме дека почетното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$

т.е. со неравенството

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geq 0\,,$$

Кое очигедно важи за позитивните релани броеви a,b,c.

35. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b и c важи:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc\,. \qquad (1)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\leq b\leq c$. Ќе разгледаме два случаја.

Прв случај. Нека $a+b\leq c$. Тогаш $a+b-c\leq 0$. Од $c\geq a$ и $b>0$ следува $b+c>a$, па затоа $b+c-a>0$. Аналогно се докажува дека $c+a-b>0$. Затоа производот на броевите $a+b-c$, $b+c-a$ и $c+a-b$ е помал или еднаков на 0. Но, a,b и c се позитивни реални броеви, па затоа точно е неравенството (1).

Втор случај. Нека $c<a+b$. Аналогно како во првиот случј докажуваме дека броевите $a+b-c$, $b+c-a$ и $c+a-b$ се позитивни, па затоа

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\leq\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b\,.$$

Аналогно се докажува дека

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\leq c \text{ и } \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\leq a\,.$$

Конечно, ако ги помножиме последните три неравенства го добиваме неравенството (1).

36. Нека $x,y,z>-1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2\,.$$

Решение. Од неравенството $\frac{1+y^2}{2}\geq y$ следува $\frac{1+y^2}{2}+1+z^2\geq 1+y+z^2$.

Бидејќи $y>-1$ двете страни на последното неравенство се позитивни, па затоа важи

$$\frac{1}{1+y+z^2}\geq\frac{1}{\frac{1+y^2}{2}+1+z^2}.$$

Последното неравенство го множиме со $1+x^2$ и после средувањето го добиваме неравенството

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}\geq\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}.$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{1+y^2}{1+z+x^2}\geq\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}\text{ и }\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}+\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}+\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}.$$

Очигледно, бараното неравенство ќе го докажеме ако докажеме дека

$$\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}+\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}+\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}\geq 1.$$

Воведуваме замена $1+x^2=a, 1+y^2=b, 1+z^2=c$. Јасно, $a,b,c>1$ и сега треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1,$$

кое очигледно важи. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.

37. Докажи дека за секои реални броеви x,y,z важи

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq\max\{\frac{3(x-y)^2}{4},\frac{3(y-z)^2}{4},\frac{3(z-x)^2}{4}\}.$$

Решение. Ќе го докажеме неравенството

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq\frac{3(x-y)^2}{4}. \qquad (1)$$

Последното неравенство последователчно е квивалелнтно на неравенствата

$$4x^2+4y^2+4z^2-4xy-4yz-4zx\geq 3x^2-6xy+3y^2,$$
$$x^2+2xy+y^2+4z^2-4yz+4zx\geq 0,$$
$$(x+y)^2+(2z)^2-2\cdot 2z(x+y)\geq 0,$$
$$(x+y-2z)^2\geq 0.$$

Аналогно се докажуваат неравенствата

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge \frac{3(y-z)^2}{4} \qquad (2)$$

и

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge \frac{3(z-x)^2}{4}\,. \qquad (3)$$

Кпнечно, од неравенствата (1), (2) и (3) следува бараното неравенство.

38. Нека $k>1$ е природен број и $n>2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ се такви што не се сите еднакви меѓу себе и ги задоволуваат равенствата

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=...=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}\,.$$

Определи:

а) го производот $x_1x_2...x_n$ како функција од k и n,

б) ја најмалата вредност на k за која постојат $n, x_1, x_2, ..., x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

Решение. а) Ако $x_i = x_{i+1}$ за некој i (по претпоставка дека $x_{n+1}=x_1$), тогаш од дадените равенства следува дека сите x_i се еднакви, што е противречност. Според тоа, $x_1 \ne x_2$ и $x_1-x_2 = k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}$. Аналогно добиваме

$$x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}=k^2\frac{x_3-x_4}{(x_2x_3)(x_3x_4)}=...=k^n\frac{x_1-x_2}{(x_2x_3)(x_3x_4)...(x_1x_2)}\,.$$

Бидејќи $x_1 \ne x_2$ добиваме $x_1x_2...x_n = \pm\sqrt{k^n} = \pm k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k}$. Ако една од овие две вредности, позитивна или негативна, е достигната, тогаш другата ќе биде исто така достигната со промена на знаците на сите x_i бидејќи n е непарен број.

б) Од претходниот резултат, бидејќи n е непарен број, заклучуваме дека k е точен квадрат, од каде $k \ge 4$. За $k=4$ нека $n=2019$ и

$$x_{3j}=4, x_{3j-1}=1, x_{3j-2}=-2 \text{ за } j=1,2,...,673.$$

Според тоа, бараната најмала вредност е $k=4$.

Забелешка. Постојат повеќе начини на кои може да се конструира пример кога $k=4$ и $n=2019$. Бидејќи $3\,|\,2019$, идејата е да најдеме три броеви x_1, x_2, x_3, не сите еднакви меѓу себе кои ги задоволуваат дадените равенства и да ги повториме како вредности за останатите x_i. Според тоа, сакаме да најдеме x_1, x_2, x_3 такви што

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}.$$

Од претходната дискусија $x_1x_2x_3=\pm 8$. Нека претпоставиме, без губење на општоста, дека $x_1x_2x_3=-8$. Тогаш со решавање на горниот систем гледаме дека ако $x_1\neq 2$, тогаш $x_2=-\frac{4}{x_1-2}$ и $x_3=2-\frac{4}{x_1}$, што води до бесконечно многу решенија. На пример, $x_1=-2$ е едно од тие решенија.

39. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+...+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\geq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{3}.$$

Решение. Да означиме

$$A=\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+...+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\text{ и}$$

$$B=\frac{x_2^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_3^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+...+\frac{x_1^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}.$$

Важи

$$\begin{aligned}A-B&=\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3-x_3^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+...+\frac{x_n^3-x_1^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\\&=\frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{(x_2-x_3)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+...+\frac{(x_n-x_1)(x_n^2+x_nx_1+x_1^2)}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\\&=x_1-x_2+x_2-x_3+...+x_n-x_1=0\end{aligned}$$

т.е. $A+B$. Ќе докажеме дека за секои позитиви реални броеви a и b важи

$$3(a^3+b^3)\geq(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

Навистина

$$\begin{aligned}3(a^3+b^3)-(a+b)(a^2+ab+b^2)&=3(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)(a^2+ab+b^2)\\&=(a+b)(2a^2-4ab+2b^2)\\&=2(a+b)(a-b)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Според тоа, $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{a+b}{3}$. Со повеќекратна примена на последното неравенство добиваме

$$2A=A+B=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3+x_3^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+...+\frac{x_n^3+x_1^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}$$

$$\geq \frac{x_1+x_2}{3}+\frac{x_2+x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n+x_1}{3}=2\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{3}$$

па затоа $A\geq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{3}$, што и требаше да се докаже.

40. Нека

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{1996\cdot1997}{2}}}.$$

Докажи, дека $S>1001$.

Решение. Броителите на сите собирци се од видот

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot3}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{3-2}{2\cdot3}+\ldots+\frac{n+1-n}{n(n+1)})$$

$$=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2(1-\frac{1}{n+1}).$$

Затоа

$$S=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{1996\cdot1997}{2}}}=\frac{1}{2(1-\frac{1}{2})}+\frac{1}{2(1-\frac{1}{3})}+\ldots+\frac{1}{2(1-\frac{1}{1997})}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{2}{3}}+\ldots+\frac{1}{\frac{1996}{1997}})=\frac{1}{2}(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{1997}{1996})=\frac{1}{2}(\frac{1+1}{1}+\frac{2+1}{2}+\ldots+\frac{1996+1}{1996})$$

$$=\frac{1}{2}(1+1+1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\ldots+1+\frac{1}{1996})=\frac{1}{2}(1997+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996}).$$

Ќе докажеме дека $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996}>5$. Имаме

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\frac{1}{5}>\frac{1}{8},\frac{1}{6}>\frac{1}{8},\frac{1}{7}>\frac{1}{8},\frac{1}{9}>\frac{1}{16},\ldots,\frac{1}{15}>\frac{1}{16},\ldots,\frac{1}{1025}>\frac{1}{2048},\ldots,\frac{1}{1996}>\frac{1}{2048},$$

па затоа

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996}>\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+32\cdot\frac{1}{64}+64\cdot\frac{1}{128}+$$

$$+128\cdot\frac{1}{256}+256\cdot\frac{1}{512}+512\cdot\frac{1}{1024}+972\cdot\frac{1}{2048}$$

$$=10\cdot\frac{1}{2}+\frac{972}{2048}>5.$$

Конечно, од претходните неравенства следува

$$S=\frac{1}{2}(1997+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1996})>\frac{1}{2}(1997+5)=\frac{2002}{2}=1001.$$

41. Квадрат со димензии 3×3 е поделен на 9 единечни квадратчиња, во кои се распоредени 9 различни природни броеви, по еден број во секое квадратче. Производот на трите броја запишани во секој ред и во секоја колона е еднаков. Определи ја најмалата можна вредност на овој производ.

Решение. Нека m е најмалиот број во табелата, а M е производот на на броевите запишани во еден ред,

a	b	
c	d	
x	y	m

односно една колона. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека m се наоѓа во долниот десен агол на таблицата. Последното е така, бидејќи разместувањет на редовите и колоните не влијае на производот на броевите запишани во даден ред или дадена колона. Пополнуваме 6 од останатите единечни квадратчиња како што е прикажано на таблицата десно.

Од условот на задачата следува $acx = M$, $bdy = M$ и $xym = M$. Ако ги помножиме левите и десните страни на првите две равенства, добиваме $abcdxy = M^2$, а од третото равенство наоѓаме $xy = \frac{M}{m}$. Оттука $abcd \cdot \frac{M}{m} = M^2$ и затоа $\frac{abcd}{m} = M$. Од друга страна имаме $abcd \geq (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$, па затоа $M \geq \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{m}$.

Нека $f(m) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{m}$. Имаме

$$\frac{f(m+1)-f(m)}{f(m)} = \frac{f(m+1)}{f(m)} - 1 = \frac{\frac{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{m+1}}{\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{m}} - 1 = \frac{m(m+5)}{(m+1)^2} - 1 = \frac{3m-1}{(m+1)^2} > 0 .$$

2	3	20
4	5	6
15	8	1

Според тоа, $f(m+1) - f(m) > 0$, т.е. $f(m+1) > f(m)$, што значи дека најмалата вредност на M се достигнува за најмалата вредност на m, т.е. за $m = 1$. Таа е еднаква на

$$(1+1)(1+2)(1+3)(1+4) = 2.3.4.5 = 120 .$$

Една можна реализација е дадена во таблицата десно.

42. За броевите $a_1, a_2, ..., a_{20}$ важи

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{20} \geq 0 ,$$
$$a_1 + a_2 = 20 \text{ и}$$
$$a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 20 .$$

Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 .$$

Решение. Од условот на задачата следува

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 40 \text{ и } a_1 = 20 - a_2 .$$

Според тоа,

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2 = (20 - a_2)^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2$$
$$= 400 - 40a_2 + a_2^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2$$

$$\begin{aligned}&\leq 400-(a_1+a_2+...+a_{20})a_2+a_2^2+a_2^2+...+a_{20}^2\\&=400-a_1a_2-a_3a_2-...-a_{20}a_2+a_2^2+...+a_{20}^2\\&=400+a_2^2-a_1a_2+a_3^2-a_3a_2+...+a_{20}^2-a_{20}a_2\\&=400+a_2(a_2-a_1)+a_3(a_3-a_2)+...+a_{20}(a_{20}-a_2).\end{aligned}$$

Од условот на задачата следува

$$a_2-a_1\leq 0, a_3-a_2\leq 0, ..., a_{20}-a_2\leq 0,$$

па затоа

$$a_1^2+a_2^2+...+a_{20}^2\leq 400$$

и знак за равенство се достигнува ако и само ако

$$a_3+a_4+...+a_{20}=20$$

и

$$a_2(a_2-a_1)=0, a_3(a_3-a_2)=0, ..., a_{20}(a_{20}-a_2)=0.$$

Разгледуваме два случаја, при кои се достигнува знак за равенство:

- $a_2=0$ и притоа важи $a_1=20, a_3=a_4=...=a_{20}=0$,
- $a_2=a_1=10$ и притоа важи $a_3=a_4=10$ и $a_5=a_6=...=a_{20}=0$ (за еквивалентни ги сметаме сите случаи на пермутации на индексите 3, 4, 5, 6, ..., 20).

43. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}$ и $2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

Решение. Од условот $abc=1$ следува дека или два од броевите a,b и c се негативни или броевите a,b и c се позитивни.

Нека два од броевите a,b и c се негативни, а третиот, на пример c, е позитивен. Тогаш $2b-\frac{1}{c}<0<1$, па затоа најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}$ и $2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

Нека броевите a,b и c се позитивни и нека претпоставиме дека

$$2a-\frac{1}{b}>1, 2b-\frac{1}{c}>1 \text{ и } 2c-\frac{1}{a}>1.$$

Последните неравенства ги множиме со bc, ca и ab, соодветно и ако искористиме дека $abc=1$ добиваме

$$2>bc+c,\ 2>ca+a \text{ и } 2>ab+b.$$

Ако ги собереме последните неравенства добиваме

$$6>ab+bc+ca+a+b+c\geq 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}+3\sqrt[3]{abc}=3+3=6,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека најмногу два од броевите $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}$ и $2c-\frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

44. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a,b,c \geq -3$ и $a+b+c=0$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3 \geq -\tfrac{3^4}{4}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Јасно, за $x \geq -3$ важи $(x+3)(x-\frac{3}{2})^2 \geq 0$, од каде следува $x^3-\frac{27}{4}x+\frac{27}{4} \geq 0$. Од последното неравенство, применето за броевите a,b,c и условот на задачата следува

$$a^3+b^3+c^3-\tfrac{27}{4}(a+b+c)+3\cdot\tfrac{27}{4} \geq 0$$

од каде го добиваме бараното неравенсво. Во претходните три неравенства знак за равенство важи ако и само ако $a,b,c \in \{-3,\frac{3}{2}\}$. За да биде исполнет условот $a+b+c=0$, јасно е дека два од броевите треба да бидат еднакви на $\frac{3}{2}$, а еден -3 и тогаш важи

$$a^3+b^3+c^3=-3^3+2(\tfrac{3}{2})^3=\tfrac{-4\cdot 3^3+3^3}{4}=-\tfrac{3^4}{4}.$$

45. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $a^2+b^2+c^2=1$. Докажи дека

$$(\tfrac{1+a^2}{4bc})^2+(\tfrac{1+b^2}{4ca})^2+(\tfrac{1+c^2}{4ab})^2 \geq 3.$$

Решение. Јасно, $3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$. Ако даденото неравенство гопомножиме со $a^2b^2c^2$, добиваме дека е доволно да докажеме

$$a^2(\frac{a^2+\frac{b^2+c^2}{2}}{2})^2+b^2(\frac{b^2+\frac{a^2+c^2}{2}}{2})^2+c^2(\frac{c^2+\frac{a^2+b^2}{2}}{2})^2 \geq abc(a^3+b^3+c^3)$$

Но, $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab, \frac{a^2+c^2}{2} \geq ac, \frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$, па затоа

$$a^2(\frac{a^2+\frac{b^2+c^2}{2}}{2})^2+b^2(\frac{b^2+\frac{a^2+c^2}{2}}{2})^2+c^2(\frac{c^2+\frac{a^2+b^2}{2}}{2})^2 \geq$$

$$\geq a^2(\tfrac{a^2+bc}{2})^2+b^2(\tfrac{b^2+ca}{2})^2+c^2(\tfrac{c^2+ab}{2})^2$$

$$=(\tfrac{a^3+abc}{2})^2+(\tfrac{b^3+abc}{2})^2+(\tfrac{c^3+abc}{2})^2$$
$$\geq a^3\cdot abc+b^3\cdot abc+c^3\cdot abc=abc(a^3+b^3+c^3).$$

46. Нека a,b,c,d,e се реални броеви такви што $a+b+c+d+e=0$ и нека
$$A=ab+bc+cd+de+ea \text{ и } B=ac+ce+eb+bd+da\,.$$
Докажи дека $2005A+B\leq 0$ или $2005B+A\leq 0$.

Решение. Од условот $a+b+c+d+e=0$ следува

$$\begin{aligned}2A+2B&=2(ab+bc+cd+de+ea)+2(ac+ce+eb+bd+da)\\&=(ab+ac+ad+ae)+(ba+bc+bd+be)+(ca+cb+cd+ce)+\\&\quad+(da+db+dc+de)+)ea+eb+ec+ed)\\&=a(b+c+d+e)+b(a+c+d+e)+c(a+b+d+e)+\\&\quad+d(a+b+c+e)+e(a+b+c+d)\\&=a(-a)+b(-b)+c(-c)+d(-d)+e(-e)\\&=-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\leq 0.\end{aligned}$$

Затоа

$$2006(A+B)=1003\cdot 2(A+B)\leq 0$$
$$(2005A+B)+(2005B+A)\leq 0.$$

Значи, збирот на броевите $2005A+B$ и $2005B+A$ е негативен, па затоа барем еден од двата собирци мора да е негативен, што и требаше да се докаже.

47. Нека a,b,c,d и x,y,z,t се реални броеви такви што
$$0\leq a,b,c,d\leq 1,\; x,y,z,t\geq 1 \text{ и } a+b+c+d+x+y+z+t=8\,.$$
Докажи дека
$$a^2+b^2+c^2+d^2+x^2+y^2+z^2+t^2\leq 28\,.$$
Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $0\leq a,b,c,d\leq 1$ следува $a^2\leq a, b^2\leq b, c^2\leq c, d^2\leq d$, па затоа

$$a^2+b^2+c^2+d^2\leq a+b+c+d\,. \qquad (1)$$

Освен тоа, од $y+z+t\geq 3$ следува $x\leq 5$, па затоа $(x-1)(x-5)\leq 0$, односно $x^2\leq 6x-5$. На потполно аналоген начин се докажува дека $y^2\leq 6y-5,\; z^2\leq 6z-5$ и $t^2\leq 6t-5$. Според тоа,

$$x^2+y^2+z^2+t^2\leq 6(x+y+z+t)-20\,. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2+x^2+y^2+z^2+t^2 &\le a+b+c+d+6(x+y+z+t)-20 \\ &\le 6(a+b+c+d+x+y+z+t)-20 \\ &= 6\cdot 8-20=28. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$(a,b,c,d)=(0,0,0,0) \text{ и } (x,y,z,t)=(1,1,1,5)$$

и за пермутации на x,y,z,t.

48. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}<2.$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош на математичка индукција. Вовдеуваме ознака

$$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}\text{ , } n\in\mathbb{N}.$$

Треба да докажаме дека $a_n<2,$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

За $n=1,2$ и 3 имаме

$$\begin{aligned} &a_1=1<2, \\ &a_2=\sqrt{1+\sqrt{2}}<\sqrt{1+3}=2, \\ &a_3=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}<\sqrt{1+\sqrt{2+7}}=2, \end{aligned}$$

т.е. тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека $a_n<2,$ за некој $n\ge 3$. Сега ако искористиме дека за секој $k\ge 3$ важи $1<(2^{2^{k-3}}-1)k$, т.е. важи $\frac{k+1}{2^{2^{k-2}}}<k$ добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &=1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}}}} \\ &=1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2^2}+\sqrt{\frac{4}{2^4}+\sqrt{...+\sqrt{\frac{n-1}{2^{2^{n-5}}}+\sqrt{\frac{n}{2^{2^{n-4}}}+\sqrt{\frac{n+1}{2^{2^{n-3}}}}}}}}}} \\ &<1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}} \\ &=1+\sqrt{2}\cdot a_n<1+2\sqrt{2}<4, \end{aligned}$$

што значи дека $a_{n+1}<2$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува $a_n < 2,$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

49. Определи го најголемиот природен број k таков што за секои природни броеви m, n за кои важи $m^3 + n^3 > (m+n)^2$ важи

$$m^3 + n^3 \geq (m+n)^2 + k\ .$$

Решение. Задача е еквивалентна на задачата да се определи најмалата вредност на изразот

$$A = (m+n)(m^2 + n^2 - mn - m - n)$$

при услов $(m+n)(m^2 + n^2 - mn - m - n) > 0$. Ако $m = n$, тогаш $m > 2$ и

$$A = 2m(m^2 - 2m) \geq 6 \cdot (3^2 - 6) = 18\,.$$

Понатаму, изразот е симетричен во однос на m и n, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $m > n$. АКо $n = 1$, тогаш $m(m+1)(m-2) > 0$, па затоа $m > 2$ и важи

$A = m(m+1)(m-2) \geq 3 \cdot (3+1)(3-1) = 12$.

Ако $n \geq 2$, тогаш бидејќи $m \geq n+1$, добиваме

$A = (m+n)(m(m-n-1) + n^2 - n) \geq (2n+1)(n^2 - n) \geq 5 \cdot (2^2 - 2) = 10$.

Според тоа, $A \geq 10$ и знак за равенство важи ако и само ако $m = n+1$ и $n = 2$, т.е. ако и само ако $m = 3$ и $n = 2$. Конечно, бараната најголема вредност е $k = 10$.

50. Определи ја најмалата вредност на изразот $x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z}$, каде x, y и z се позитивни реални броеви.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{32y} + \frac{2}{z} &= x + \frac{y^2}{9x} + \frac{3z^2}{64y} + \frac{3z^2}{64y} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \\ &\geq 8 \cdot \sqrt[8]{x \cdot \frac{y^2}{9x} \cdot \frac{3z^2}{64y} \cdot \frac{3z^2}{64y} \cdot \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{2z}} \\ &\geq 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{2^{16}}} = 8 \cdot \frac{1}{2^2} = 2. \end{aligned}$$

Најмалата вредност на дадениот израз се достигнува ако и само ако $x = \frac{y^2}{9x} = \frac{3z^2}{64y} = \frac{1}{2z}$, т.е. ако и само ако $x = \frac{1}{4}, y = \frac{3}{4}, z = 2$.

51. Докажи, дека за позитивните реални броеви a,b,c,d,e важи неравенството

$$\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{d}{c}+\tfrac{e}{d}+\tfrac{a}{e}\leq(\tfrac{a}{b})^4+(\tfrac{b}{c})^4+(\tfrac{c}{d})^4+(\tfrac{d}{e})^4+(\tfrac{e}{a})^4.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4}{4}\geq\sqrt[4]{(\tfrac{a}{b})^4\cdot(\tfrac{b}{c})^4\cdot(\tfrac{c}{d})^4\cdot(\tfrac{d}{e})^4}=\tfrac{a}{e}$$
$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\geq\sqrt[4]{(\tfrac{a}{b})^4\cdot(\tfrac{b}{c})^4\cdot(\tfrac{c}{d})^4\cdot(\tfrac{e}{a})^4}=\tfrac{e}{d}$$
$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\geq\sqrt[4]{(\tfrac{a}{b})^4\cdot(\tfrac{b}{c})^4\cdot(\tfrac{d}{e})^4\cdot(\tfrac{e}{a})^4}=\tfrac{d}{c}$$
$$\frac{(\frac{a}{b})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\geq\sqrt[4]{(\tfrac{a}{b})^4\cdot(\tfrac{c}{d})^4\cdot(\tfrac{d}{e})^4\cdot(\tfrac{e}{a})^4}=\tfrac{c}{b}$$
$$\frac{(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4}{4}\geq\sqrt[4]{(\tfrac{b}{c})^4\cdot(\tfrac{c}{d})^4\cdot(\tfrac{d}{e})^4\cdot(\tfrac{e}{a})^4}=\tfrac{b}{a}.$$

Ако ги собереме овие неравенства го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=d=e$.

52. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq1.$$

Решение. Воведуваме замени

$$a=x^3, b=y^3, c=z^3.$$

Јасно $xyz=\sqrt[3]{abc}=1$. Од неравеството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}a+b+1&=x^3+y^3+xyz=(x+y)(x^2-xy+y^3)+xyz\\&\geq(x+y)(2xy-xy)+xyz=xy(x+y)+xyz\\&=xy(x+y+z)=\tfrac{x+y+z}{z},\end{aligned}$$

па затоа $\frac{1}{a+b+1}\leq\frac{z}{x+y+z}$. Аналогно добиваме

$$\frac{1}{b+c+1}\leq\frac{x}{x+y+z} \text{ и } \frac{1}{c+a+1}\leq\frac{y}{x+y+z}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}=1.$$

Јасно, равенство важи ако и само ако $x=y=z$, т.е. $a=b=c$.

53. Нека a, b, c се позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=3$. Определи ја најмалата (минималната) вредност што може да ја има изразот

$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}A&=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}=2(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})-(a^2+b^2+c^2)\\&=\frac{2(ab+bc+ca)}{abc}-(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)\\&=2(ab+bc+ca)(\tfrac{1}{abc}+1)-9.\end{aligned}$$

Понатаму, ако во добро познатото равенство

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$$

ставиме $x=ab, y=bc, z=ca$ и искристиме дека $a+b+c=3$, добиваме:

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=9abc,$$

т.е.

$$ab+bc+ca\geq 3\sqrt{abc}. \qquad (1)$$

Од неравенството еѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{abc}+1\geq 2\frac{1}{\sqrt{abc}}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

$$A=2(ab+bc+ca)(\frac{1}{abc}+1)-9\geq 2\cdot 3\sqrt{abc}\cdot 2\frac{1}{\sqrt{abc}}-9=3$$

т.е. најмалата можна вредност на A е 3 која се достигнува за $a=b=c=1$.

54. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b и c важат неравенствата

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\leq 1\leq\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $a^2+2bc\leq a^2+b^2+c^2$, па затоа

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\leq\frac{a^2}{a^2+2bc}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\leq\frac{b^2}{b^2+2ca} \text{ и } \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\leq\frac{c^2}{c^2+2ab}.$$

Ако ги соберме последните три неравенства добиваме

$$1=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab},$$

со што е докажано десното неравенство во (1). За да го докажеме левото неравенство ќе ги воведеме ознаките $\frac{a^2}{bc}=x, \frac{b^2}{ca}=y, \frac{c^2}{ab}=z$.

Јасно, $xyz=\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ca}\cdot\frac{c^2}{ab}=1$. Понатаму, важи

$$\frac{bc}{a^2+2bc}=\frac{1}{\frac{a^2}{bc}+2}=\frac{1}{x+2},\ \frac{ca}{b^2+2ca}=\frac{1}{y+2}\text{ и }\frac{ab}{c^2+2ab}=\frac{1}{z+2}.$$

Според тоа, треба да докажеме дека за пзотивни реални броеви x,y и z такви што $xyz=1$ важи

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le 1. \tag{2}$$

Бидејќи $x+2.\, y+2, z+2$ се пзотивни броеви неравенството (2) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)+(x+2)(y+2)\le(x+2)(y+2)(z+2)$$

$$4+2y+2z+yz+4+2z+2x+zx+4+2x+2y+xy\le$$

$$\le 8+4x+4y+4z+2(xy+yz+zx)+xyz$$

$$3\le xy+yz+zx.$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $xyz=1$ следува

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx}=3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3,$$

што значи дека е точнои последното неравенство во горната низа еквивалентни неравенства, со што е докажамо неравенството (2), т.е. левото неравенство во (1).

Втор начин. Како и во првиот начин докажуваме дека

$$1\le\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}.$$

Понатаму, важи

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2za}+\frac{c^2}{c^2+2ab}+2(\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab})=$$

$$=\frac{a^2+2bc}{a^2+2bc}+\frac{b^2+2ca}{b^2+2ca}+\frac{c^2+2ab}{c^2+2ab}=1+1+1=3.$$

Сега, бидејќи првиот собирок во последното равенство е поголем или еднаков на 1, мора вториот собирок да е помал или еднаков на 2. Според тоа,

$$2(\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab})\le 2,$$

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\le 1.$$

55. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab}\le 0\,.$$

Решение. Броевите $2a^2+bc, 2b^2+ca, 2c^2+ab$ се позитивни, па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned}(a^2-bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)+(b^2-ca)(2a^2+bc)(2c^2+ab)+\\ +(c^2-ab)(2a^2+bc)(2b^2+ca)\le 0\end{aligned}.$$

После множењето и средувањето на изразот на десната страна го добиваме еквивалентното неравенство

$$9a^2b^2c^2-3abc^4-3ab^4c-3a^4bc\le 0\,.$$

Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на броевите abc^4, ab^4c и a^4bc. Јасно, знак за равенсво важи ако и само ако $a=b=c$.

56. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}\ge 3.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина и условот на задачата следува

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}&\ge\frac{2xy+z}{x^2+2}+\frac{2yz+x}{y^2+2}+\frac{2zx+y}{z^2+2}\\ &=\frac{2xyz+z^2}{z(x^2+2)}+\frac{2xyz+x^2}{x(y^2+2)}+\frac{2xyz+y^2}{y(z^2+2)}\\ &=\frac{2+z^2}{z(x^2+2)}+\frac{2+x^2}{x(y^2+2)}+\frac{2+y^2}{y(z^2+2)}\\ &\ge 3\sqrt[3]{\frac{2+z^2}{z(x^2+2)}\cdot\frac{2+x^2}{x(y^2+2)}\cdot\frac{2+y^2}{y(z^2+2)}}\\ &=3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=3.\end{aligned}$$

57. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{(x+y)^3}{z}+\frac{(y+z)^3}{x}+\frac{(z+x)^3}{y}+9xyz \geq 9(xy+yz+zx).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)^3}{z}+\frac{(y+z)^3}{x}+\frac{(z+x)^3}{y}+9xyz &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)^3}{z}\cdot\frac{(y+z)^3}{x}\cdot\frac{(z+x)^3}{y}}+9xyz\\
&=3\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\sqrt[3]{xyz}}+9xyz\\
&\geq 3\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{\frac{x+y+z}{3}}+9xyz\\
&=9(x+y)(y+z)(z+x)+9xyz\\
&=9(x+y+z)(xy+yz+zx)\\
&=9(xy+yz+zx).
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

58. Нека a,b,c се реални броевви такви што $0<a\leq b\leq c$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc\ .$$

Кога важи занк за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}
(a+3b)(b+4c)(c+2a) &= (a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+a+a)\\
&\geq 4(ab^3)^{\frac{1}{4}}\cdot 5(bc^4)^{\frac{1}{5}}\cdot 3(ca^2)^{\frac{1}{3}}=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}}.
\end{aligned}$$

Бидејќи $0<a\leq b\leq c$, имаме

$$\begin{aligned}
60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{17}{15}} &= 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}c^{\frac{2}{15}}c\geq 60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{19}{20}}b^{\frac{2}{15}}c=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{13}{12}}c\\
&=60a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{1}{12}}bc\geq 60a^{\frac{11}{12}}a^{\frac{1}{12}}bc=60abc.
\end{aligned}$$

Сега бараното неравенство следува од претходните разгледувања. Лесно се гледа дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

59. Нека $x,y,z\in(0,1)$. Докажи дека

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leq\frac{1}{3}\,.$$

Решение. Од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leq\frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3}$$

$$=\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}=\frac{x+y+z}{(1+1+x^3)+(1+1+y^3)+(1+1+z^3)}$$

$$\leq\frac{x+y+z}{3\sqrt[3]{x^3}+3\sqrt[3]{y^3}+3\sqrt[3]{z^3}}=\frac{1}{3}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.

60. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $ab+bc+ca=3$. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+5}}+\frac{b}{\sqrt{b^3+5}}+\frac{c}{\sqrt{c^3+5}}\leq\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Решение. Од неравенсвото меѓу аритметичката и геометриската средина следува $a^3+a^3+1\geq 3a^2$, т.е. $2(a^3+5)\geq 3(a^2+3)$. Сега, ако искористиме дека $ab+bc+ca=3$, добиваме

$$2(a^3+5)\geq 3(a^2+ab+bc+ca)=3(c+a)(a+b).$$

Ако повоторно го искористиме неравенствот маѓу аритметичката и геометриската средина од последното равенство следува

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+5}}\leq\sqrt{\frac{2a^2}{3(c+a)(a+b)}}\leq\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{\frac{a}{c+a}+\frac{a}{a+b}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{a}{c+a}+\frac{a}{a+b}\right).$$

Ако ги собереме последнот неравенство и аналогните неравенства за b и c добиваме

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+5}}+\frac{b}{\sqrt{b^3+5}}+\frac{c}{\sqrt{c^3+5}}\leq\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{a}{c+a}+\frac{a}{a+b}\right)+\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{c+b}\right)$$

$$=3\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

61. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што

$$a^3+b^3+c^3+d^3=4.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}+\frac{1}{d^4+3}\geq 1.$$

Решение. Прво го трансформираме трансформираме изразот од левата страна на неравенството, а потоа со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}+\frac{1}{d^4+3}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{a^4}{a^4+3}+\frac{b^4}{b^4+3}+\frac{c^4}{c^4+3}+\frac{d^4}{d^4+3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(\frac{a^4}{a^4+1+1+1}+\frac{b^4}{b^4+1+1+1}+\frac{c^4}{c^4+1+1+1}+\frac{d^4}{d^4+1+1+1})$$
$$\geq\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(\frac{a^4}{4a}+\frac{b^4}{4b}+\frac{c^4}{4c}+\frac{d^4}{4d})$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{12}(a^3+b^3+c^3+d^3)$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{4}{12}=1.$$

62. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот на задачата, неравеството меѓу аритметичката и геометриската средина и познатото неравенство

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2,$$

последователно следува

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{c}{ac+bc}+\frac{a}{ab+ac}+\frac{b}{bc+ab}=\frac{c\cdot abc}{ac+bc}+\frac{a\cdot abc}{ab+ac}+\frac{b\cdot abc}{bc+ab}$$
$$=\frac{ac\cdot bc}{ac+bc}+\frac{ab\cdot ac}{ab+ac}+\frac{bc\cdot ab}{bc+ab}\leq\frac{ac+bc}{4}+\frac{ab+ac}{4}+\frac{ab+bc}{4}$$
$$=\frac{ab+bc+ca}{2}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

63. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=1$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот

$$A(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}.$$

Решение. Имаме

$$A(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}\geq x\sqrt{1}+y\sqrt{1}=x+y=1$$

и како $A(1,0)=1\cdot\sqrt{1+0}+0\cdot\sqrt{1+1}=1$, заклучуваме дека најмалата вредност на изразот $A(x,y)$ е 1.

Имаме $A(x,y)\geq 1>0$. Од условот на задача и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$A^2(x,y)=(x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x})^2$$
$$=x^2(1+y)+y^2(1+x)+2xy\sqrt{(1+x)(1+y)}$$
$$=x^2+y^2+x^2y+y^2x+2xy\sqrt{1+x+y+xy}$$

$$=(x+y)^2-2xy+xy(x+y)+2xy\sqrt{1+(x+y)+xy}$$
$$=1-xy+2xy\sqrt{2+xy}=1+xy(2\sqrt{2+xy}-1)$$
$$\leq 1+(\tfrac{x+y}{2})^2(2\sqrt{2+(\tfrac{x+y}{2})^2}-1)=1+\tfrac{1}{4}(2\sqrt{2+\tfrac{1}{4}}-1)=\tfrac{3}{2}$$

па затоа $A(x,y)\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$. Но, $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$, што значи дека најголемата вредност на изразот $A(x,y)$ е $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

64. Збирот на позитивните броеви a,b,c,d е еднаков на 3. Докажи дека
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\leq\frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството
$$a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2\leq 1. \qquad (1)$$
Бидејќи даденото неравенство е симетрично, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\geq b\geq c\geq d$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на броевите a,b и $c+d$ и условот на задачата следува
$$ab(c+d)\leq(\tfrac{a+b+c+d}{3})^3=1,$$
па затоа $a^2b^2(c+d)^2\leq 1$. Според тоа, за да го докажеме неравенството (1) доволно е да докажеме дека
$$a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2\leq a^2b^2(c+d)^2.$$
Последното неравенство е еквивалентно на неравенството
$$a^2c^2d^2+b^2c^2d^2\leq 2a^2b^2cd,$$
кое се добива ако ги собереме очигледните неравенства
$$a^2c^2d^2\leq a^2b^2cd \text{ и } a^2c^2d^2\leq a^2b^2cd.$$

65. Збирот на позитивните броеви a,b,c и d е еднаков на 3. Докажи дека
$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\leq\frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

Решение. двете страни на неравенството ги множиме со $a^3b^3c^3d^3>0$, и добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството
$$b^3c^3d^3+a^3c^3d^3+a^3b^3d^3+a^3b^3c^3\leq 1.$$
Последното неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\geq b\geq c\geq d$. Сега, од нера-

венството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$ab(c+d)\le(\tfrac{a+b+(c+d)}{3})^3=1,$$

па затоа

$$a^3b^3(c+d)^3\le 1.$$

Според тоа, доволно е да го докажеме неравенството

$$b^3c^3d^3+a^3c^3d^3+a^3b^3d^3+a^3b^3c^3\le a^3b^3(c+d)^3$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$a^3c^3d^3+a^3b^3d^3\le 3a^3b^3c^2d+3a^3b^3cd^2.$$

Последното неравенство се добива ако ги собереме очигледните нертавенства:

$$a^3c^3d^3\le a^3b^3c^2d,\ a^3b^3d^3\le a^3b^3cd^2 \text{ и } 0\le 2a^3b^3c^2d+2a^3b^3cd^2$$

66. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. Докажи, дека

$$\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\ge 3(a+b+c).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}&a^2b^2+b^2c^2\ge 2ab^2c\\&b^2c^2+c^2a^2\ge 2abc^2\\&c^2a^2+a^2b^2\ge 2a^2bc.\end{aligned}\qquad(1)$$

Ако ги собереме последните равенства, добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c).$$

Во последното равенство на двете страни додаваме

$$2abc(a+b+c)$$

и добиваме

$$\begin{aligned}&a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\ge 3abc(a+b+c)\\&(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c).\end{aligned}$$

Според тоа, ако го искористиме условот

$$ab+bc+ca=1,$$

од последното равенство добиваме

$$\begin{aligned}&ab+bc+ca=(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\\&\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}\ge 3(a+b+c).\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во равенствата (1) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $ab=bc=ca$, што значи ако и само ако $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

67. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)}+\frac{1}{bc(c+1)(a+1)}+\frac{1}{ca(a+1)(b+1)}\geq\frac{3}{(1+abc)^2}.$$

Решение. Даденото неравенство е екввалентно со неравенството

$$\frac{c(a+1)+a(b+1)+b(c+1)}{abc(a+1)(b+1)(c+1)}\geq\frac{3}{(1+abc)^2},$$

односно со неравенството

$$(1+abc)^2(ab+bc+ca+a+b+c)\geq 3abc(ab+bc+ca+a+b+c+abc+1).$$

Нека $m=a+b+c, n=ab+bc+ca$ и $x^3=abc$. Тогаш последното равенство го добива видот

$$(m+n)(1+x^3)\geq 3x^3(x^3+m+n+1)$$

или

$$(m+n)(x^6-x^3+1)\geq 3x^3(x^3+1).$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $m\geq 3x$ и $n\geq 3x^2$, па затоа $m+n\geq 3x(x+1)$. Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$\begin{aligned}&x(x+1)(x^6-x^3+1)\geq x^3(x+1)(x^2-x+1) &&\Leftrightarrow\\ &x^6+1\geq x^4+x^2 &&\Leftrightarrow\\ &(x^2-1)^2(x^2+1)\geq 0,\end{aligned}$$

кое е очигледно точно.

68. Нека x,y,z се позитивни реални броеви за кои важи

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ и } x^4+y^4+z^4=\tfrac{1}{3}.$$

Докажи дека

$$(x^2+1)x\sqrt{2(1-x^2)}+(y^2+1)y\sqrt{2(1-y^2)}+(z^2+1)z\sqrt{2(1-z^2)}\geq\tfrac{8}{3}.$$

Решение. Од $x^2+y^2+z^2=1$ следува $x^2+1=2x^2+y^2+z^2$ и $1-x^2=y^2+z^2$. Затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(2x^2+y^2+z^2)\sqrt{2x^2(y^2+z^2)}+(2y^2+z^2+x^2)\sqrt{2y^2(z^2+x^2)}+$$
$$+(2z^2+x^2+y^2)\sqrt{2z^2(x^2+y^2)}\geq\tfrac{8}{3}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(2x^2+y^2+z^2)\sqrt{2x^2(y^2+z^2)}\geq 2(2x^2(y^2+z^2))$$
$$(2y^2+z^2+x^2)\sqrt{2y^2(z^2+x^2)}\geq 2(2y^2(z^2+x^2))$$
$$(2z^2+x^2+y^2)\sqrt{2z^2(x^2+y^2)}\geq 2(2z^2(x^2+y^2))\,.$$

Со собирање на последните неравенства добиваме

$$(2x^2+y^2+z^2)\sqrt{2x^2(y^2+z^2)}+(2y^2+z^2+x^2)\sqrt{2y^2(z^2+x^2)}+$$
$$+(2z^2+x^2+y^2)\sqrt{2z^2(x^2+y^2)}\geq 8(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Од

$$(x^2+y^2+z^2)^2=x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

и условите на задачата, следува $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\tfrac{1}{3}$.

Конечно,

$$(x^2+1)x\sqrt{2(1-x^2)}+(y^2+1)y\sqrt{2(1-y^2)}+(z^2+1)z\sqrt{2(1-z^2)}\geq\frac{8}{3}\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$2x^2=y^2+z^2\,,\ 2y^2=z^2+x^2\,,\ 2z^2=x^2+y^2\,,$$

односно ако и само ако $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

69. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\tfrac{3\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството межу аритметичката и квадратната средина и неарвенството $|x|\geq x$, $x\in\mathbb{R}$ следува

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}=\sqrt{|a|^2+|1-b|^2}\geq\tfrac{\sqrt{2}}{2}(|a|+|1-b|)\geq\tfrac{\sqrt{2}}{2}(a+1-b)\,.$$

Аналогно се докажуваат неравенствата

$$\sqrt{b^2+(1-c)^2}\geq\tfrac{\sqrt{2}}{2}(b+1-c),$$
$$\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\tfrac{\sqrt{2}}{2}(c+1-a).$$

Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (1).

70. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\sqrt{2a(a+b)}\leq\frac{3a+b}{2}$, па затоа $a(a+b)\leq\frac{(3a+b)^2}{8}$. Аналогно се добиваат неравенствата

$$b(b+c)\leq\frac{(3b+c)^2}{8} \text{ и } c(c+a)\leq\frac{(3c+a)^2}{8}.$$

Оттука следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}. \qquad (1)$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$\sqrt{\frac{\frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}}{3}}\geq\frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3}$$

од кое после квадрирањето и множењето со 3 и од неравенството (1) добиваме

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{(\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a})^2}{3}. \qquad (2)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3}\geq\frac{3}{\frac{3a+b}{4}+\frac{3b+c}{4}+\frac{3c+a}{4}}=\frac{3}{a+b+c}.$$

Конечно, од неравенството (2) и последното неравенство следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{(\frac{9}{a+b+c})^2}{3}=\frac{27}{(a+b+c)^2},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

71. Нека x,y,z,m,n се позитивни реални броеви и $m+n\geq 2$. Докажи го неравенството

$$x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)}+y\sqrt{zx(y+mx)(y+nz)}+z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)}\leq$$
$$\leq\frac{3(m+n)(x+y)(y+z)(z+x)}{8}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} = x\sqrt{(xz+myz)(xy+nyz)} \le \frac{x^2y+x^2z+(m+n)xyz}{2},$$

$$y\sqrt{zx(y+mx)(y+nz)} = y\sqrt{(yz+mxz)(xy+nxz)} \le \frac{xy^2+y^2z+(m+n)xyz}{2},$$

$$z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} = z\sqrt{(yz+mxy)(xz+nxy)} \le \frac{yz^2+xz^2+(m+n)xyz}{2}.$$

Ги собираме горните равенства и добиваме

$$x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)} + y\sqrt{zx(y+mx)(y+nz)} + z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)} \le$$
$$\le \frac{x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2+3(m+n)xyz}{2}$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2+3(m+n)xyz}{2} \le \frac{3(m+n)(x+y)(y+z)(z+x)}{8}.$$

Сега од условот $m+n \ge 2$ следува

$$\frac{x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2+3(m+n)xyz}{2} \le \frac{2\cdot 2(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2)+12(m+n)xyz}{8}$$
$$= \frac{2(m+n)(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2)+12(m+n)xyz}{8}$$
$$= \frac{(m+n)(2(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2)+12xyz)}{8}$$

па затоа е доволно да го докажеме неравенството

$$\frac{(m+n)(2(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2)+12xyz)}{8} \le \frac{3(m+n)(x+y)(y+z)(z+x)}{8},$$

т.е. неравенството

$$2(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2)+12xyz \le 3(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$= 3(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2)+6xyz$$

кое е квивалелнтно со неравенството

$$6xyz \le x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2,$$

а кое следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на броевите $x^2y, x^2z, xy^2, y^2z, yz^2$ и xz^2.

72. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc = 2017$. Докажи, дека

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \le \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако прво го искористиме неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и на крајот условот $abc=2017$, последователно добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} &\le \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \le \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\\ &=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{abc}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2017}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2017}}\\ &=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$, а ако замениме во $abc=2017$, добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\sqrt[3]{2017}$.

73. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=2$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3 \ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\ .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \ge (a^2+b^2+c^2)^2\,. \qquad (1)$$

Ако го искористиме познатото неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}\,, \qquad (2)$$

добиваме дека

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \ge (a^2+b^2+c^2)\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

т.е.

$$a^3+b^3+c^3 \ge \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3}\,.$$

Со повоторна примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3 &\ge \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3}\\ &=\frac{((b+c)+(c+a)+(a+b))(a^2+b^2+c^2)}{6}\\ &\ge \frac{(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b})^2}{6}.\end{aligned}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $abc=2$ добиваме

$$\begin{aligned}a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} &\ge a\sqrt{2\sqrt{bc}}+b\sqrt{2\sqrt{ca}}+c\sqrt{2\sqrt{ab}}\\ &\ge 3\sqrt[3]{a\sqrt{2\sqrt{bc}}\cdot b\sqrt{2\sqrt{ca}}\cdot c\sqrt{2\sqrt{ab}}}\\ &=3\sqrt[3]{abc\cdot\sqrt{2}^3\cdot\sqrt{(\sqrt{abc})^2}}\\ &=3\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{2}^3\cdot\sqrt{2}}=6.\end{aligned}$$

Конечно, од последните две неравенства следува

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3 &\ge \tfrac{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}}{6}(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b})\\ &\ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.\end{aligned}$$

74. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=\frac{2}{3}$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^3+b^3+c^3)(\tfrac{ab}{a+b}+\tfrac{bc}{b+c}+\tfrac{ca}{c+a})\ge a+b+c$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^3+b^3=\frac{a^3+a^3+b^3}{3}+\frac{b^3+b^3+a^3}{3}\ge a^2b+b^2a=ab(a+b).$$

Аналогно

$$b^3+c^3\ge bc(b+c)\ \text{и}\ c^3+a^3\ge ca(c+a)$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$a^3+b^3+c^3\ge\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{2}. \tag{1}$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))(\tfrac{ab}{a+b}+\tfrac{bc}{b+c}+\tfrac{ca}{c+a})\ge(ab+bc+ca)^2. \tag{2}$$

Исто така, имаме

$$\begin{aligned}(ab+bc+ca)^2 &\ge 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)\\ &=3abc(a+b+c)=2(a+b+c).\end{aligned} \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) следува

$$\begin{aligned}(a^3+b^3+c^3)(\tfrac{ab}{a+b}+\tfrac{bc}{b+c}+\tfrac{ca}{c+a}) &\ge \frac{(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a})}{2}\\ &\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2}\ge\frac{2(a+b+c)}{2}=a+b+c.\end{aligned}$$

75. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето на тројките

$$(\sqrt{\frac{a}{b+2c}},\sqrt{\frac{b}{c+2a}},\sqrt{\frac{c}{a+2b}}) \text{ и } (\sqrt{a(b+2c)},\sqrt{b(c+2a)},\sqrt{c(a+2b)})$$

добиваме

$$\sqrt{a(b+2c)}\sqrt{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt{b(c+2a)}\sqrt{\frac{b}{c+2a}}+\sqrt{c(a+2b)})\sqrt{\frac{c}{a+2b}}\leq$$

$$\leq\sqrt{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}\cdot\sqrt{\frac{b}{c+2a}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}}.$$

Последното неравенство го квадрираме и после средувањето добиваме

$$(a+b+c)^2\leq 3(ab+bc+ca)(\frac{b}{c+2a}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}).$$

Сега, ако го искористиме неравенството $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$ од последното неравенство следува

$$(a+b+c)^2\leq(a+b+c)^2(\frac{b}{c+2a}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}),$$

од каде после скратувањето со $(a+b+c)^2\neq 0$ го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

76. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи, дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, применето натројките

$$\sqrt{1+ab},\sqrt{1+bc},\sqrt{1+ca} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{1+ab},}\frac{1}{\sqrt{1+bc}},\frac{1}{\sqrt{1+ca}}$$

добиваме

$$\sqrt{(1+ab+1+bc+1+ca)(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca})}\geq$$

$$\geq\sqrt{1+ab}\frac{1}{\sqrt{1+ab}}+\sqrt{1+bc}\frac{1}{\sqrt{1+bc}}+\sqrt{1+ca}\frac{1}{\sqrt{1+ca}}=3$$

Последното неравенство го квадрираме и добиваме

$$(3+ab+bc+ca)(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca})\geq 9.$$

Ако го искористиме неравенството

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

и условот $a^2+b^2+c^2=3$, добиваме

$$6=3a^2+b^2+c^2\geq 3+ab+bc+ca\,,$$

па затоа

$$6(\tfrac{1}{1+ab}+\tfrac{1}{1+bc}+\tfrac{1}{1+ca})\geq(3+ab+bc+ca)(\tfrac{1}{1+ab}+\tfrac{1}{1+bc}+\tfrac{1}{1+ca})\geq 9\,,$$

од каде го добиваме бараното неравенство. Лесно се гледа дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

77. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq(1+2a)(1+2b)(1+2c)\,.$$

Решение. Од условот $abc=1$ и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\sqrt{(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})}&=\sqrt{(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(\tfrac{1}{ab}+bc+ca)}\\&\geq\sqrt{ab}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{bc}+\tfrac{1}{\sqrt{ca}}\cdot\sqrt{ca}\\&=2+bc=bc(1+2a)\end{aligned}$$

Аналогно ги добиваме неравенствата

$$(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq ca(1+2b) \text{ и}$$

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq ab(1+2c)\,.$$

Ако ги помножиме последните три неравенства, добиваме

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq a^2b^2c^2(1+2a)(1+2b)(1+2c)\,,$$

од каде користејќи го условот $abc=1$ следува бараното неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{ab}}}=\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{ca}}}{\sqrt{ca}},\ \frac{\sqrt{bc}}{\frac{1}{\sqrt{bc}}}=\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{ca}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{ab}}}{\sqrt{ab}}\ \text{ и }\ \frac{\sqrt{ca}}{\frac{1}{\sqrt{ca}}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{bc}}}{\sqrt{bc}}\,,$$

т.е. ако и само ако $a=b=c=1$.

78. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{2}\,.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на подредените $n-$торки броеви

$$(\sqrt{a_1+a_2},\sqrt{a_2+a_3},...,\sqrt{a_n+a_1}) \text{ и } (\tfrac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2}},\tfrac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3}},...,\tfrac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1}})$$

следува

$$\sqrt{a_1+a_2}\cdot\tfrac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2}}+...+\sqrt{a_n+a_1}\cdot\tfrac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1}}\le$$

$$\le\sqrt{\sqrt{a_1+a_2}^2+...+\sqrt{a_n+a_1}^2}\cdot\sqrt{(\tfrac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2}})^2+...+(\tfrac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1}})^2}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a_1+a_2+...+a_n\le\sqrt{2(a_1+a_2+...+a_n)}\cdot\sqrt{\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}},$$

дд каде после квадрирањето и делењето со $2(a_1+a_2+...+a_n)$ го добиваме саканото неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{a_2}{a_2+a_3}=...=\frac{a_n}{a_n+a_1}$, т.е. ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n$.

79. Докажи дека за позитивни реални броеви x,y и z важи неравенството

$$(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})\ge 4(\tfrac{x}{xy+1}+\tfrac{y}{yz+1}+\tfrac{z}{zx+1})^2.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})=(x+y+z)(\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{x})\ge(\sqrt{\tfrac{x}{y}}+\sqrt{\tfrac{y}{z}}+\sqrt{\tfrac{z}{x}})^2. \quad (1)$$

Понатаму, од неравенството $xy+1\ge 2\sqrt{xy}$ следува дека

$$\tfrac{x}{xy+1}\le\tfrac{x}{2\sqrt{xy}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{x}{y}}, \text{ т.е. } \tfrac{2x}{xy+1}\le\sqrt{\tfrac{x}{y}}.$$

Аналогно се докажува дека $\frac{2y}{yz+1}\le\sqrt{\frac{y}{z}}$ и $\frac{2z}{zx+1}\le\sqrt{\frac{z}{x}}$. Ако ги собереме последните неравенства добиваме

$$2(\tfrac{x}{xy+1}+\tfrac{y}{yz+1}+\tfrac{z}{zx+1})\le\sqrt{\tfrac{x}{y}}+\sqrt{\tfrac{y}{z}}+\sqrt{\tfrac{z}{x}}. \quad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})\ge(\sqrt{\tfrac{x}{y}}+\sqrt{\tfrac{y}{z}}+\sqrt{\tfrac{z}{x}})^2$$

$$\ge 4(\tfrac{x}{xy+1}+\tfrac{y}{yz+1}+\tfrac{z}{zx+1})^2,$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.

80. Нека a,b,c се страни на триаголник за кои важи $a+b+c=6$. Докажи дека

$$\sqrt{(a+1)(b+1)}+\sqrt{(b+1)(c+1)}+\sqrt{(c+1)(a+1)}\geq 2(\sqrt{3-a}+\sqrt{3-b}+\sqrt{3-c})+3$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a+1)(b+1)}+\sqrt{(b+1)(c+1)}+\sqrt{(c+1)(a+1)}\geq\\ &\geq 2(\sqrt{\tfrac{-a+b+c}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-b+c}{2}}+\sqrt{\tfrac{a+b-c}{2}})+\tfrac{a+b+c}{2}\end{aligned}\qquad(1)$$

Нека $x=\frac{-a+b+c}{2}, y=\frac{a-b+c}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}$. Јасно, x,y,z се позитивни броеви. Сега неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x+y+1)(y+z+1)}+\sqrt{(y+z+1)(z+x+1)}+\sqrt{)z+x+1)(x+y+1)}\geq\\ &\geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})+x+y+z.\end{aligned}$$

Од неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\sqrt{(x+y+1)(y+z+1)}=\sqrt{(x+y+1)(1+y+z)}\geq\sqrt{x}+y+\sqrt{z}\;. \qquad (2)$$

Аналогно се докажува

$$\sqrt{(y+z+1)(z+x+1)}\geq\sqrt{x}+z+\sqrt{y}\;, \qquad (3)$$

$$\sqrt{(z+x+1)(x+y+1)}\geq x+\sqrt{y}+\sqrt{z}\;. \qquad (4)$$

Со собирање на неравенствата (2), (3) и (4) се добива бараното неравенство.

81. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}}}+\frac{y}{\sqrt{\sqrt[4]{z}+\sqrt[4]{x}}}+\frac{z}{\sqrt{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}}\geq\frac{\sqrt[4]{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}\;.$$

Решение. Со смените $x=a^2, y=b^2, z=c^2$, каде a,b,c се позитивни реални броеви даденото неравенство се сведува на еквивалентното неравенство

$$\frac{a^2}{\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{c}}}+\frac{b^2}{\sqrt{\sqrt{c}+\sqrt{a}}}+\frac{c^2}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\geq\frac{\sqrt[4]{(a+b+c)^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}\;.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\frac{a^2}{\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{c}}}+\frac{b^2}{\sqrt{\sqrt{c}+\sqrt{a}}}+\frac{c^2}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\sqrt{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\;. \qquad (1)$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето за позитивните реални броеви α,β,γ добиваме

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\leq\sqrt{3(\alpha+\beta+\gamma)}\;.$$

Сега, од последното неравенство следува

$$\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\sqrt{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \sqrt{6(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})} \leq \sqrt{6\sqrt{3(a+b+c)}}. \qquad (2)$$

Конечно, бараното неравенство следува од неравенсвата (1) и (2).

82. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1} = \frac{a^5}{a^3+abc}+\frac{b^5}{b^3+abc}+\frac{c^5}{c^3+abc}$$
$$= \frac{a^4}{a^2+bc}+\frac{b^4}{b^2+ac}+\frac{c^4}{c^2+ab}$$
$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+bc)+(b^2+ac)+(c^2+ab)},$$

а од неравенството меѓу аритметилчката и геометриската средина следува

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \text{ и } a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$$

Според тоа,

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+bc)+(b^2+ac)+(c^2+ab)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Бројот 74^{2015} запиши го како збир од квадрати на седум различни дропки со ист именител.

   Решение. Имаме, $74=\frac{666}{9}$ и $666=2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$, па затоа

   $$74^{2015}=74\cdot 74^{2014}=\frac{2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2}{3^2}\cdot(74^{1007})^2$$
   $$=(\frac{2\cdot 74^{1007}}{3})^2+(\frac{3\cdot 74^{1007}}{3})^2+(\frac{5\cdot 74^{1007}}{3})^2+(\frac{7\cdot 74^{1007}}{3})^2+(\frac{11\cdot 74^{1007}}{3})^2+$$
   $$+(\frac{13\cdot 74^{1007}}{3})^2+(\frac{17\cdot 74^{1007}}{3})^2.$$

2. За еден природен број ќе велиме дека е *скоро квадратен* ако може да се претстави како производ на два последователни природни броја. Докажи дека секој скоро квадратен природен број може да се претстави како количник на два скоро квадратни природни броја.

   Решение. Скоро квадратните броеви се од видот $n(n+1), n\in\mathbb{N}$. Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека за секој природен број n важи

   $$n(n+1)=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

3. Со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се составени девет (не задолжително различни) деветцифрени броеви, при што секоја цифра во секој број е употребена точно по еднаш. На колку најмногу нули може да завршува збирот на овие девет броја?

   Решение. Прво ќе докажеме дека збирот не може да завршува на девет нули. Јасно, сите броеви составени на опишаниот начин се деливи со 9 (збирот на нивните цифри е делив со 9). Според тоа, збирот на деветте броеви е делив со 9. Најмалиот број кој е делив со 9 и завршува на девет нули е бројот $9\cdot 10^9$. Според тоа, нашиот збир е најмалку $9\cdot 10^9$, од каде счжледува дека барем еден од деветте броја е поголем од 10^9, што е противречност.

   Пример на девет броеви од разгледуваниот вид чиј збир завршува на осум нули се осум броја 987654321 и бројот 198765432. Збиро на овие девет броја е $81\cdot 10^8$.

4. Докажи дека за секој природен број n постои природен број кој се запишува само со цифрите 0 и 1 и кој е делив со n.

Решение. Да ги разгледаме броевите

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ ...,\ \underbrace{11111...111}_{n+1\text{ единица}}.$$

Имаме $n+1$ број, а при делење со бројот n можни остатоци се 0, 1, 2, ..., n, па затоа од принципот на Дирихле следува дека меѓу дадените броеви постојат два броја кои при делење со бројот n даваат еднакви остатоци. Јасно, разликата на овие два броја е делива со бројот n и истата е запишана само со цифрите 0 и 1.

5. Дали постои бесконечна низа природни броеви таква што на секој k збирот на секои k последователни броеви е делив со $k+1$?

Решение. Нека претпоставиме дека $a_1, a_2, a_3, ...$ е низа природни броеви со саканото својство. Нека $k>1$ е природен број. Тогаш од условот следува дека збирот $a_1+a_2+...+a_{2k-1}$ е делив со $2k$ (што значи и со k) и збировите $a_2+a_3+...+a_k$ и $a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{2k-1}$ се деливи со k. Според тоа, природниот број a_1 е делив со k за секој $k>1$, што е противречност.

6. Докажи, дека броевите од 1 до 16 може да се наредат во низа така што збирот на секои два соседни броеви е точен квадрат на природен број.

Решение. Бројот 16 има барем еден соседен број, па збирот во случајов ќе биде поголем од 16. Ако до бројот 16 е запишан бројот a, тогаш $17 \le 16+a \le 31$, па за да збирот биде точен квадрат мора да биде $a=9$ и притоа бројот 16 може да има само еден соседен број. Значи, подредувањето на низата мора да почне од бројот 16 или низата треба да заврши со бројот 16. Ако прво го запишеме бројот 16, тогаш од условот на задачата лесно се добива следново подредување:

16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

7. Докажи дека за секој природен број m постои природен број n таков што $m+n+1$ е точен квадрат и е $mn+1$ точен куб на некои природни броеви.

Решение. Нека $m \in \mathbb{N}$. За бројот $n = m^2+3m+3$ важи

$$m+n+1 = m^2+4m+4 = (m+2)^2 \quad \text{и}$$

$$mn+1 = m^3+3m^2+3m+1 = (m+1)^3,$$

што и требаше да се докаже.

8. Определи го најмалиот природен број N со следново својство: ако од множеството $\{1,2,...,N\}$ произволно се избришат 2016 елементи секогаш меѓу преостанатите елементи ќе има 2016 броеви чиј збир е еднаков на N.

Решение. Ќе докажеме дека $N=2017+2018+...+4032=1008\cdot 6049$. Прво ќе докажеме дека N не може да биде помал број. За таа цел да ги избришеме броевите од 1 до 2016. Тогаш меѓу преостанатите броеви збирот на било 2016 броеви ќе биде поголем или еднаков на $2017+2018+...+4032$.

Останува да покажеме дека бројот $N=1008\cdot 6049$ навистина ги задоволува условите на задачата. Да ги разгледаме паровите

$$(1,6048),(2,6047),(3,6046),...,(3024,3025),$$

кои ги има точно 3024. Јасно, ако избришеме било кои 2016 броеви, тогаш ќе останат најмалку 1008 од наведените парови во кои не се избришани и двата броја. Збирот на броевите во секој од наведените парови е еднаков на 6049, па затоа збирот на сите 2016 броеви во овие 1008 парови ќе биде еднаков на $N=1008\cdot 6049$.

9. Нека a,b,c,d,e,f се ненулти цифри (може да има и еднакви) такви што броевите $\overline{abc},\overline{def}$ и $\overline{abcdef}$ се точни квадрати.

а) Докажи, дека бројот $\overline{abcdef}$ може барем на два начина да се запише како збир на три квадрати.

б) Дади пример на вакви броеви.

Решение. Нека $\overline{abc}=m^2,\overline{def}=n^2$ и $\overline{abcdef}=p^2$. Бидејќи цифрите се ненулти важи $11\leq m,n\leq 31$. Значи, $p^2=1000m^2+n^2$.

а) Имаме $1000=900+100=30^2+10^2=324+676=18^2+26^2$, па затоа

$$p^2=(30^2+10^2)m^2+n^2=(30m)^2+(10m)^2+n^2,$$

$$p^2=(26^2+18^2)m^2+n^2=(26m)^2+(18m)^2+n^2,$$

со што тврдењето е докажано.

б) Пример на такви броеви е $225625=475^2, 225=15^2, 625=25^2$.

10. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$a(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^6+2b^6+3c^6+4d^6)=\overline{abcd}.$$

Решение. Ќе докажеме дека $a<3$. Навистина, ако $a\geq 3$, тогаш

$$\begin{aligned}10000>\overline{abcd}&=a(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^6+2b^6+3c^6+4d^6)\\&\geq 3\cdot(3+0+0+0)\cdot(3^2+0+0+0)\cdot(3^6+0+0+0)=3^{10}=59049\end{aligned}$$

што не е можно. Ќе докажеме дека $b<3$. Навистина, ако $b\geq 3$, тогаш

$$\begin{aligned}10000>\overline{abcd}&=a(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^6+2b^6+3c^6+4d^6)\\&\geq 1\cdot(1+3+0+0)\cdot(1+3^2+0+0)\cdot(1+2\cdot 3^6+0+0)>10000,\end{aligned}$$

што не е можно. Значи, $b\leq 2$ и $\overline{abcd}<2300$. Ќе докажеме дека $c<2$. Навистина, ако $c\geq 2$, тогаш

$$\begin{aligned}2300>\overline{abcd}&=a(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^6+2b^6+3c^6+4d^6)\\&\geq 1\cdot(1+0+2+0)\cdot(1+0+2^2+0)\cdot(1+0+3\cdot 2^6+0)\\&=3\cdot 5\cdot 193>2300,\end{aligned}$$

што не е можно. Значи, $c\leq 1$. Аналогно се докажува дека $d\leq 1$. Од претходните разгледувања следува

$$\begin{aligned}\overline{abcd}\in\{&1000,1001,1010,1011,1100,1101,1110,1111,\\&1200,1201,1210,1211,2000,2001,2010,2011,\\&2101,2101,2110,2111,2200,2201,2210,2211\}.\end{aligned}$$

Со непосредна проверка се докажува дека само бројот 2010 го задоволува условот на задачата.

11. Определи го најголемиот природен број p таков што бројот 5^7 може да се запише како збир на p последователни природни броеви.

Решение. Со n да го означиме првиот од $p-$те последователни природни броеви. Тогаш

$$5^7=n+(n+1)+...+(n+p-1)=np+(1+2+...+(p-1)=np+\frac{p(p-1)}{2},$$

т.е.

$$2\cdot 5^7=p(2n-1+p). \qquad (1)$$

Бидејќи $p<2n-1+p$, од последното равенство следува дека $p^2<2\cdot 5^7$, т.е. $p<5^3\sqrt{10}$. Но, $p\,|\,2\cdot 5^7$, па затоа најголемиот можен број е $p=2\cdot 5^3=250$. Сега од (1) наоѓаме $n=\frac{5^4-2\cdot 5^3+1}{2}=188$.

12. Одреди ги сите природни броеви n за кои збирот на парните броеви поголеми од n^3-n^2, а помали од n^3+n^2, е помал од 2018.

Решение. Броевите $n^3-n^2=n^2(n-1)$ и $n^3+n^2=n^2(n+1)$ се парни броеви, па затоа бараниот збир е

$$\begin{aligned}(n^3-n^2+2)+(n^3-n^2+4)+...+(n^3-n^2+2n^2-2)=&\\ =(n^3-n^2)(n^2-1)+2(1+2+3+...+n^2-1)&\\ =(n^3-n^2)(n^2-1)+(n^2-1)n^2=n^3(n^2-1).&\end{aligned}$$

Според тоа, треба да ги определиме сите природни броеви n за кои важи $n^3(n^2-1)<2018$. Со непосредна проверка се добива дека $n\in\{1,2,3,4,5\}$.

13. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат природни броеви a,b и c такви што $a+b+c=3n$ и $ab+ac+bc=n^3$.

    Решение. Од неравенството $(a+b+c)^2\geq 3(ab+ac+bc)$ и од условот на задачата следува $9n^2\geq 3n^3$, односно $n\leq 3$.

    Ако $n=3$, тогаш $a+b+c=9$ и $ab+ac+bc=27$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\leq b\leq c$. Лесно се проверува дека $a=b=c=3$ е решение на дадениот систем.

    Ако $n=2$, тогаш $a+b+c=6$ и $ab+ac+bc=8$. Лесно се проверува дека дадениот систем нема решение.

    Ако $n=1$, тогаш системот $a+b+c=1$ и $ab+ac+bc=1$ очигледно нема решение.

    Конечно, единствен природен број кој го задоволува условот на задачата е 3.

14. Одреди го најмалиот природен број делив со 63 чиј збир на цифри е 63.

    Решение. Најмалиот природен број чиј збир на цифри е 63 е 9999999, но тој не е делив со 7, па не е делив ни со 63. Значи бараниот број треба да биде осумцифрен и притоа треба да го намалиме бројот на деветки бидејќи $7\cdot 9+a>63$, каде a е осмата цифра. Според тоа за цифрите на бројот важи $6\cdot 9+a+b=63$, од каде $a+b=9$. Го бараме најмалиот природен број па нека $a=1,b=8$. Така се добива бројот 18999999. Но, тој не е делив со 7, па не е делив ни со 63. Решение на задачата е бројот 19899999.

15. Десетцифрениот природен број $n=\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ е запишан со различни цифри и е делив со 11. Ако

$$S_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \text{ и } S_2 = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

докажи дека или $7 | S_1$ или $7 | S_2$.

Решение. Од критериумот за деливост со 11 следува $11 | S_2 - S_1$. Понатаму,

$$| S_2 - S_1 | \leq 9 + 8 + 7 + 6 + 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - 0 = 25,$$

па затоа $S_2 - S_1 \in \{-22, -11, 0, 11, 22\}$. Но, $S_2 - S_1$ е непарен број (зошто?), па затоа

$$\text{или } \begin{cases} S_2 - S_1 = 11 \\ S_2 + S_1 = 45 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} S_2 - S_1 = -11 \\ S_2 + S_1 = 45 \end{cases}$$

од каде добиваме или $S_2 = 28, S_1 = 17$ или $S_2 = 17, S_1 = 28$, што значи или $7 | S_2$ или $7 | S_1$.

16. Дали постои природен број n, таков што збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $n(4n+1)$ е еднаков на 2017.

Решение. Ако $n = 3k + 2$ или $n = 3k$, тогаш $n(4n+1)$ е делив со 3. Но број е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3, па како 2017 не е делив со 3 овие два случаја отпаѓаат.

Нека $n = 3k + 1$. Тогаш бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 3. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на бројот n. Да го разгледаме бројот $n(4n+1) - 2$. Ако последната цифра на бројот $n(4n+1)$ е поголема од 2, тогаш

$$S(n(4n+1) - 2) = S(n(4n+1)) - 2$$

па затоа

$$S(n(4n+1)) = S(n(4n+1) - 2) + 2\,.$$

Но, бројот $n(4n+1) - 2$ е делив со 3, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3. Значи, збирот на цифрите на бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 2 , па затоа не може да биде еднаков на 2017, бидејќи бројот 2017 при делење со 3 дава остаток 1.

Ако последната цифра на бројот $n(4n+1)$ е помала од 3, тогаш

$$S(n(4n+1) - 2) = S(n(4n+1)) - 2 + 9$$

па затоа

$$S(n(4n+1)) = S(n(4n+1) - 2) - 7\,.$$

Но, бројот $n(4n+1) - 2$ е делив со 3, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3. Значи, збирот на цифрите на бројот $n(4n+1)$ при делење со 3 дава остаток 2, па не може да биде еднаков на 2017, бидејќи бројот 2017 при делење со 3 дава остаток 1.

17. Броевите од 1 до 1998 се поделени во две дисјунктни множества $\{a_1,a_2,...,a_{999}\}$ и $\{b_1,b_2,...,b_{999}\}$ такви што за секој i важи $|a_i-b_i|=1$ или 6. Определи ја цифрата на единиците на збирот $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$.

Решение. За секои a и b броевите $|a-b|$ и $a+b$ се со иста парност, па затоа броевите

$$\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i| \text{ и } a_1+...+a_{999}+b_1+...+b_{999}=1+2+...+1998=999\cdot 1999$$

се со иста парност. Тоа значи дека бројот $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$ е непарен.

Нека бројот на собирците $|a_i-b_i|$ кои се еднакви на 1 е парен број p. Тогаш бројот на собирците $|a_i-b_i|$ кои се еднакви на 6 е еднаков на $999-p$. Според тоа, збирот

$$\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|=1\cdot p+(999-p)\cdot 6=5994-5p$$

завршува на цифрата 4, што противречи на фактот дека овој збир е непарен број. Последното значи дека бројот на собироците $|a_i-b_i|$ кои се еднакви на 1 е непарен број.

Нека $|a_i-b_i|$ кои се еднакви на 1 е парен број n. Тогаш бројот на собироците кои се еднакви на 6 е еднаков на $999-n$. Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|=5994-5n.$$

Понатаму, бројот n е непарен, па затоа неговата цифра на единиците е еднаква на 5, што значи дека цифрата на единиците на бројот $5994-5n$ е еднаква на 9, т.е. разгледуваниот збир има цифра на единиците еднаква на 9.

18. Во множеството рационални броеви најди ги сите решенија (a,b) на равенката

$$(a+b\sqrt{2})^2=11+14\sqrt{2}.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенката

$$a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}=11+14\sqrt{2}$$
$$a^2+2b^2-11=(14-2ab)\sqrt{2}.$$

Во последната равенка на левата страна имаме рационален, а на десната страна ирационален број, па за да важи знак за равенство мора да важи

$$\begin{cases} a^2+2b^2=11 \\ 2ab\sqrt{2}=14\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка добиваме

$$a^2-2ab\sqrt{2}+2b^2=11-14\sqrt{2}.$$

Но, $a^2-2ab\sqrt{2}+2b^2=(a-b\sqrt{2})^2\geq 0$ и $11-14\sqrt{2}<0$, па заклучуваме дека последната равенка нема решенија во множествто рационални броеви. Според тоа, почетната равенка нема решенија во множеството рационални броеви.

19. Дали постојат рационални броеви x, y, z и t такви што

$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}\ ?$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалелнтна на равенките

$$x^2+2xy\sqrt{2}+2y^2+z^2+2zt\sqrt{2}+2t^2=5+4\sqrt{2}$$
$$x^2+2y^2+z^2+2t^2-5=(4-2xy-2zt)\sqrt{2}.$$

Во последната равенка на левата страна имаме рационален, а на десната страна ирационален број, па за да важи знак за равенство мора да важи

$$\begin{cases} x^2+2y^2+z^2+2t^2=5 \\ 2xy\sqrt{2}+2zt\sqrt{2}=4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка добиваме

$$x^2-2xy\sqrt{2}+2y^2+z^2-2zt\sqrt{2}+2t^2=5-4\sqrt{2}.$$

Но,

$$x^2-2xy\sqrt{2}+2y^2+z^2-2zt\sqrt{2}+2t^2=(x-y\sqrt{2})^2+(z-t\sqrt{2})^2\geq 0$$

и $5-4\sqrt{2}<0$, па заклучуваме дека последната равенка нема решенија во множеството рационални броеви. Според тоа, почетната равенка нема решенија во множеството рационални броеви, т.е. не постојат рационални броеви x, y, z и t кои ја задоволуваат.

20. Определи ги сите природни броеви n за кои

$$\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}$$

е рационален број.

Решение. Нека

$$\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}=r$$

е рационален број. Со квадрирање добиваме

$$2n+2\sqrt{n+\sqrt{2018}}\cdot\sqrt{n-\sqrt{2018}}=r^2,$$

т.е.

$$2n+2\sqrt{n^2-2018}=r^2.$$

Оттука следува дека

$$\sqrt{n^2-2018}=\tfrac{1}{2}(r^2-2n)$$

е рационален број (десната страна на равенството е рационален број). Од друга страна, бидејќи n е природен број, а десната страна на равенството е рационален број, следува дека постои природен број m за кој

$$n^2-2018=m^2 \text{ и } 2n+2m=r^2 .$$

Од $2(n+m)=r^2$, следува дека бројот $n+m$ е парен број, па затоа и $n-m$ е парен број. Според тоа, во равенството $n^2-m^2=2018$ левата страна е делива со 4, а десната не е делива со 4, што е противрелност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои природен број n за кој бројот $\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}$ е рационален број.

21. Определи ги сите цели броеви a такви што $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}$ е рационален број.

Решение. Нека $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}=\frac{p}{q}$, каде p и q се природни броеви такви што $\text{NZD}(p,q)=1$. Ако го квадрираме последното равенство последователно добиваме

$$\frac{9a+4}{a-6}=\frac{p^2}{q^2}$$

$$9aq^2+4q^2=ap^2-6p^2$$

$$a(9q^2-p^2)=-6p^2-4q^2$$

$$a=\frac{-6p^2-4q^2}{9q^2-p^2}$$

$$a=\frac{54q^2-6p^2-58q^2}{9q^2-p^2}$$

$$a=6-\frac{58q^2}{9q^2-p^2}.$$

Од $a\in\mathbb{Z}$ следува дека $9p^2-q^2\,|\,58q^2$. Понатаму, од $\mathrm{NZD}(p,q)=1$, следува $\mathrm{NZD}(p^2,q^2)=1$, па затоа $\mathrm{NZD}(9q^2-p^2,q^2)=1$. Според тоа, $9p^2-q^2\,|\,58$, што значи дека $(3q-p)(3q+p)\,|\,58$, односно $(3q-p)(3q+p)\in\{1,2,29,58\}$. Решавајќи ги добиените системи равенки добиваме дека само решението на системот

$$\begin{cases}3q-p=1\\3q+p=29\end{cases}$$

е во множеството природни броеви, т.е. $p=14, q=5$ и притоа $a=-44$.

За вака определениот цел број $a=-44$ важи $\frac{9a+4}{a-6}=\frac{400}{50}=9>0$, што значи дека тој е единствено решение на задачата.

22. Нека x е реален број така што броевите x^3 и x^2+x се рационални. Докажи дека бројот x е рационален.

Решение. Нека $a=x^3, b=x^2+x$. Тогаш

$$a=x^3+x^2-x^2-x+x=xb-b+x$$

или $a=x(b+1)-b$. Јасно, $b\neq-1$, бидејќи во спротивно

$$x^2+x=-1 \text{ т.е. } (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}=-1,$$

што значи $0=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$, што е противречност. Значи, $x=\frac{a+b}{b+1}$ и како a и b се рационални броеви добиваме дека x е рационален број.

23. Нека x,y,z се реални броеви такви што xy,yz,zx се рационални броеви различни од нула. Докажи:

а) бројот $x^2+y^2+z^2$ е рационален, и

б) ако $x^3+y^3+z^3$ е рационален број различне од 0, тогаш броевите x,y,z се рационални.

Решение. а) Од условот следува дека бројот $y^2=\frac{xy\cdot yz}{zx}\in\mathbb{Q}$. Аналогно добиваме дека $x^2,z^2\in\mathbb{Q}$, па затоа $x^2+y^2+z^2\in\mathbb{Q}$.

б) Броевите $2xy, 2yz, 2zx$ се рационални и како бројот $x^2+y^2+z^2$ е рационален следува дека и бројот

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2$$

е рационален. Слично, бројот $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ е рационален. Понатаму, производ на три рационални броја е рационален број, па затоа $(xyz)^2=xy\cdot yz\cdot zx\in\mathbb{Q}$. Сега ако го квадрираме идентитетот

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

добиваме

$$\begin{aligned}(x^3+y^3+z^3)^2-6xyz(x^3+y^3+z^3)+9(xyz)^2=\\=(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2,\end{aligned}$$

па како

$$(x^3+y^3+z^3)^2, 9(xyz)^2, (x+y+z)^2 \text{ и } (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2$$

се рационални броеви заклучуваме дека и $6xyz(x^3+y^3+z^3)$ е рационален број. Но, $x^3+y^3+z^3$ е рационален број различен од 0, па затоа е бројот xyz е рационален број. Конечно, $x=\frac{xyz}{yz}, y=\frac{xyz}{xz}, z=\frac{xyz}{xy}$ се рационални броеви.

24. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b=1$. Ако a^3 и b^3 се рационални броеви, тогаш a и b се рационални броеви. Докажи!

Решение. Од условот на задачата следува

$$1=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+b^3+3ab,$$

па затоа $ab=\frac{1-a^3-b^3}{3}\in\mathbb{Q}$. Според тоа,

$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=1-ab\in\mathbb{Q}.$$

Сега бидејќи броевите a^3 и b^3 се рационални и бидејќи

$$a^2+ab+b^2=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}>0,$$

од равенството

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

следува $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\in\mathbb{Q}$. Конечно, бидејќи $a+b\in\mathbb{Q}$ заклучуваме дека $a=\frac{a+b+(a-b)}{2}$ и $b=\frac{a+b-(a-b)}{2}$ се рационални броеви.

25. Дали постои природен број n таков што $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?

Решение. Имаме $\text{NZD}(n,n+1)=\text{NZD}(n+1,n+2)=1$, па затоа

$$\text{NZD}(n(n+2),n+1)=1.$$

Според тоа, ако $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број, тогаш треба $n(n+2)$ да е квадрат на природен број. Но,

$$n^2<n(n+2)=(n+1)^2-1<(n+1)^2,$$

што значи дека за ниту еден природен број n бројот $n(n+1)(n+2)$ не може да е квадрат на природен број.

26. Нека $x+\sqrt{y}, y+\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ се цели броеви. Докажи дека x и y се цели броеви.

Решение. Од дефиницијата на коренот следува дека $\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 0$, а ако $\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$, тогаш $x=y=0$. Затоа можеме да претпоставиме дека $x+\sqrt{y}, y+\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ се природни броеви. Имаме,

$$x+y=x+\sqrt{y}+y+\sqrt{x}-(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$$

што значи дека $x+y$ е цел број, па од претходната дискусија следува дека е природен број. Понатаму, бројот

$$\begin{aligned}x+\sqrt{y}-(y+\sqrt{x})&=x-y-(\sqrt{x}-\sqrt{y})\\&=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})-(\sqrt{x}-\sqrt{y})\\&=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)\end{aligned}$$

е цел број, како разлика на цели броеви. Ако $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, тогаш $x+y+2\sqrt{xy}=1$, па како $x+y$ е природен број, заклучуваме дека $x+y=1$ и $\sqrt{xy}=0$, од каде следува $x=1, y=0$ или $x=0, y=1$. Ако $\sqrt{x}+\sqrt{y}\neq 1$, тогаш $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x+\sqrt{y}-(y+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}$ е рационален број. Според тоа, броевите $\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{2}$ и $\sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{2}$ се рационални. Значи, $\sqrt{x}=\frac{p}{q}$ и $\sqrt{y}=\frac{r}{s}$, $NZD(p,q)=1, NZD(r,s)=1$, односно $x=\frac{p^2}{q^2}$ и $y=\frac{r^2}{s^2}$, $NZD(p,q)=1, NZD(r,s)=1$. Сега,

$$x+\sqrt{y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}=x-\sqrt{x}=\frac{p^2-pq}{q^2}$$

е цел број. Затоа, $q\,|\,p^2$ и како $NZD(p,q)=1$ добиваме $q=1$. Значи, $x=p^2$. Аналогно се докажува дека $y=r^2$, што значи дека x и y се цели броеви.

27. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $(ab+1)\,|\,(a^2-1)$.

Решение. Имаме $a(a+b)=a^2-1+ab+1$ и од $(ab+1)\,|\,(a^2-1)$ следува $(ab+1)\,|\,a(a+b)$. Но, $NZD(ab+1,a)=1$, па затоа $(ab+1)\,|\,(a+b)$. Според тоа, $a+b\geq ab+1$, па затоа важи $(a-1)(b-1)\leq 0$, од каде добиваме $a=1$ или $b=1$. Според тоа,

$$(a,b)\in\{(1,n),(n,1)\,|\,n\in\mathbb{N}\}.$$

28. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството

$$a^3+4a=b^2.$$

Докажи, дека бројот a е од видот $2t^2, t\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека u^2 е најголемиот точен квадрат кој е делител на a и нека $a=qu^2$, при што сите прости множители на q се различни. Тогаш

$$a(a^2+4)=b^2, \qquad qu^2(q^2u^4+4)=b^2$$

па затоа $u^2\,|\,b^2$, од каде заклучуваме дека $u\,|\,b$. Нека $b=ru$. Ако замениме во последното равенство добиваме

$$q(q^2u^4+4)=r^2.$$

Бидејќи сите прости множители на q се различни, од $q\,|\,r^2$ следува дека $q\,|\,r$, што значи дека $q^2\,|\,r^2$, т.е. $q\,|\,q^2u^4+4$. Според тоа, $q\,|\,4$, па затоа $q=1$ или $q=2$. За $q=1$ важи $u^4+4=r^2$, што не е можно, бидејќи не постојат два точни квадрати кои се разликуваат за 4. Значи, $q=2$ за секоі a и b кои го задоволуваат даденото равенство.

Забелешка. Може да се докаже, дека во множеството природни броеви $(a,b)=(2,4)$ е единствено решение на равенката $a^3+4a=b^2$.

29. Нека a и b се различни природни броеви поголеми од 10^6 и такви што $ab\,|\,(a+b)^3$. Докажи дека $|a-b|>10^4$.

Решение. Без ограничување на општоста може да претпоставиме дека $a>b$. Ако $k=\text{NZD}(a,b)$, тогаш $a=km, b=kn$, при што $\text{NZD}(m,n)=1$ и $m>n$. Јасно,

$$|a-b|=a-b=k(m-n)\geq k .$$

Ќе докажеме дека $k>10000$. Нека претпоставиме дека $k\leq 10000$. Тогаш $m>n>100$. Бидејќи

$$ab\,|\,(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$

добиваме дека $ab\,|\,a^3+b^3$, односно дека $k^2mn\,|\,k^3(m^3+n^3)$. Од $\text{NZD}(m,n)=1$, следува

$$\text{NZD}(n,m^3+n^3)=\text{NZD}(m,m^3+n^3)=1,$$

па затоа од $k^2mn\,|\,k^3(m^3+n^3)$ следува $mn\,|\,k$. Од друга страна, важи

$$mn>100\cdot 100=10000\geq k,$$

што е противречност. Според тоа, $k>10000$, што значи дека $|a-b|\geq k>10^4$.

30. Даден е природен број n. Определи ги сите природни броеви кои може да се запишат во обликот

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}$$

за некои природни броеви $a_1,a_2,...,a_n$.

Решение. Прво да забелеиме дека

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}\leq\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+...+\frac{n}{1}=\frac{n(n+1)}{2},$$

од што следува дека природните броеви $k>\frac{n(n+1)}{2}$ не може да се запишат во саканиот облик. Ќе докажеме дека секој природен број $k\in\{1,2,...,\frac{n(n+1)}{2}\}$ може да се запише во саканиот облик.

За $k=1$ доволно е да земеме $a_1=a_2=...=a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

За $k=\frac{n(n+1)}{2}$ доволно е да земеме $a_1=a_2=...=a_n=1$.

За k таков што $1<k<n$ земаме $a_{k-1}=1$ и $a_i=\frac{n(n+1)}{2}-k+1$, за секој $i\in\{1,2,...,n\}\setminus\{k-1\}$ и добиваме

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}=\frac{k-1}{a_{k-1}}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k-1}}^{n}\frac{i}{a_i}=\frac{k-1}{1}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k-1}}^{n}\frac{i}{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}$$

$$=k-1+\frac{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}=k.$$

За k таков што $n<k<\frac{n(n+1)}{2}$, го запишуваме ројот k во обликот $k=n+p_1+p_2+...+p_r$, каде $n-1\geq p_1>p_2>...>p_r\geq 1$. Потоа земаме $a_{p_1+1}=a_{p_2+1}=...=a_{p_r+1}=1$, а за преостанатите броеви $a_j=j$. Тогаш

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}=\sum_{j=1}^{r}\frac{p_j+1}{a_{p_j+1}}+\sum_{\substack{j\neq p_i+1\\ 1\leq i\leq r}}\frac{j}{a_j}=\sum_{j=1}^{r}\frac{p_j+1}{1}+\sum_{\substack{j\neq p_i+1\\ 1\leq i\leq r}}\frac{j}{j}$$

$$=(p_1+p_2+...+p_r+r)+(n-r)$$

$$=(k-n+r)+(n-r)=k,$$

со што задачата е решена.

31. Нека m е бројот на различните прости делители на бројот $n\geq 2$. Докажи дека $2^{2m}<4n$.

Решение. *Прв начин.* Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}$, $\alpha_i\geq 1, i=1,2,...,m$ е каноничната репрезентација на природниот број n. Бројот $\tau(n)$ на делители на бројот n е поимал од $2\sqrt{n}$, бидејќи за секој делител помал од $\sqrt{n}$ постои делител поголем од $\sqrt{n}$. Затоа важи

$$2^m\leq(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_m)=\tau(n)<2\sqrt{n},$$

од каде со квадрирање се добива бараното неравенство.

Втор начин. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}$, $\alpha_i\geq 1, i=1,2,...,m$ е каноничната репрезентација на природниот број n.

Ако $m=1$, тогаш

$$2^2=4<4p_1\leq 4p_1^{\alpha_1}=4n,$$

бидејќи $p_1\geq 2$.

Ако $m=2$, тогаш

$$2^4=16<4p_1p_2\leq 4p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}=4n,$$

бидејќи $p_1\geq 2$ и $p_2\geq 3$.

Ако $m\geq 3$, тогаш $p_1\geq 2$, $p_2\geq 3$ и $p_3,p_4,...,p_m>4$, па затоа

$$2^{2m}=\underbrace{4\cdot 4\cdot ...\cdot 4}_{m\text{ пати}}<4\cdot 6\cdot p_3\cdot ...\cdot p_m=4p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}=4n.$$

32. Нека p е прост број за кој постојат различни природни броеви u и v такви што p^2 е аритметичка средина на u^2 и v^2. Докажи дека $2p-u-v$ е или точен квадрат или е удвоен квадрат.

Решение. За $p=2$ имаме $u^2+v^2=8$ и $u=v=2$, т.е. броевите u и v не се различни. Нека $p\neq 2$. Имаме

$$(2p-u-v)(2p+u+v)=4p^2-u^2-v^2-2uv=u^2+v^2-2uv=(u-v)^2.$$

Бидејќи u^2+v^2 е парен број, заклучуваме дека u и v се со иста парност и затоа $2p+u+v$ и $2p-u-v$ се парни. Сега последното тавенство е еквивалентно со равенството

$$\tfrac{2p-u-v}{2}\cdot\tfrac{2p+u+v}{2}=(\tfrac{u-v}{2})^2.$$

Од последното равенство следува дека $\frac{2p-u-v}{2}=qa^2$ и $\frac{2p+u+v}{2}=qb^2$ за некои a,b и q кој не содржи квадрати. Бидејќи $2p+u+v>0$, заклучуваме дека $q>0$. Освен тоа,

$$q\,|\,\tfrac{2p-u-v}{2}+\tfrac{2p+u+v}{2}=2p.$$

Ако $q=p$, тогаш $p\,|\,u+v$ и затоа $p\,|\,\frac{u+v}{2}$. Од друга страна

$$(\tfrac{u+v}{2})^2+(\tfrac{u-v}{2})^2=p^2$$

па затоа $0<\frac{u+v}{2}<p$, што е противречност. Освен тоа, јасно е дека не е можно $q=2p$. Оттука заклучуваме дека $q=1$ или $q=2$. Ако $q=1$, тогаш $2p-u-v=2a^2$, а ако $q=2$, тогаш важи $2p-u-v=(2a)^2$, што и требаше да се докаже.

33. Нека p е прост број и $a_1,a_2,a_3,...$ е низа природни броеви такви што

$$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2+p,$$

за секој природен број n. Докажи дека за секој природен број n бројот a_{n+1} е делител на бројот a_n+a_{n+2}.

Решение. Ќе користиме индукција по n. Имаме $a_1a_3+a_3^2=a_2a_4+a_2^2$, па затоа a_2 е делител на $a_3(a_1+a_3)$. Ако претпоставиме дека $d=\text{NZD}(a_2,a_3)>1$, тогаш d е делител на $a_1a_3-a_2^2=p$, па затоа $d=p$ и тогаш p е делител на a_2 и a_3 и од $p=a_3a_5-a_4^2$ следува дека p е делител на a_4. Последното значи дека p^2 е делител на $a_2a_4-a_3^2=p$, што е противречност. Според тоа, $\text{NZD}(a_2,a_3)=1$ и од $a_2\,|\,a_3(a_1+a_3)$ следува $a_2\,|\,(a_1+a_3)$.

Нека претпоставиме дека за некој $k\in\mathbb{N}$ важи $a_{k+1}\,|\,(a_k+a_{k+2})$. Од рекурентната формула непосредно следува дека $\frac{a_k+a_{k+2}}{a_{k+1}}=\frac{a_{k+1}+a_{k+3}}{a_{k+2}}$. Сега од $a_{k+1}\,|\,(a_k+a_{k+2})$ и последното равенство следува дека $a_{k+2}\,|\,(a_{k+1}+a_{k+3})$, па од принципот на математичка индукција следува тврдењето на задачата.

34. Нека $1=d_1<d_2<...<d_k=n$ се сите делители на природниот број $n>1$. Докажи дека $d_1+d_2+...+d_k>k\sqrt{n}$.

Решение. Можни се два случаја.

Прв случај. Бројот n е точен квадрат, т.е. $n=p^2$ за некој природен број p. Тогаш n има непарен број делители, т.е. $k=2s+1$. Делителите на бројот n ги групираме на следниов начин:

$$(1,n),(d_2,d_{k-1}),(d_3,d_{k-2}),...,(d_s,d_{s+2})$$

и притоа останува делителот $d_{s+1}=p$. Јасно, производот на броевите во секој пар е еднаков на n, бидејќи од $d\,|\,n$ следува $\frac{n}{d}\,|\,n$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}d_1+d_2+...+d_k&=(d_1+d_k)+(d_2+d_{k-1})+...+(d_s+d_{s+2})+d_{s+1}\\&>2\sqrt{d_1d_k}+2\sqrt{d_2d_{k-1}}+...+2\sqrt{d_sd_{s+2}}+d_{s+1}\\&=\underbrace{2\sqrt{n}+2\sqrt{n}+...+2\sqrt{n}}_{s\text{ пати}}+p\\&=2s\sqrt{n}+\sqrt{n}=(2s+1)\sqrt{n}=k\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Втор случај. Бројот n не е точен квадрат. Тогаш вкупниот бој на негови делители е парен, т.е. $k=2s$. Делителите на бројот n ги групираме на следниов начин: $(1,n),(d_2,d_{k-1}),(d_3,d_{k-2}),...,(d_s,d_{s+1})$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} d_1+d_2+...+d_k &= (d_1+d_k)+(d_2+d_{k-1})+...+(d_s+d_{s+1}) \\ &> 2\sqrt{d_1d_k}+2\sqrt{d_2d_{k-1}}+...+2\sqrt{d_sd_{s+1}} \\ &= \underbrace{2\sqrt{n}+2\sqrt{n}+...+2\sqrt{n}}_{s \text{ пати}} = 2s\sqrt{n} = k\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Јасно, и во двата случаја важи знак за строго неравенство бидејќи за $n>1$ имаме $n+1>2\sqrt{n}$.

35. Нека n е природен број и нека $a_1,a_2,...,a_{2n}$ се различни цели броеви такви што равенката

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2n})-(-1)^n(n!)^2=0 \qquad (1)$$

има целобројно решение r. Докажи дека $r=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{2n}}{2n}$.

Решение. Нека r е решение на дадената равенка. Бидејќи $a_1,a_2,...,$ a_{2n} се различни цели броеви, добиваме дека и $r-a_1,r-a_2,...,r-a_{2n}$ се различни цели броеви. Јасно, ниту еден од овие броеви не е еднаков на нула, бидејќи тогаш од тоа што r е решение на (1) добиваме $0-(-1)^n(n!)^2=0$, што е противречност. Затоа важи

$$|(r-a_1)(r-a_2)...(r-a_{2n})|\geq|(-1)\cdot 1\cdot(-2)\cdot 2\cdot...\cdot n\cdot(-n)|=|(-1)^n(n!)^2|.$$

Но, r е решение на (1), па затоа

$$|(r-a_1)(r-a_2)...(r-a_{2n})|=|(-1)^n(n!)^2|,$$

т.е. во горното неравенство важи знак за равенство. Според тоа,

$$(r-a_1)+(r-a_2)+...+(r-a_{2n})=(-1)+1+(-2)+2+...+(-n)+n=0,$$

па затоа $r=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{2n}}{2n}$.

36. Нека a и b се природни броеви такви што $ab|(a^2+b^2)$. Докажи дека $a=b$.

Решение. Од $ab|(a^2+b^2)$ следува дека $\frac{a}{\mathrm{NZD}(a,b)}|(a^2+b^2)$, т.е. $\frac{a}{\mathrm{NZD}(a,b)}|b^2$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(\frac{a}{\mathrm{NZD}(a,b)},b^2)=1$, заклучуваме дека

$a=\mathrm{NZD}(a,b)$. Аналогно се докажува дека $b=\mathrm{NZD}(a,b)$, па затоа $a=b$.

37. Нека $n>1$, $a_1<a_2<...<a_n$ се природни броеви и нека

$$\mathrm{NZS}(a_i,a_j)=[a_i,a_j].$$

Докажи дека

$$\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+...+\frac{1}{[a_{n-1},a_n]}<1$$

Решение. Да означима $\mathrm{NZD}(a,b)=(a,b)$. Ако го искористиме равенството $[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}$ и фактот дека од $b<a$ следува $(a,b)\le a-b$, добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+...+\frac{1}{[a_{n-1},a_n]}&=\frac{(a_2,a_1)}{a_1a_2}+\frac{(a_3,a_2)}{a_2a_3}+...+\frac{(a_n,a_{n-1})}{a_{n-1}a_n}\\&\le\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+...+\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}a_n}\\&<\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\\&=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}\le1\end{aligned}$$

бидејќи $a_1\ge1$.

38. а) На колку нули завршува бројот $2019!$?

б) На колку нули завршува бројот $n!$?

Решение. б) Бројот $n!$ на единствен начин може да се запише во облик на производ на прости броеви, т.е. во обликот

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot(n-1)\cdot n=2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d\cdot....$$

Секој, множител кој е еднаков на 5 допринесува за една нула, па затоа треба да се определи колку пати $n!$ е делив со 5. Секој петти број допринесува за една петка, секој 25-ти број допринесува за две петки од кои едната е веќе броена, секој 125-ти број допринесува за три петки од кои две се веќе броеви итн. Според тоа, бројот $n!$ завршува на

$$[\tfrac{n}{5}]+[\tfrac{n}{25}]+[\tfrac{n}{125}]+[\tfrac{n}{625}]+...$$

нули. Бидејќи постои $s\in\mathbb{N}$ таков што $5^s>n$, почнувајќи од s па натаму собирокот $[\frac{n}{5^s}]$ е еданаков на 0, па затоа во горниот збир имаме конечно многу собирци.

а) Според решението под б) за $n=2019$ наоѓаме

$$[\tfrac{2019}{5}]+[\tfrac{2019}{25}]+[\tfrac{2019}{125}]+[\tfrac{2019}{625}]+[\tfrac{2019}{3125}]=403+80+16+3+0=503.$$

39. Определи ги сите непразни подмножества A на множеството $\{2,3,4,...\}$ такви што за секој $n\in A$ броевите n^2+4 и $[\sqrt{n}]+1$ припаѓаат на A. (Со $[x]$ е означен најголемиот цел број кој е помал или еднаков на реалниот број x.)

Решение. Ќе докажеме дека $A=\{2,3,4,...\}$.

Нека m е најмалиот елемент на множеството A (секое непразно подмножество на множеството $\mathbb{N}$ има најмал елемент). Од условот на задачата следува $m\le[\sqrt{m}]+1\le\sqrt{m}+1$, па затоа $m-1\le\sqrt{m}$, т.е. $m^2-2m+1\le m$. Според тоа, $m^2<m^2+1\le 3m$, од каде добиваме $m<3$. Значи, $m=2$.

Сега со математичка индукција ќе докажеме дека $A=\{2,3,4,...\}$.

Од горните разгледувања следува дека $2\in A$.

Нека претпоставиме дека за некој природен број $n\ge 2$ важи $n\in A$. Тогаш од условот на задачата следува $n^2+4\in A$, $[\sqrt{n}]+1\in A$. Но, $n\ge 2$, па затоа

$$n^2<n^2+4=n^2+3+1<n^2+2n+1=(n+1)^2, \text{ т.е. } n<\sqrt{n^2+4}<n+1,$$

па затоа $[\sqrt{n^2+4}]=n$ и $n+1=[\sqrt{n^2+4}]+1\in A$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $A=\{2,3,4,...\}$.

40. Нека A е множество природни броеви кое го содржи бројот 1 и содржи барем уште еден број различен од 1. Ако од $m,n\in A, m\ne n$, следува $\frac{m+1}{\text{NZD}(m+1,n+1)}\in A$, тогаш $A=\mathbb{N}$. Докажи!

Решение. Нека k е најмалиот број од A кој е поголем од 1. Тогаш според условот на задачата $\frac{k+1}{\text{NZD}(k+1,2)}\in A$. Ако $\text{NZD}(k+1,2)=1$, тогаш $k=2u$ за некој $u\in\mathbb{N}$, па затоа $2u+1\in\mathbb{N}$. Според условот на задачата за $2u+1$ и 1 добиваме $\frac{2u+2}{\text{NZD}(2u+2,2)}\in A$, па затоа $u+1\in A$.

Бидејќи $k=2u\ge u+1$ и k е најмалиот природен број во A поголем од 1, заклучуваме дека мора да важи равенство, т.е. $u=1$ и $k=2$. Ако $\text{NZD}(k+1,2)=2$, тогаш се добива дека $k=2u+1$ за некој $u\in\mathbb{N}$ и притоа $u+1\in A$. Но, како $k=2u+1>u+1>1$ најдовме број кој е поголем од 1, помал е од k и припаѓа на A што противречи на претпоставката за k. Според тоа, овој случај не е можен. Во досегашните разгледувања докажавме дека $2\in A$.

Сега тврдењето ќе го докажеме со помош на математичка индукција.

Според претходните разгледувања важи $1,2\in A$.

Нека претпоставиме дека $n,n+1\in A$. Ќе докажеме дека $n+2\in A$. Ако условот на задачата го примениме на броевите n и $n+1$ добиваме $n+2=\frac{(n+1)+1}{\text{NZD}((n+1)+1,n+1)}\in A$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $A=\mathbb{N}$.

41. Нека n е природен број и p е прост број така што важи $n\,|\,p-1$ и $p\,|\,n^6-1$. Докажи дека барем еден од броевите $p-n$ или $p+n$ е точен квадрат.

Решение. Од $n\,|\,p-1$ следува $p=1+an$, за некој $a\in\mathbb{N}$. Понатаму, од условот $p\,|\,n^6-1=(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$ следува дека $p\,|\,(n-1), p\,|\,(n^2+n+1), p\,|\,(n+1)$ или $p\,|\,(n^2-n+1)$. Одделно ќе го разгледаме секој од овие случаи.

Ако $p\,|\,n-1$, тогаш $n-1\geq p=1+na\geq n+1$, што е противречност.

Ако $p\,|\,n+1$, од $n+1\geq p=1+na$ следува дека $a=1$, па затоа $p-n=1$ е точен квадрат.

Ако $p\,|\,(n^2+n+1)$, тогаш $n^2+n+1=pb$, за некој $b\in\mathbb{N}$. Затоа $n^2+n+1=nab+b$, односно $n(n-ab+1)=b-1$. Оттука следува дека $n\,|\,b-1$ и $b=1+nc$ за некој ненегативен цел број c. Значи,

$$n^2+n+1=na(nc+1)+(nc+1)=n^2ac+n(a+c)+1,$$

т.е.

$$n+1=nac+a+c.$$

Ако $ac\geq 1$, тогаш $a+c\geq 2$ и последното равенство не е можно. Значи, $ac=0$, па како $a\in\mathbb{N}$ добиваме $c=0$, односно $a=n+1$. Затоа

$$p+n=1+na+n=1+n(n+1)+n=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Ако $p\,|\,(n^2-n+1)$, тогаш $n^2-n+1=pb$, за некој $b\in\mathbb{N}$. Затоа

$$n^2-n+1=nab+b\text{, т.е. } n(n-ab-1)=b-1.$$

Оттука следува дека $n\,|\,b-1$ и $b=1+nc$ за некој ненегативен цел број c. Значи,

$$n^2-n+1=na(nc+1)+(nc+1)=n^2ac+n(a+c)+1,$$

т.е.

$$n-1=nac+a+c.$$

Ако $ac\geq 1$, тогаш $a+c\geq 2$ и последното равенство не е можно. Значи, $ac=0$, па како $a\in\mathbb{N}$ добиваме $c=0$, односно $a=n-1$. Затоа

$$p-n=1+na-n=1+n(n-1)-n=n^2-2n+1=(n-1)^2.$$

Со ова тврдењето на задачата е во целост докажано.

42. Нека е даден простиот број p. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $\frac{4a+p}{b}+\frac{4b+p}{a}$ и $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ се природни броеви.

Решение. Ако $a=b$, тогаш $\frac{8a+2p}{a}=8+\frac{2p}{a}$ и $2a$ се природни броеви. Затоа $a\,|\,2p$, од каде добиваме $a\in\{1,2,p,2p\}$, што значи дека решение на задачата се подредените парови $(1,1),(2,2),(p,p)$ и $(2p,2p)$.

Ако $a\neq b$, тогаш без губење на општоста можеме да земеме дека $a<b$. Нека $d=\text{NZD}(a,b)$ и $a=du, b=dv$ и $\text{NZD}(u,v)=1$. Тогаш

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{d^2u^2}{dv}+\frac{d^2v^2}{du}=\frac{d(u^3+v^3)}{uv}$$

е природен број. Понатаму, од $\text{NZD}(u,v)=1$ следува

$$\text{NZD}(u,u^3+v^3)=1 \text{ и } \text{NZD}(v,u^3+v^3)=1,$$

па затоа $u\,|\,d$ и $v\,|\,d$, што значи дека $d=uvt$, односно $a=u^2vt$ и $b=uv^2t$. Според тоа,

$$\frac{4a+p}{b}+\frac{4b+p}{a}=\frac{4(a^2+b^2)+p(a+b)}{ab}=\frac{4uvt(u^2+v^2)+p(u+v)}{u^2v^2t}$$

е природен број и $uv\,|\,4uvt(u^2+v^2)+p(u+v)$, т.е. $uv\,|\,p(u+v)$. Бидејќи $\text{NZD}(u,v)=1$ важи $\text{NZD}(u,v+v)=1$ и $\text{NZD}(u+v,v)=1$, па затоа $uv\,|\,p$. Сега од $a<b$ следува $u<v$ и како единствени делители на простиот број p се 1 и p, заклучуваме дека $u=1$ и $v=p$. Тоа значи дека $a=pt$ и $b=p^2t$, па затоа

$$\frac{4a+p}{b}+\frac{4b+p}{a}=\frac{4t+1+p(1+4pt)}{pt}$$

е природен број и $p|4t+1$. Според тоа, $4t+1=pq$ за некој природен број q и

$$\frac{4t+1+p(1+4pt)}{pt}=\frac{pq+p(1+4pt)}{pt}=\frac{q+1+4pt}{t}$$

е природен број и $t|q+1$, т.е. $q+1=ts$ за некој природен број s. Значи, $p=\frac{4t+1}{q}=\frac{4t+1}{ts-1}$ е прост број и $p\geq 2$, т.е. $\frac{4t+1}{ts-1}\geq 2$. Оттука следува $s\leq\frac{4t+3}{2t}=2+\frac{3}{2t}<4$, што значи дека $s=1$, $s=2$ или $s=3$.

Ако $s=1$, тогаш $p=\frac{4t+1}{t-1}=4+\frac{5}{t-1}$. Значи, $t-1|5$, па затоа $t=2$ или $t=5$. За $t=2$ добиваме $p=9$ и ова не е прост број, а за $t=5$ добиваме $p=5$. Сега лесно се добива дека $a=30$ и $b=150$.

Ако $s=2$, тогаш $p=\frac{4t+1}{2t-1}=2+\frac{3}{2t-1}$. Значи, $2t-1|3$, па затоа $2t-1=1$ или $2t-1=3$, т.е. $t=1$ или $t=2$. Ако $t=1$, тогаш $p=5$ и $a=5$ и $b=25$, а ако $t=2$, тогаш $p=3$ и $a=6$ и $b=18$.

Ако $s=3$, тогаш $p=\frac{4t+1}{3t-1}$, па $3p=\frac{12t+3}{3t-1}=4+\frac{7}{3t-1}$. Значи, $3t-1|7$, па затоа $3t-1=1$ или $3t-1=7$, т.е. $3t=2$ или $3t=8$ и во овој случај немаме решенија.

Конечно, решеинија на задачата се:

- за $p=3$: $(a,b)\in\{(1,1),(2,2),(3,3),(6,6),(6,8),(8,6)\}$
- за $p=5$: $(a,b)\in\{(1,1),(2,2),(5,5),(10,10),(5,25),(25,5),(30,150,(150,30)\}$
- за останатите прости броеви $p:(a,b)\in\{(1,1),(2,2),(p,p),(2p,2p)\}$.

43. Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36|p-7$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$\begin{aligned}3p+10&=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2\\&=6n^2+6n+19,\end{aligned},$$

од каде

$$3p=6n^2+6n+9,$$

односно

$$p=2n^2+2n+3=2n(n+1)+3.$$

Ако еден од броевите n или $n+1$ е делив со 3, тогаш имаме контрадикција со тоа дека p е прост број. Значи, $n=3k+1$ и тогаш,

$$\begin{aligned} p &= 2(3k+1)(3k+1+1)+3 \\ &= 2(3k+1)(3k+2)+3 \\ &= 2(9k^2+9k+2)+3 \\ &= 18k(k+1)+7. \end{aligned}$$

Бидејќи $k(k+1)$ е парен број, добиваме дека $36 \,|\, p-7$.

44. Најди ги сите природни броеви n такви што n има цифри колку што има различни прости делители и збирот на различните прости делители е еднаков со збирот на степените на истите делители.

Решение. Нека $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Од условот на задачата имаме

$$p_1+p_2+...+p_k=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k.$$

Го разгледуваме бројот на цифри на бројот n. Ако n има 4 цифри, тогаш има 4 различни прости делители. Тогаш $n\ge 2^{14}\cdot 3\cdot 5\cdot 7>10^4$ што не е можно. Ако n има $k>4$ цифри, тогаш

$$\begin{aligned} n &\ge 2^{2+3+5+7+p_5+...+p_k-(k-1)}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot p_5\cdot ...\cdot p_k \\ &= 2^{14}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^{p_5+...+p_k-(k-4)}\,p_5\cdot ...\cdot p_k \\ &> 10^4\cdot 10^{k-4}=10^k \end{aligned}$$

што повторно не е можно. Значи, n е најмногу трицифрен.

Нека n е трицифрен. Тогаш $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$. Ако $5\,|\,n$, тогаш

$$n\ge 2^8\cdot 3\cdot 5>10^3.$$

Добиваме дека простите фактори на бројот n се помали или еднакви на 3. Но прости броеви помали или еднакви на 3 се 2 и 3, а во факторизацијата на n влегуваат 3 прости броеви, што е противречност.

Нека n е двоцифрен број. Тогаш $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Ако $5\,|\,n$, тогаш $n\ge 2^6\cdot 5>10^2$. Останува $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$, каде $\alpha_1+\alpha_2=5$. Со директна проверка се добива дека $n=2^4\cdot 3=48, n=2^3\cdot 3^2=72$ се решенија.

Нека n е едноцифрен број. Тогаш само $n=2^2$ го исполнува условот на задачата.

45. Определи ги сите природни броеви $n>2$, такви што $n=a^3+b^3$, каде што a е најмалиот природен делител на n поголем од 1 и b е произволен природен делител на n.

Решение. Прво да забележиме дека ако n е непарен, тогаш мора и двата делители a и b се непарни. Но, нивниот збир е парен, па n мора да биде парен, што е контрадикција. Значи, n е парен и $a=2$. Тогаш мора и b да биде парен. Важи и дека $b|(n-b^3)=a^3=8$. Оттука, добиваме дека $b\in\{2,4,8\}$. Значи, бараните броеви n се $n=16, n=72, n=520$.

46. Определи ги сите прости броеви p, q, r, s такви што нивниот збир е прост број и броевите p^2+qr и p^2+qs се квадрати на природни броеви.

Решение. Бидејќи $p+q+r+s$ е прост број, заклучуваме дека еден од броевите p, q, r, s е парен. Нека $q=2$.Тогаш $p^2+2r=a^2$ и $p^2+2s=b^2$, па затоа

$$2r=(a-p)(a+p) \text{ и } 2s=(b-p)(b+p).$$

Но, броевите a, b, p се непарни, па затоа $(a-p)(a+p)$ и $(b-p)(b+p)$ се деливи со 4, што не е случај со $2r$ и $2s$, бидејќи r и s се прости броеви поголеми од 2.

Нека $r=2$. Тогаш $p^2+2q=a^2$, т.е. $2q=(a-p)(a+p)$, што не е можно бидејќи бројот $(a-p)(a+p)$ е делив со 4, а бројот $2q$ не е делив со 4, бидејќи q е непарен прост број.

Аналогно добиваме дека $s\neq 2$.

Значи, $p=2$. Сега $qr=a^2-4$ и $qs=b^2-4$, па затоа

$$qr=(a-2)(a+2) \text{ и } qs=(b-2)(b+2).$$

Ако $a-2=1$, тогаш $a=3$, па затоа $a+2=5$ и задачата нема решенние. Аналогно е и за $b-2=1$.

Бидејќи $a\neq b$, имаме два случаи:

1) $q=a-2, r=a+2, q=b+2, s=b-s$. Сега имаме $a=q+2, b=q-2$, па затоа броевите $s=q-4, q, r=q+4$ се прости. Бидејќи еден од нив е делив со 3, заклучуваме дека тој мора да е еднаков на 3. Според тоа, $q=7, s=3, r=11$.
2) Ако $q=a+2, r=a-2, q=b-2, s=b+2$, тогаш размислувајќи на потполно иста начин добиваме $q=7, r=3, s=11$.

Значи, решенија се $(p,q,r,s)\in\{(2,7,3,11),(2,7,11,3)\}$.

47. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот p^3+p^2+p+1 е точен квадрат.

Решение. За $p=2$ добиваме $2^3+2^2+2+1=15$ и ова не е точен квадрат. Значи, p е непарен прост број. Нека $p^3+p^2+p+1=n^2$, каде n е природен број. Имаме

$$(p+1)(p^2+1)=n^2.$$

Ако $d=\mathrm{NZD}(p+1,p^2+1)$, тогаш $d\,|\,p^2+1$ и $d\,|\,(p=1)(p+1)=p^2-1$, па затоа $d\,|\,p^2+1-(p^2-1)=2$. Според тоа, $d=1$ или $d=2$, па бидејќи $p+1$ и p^2+1 се парни броеви добиваме $d=2$.

Нека $p+1=2u$ и $p^2+1=2v$, $\mathrm{NZD}(u,v)=1$ и $u,v\in\mathbb{N}$. Значи, $4uv=n^2$, па затоа uv е точен квадрат. Но, $\mathrm{NZD}(u,v)=1$ и како uv е точен квадрат добиваме $u=x^2$ и $v=y^2$, $x,y\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Од $p^2+1>p+1$ следува $y>x$. Понатаму, $y<p$, бидејќи во спротивно добиваме $2y^2>2p^2>p^2+1$, што не е можно. Значи, $p>y>x$, па затоа $y+x<2p$ и $y-x<p$. Ако ги одземеме равенките од системот (1) добиваме

$$p^2-p=2y^2-2x^2$$
$$p(p-1)=2(y-x)(y+x)$$

Бидејќи $p\nmid 2$ и $p\nmid y-x$, од последната равенка следува $p\,|\,y+x$ и како $y+x<2p$ заклучуваме дека $y+x=p$. Значи, $2(y-x)=p-1$. Сега од последните две равенки добиваме $x=\frac{p+1}{4}$ и ако замениме во равенката $p+1=2x^2$ добиваме

$$p+1=2\cdot\frac{(p+1)^2}{16},$$

па затоа $p=7$. Со непосредна проверка добиваме дека

$$7^3+7^2+7+1=400=20^2,$$

што значи дека $p=7$ е навистина единствено решение на задачата.

48. Нека p е прост број и a е цел број. Докажи дека ако за секој природен број n бројот n^2-5 не е делив со p, тогаш постојат бесконечно многу цели броеви m такви што $p\,|\,m^5+a$.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако b е број кој не е делив со простиот број p, тогаш броевите $b, 2b, 3b, ..., (p-1)b$ даваат различни остатоци при делење со p.

Доказ. Ако за некои k и l такви што $1 \le k,l \le p-1$ и $k<l$ важи $kb \equiv kl \,(\text{mod}\, p)$, тогаш $p\,|\,(k-l)b$. Но, p не е делител на b, па затоа $p\,|\,k-l$, што не е можно бидејќи p е прост број $1 \le k-l \le p-2$. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на лемата. ■

Од претходната лема и од тоа што ниту еден од броевите $b, 2b, 3b, ..., (p-1)b$ не е делив со p следува дека при делење на овие броеви со p се добиваат $p-1$ различни остатоци, т.е. се добиваат остатоците $1,2,3,...,p-1$. Последното значи дека за секој природен број b кој не е делив со простиот број p постои природен број s, $1 \le s \le p-1$ таков што $sb \equiv 1 \,(\text{mod}\, p)$.

Лема. Ако p е прост број таков што p не е делител на n^2-5 за ниту еден природен број n и ако $x^5 \equiv y^5 \,(\text{mod}\, p)$, тогаш $x \equiv y \,(\text{mod}\, p)$.

Доказ. Ако $x \equiv 0 \,(\text{mod}\, p)$, тогаш $y^5 \equiv (\text{mod}\, p)$ па затоа $y \equiv 0 \,(\text{mod}\, p)$, т.е. $x \equiv y \,(\text{mod}\, p)$. Значи, можеме да претпоставиме дека x и y не се деливи со p. Од $x^5 \equiv y^5 \,(\text{mod}\, p)$ следува

$$p\,|\,x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4). \tag{1}$$

Нека $p\,|\,x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$. Имаме

$$\begin{aligned}4(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) &= 4(x^2+y^2)^2+4xy(x^2+y^2)-4x^2y^2\\ &= (2(x^2+y^2)+xy)^2-5x^2y^2.\end{aligned}$$

Бидејќи p не е делител на xy, постои s таков што $sxy \equiv 1 \,(\text{mod}\, p)$. Сега, од $p\,|\,(2(x^2+y^2)+xy)^2-5x^2y^2$ добиваме дека

$$p\,|\,s^2((2(x^2+y^2)+xy)^2-5x^2y^2)=(2s(x^2+y^2)+sxy)^2-5(sxy)^2,$$

т.е.

$$0 \equiv (2s(x^2+y^2)+sxy)^2-5(sxy)^2 \equiv (2s(x^2+y^2)+sxy)^2-5 \,(\text{mod}\, p),$$

што противречи на претпоставката дека p не е делител на n^2-5 за ниту еден природен број n. Според тоа, $p\nmid x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$, па затоа од (1) следува $p\,|\,x-y$, со што лемата е докажана. ■

Од претходната лема следува дека броевите $0^5,1^5,2^5,...,(p-1)^5$ даваат различниостатоци при делење со p. Навистина, ако некои два броја k^5 и l^5 даваат ист остаток при делење со p, тогаш од претходната лема следува дека $p\,|\,k-l$ и како $0\le k,l\le p-1$ добиваме $k=l$. Затоа сите остатоцисе различни, што значи дека постои m таков што $m^5\equiv -a\,(\text{mod}\,p)$. Тогаш за секој $r\in\mathbb{Z}$ важи $(m+rp)^5\equiv -a\,(\text{mod}\,p)$, т.е. $p\,|\,(m+rp)^5+a$, што и требаше да се докаже.

49. Докажи, дека за секој природен број n барем еден од броевите $A=2n-1, B=5n-1,\ C=13n-1$ не е точен квадрат.

Решение. Ќе користиме дека точен квадрат на природен број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.

Ако $n\equiv 0(\text{mod}\,4)$ или $n\equiv 2(\text{mod}\,4)$, тогаш $A\equiv 3(\text{mod}\,4)$, па затоа A не е точен квадрат.

Ако $n\equiv 3(\text{mod}\,4)$, тогаш $B\equiv 2(\text{mod}\,4)$, па затоа B не е точен квадрат.

Нека $n\equiv 1(\text{mod}\,4)$. Тогаш $A=8t+1, B=4(5t+1), C=4(13t+3)$. Нека претпоставиме дека A,B,C се точни квадрати. Ако B е точен квадрат, тогаш бројот $5t+1$ е точен квадрат. Слично, ако C е точен квадрат, тогаш и бројот $13t+3$ е точен квадрат. Според тоа, важи

$$8t+1=x^2,\ 5t+1=y^2,\ 13t+1=z^2.$$

Оттука следува дека

$$x^2+y^2=z^2-1.$$

Но, $z^2\equiv 0(\text{mod}\,4)$ или $z^2\equiv 1(\text{mod}\,4)$, па затоа $x^2+y^2\equiv 3(\text{mod}\,4)$ или $x^2+y^2\equiv 0(\text{mod}\,4)$. Понатаму, ако земеме предвид дека точен квадрат на природен број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4, од последните конјруенции следува дека $x^2\equiv 0(\text{mod}\,4)$ и $y^2\equiv 0(\text{mod}\,4)$, што противречи на $x^2=8t+1\equiv 1(\text{mod}\,4)$.

50. Докажи дека 1023 е делител на $7^{6^n}+4^{6^n-1}-5$ за секој природен број n.

Решение. Бидејќи $7^6 = 117649 \equiv 4 (\bmod 1023)$ и $6^{n-1} = 5m + 1$ за некој природен број m добиваме дека

$$7^{6^n} = (7^6)^{6^{n-1}} = (7^6)^{5m+1} \equiv 4^{5m+1} \equiv (4^5)^m \cdot 4 \equiv 4 (\bmod 1023) . \qquad (1)$$

Бидејќи $6^n = 5k + 1$ за некој природен број k добиваме

$$4^{6^n - 1} = 4^{5k} = (4^5)^k \equiv 1 (\bmod 1023) . \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува за секој природен број n важи

$$7^{6^n} + 4^{6^n - 1} - 5 \equiv 4 + 1 - 5 = 0\, (\bmod 1023) ,$$

т.е. 1023 е делител на $7^{6^n} + 4^{6^n - 1} - 5$ за секој природен број n.

51. Нека a е природен број таков што $\text{NZD}(a, 10) = 1$. Докажи дека последните две цифри на a^k за $k = 1, 2, \ldots$, периодично се повторуваат.

Решение. Ги разгледуваме остатоците на степените на броевите a^k при делење со 100. Од $\text{NZD}(a, 10) = 1$ следува дека во множеството $a, a^2, a^3, \ldots, a^{100}$ не постои број делив со 100, па затоа имаме 100 броеви кои при делење со 100 имаат најмногу 99 различни остатоци. Од принципот на Дирихле следува дека барем два од тие броеви имаат еднаков остаток при делење со 100. Значи, постојат $1 \le r < s \le 100$, такви што $a^s - a^r = a^r (a^{s-r} - 1)$ е делив со 100.

Понатаму, од $\text{NZD}(a, 10) = 1$ следува $a^{s-r} - 1 \equiv 0 (\bmod 100)$, па затоа $a^{s-r+k} \equiv a^k (\bmod 100)$, што значи дека последните две цифри на a^k периодично се повторуваат, при што една периода е $s - r > 0$.

52. Нека со a_n го означиме збирот на цифрите на бројот 1189^n, $n \in \mathbb{N}$. Определи ја најмалата вредност на a_n.

Решение. Ќе докажеме дека најмалата вредност на a_n е 19 и таа се достигнува, на пример, за $n = 1$.

Од $1189 \equiv 1 (\bmod 9)$, следува $1189^n \equiv 1 (\bmod 9)$, па од признакот за деливост со 9 следува $a_n \equiv 1189^n \equiv 1 (\bmod 9)$, за $n \in \mathbb{N}$. Според тоа, a_n е некој од броевите $1, 10, 19, 28, \ldots$. Јасно, $a_n = 1$ не е можно бидејќи $n \in \mathbb{N}$. Значи, за да докажеме дека најмалата вредност на a_n е 19, доволно е да докажеме дека a_n не може да биде 10.

Нека претпоставиме дека $a_n = 10$, за некој природен број n. Да го разгледаме бројот $1189^n - 1$. Бидејќи 1189^n завршува на 1 или 9, збирот на цифрите на $1189^n - 1$ е еднаков на $10 - 1 = 9$. Од друга страна, $1189 \equiv 1(\mathrm{mod} 11)$, па затоа $1189^n \equiv 1(\mathrm{mod} 11)$, т.е. $1189^n - 1$ е делив со 11. Нека збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места го означиме со a и b, соодветно. Тогаш од деливоста со 11 следува $a \equiv b(\mathrm{mod} 11)$. Од друга страна $a + b$ е еднаков на 9. Од $0 \le a, b \le 9$ и $a \equiv b(\mathrm{mod} 11)$, следува дека $a = b$. Но, тогаш од $a + b = 9$, добиваме $2a = 9$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека најмалата вредност на a_n е 19.

53. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $36^n - 6$ е производ на два или повеќе последователни природни броеви.

Решение. Производот на четири последователни природни броеви е делив со 4. Меѓутоа $36^n - 6 \equiv 0 - 6 \equiv 2\, (\mathrm{mod} 4)$, па затоа $36^n - 6$ не може да се запише како производ на четири и повеќе последователни природни броеви.

Нека $36^n - 6 = k(k+1)$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Тогаш $4 \cdot 36^n - 23 = (2k+1)^2$, па затоа

$$23 = 4 \cdot 36^n - (2k+1)^2 = (2 \cdot 6^n - 2k - 1)(2 \cdot 6^n + 2k + 1).$$

Бројот 23 е прост и $2 \cdot 6^n + 2k + 1 > 2 \cdot 6^n - 2k - 1$, па затоа од последната равенка следува $2 \cdot 6^n - 2k - 1 = 1$ и $2 \cdot 6^n + 2k + 1 = 23$. Ако ги собереме овие две равенки добиваме $4 \cdot 6^n = 24$, т.е. $6^n = 6$, па затоа $n = 1$. За $n = 1$ добиваме $36^1 - 6 = 30 = 5 \cdot 6$.

Нека $36^n - 6 = (k-1)k(k+1)$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$36^n = k^3 - k + 6 = (k+2)(k^2 - 2k + 3).$$

Единствени прости делители на броевите $k + 2$ и $k^2 - 2k + 3$ се 2 и 3. Нека $d = \mathrm{NZD}(k+2, k^2 - 2k + 3)$. Од

$$k^2 - 2k + 3 = k^2 + 2k - 4k - 8 + 11 = (k+2)(k-4) + 11$$

следува $d \mid 11$, што значи $d = 1$ или $d = 11$. Но, бидејќи единствени прости делители на $k + 2$ и $k^2 - 2k + 3$ се 2 и 3, заклучуваме дека единствени прости делители на d може да се 2 и 3, па затоа $d = 1$ и

$k+2$ и k^2-2k+3 се заемно прости броеви. Последното значи дека еден од броевите $k+2$ и k^2-2k+3 е степен на бројот 2, а другиот е степен на бројот 3. Ако $k+2=4^n$ и $k^2-2k+3=9^n$, тогаш k е парен број и $9^n=k^2-2k+3\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$, што противречи на фактот дека $9^n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$. Јасно, $k>1$, па затоа $k^2-2k+3>k+2$ и не е можно $k+2=9^n$ и $k^2-2k+3=4^n$. Според тоа, во овој случај задачата нема решение.

Конечно, единствено решение на задачата е $n=1$.

54. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $n^4+8n+11$ е производ на два или повеќе последователни природни броеви.

Решение. Јасно $n=0$ не е решение на задачата, па затоа можеме да земеме дека $n^2\geq 1$. Ќе докажеме дека $n^4+8n+11$ не е делив со 3, од каде ќе следува дека $n^4+8n+11$ не може да се запише како производ на три последователни природни броја.

Ако $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $n^4+8n+11\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$.

Ако $n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $n^4+8n+11\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$.

Ако $n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $n^4+8n+11\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$.

Според тоа, докажавме дека единствена можност е $n^4+8n+11$ да се запише како производ на два последователни природни броја, т.е.

$$n^4+8n+11=y(y+1).$$

Последната равенка е еквувалентна на равенката

$$4n^4+32n+45=(2y+1)^2.$$

Понатаму,

$$4n^4+32n+45\leq 4n^4+32n^2+45,$$

па затоа важи

$$\begin{aligned}(2y+1)^2&=4n^4+32n+45\leq 4n^4+32n^2+45\\&=(2n^2+8)^2-19<(2n^2+8)^2.\end{aligned}$$

Исто така

$$(2y+1)^2=4n^4+32n+45=(2n^2-2)^2+8(n+2)^2+9>(2n^2-2)^2.$$

Според тоа,

$$(2n^2-2)^2<(2y+1)^2=4n^4+32n+45<(2n^2+8)^2,$$

т.е. $4n^4+32n+45$ е квадрат на непарен број кој е поголем од $2n^2-2$ и е помал од $2n^2+8$.

Ако $4n^4+32n+45=(2n^2-1)^2$, тогаш $n^2+8n+11=0$, па затоа $(n+4)^2=5$, што не е можно.

Ако $4n^4+32n+45=(2n^2+1)^2$, тогаш $n^2-8n-11=0$, па затоа $(n-4)^2=27$, што не е можно.

Ако $4n^4+32n+45=(2n^2+3)^2$, тогаш $3n^2-8n-9=0$, па затоа $(3n-4)^2=43$, што не е можно.

Ако $4n^4+32n+45=(2n^2+5)^2$, тогаш $5n^2-8n-5=0$, па затоа $(5n-4)^2=41$, што не е можно.

Ако $4n^4+32n+45=(2n^2+7)^2$, тогаш $28n^2-32n+4=0$, па затоа $4(n-1)(7n-1)=0$, т.е. $n=1$. Навистина $1^4+8\cdot 1+11=20=4\cdot 5$.

55. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $n^3-2n^2+3n+21$ е степен на бројот 3.

Решение. Имаме $k\equiv 1\,(\text{mod}\,3)$ ако и само ако $3^k\equiv 3\,(\text{mod}\,13)$, $k\equiv 2\,(\text{mod}\,3)$ ако и само ако $3^k\equiv 9\,(\text{mod}\,13)$ и $k\equiv 0\,(\text{mod}\,3)$ ако и само ако $3^k\equiv 1\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 0\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 8\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 1\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 10\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 2\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 1\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 3\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 8\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 4\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 0\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 5\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 10\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 6\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 1\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 7\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 1\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 8\,(\text{mod}\,13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 0\,(\text{mod}\,13)$.

Ако $n\equiv 9\,(\text{mod}13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 4\,(\text{mod}13)$.

Ако $n\equiv 10\,(\text{mod}13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 6\,(\text{mod}13)$.

Ако $n\equiv 11\,(\text{mod}13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 12\,(\text{mod}13)$.

Ако $n\equiv 12\,(\text{mod}13)$, тогаш $n^3-2n^2+3n+21\equiv 2\,(\text{mod}13)$.

Значи, $n^3-2n^2+3n+21$ при делење со 13 никогаш не дава остаток 3 или 9, па ако важи $n^3-2n^2+3n+21=3^k$, тогаш $3^k\equiv 1\,(\text{mod}13)$, што значи $k\equiv 0\,(\text{mod}3)$. Тоа значи дека за некој природен број m важи

$$n^3-2n^2+3n+21=3^{3m}=(3^m)^3.$$

Ќе докажеме дека за $n\geq 5$ важи $n^3-2n^2+3n+21<n^3$. Навистина, за $n\geq 5$ важи $2n-1\geq 9$ и $n-1\geq 4$, па затоа $(2n-1)(n-1)\geq 36$, т.е. $-(2n-1)(n-1)\leq -36<-22$, што значи $-(2n-1)(n-1)+22<0$. Според тоа, $n^3-2n^2+3n+21<n^3-(2n-1)(n-1)+22<n^3$. Понатаму, $n^2+22>0$, па затоа $n^3-2n^2+3n+21>n^3-3n^2+3n-1=(n-1)^3$.

Од претходно изнесеното следува дека за $n\geq 5$ важи

$$(n-1)^3<n^3-2n^2+3n+21=3^{3m}<n^3,\text{ т.е. } n-1<3^m<n,$$

што не е можно бидејќи не постои природен број кој се наоѓа меѓу два последователни природни броја. Значи, за $n\geq 5$ задачата нема решение.

Случаите $n=1,3$ или 4 отпаѓаат бидејќи во овие случаи при делење на $n^3-2n^2+3n+21$ со 13 не се добива остаток 1. За $n=2$ добиваме $2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2+21=27=3^3$ и тоа е единственото решение на задачата.

56. Антон на таблата ги запишал вредностите на $3!$, $4!$, $5!$, $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ и $10!$. Потоа избришал една од нив и се покажало дека производот на останатите е квадрат на природен број n. Определи ја цифрата на илјадитите на бројот n.

Решение. Вредностите на $5!$, $6!$, $7!$, $8!$ и $9!$ се деливи со 5, а $10!$ е делив со 5^2. Освен тоа $3!$ и $4!$ не се деливи со 5. Затоа производот $3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 8!\cdot 9!\cdot 10!$ е делив со 5^7. Според тоа, Антон избришал $5!$, $6!$, $7!$, $8!$ или $9!$. Од друга страна секоја од вредностите на $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ и $10!$ е делива на парен степен на 3, а $5!$ е делив само на 3. Оттука следува, дека Антон го избришал $5!$. По бришењето на $5!$ производот на останатите броеви е $N=3!\cdot 4!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 8!\cdot 9!\cdot 10!$. Каноничниот запис на овој број е $N=2^{34}\cdot 3^{16}\cdot 5^{6}\cdot 7^{4}$, т.е. $N=n^2=(2^{17}\cdot 3^{8}\cdot 5^{3}\cdot 7^{2})^2$ од каде добиваме $n=(2\cdot 5)^3\cdot 2^{14}\cdot 3^{8}\cdot 7^{2}=2^{14}\cdot 3^{8}\cdot 7^{2}\cdot 10^{3}$. Тоа значи дека последните три цифри на n се три нули. Затоа цифрата на илјадитите на n е остатокот на бројот $2^{14}\cdot 3^{8}\cdot 7^{2}$ при делење со 10. Лесно се гледа, дека $2^{14}\equiv 4(\mathrm{mod}10)$, $3^{8}\equiv 1(\mathrm{mod}10)$ и $7^{2}\equiv 9(\mathrm{mod}10)$. Конечно, $2^{14}.3^{8}.7^{2}\equiv 6(\mathrm{mod}10)$, што значи дека бараната цифра е 6.

57. Природните броеви m и n се такви што бројот $m-n$ е непарен. Докажи дека бројот $(m+3n)(5m+7n)$ не е точен квадрат.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното и нека $d=\mathrm{NZD}(m,n)$. Тогаш $m=dx, n=dy,\ \mathrm{NZD}(x,y)=1$ и

$$(m+3n)(5m+7n)=d^2(x+3y)(5x+7y).$$

Бидејќи $m-n$ е непарен, истото важи и за $x-y$. Нека c е најголемиот заеднички делител на $x+3y$ и $5x+7y$. Броевите $x+3y$ и $5x+7y$ се непарни, па затоа и c е непарен. Јасно, c е делител на $3(5x+7y)-7(x+3y)=8x$ и на $5(x+3y)-(5x+7y)=8y$, па затоа тој е делител на x и на y. Но, $\mathrm{NZD}(x,y)=1$, па затоа $c=1$.

Сега од претпоставката следува дека $x+3y=a^2$ и $5x+7y=b^2$, каде a и b се непарни природни броеви. Бидејќи броевите a и b се непарни добиваме $b^2-a^2\equiv 0(\mathrm{mod}8)$. Од друга страна $b^2-a^2=4(x+y)$, каде $x+y=2x-(x-y)$ е непарен број, што значи дека 8 не е делител на b^2-a^2, противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

58. Во множеството природни броеви решија равенката

$$\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}=\tfrac{4}{5}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\le y\le z$, односно $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}$. Оттука добиваме $\frac{3}{x}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$, па затоа $x\le\frac{15}{4}$. Според тоа, $x\in\{1,2,3\}$.

1) Ако $x=1$, тогаш $\frac{4}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{4}{5}$, што е противречност.

2) Ако $x=2$, тогаш $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$. Според тоа, $\frac{2}{y}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$, па затоа $y\leq\frac{20}{3}$ и како $y>\frac{10}{3}$ добиваме $y\in\{4,5,6\}$. За $y=4$ добиваме $z=20$, за $y=5$ добиваме $z=10$, а за $y=6$ добиваме $z=\frac{15}{2}$, што не е решение.

3) Ако $x=3$, тогаш $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15}$. Аналогно како под 2) добиваме $y\leq\frac{30}{7}$ и $y\geq\frac{15}{7}$, па затоа $y\in\{3,4\}$. Лесно се проверува дека и во двата случаја во мноеството природни броеви немаме решение на равенката.

Конечно, сите решенија на дадената равенка се:

$$(2,4,20),(2,20,4),(4,2,20),(4,20,2),(20,2,4),(20,4,2),$$
$$(2,5,10),(2,10,5),(5,2,10),(5,10,2),(10,2,5),(10,5,2).$$

59. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\text{NZS}(x,y)}+\frac{1}{\text{NZD}(x,y)}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y$. Нека $d=(x,y)$, т.е. $x=du, y=dv$ и $\text{NZD}(u,v)=1$. Тогаш $\text{NZS}(x,y)=duv$ и како $x\geq y$ добиваме $u\geq v$. Со замена во почетната равенка последователно добиваме

$$\frac{1}{du}+\frac{1}{dv}+\frac{1}{duv}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$$
$$2(1+u+v+uv)=duv$$
$$2(1+u)(1+v)=duv.$$

Од $\text{NZD}(u,u+1)=1$ следува $u\,|\,2(1+v)$ и $1+u\,|\,dv$. Ако $u=v$, тогаш $u\,|\,(2+2u)$, па затоа $u\,|\,2$, т.е. $u=1$ или $u=2$. За $u=v=1$ добиваме $d=8$ и со проверка заклучуваме дека $x=y=8$ навистина е решение на почетната равенка. За $u=v=2$ добиваме $18=4d$, што не е можно бидејќи $4\nmid 18$. Затоа сега $u\geq 1+v$ и равенката може да се запише во видот

$$dv=\frac{2(1+v)}{u}(1+u)\leq\frac{2u}{u}(1+u)=2(1+u).$$

Но, $1+u\,|\,dv$, па затоа $\frac{dv}{1+u}$ е природен број помал или еднаков на 2.

Затоа $dv=1+u$ или $dv=2(1+u)$.

Ако $dv=1+u$, тогаш $2(1+v)=u$, па затоа $dv=1+2+2v=3+2v$. Според тоа, $v(d-2)=3$, што значи $v\,|\,3$, па затоа $v=1$ или $v=3$. За $v=1$ добиваме $u=4, d=5$ и $x=20, y=5$, а за $v=3$ добиваме $u=8, d=3$ и $x=24, y=9$. Лесно се проверува дека $x=20, y=5$ и $x=24, y=9$ се решенија на почетната равенка.

Ако $dv=2(1+u)$, тогаш $1+v=u$, па затоа $dv=2+2+v=4+v$. Според тоа, $v(d-1)=4$, што значи $v\,|\,4$, па затоа $v=1$ или $v=2$ или $v=4$. За $v=1$ добиваме $u=2, d=2$ и $x=4, y=2$, за $v=2$ добиваме $u=3$, $d=4$ и $x=12, y=6$ и за $v=4$ добиваме $u=5, d=3$ и $x=15, y=12$. Лесно се проверува дека $x=4, y=2$; $x=12, y=6$ и $x=15, y=12$ се решенија на почетната равенка.

Конечно, сите решенија на почетната равенка се:

$$(x,y)\in\{(8,8),(9,24),(24,9),(5,20),(20,5),(12,5),$$
$$(5,12),(8,12),(12,8),(6,12),(12,6)\}$$

60. Докажи дека равенката

$$a^3+b^3+c^3+d^2+e^2=2008$$

има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

Решение. Имаме, $2008=8+2000=2^3+1600+400=2^3+40^2+20^2$ па затоа за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$2^3+n^3+(-n)^3+40^2+20^2=2008,$$

што значи дека подредените петторки $(2,n,-n,40,20)$, $n\in\mathbb{N}$ се решенија на дадената равенка, т.е. таа има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

61. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a^3+b^3+3ab=1$.

Решение. Од равенството

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

следува

$$\begin{aligned}a^3+b^3+3ab=1 \quad &\Leftrightarrow \quad a^3+b^3+(-1)^3-3ab(-1)=0\\ &\Leftrightarrow \quad (a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+b+a)=0\\ &\Leftrightarrow \quad (a+b-1)((2a-b+1)^2+3(b+1)^2)=0,\end{aligned}$$

од каде добиваме $(a,b)=(-1,-1)$ и $(a,b)=(n,1-n), n\in\mathbb{Z}$.

62. Определи ги сите решенија на равенката

$$p-x^4=4$$

каде p е прост број, а x е цел број.

Решение. Имаме

$$p=x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=((x-1)^2+1)((x+1)^2+1).$$

Броевите на десната страна на низата равенства се позитивни и како простиот број p има два делители можни се два случаја.

1) $(x-1)^2+1=1$, од каде добиваме $x=1$ и $p=5$.

2) $(x+1)^2+1=1$, од каде добиваме $x=-1$ и $p=5$.

Според тоа, единствени решенија се $(x,p)\in\{(-1,5),(1,5)\}$.

63. Определи ги сите природни броеви a,b,c такви што

$$a+b+c=15$$
$$(a-3)^2+(b-5)^2+(c-7)^2=540.$$

Решение. Воведуваме замени $a-3=x, b-5=y, c-7=z$ и добиваме $x+y+z=0$ и $x^3+y^3+z^3=540$. Ако го искористиме познатиот идентитет

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

тогаш од $x+y+z=0$ следува $x^3+y^3+z^3=3xyz=540$, т.е.

$$xyz=180 \text{ и } x+y+z=0.$$

Бидејќи $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, не може два од броевите x,y,z да се парни, бидејќи тогаш третиот ќе биде непарен, што противречи на условот $x+y+z=0$. Аналогно се добива дека само еден од броевите x,y,z е делив со 3. Сега е јасно дека

$(x,y,z)\in\{(-4,-5,9),(-5,-4,9),(9,-5,-4),(9,-4,-5),(-5,9,-4),(-4,9,-5)\}$

од каде добиваме

$$(a,b,c)\in\{(-1,0,16),(-2,1,16),(12,0,3),(12,1,2),(-2,14,3),(-1,14,2)\}.$$

64. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2+u^2=3(x+y+z+u).$$

Решение. Ако дадената равенка ја помножиме со 4 и додадеме на двете страни 36, после средувањето ја добиваме равенката

$$(2x-3)^2+(2y-3)^2+(2z-3)^2=(2u-3)^2=36\,.$$

Единствени квадрати на непарни броеви кои се помали од 36 се 25, 9 и1. Бројот 36, како збир на четири собирци кои се еднакви на 1, 9 или 25 може да се запише на два начина и тоа: $9+9+9+9$ и $25+9+1+1$.

Значи, едно решение е $(2x-3)^2=(2y-3)^2=(2z-3)^2=(2u-3)^2=9$, од каде бидејќи $2n-3\geq -1$ за секој природен број n добиваме $2x-3=2y-3=2z-3=2u-3=3$, односно $x=y=z=u=3$.

Во случајот кога 36 е запишан како $25+9+1+1$, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека

$$(2x-3)^2=25, (2y-3)^2=9, (2z-3)^2=(2u-3)^2=1\,.$$

Сега од $2n-3\geq -1$, за секој природен број n следува $2x-3=5$, $2y-3=3$, односно $x=4, y=3$, а за $2z-3$ и $2u-3$ можни вредности се 1 и -1, односно z и u може да се еднакви на 2 или 1.

Конечно, сите решенија на задачата се: $(3,3,3,3)$ и сите пермутации на подредените четворки $(5,3,2,2), (5,3,2,1)$ и $(5,3,1,1)$.

65. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x+y)^2(x^2+y^2)=2009\,.$$

Решение. Нека $x+y=s, xy=p$. Тогаш равенката го добива видот

$$s^2(s^2-2p)=2009=7^2\cdot 41\,.$$

Бидејќи 7 е прост број, можни се два случаја $s^2=1$ или $s^2=7^2$.

Ако $s^2=1$, тогаш $1-2p=2009$, од каде наоѓаме $p=-1004$. Понатаму, од $s^2=1$ следува $s=1$ или $s=-1$. Ако $s=1$, тогаш добиваме $-4\cdot 251=-1004=xy=x(1-x)$ и лесно се гледа дека последната равенка нема решение во множеството цели броеви. Ако $s=-1$, тогаш $-4\cdot 251=-1004=xy=x(-1-x)=-x(1+x)$ и последната равенка повторно нема решение во множеството цели броеви.

Ако $s^2=7^2$, тогаш $49-2p=41$, т.е. $p=4$. Значи, треба да важи $x+y=\pm 7$ и $xy=4$, што во множеството цели броеви не е можно, бидејќи тогаш од $xy=4$ следува дека

$$(x,y)\in\{(1,4),(2,2),(4,1),(-1,-4),(-2,2-2),(-4,-1)\}\,,$$

а збирот на броевите од овие подредени парови е различен од ± 7.

Според тоа, дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

66. Определи ги сите парови цели броеви (m,n) кои ја задоволуваат равенката

$$m^5 - n^5 = 16mn.$$

Решение. Ако еден од m или n е 0, тогаш и другиот мора да е 0 и $(m,n) = (0,0)$ е едно решение на задачата. Нека $mn \neq 0$ и нека $d = \text{NZD}(m,n)$ и $m = da$, $n = db$, $a,b \in \mathbb{Z}$ така што $\text{NZD}(a,b) = 1$. Тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$d^3a^5 - d^3b^5 = 16ab \qquad (1).$$

Од горната равенка заклучуваме дека $a \mid d^3b^5$, од каде $a \mid d^3$. Слично се покажува дека $b \mid d^3$. Бидејќи $\text{NZD}(a,b) = 1$, добиваме $ab \mid d^3$, па можеме да запишеме $d^3 = abr$ за $r \in \mathbb{Z}$. Тогаш, равенката (1) преминува во

$$r(a^5 - b^5) = 16.$$

Според тоа, разликата $a^5 - b^5$ мора да е делител на 16, што значи дека

$$a^5 - b^5 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16.$$

Ако $|a^5 - b^5| = 1$, тогаш $a = \pm 1$ и $b = 0$ или $a = 0$ и $b = \pm 1$, што претставува контрадикција. Ако $|a^5 - b^5| = 2$, тогаш $a = 1$ и $b = -1$ или $a = -1$ и $b = 1$. Тогаш $r = -8$, и $d^3 = -8$ или $d = -2$. Според тоа, $(m,n) = (-2,2)$. Ако $|a^5 - b^5| > 2$, тогаш без губење на општост, нека $a > b$ и $a \geq 2$. Ставаме $a = x + 1$ за $x \geq 1$ и добиваме

$$\begin{aligned} |a^5 - b^5| &= |(x+1)^5 - b^5| \geq |(x+1)^5 - x^5| \\ &= |5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1| \geq 31 \end{aligned}$$

што не е можно. Според тоа, единствените решенија се $(m,n) = (0,0)$ или $(-2,2)$.

67. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$(xy)^2-14xy+49=x^2+y^2$$

$$(xy)^2-12xy+49=x^2+2xy+y^2$$

$$(xy-6)^2+13=(x+y)^2$$

$$(xy-6)^2-(x+y)^2=-13$$

$$(xy+x+y-6)(xy-x-y-6)=-13.$$

Бидејќи $-13=13\cdot(-1)=(-13)\cdot 1$, од последната равенка ги добиваме следниве случаи.

1) $xy+x+y-6=13$ и $xy-x-y-6=-1$. Ако ги собереме равенките добиваме $xy=12$, па затоа $(x,y)\in\{(1,12),(2,6),(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)\}$. Со непосредна проверка се добива дека само паровите $(3,4)$ и $(4,3)$ ги задоволуваат горните равенки.
2) $xy+x+y-6=1$ и $xy-x-y-6=-13$. Ако ги собереме равенките добиваме $xy=0$. За $x=0$ добиваме $y=7$, а за $y=0$ добиваме $x=7$.
3) $xy+x+y-6=-13$ и $xy-x-y-6=1$. Ако ги собереме равенките добиваме $xy=0$. За $x=0$ добиваме $y=-7$, а за $y=0$ добиваме $x=-7$, што не е можно бидејќи решенијата на равенката ги бараме во множеството ненегативни цели броеви.
4) $xy+x+y-6=-1$ и $xy-x-y-6=13$. Ако ги собереме равенките добиваме $xy=12$. Заменуваме во втората равенка и добиваме $x+y=-7$, што не е можно бидејќи решенијата на равенката ги бараме во множеството ненегативни цели броеви.

Конечно, единствени ненегативни решенија на дадената равенка се $(x,y)\in\{(3,4),(4,3),(0,7),(7,0)\}$.

68. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$9x^2y^2+9xy^2+6x^2y+18xy+x^2+2y^2+5x+7y+6=0.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$(9y^2+6y+1)x^2+(9y^2+18y+5)x+2y^2+7y+6=0$$

$$(3y+1)^2x^2+((3y+1)^2+12y+4)x+2y^2+7y+6=0$$

$$(3y+1)^2x^2+(3y+1)^2x+4(3y+1)x+2y^2+7y+6=0.$$

Од последната равенка следува дека $3y+1$ е делител на $2y^2+7y+6$, па затоа е делител и на

$$9(2y^2+7y+6)=18y^2+63y+54=2(3y+1)^2+17(3y+1)+35.$$

Последното значи дека $3y+1$ е делител на 35, па затоа

$3y+1\in\{-35,-7,-5,-1,1,5,7,35\}$.

Но, y е цел број, па затоа $y\in\{-12,-2,0,2\}$. За $y=-12$, ја добиваме равенката $1255x^2+725x+210=0$, т.е. равенката $245x^2+145x=-42$, која нема целобројни решенија бидејќи левата страна е делива со 5, а десната страна не е делива со 5. За $y=-2$ ја добиваме равенката $25x^2+5x=0$, т.е. равенката $x(5x+1)=0$ чие решение во множеството цели броеви е $x=0$. За $y=0$ ја добиваме равенката $x^2+5x+6=0$, т.е. равенката $(x+2)(x+3)=0$ чии решенија се $x=-2$ и $y=-3$. За $y=2$ ја добоваме равенката $49x^2+77x+28=0$, т.е. равенката $(x+1)(7x+4)=0$ која има целобројно решение $x=-1$.

Конечно, целобројните решенија на почетната равенка се $(0,-2)$, $(-2,0)$, $(-3,0)$ и $(-1,2)$.

69. Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+3y=u^2 \\ y^2+3x=v^2. \end{cases}$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $y\geq x$. Оттука следува

$$y^2<y^2+3x=v^2\leq y^2+3y<y^2+4y+4=(y+2)^2,$$

па затоа $y<v<y+2$, што значи дека $v=y+1$. Со замена во втората равенка добиваме $3x=2y+1$. Ако првата равенка на системот ја помножиме со 9 и замениме $3x=2y+1$, добиваме $(2y+1)^2+27y=9u^2$.

Од последната равенка следува $3|(2y+1)^2$, па затоа $3|2y+1$, што значи дека $y=3k-2$, за некој природен број k. Ако замениме во последната равенка, по средувањето добиваме

$$(2k-1)^2+3(3k-2)=u^2\text{, т.е. } 4k^2+5k-5=u^2.$$

Но,

$$(2k)^2 \le 4k^2 + 5k - 5 < 4k^2 + 8k + 4 = (2k+2)^2,$$

па од последната равенка заклучуваме дека $2k \le u < 2k+2$, па затоа $u = 2k$ или $u = 2k+1$. Ако $u = 2k$, тогаш со замена во последната равенка добиваме $k = 1$, а оттука $x = y = 1$ и $u = v = 2$. Ако $u = 2k+1$, со замена во истата равенка добиваме $5k - 5 = 4k + 1$, т.е. $k = 6$ и оттука добиваме $y = 16, x = 11, \ u = 13, v = 17$.

Конечно, од претходните разгледувања следува:

$$(x, y, u, v) \in \{(1,1,2,2), (11,16,13,17), (16,11,17,13)\}$$

70. Докажи дека равенката

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 2000$$

нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. Без ограничување наопштоста можеме да земеме дека x, y и z се ненегативни броеви. Ќе докажеме дека x, y и z се различни броеви. Навистина, ако $y = z$, тогаш равенката го добива видот $x^4 - 4x^2z^2 = 2000$. Јасно, x мора да биде парен број, т.е. $x = 2k$, па затоа равенката го добива обликот $k^2(k^2 - z^2) = 125$. Единствени полни квадрати кои се делители на 125 се 1 и 25. Ако $k^2 = 1$, тогаш добиваме $1 - z^2 = 125$, што не е можно, а ако $k^2 = 25$, добиваме $25 - z^2 = 5$ т.е. $z^2 = 20$, што повоторно не е можно. Значи, $y \ne z$, па од причини на симетрија следува дека сите броеви се различни меѓу себе. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x > y > z$. Тогаш

$$\begin{aligned}2000 &= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)z^2 + z^4 - 4y^2z^2 \\ &= (x^2 - y^2 - z^2)^2 - (2yz)^2 \\ &= (x^2 - y^2 - z^2 - 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) \\ &= (x^2 - (y+z)^2)(x^2 - (y-z)^2) \\ &= (x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z).\end{aligned}$$

Јасно,

$$x + y + z > x + y - z > x - y + z > x - y - z.$$

Понатаму, бидејќи $x^4 + y^4 + z^4$ е парен број,најмалку еден од броевите x, y и z е парен, а преостанатите два броја се со иста парност. Оттука следува дека и броевите $x+y+z, x+y-z, x-y+z, x-y-z$ се парни. Но, $16\,|\,2000$, а $32\nmid 2000$, па затоа ниту еден од броевите $x+y+z$, $x+y-z, x-y+z, x-y-z$ не е делив со 4. Четирите најмали парни делители на 2000 кои не се деливи со 4 се 2, 10, 50 и 250. Значи,

$$(x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)\geq 2\cdot 10\cdot 50\cdot 250 > 2000\,,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

71. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3 - y^3 = 999\,. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Од $x, y\in\mathbb{N}$ и $x^3-y^3>0$ следува $x>y$. Нека $x=y+d$, $d\in\mathbb{N}$. Со замена во (1), после идентични трансформации добиваме

$$d^3+3d(d^2+yd)=999\,,$$

од каде следува дека $d\,|\,999$, $3\,|\,d$ и $d^3<999$. Според тоа, $d<10$ и како $3\,|\,d$ имаме $d=3$ или $d=9$.

За $d=3$ добиваме $27+9(y^2+3y)=999$, т.е. $y^2+3y-108=0$. Значи, $(y-9)(y+12)=0$ и како $y\in\mathbb{N}$, наоѓаме $y=9$, па затоа $x=y+3=12$.

За $d=9$ добиваме $729+27(y^2+9y)=999$, т.е. $y^2+9y-10=0$. Значи, $(y-1)(y+10)=0$ и како $y\in\mathbb{N}$, наоѓаме $y=1$, па затоа $x=y+9=10$.

Конечно, бараните решенија се $(x,y)\in\{(12,9),(10,1)\}$.

Втор начин. Равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=3^3\cdot 37\,.$$

Бидејќи 37 е прост број и 37 е делител на десната страна, следува дека тој е делител и на левата страна. Но, $37>27$ и

$$x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy>x-y\,,$$

па затоа 37 е делител на x^2+xy+y^2. Можни се следниве случаи:

i) $x-y=1, x^2+xy+y^2=999$. Тогаш $999=(x-y)^2+3xy$, па затоа $3\,|\,x-y=1$, што не е можно.

ii) $x-y=3, x^2+xy+y^2=333$, од каде следува $(2y+3)^2=21^2$, па затоа $y=9, x=12$.

iii) $x-y=9, x^2+xy+y^2=111$, од каде следува $(2y+9)^2=11^2$, па затоа $y=1, x=10$.

iv) $x-y=27, x^2+xy+y^2=37$, од каде добиваме

$$37=x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy>27^2,$$

што е противречност.

Конечно, бараните решенија се $(x,y)\in\{(12,9),(10,1)\}$.

72. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^3+b^3+c^3=2001.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\le b\le c$. Од $13^3=2197>2001=a^3+b^3+c^3$ следува $c<13$. Понатаму, $3c^3\ge a^3+b^3+c^3=2001$, па затоа $c^3>667$, т.е. $c>8$. Значи, $c\in\{9,10,11,12\}$.

1) Ако $c=9$, тогаш $a^3+b^3=1272$. Сега, од $11^3=1331>1272=a^3+b^3$ следува $b<11$, а од $2b^3\ge a^3+b^3=1272$ следува $b^3>636$, т.е. $b>8$. Значи, $b\in\{9,10\}$. За $b=9$ добиваме $a^3=543$, а за $b=10$ добиваме $a^3=272$, т.е. добиваме равенки кои немаат решенија во множеството природни броеви.

2) Ако $c=10$, тогаш $a^3+b^3=1001$. На потполно аналоген начин како во 1) се добива дека $b<11$ и $b>7$. Според тоа, $b\in\{8,9,10\}$. За $b=8$ добиваме $a^3=489$, за $b=9$ добиваме $a^3=272$ и за $b=10$ добиваме $a^3=1$. Јасно, во множеството природни броеви има решение само последната равенка, при што $a=1$, па едно решение на задачата е подредената тројка $(1,10,10)$.

3) Ако $c=11$, тогаш $a^3+b^3=670$. Аналогно како во 1) заклучуваме дека $b<9$ и $b>6$. Според тоа, $b\in\{7,8\}$. За $b=7$ добиваме $a^3=323$, а за $b=8$ добиваме $a^3=158$, при што и во двата случаја добиените равенки немаат решенија во множеството природни броеви.

4) Ако $c=12$, тогаш $a^3+b^3=273$. Аналогно како во 1) заклучуваме дека $b<7$ и $b>5$. Според тоа, $b=6$ и $a^3=57$ и последната равенка нема решение во множеството природни броеви.

Конечно, сите решенија на задачата се подредените тројки $(1,10,10)$, $(10,1,10)$ и $(10,10,1)$.

73. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) такви што

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p,$$

каде p е прост број поголем од 3.

Решение. Имаме

$$p=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Бидејќи x,y,z се природни броеви, важи $x+y+z>1$, па затоа

$$x+y+z=p$$

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2. \qquad (1)$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y\geq z$. Во (1) два од собирците мора да се еднакви на 1, а едниот мора да е еднаков на 0.

1) Ако $x-z=0$, тогаш од $x\geq y\geq z$ следува $x=y=z$, па затоа $x-y=y-z=z-x=0$, што противречи на (1).

2) Ако $x-y=0$, тогаш $x=y, y-z=x-z=1$, па затоа $x=y=z+1$. Значи, $3z+2=p$, од каде добиваме $p\equiv 2\,(\text{mod}\,3)$. Според тоа, ако $p\equiv 2\,(\text{mod}\,3)$, тогаш решенија се $z=\frac{p-2}{3}, x=y=\frac{p+1}{3}$, а ако $p\not\equiv 2\,(\text{mod}\,3)$, тогаш задачата нема решение.

3) Ако $y-z=0$, тогаш $y=z, x-z=x-y=1$, па е $x=z+1$. Значи, $3a+1=p$, од каде добиваме $p\equiv 1(\text{mod}\,3)$. Според тоа, ако $p\equiv 1(\text{mod}\,3)$, тогаш решенија се $y=z=\frac{p-1}{3}, x=\frac{p+2}{3}$, а ако $p\not\equiv 1(\text{mod}\,3)$, тогаш задачата нема решение.

74. Определи ги сите прости броеви $p_1,p_2,p_3,...,p_{13}$ такви што $p_1\leq p_2 \leq p_3\leq ...\leq p_{13}$,

$$p_1^2+p_2^2+...+p_{12}^2=p_{13}^2 \qquad (1)$$

и еден од броевите е еднаков на $2p_1+p_9$.

Решение. Бидејќи простите броеви се поголеми од 1 заклучуваме дека

$$p_{13}^2 \geq 12 \cdot 2^2 = 48 \text{, т.е. } p_{13} > 6 .$$

Нека k од бараните прости броеви се еднакви на 2. Бидејќи p_{13} е непарен број, а $(2n+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$ ако дадената равека ја разгледаме по модул 8 добиваме

$$4k + 12 - k \equiv 1 \pmod 8 \text{, т.е. } 3k + 11 \equiv 0 \pmod 8 .$$

Ако последната конгруенција ја помножиме со 3 добиваме дека $k + 1 \equiv 0 \pmod 8$. Но, $k \leq 12$, па затоа $k = 7$. Значи, $p_1 = p_2 = ... = p_7 = 2$ па затоа равенката (1) се сведува на

$$28 + p_8^2 + p_9^2 + p_{10}^2 + p_{11}^2 + p_{12}^2 = p_{13}^2 , \qquad (2)$$

при што еден од броевите $p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}$ е еднаков на $4 + p_9$. Нека s е бараните броеви се еднакви на 3. Ако искористиме дека $(3k \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 3$, тогаш од последната равенка следува

$$28 + 5 - s \equiv 1 \pmod 3 \text{, т.е. } s \equiv 2 \pmod 3$$

и од $s \leq 5$ добиваме $s = 2$ или $s = 5$. За $s = 5$ важи $28 + 5 \cdot 9 = 73 \neq p_{13}^2$, па затоа во случајов немаме решение на задачата. Значи, $s = 2$, $p_8 = p_9 = 3$ и равенката (2) се сведува на

$$46 + p_{10}^2 + p_{11}^2 + p_{12}^2 = p_{13}^2 , \qquad (3)$$

при што еден од броевите p_{10}, p_{11}, p_{12} е еднаков на 7. Понатаму, ако $p_{10} = p_{11} = 5$, тогаш $p_{12} = 7$ и левата страна на (3) е делива со 5, што не е можно бидејќи $p_{13} > 6$. Според тоа, $p_{10} = 5$ и $p_{11} = 7$, или $p_{10} = 7$. Ако $p_{10} = 5$ и $p_{11} = 7$, тогаш треба да ја решиме равенката

$$120 = p_{13}^2 - p_{12}^2 , \qquad (4)$$

Од (4) следува $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = (p_{13} - p_{12})(p_{13} + p_{12})$, па затоа

$$\begin{cases} p_{13} - p_{12} = 2 \\ p_{13} + p_{12} = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{13} - p_{12} = 4 \\ p_{13} + p_{12} = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{13} - p_{12} = 6 \\ p_{13} + p_{12} = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{13} - p_{12} = 10 \\ p_{13} + p_{12} = 12 \end{cases}$$

од каде ги добиваме решенијата $(p_{12}, p_{13}) \in \{(7,13), (13,17), (29,31)\}$. Ако $p_{10} = 7$, тогаш ја добиваме равенката $95 + p_{11}^2 + p_{12}^2 = p_{13}^2$, која во множеството прости броеви поголеми од 5 нема решение бидејќи заради $(5k \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 5$ и $(5k \pm 2)^2 \equiv 4 \pmod 5$ при делење со 5 нејзината лева страна дава остаток 0, 2 или 3, а нејзината десна страна дава остаток 1 или 4.

Конечно, решенијата на задалата се:

$$(2,2,2,2,2,2,2,3,3,5,7,7,13),$$
$$(2,2,2,2,2,2,2,3,3,5,7,13,17),$$
$$(2,2,2,2,2,2,2,3,3,5,7,29,31).$$

75. Определи природен број n за кој постои цел број x таков што

$$499\cdot(1997^n+1)=x^2+x.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$1996\cdot(1997^n+1)=4x^2+4x$$
$$(1997-1)(1997^n+1)+1=4x^2+4x+1$$
$$1997^{n+1}-1997^n+1997=(2x+1)^2$$
$$1997\cdot(1997^n-1997^{n-1}+1)=(2x+1)^2.$$

За $n=1$ добиваме $1997^2=(2x+1)^2$, од каде наоѓаме $x=998$. Значи, $n=1$ е решение на задачата. Нека претпоставиме дека $n>1$. Бројот 1997 е прост, па затоа од $1997\,|\,(2x+1)^2$ следува дека $1997\,|\,2x+1$, што значи дека $1997^2\,|\,(2x+1)^2$. Последното значи дека

$$1997^2\,|\,1997\cdot(1997^n-1997^{n-1}+1),\text{ т.е. } 1997\,|\,(1997^n-1997^{n-1}+1)$$

што не е можно бидејќи од $n>1$ следува $1997\,|\,(1997^n-1997^{n-1})$. Значи, за $n>1$ равенката нема решение, па затоа единствен природен број кој ги задоволува условите на задачата е $n=1$.

76. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$125\cdot 2^n-3^m=271.$$

Решение. Ако равенката ја разгледаме по модул 5 добиваме $3^m\equiv 1\,(\text{mod}\,5)$, па затоа $m=4k+2$ за некој природен број k. Ако равенката ја разгледаме по модул 7 добиваме $-2^n-9^{2k+1}\equiv 5\,(\text{mod}\,7)$, од каде следува $2^n+2^{2k+1}\equiv 2\,(\text{mod}\,7)$. Бидејќи $2^s\equiv 1,2,4\,(\text{mod}\,7)$ за $s\equiv 0,1,2\,(\text{mod}\,3)$, соодветно, можно е само $2^n\equiv 2^{2k+1}\equiv 1(\text{mod}\,7)$, па така $3\,|\,n$ и $3\,|\,2k+1$. Според тоа $3\,|\,m$ и $3\,|\,n$, т.е. $n=3x$ и $m=3y$. Според тоа, дадената равенка можеме да ја запишеме во обликот $5^3\cdot 2^{3x}-3^{3y}=271$ или

$$(5\cdot 2^x - 3^y)(25\cdot 2^{2x} + 5\cdot 2^x \cdot 3^y + 3^{2y}) = 271.$$

Од последното равенство следува $25\cdot 2^{2x} + 5\cdot 2^x \cdot 3^y + 3^{2y} \le 271$, па затоа $25\cdot 2^{2x} \le 271$, од каде добиваме $x<2$. Со замена $x=1$ во $5^3\cdot 2^{3x} - 3^{3y} = 271$ добиваме $y=2$. Според тоа, единствено решение на дадената равенка е $(m,n)=(6,3)$.

77. Определи ги сите прости броеви *a*, *b*, *c* и природни броеви *k* кои што ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

Решение. Од $9k^2 + 1 \equiv 1 (\bmod 3)$ следува

$$a^2 + b^2 + 16c^2 \equiv 1 (\bmod 3), \text{ т.е. } a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 (\bmod 3).$$

Бидејќи $a^2 \equiv 0,\ 1 (\bmod 3)$, $b^2 \equiv 0,\ 1 (\bmod 3)$ и $c^2 \equiv 0,\ 1 (\bmod 3)$, добиваме

a^2	0	0	0	0	1	1	1	1
b^2	0	0	1	1	0	0	1	1
c^2	0	1	0	1	0	1	0	1
$a^2+b^2+c^2$	0	1	1	2	1	2	2	0

Од претходната табела следува дека два од трите прости броеви треба да се еднакви на 3.

Прв случај. $a=b=3$. Добиваме

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 9k^2 - 16c^2 = 17 \quad \Leftrightarrow$$

$$(3k-4c)(3k+4c) = 17 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3k-4c=1 \\ 3k+4c=17 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c=2, \\ k=3, \end{cases}$$

па едно решение на задачата е $(a,b,c,k)=(3,3,2,3)$.

Втор случај. $c=3$. Јасно, ако $(3,b,3,k)$ е решение на задачата, тогаш и $(b,3,3,k)$ е решение на задачата. Нека $a=3$. Имаме

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$9k^2 - b^2 = 153 \quad \Leftrightarrow$$

$$(3k-b)(3k+b) = 152.$$

Бидејќи броевите $3k-b$ и $3k+b$ се со иста парност, од последната равенка добиваме

$$\begin{cases}3k-b=2\\3k+b=76\end{cases}\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}b=37,\\k=13,\end{cases}$$

и решение е $(a,b,c,k)=(3,37,3,13)$, односно

$$\begin{cases}3k-b=4\\3k+b=38\end{cases}\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}b=17,\\k=7,\end{cases}$$

и решение е $(a,b,c,k)=(3,17,3,7)$.

Конечно, дадената равенка има пет решенија и тоа:

$$(3,3,2,3),\ (3,37,3,13),\ (37,3,3,13),\ (3,17,3,7),\ (17,3,3,7).$$

78. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (x,y,z) такви што

$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=1.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}xy(x^2-y^2)&+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=\\&=xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-y^2+y^2-x^2)\\&=xy(x^2-y^2)-zx(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)-zx(y^2-z^2)\\&=x(x^2-y^2)(y-z)+z(y^2-z^2)(y-x)\\&=(x-y)(y-z)(x(x+y)-z(y+z))\\&=(x-y)(y-z)(x^2-z^2+y(x-z))\\&=(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)\end{aligned}$$

па затоа почетната равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)=1.$$

Оттука заклучуваме дека $x-y,y-z,z-x\in\{-1,1\}$, и како збир на три непарни броја е непарен број добиваме дека мора да важи

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)\neq 0,$$

што не е можно. Значи, дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

79. Одреди ги сите парови (p,q) каде p и q се природни броеви за кои важи

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=q^q.$$

Решение. Имаме

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}\geq(p+1)^{p-1}\geq(p-1)^{p-1}\qquad(1)$$

$$\begin{aligned}(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}&<(p+1)^{p+1}+(p+1)^{p+1}\\&=2(p+1)^{p+1}<(p+2)^{p+2}\end{aligned} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$(p-1)^{p-1}\leq q^q<(p+2)^{p+2}.$$

а) Нека $q=p-1$, односно

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p-1)^{p-1}.$$

Од

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}\geq(p+1)^{p-1}\geq(p-1)^{p-1}$$

имаме $(p-1)^{p+1}=0$ и $(p+1)^{p-1}=(p-1)^{p-1}$, па затоа $p=1,q=0$. Но 0 не е природен од што следува дека равенката

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p-1)^{p-1},$$

а со тоа и почетната равенка во овој случај нема решение во множеството $\mathbb{N}$.

б) Нека $q=p$, односно

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p.$$

Ако $p=1$, тогаш $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=1$ и $p^p=1$. Значи $(p,q)=(1,1)$ е решение на $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p$, а со тоа и на почетната равенка.

Ако $p=2$, тогаш $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=4$ и $p^p=4$. Значи $(p,q)=(2,2)$ е решение на $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p$, а со тоа и на почетната равенка.

Ако $p=3$,тогаш $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=32$ а $p^p=27$. Значи во овој случај немаме решение на $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p$, т.е. немаме решение на почетната равенка.

Ако $p\geq4$, тогаш важи $(p-1)^p>p^{p-1}$. Добиваме

$$\begin{aligned}(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}&>(p+1)^{p-1}+p^{p-1}(p-1)\\&>p^{p-1}+p^{p-1}(p-1)=p^p,\end{aligned}$$

па затоа во овој случај немаме решение на $(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=p^p$, т.е. немаме решение и на почетната равенк.

в) Нека $q=p+1$. Тогаш

$$(p+1)^{p-1}+(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p+1} \quad \Leftrightarrow$$
$$(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p-1}((p+1)^2-1) \quad \Leftrightarrow$$
$$(p-1)^{p+1}=(p+1)^{p-1}p(p+2).$$

Бидејќи p и $p-1$ се заемно прости заклучуваме дека последната равенка нема решение во $\mathbb{N}$, што значи дека во овој случај почетната равенка нема решенија во $\mathbb{N}$.

Конечно, сите решенија на почетната равенка се

$$(p,q)=(1,1) \text{ и } (p,q)=(2,2).$$

80. Докажи, дека бројот $2^n+3^n+5^n+6^n$ не е точен куб за ниту еден природен број n.

Решение. Од малата теорема на Ферма следува

$$2^6 \equiv 3^6 \equiv 5^6 \equiv 6^6 \equiv 1 (\bmod 7).$$

Ако $n=6k$, тогаш $2^n+3^n+5^n+6^n \equiv 1+1+1+1=4 (\bmod 7)$.

Ако $n=6k+1$, тогаш $2^n+3^n+5^n+6^n \equiv 2+3+5+6 \equiv 2 (\bmod 7)$.

Ако $n=6k+2$, тогаш $2^n+3^n+5^n+6^n \equiv 2^2+3^2+5^2+6^2 \equiv 4 (\bmod 7)$.

Ако $n=6k+3$, тогаш $2^n+3^n+5^n+6^n \equiv 2^3+3^3+5^3+6^3 \equiv 5 (\bmod 7)$.

Ако $n=6k+4$, тогаш $2^n+3^n+5^n+6^n \equiv 2^4+3^4+5^4+6^4 \equiv 2 (\bmod 7)$.

Ако $n=6k+5$, тогаш $2^n+3^n+5^n+6^n \equiv 2^5+3^5+5^5+6^5 \equiv 4 (\bmod 7)$.

Според тоа, бројот $2^n+3^n+5^n+6^n$ при делење со 7 може да дава само остатоци 2, 4 или 5. Од друга страна

$$(7k)^3 \equiv 0 (\bmod 7),$$
$$(7k+1)^3 \equiv (7k+2)^3 \equiv (7k+4)^3 \equiv 1 (\bmod 7),$$
$$(7k+3)^3 \equiv (7k+5)^3 \equiv (7k+6)^3 \equiv 6 (\bmod 7),$$

т.е. точен куб на природен број при делење со 7 дава остатоци 0, 1 или 6.

Сега тврдењето на задачата следува од факто дека 0, 1 и 6 се разликуваат по модул 7 од 2, 4 и 5,

81. Определи ги сите прости броеви p такви што

$$13 \mid (2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5).$$

Решение. Ако $p=2$, тогаш $2^{2^2}+3^{2^2}+4^{2^2}-5=16+81+256-5=348$ и $13\nmid 348$.

Ако $p=3$, тогаш

$$2^{3^2}+3^{3^2}+4^{3^2}-5=512+27^3+512^2-5\equiv 5+1^3+5^2-5\equiv 0(\mathrm{mod}\,6),$$

па значи $p=3$ е решение.

Ако $p>3$, тогаш $p=6k\pm 1$, па затоа

$$p^2=36k^2\pm 36k+1=12(3k^2\pm 1)+1=12l+1,$$

за некои $k,l\in\mathbb{N}$. Од малата теорема на Ферма следува

$$2^{12}\equiv 3^{12}\equiv 4^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,13),$$

од што следува

$$2^{12l}\equiv 3^{12l}\equiv 4^{12l}\equiv 1(\mathrm{mod}\,13), \text{ за } l\in\mathbb{N}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5&=2^{12l+1}+3^{12l+1}+4^{12l+1}-5\\&=2\cdot 2^{12l}+3\cdot 3^{12l}+4\cdot 4^{12l}-5\\&\equiv 2+3+4-5\equiv 4(\mathrm{mod}\,13)\end{aligned}$$

па затоа во овој случај нема решение.

Конечно, единствено решение е $p=3$.

82. Определи ги сите прости броеви од облик $1+2^p+3^p+...+p^p$ каде p е прост број.

Решение. *Прв начин.* За $p=2$ го добиваме бројот $1+2^2=5$, кој е прост број. Нека $p>2$ односно нека p е непарен број. Тогаш бројот

$$1+2^p+...+p^p=(1^p+(p-1)^p)+(2^p+(p-2)^p)+...+((\tfrac{p-1}{2})^p+(\tfrac{p+1}{2})^p)+p^p$$

е делив број со p, бидејќи секој од броевите во заградите е делив со p. Навистина, од

$$k^p\equiv k^p(\mathrm{mod}\,p)\ ,\ p-k\equiv -k(\mathrm{mod}\,p) \text{ и } (p-k)^p\equiv(-k)^p\equiv -k^p(\mathrm{mod}\,p),$$

следува

$$k^p+(p-k)^p\equiv k^p-k^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p).$$

Според тоа, за произволен непарен прост број p број од видот $1+2^p+3^p+...+p^p$ е сложен број.

Конечно, единствено решение на задачата е бројот 5 кој се добива за $p=2$.

Втор начин. Од малата теорема на Ферма следува $a^p \equiv a(\bmod p)$, за секој природен број a и секој прост број p. Затоа

$$1+2^p+3^p+...+p^p \equiv 1+2+...+p=\tfrac{p(p+1)}{2}(\bmod p).$$

Ако p е непарен број, тогаш $p+1$ е парен од каде следува дека $\tfrac{p(p+1)}{2} \equiv 0(\bmod p)$, што значи дека во овој случај задачата нема решение. За $p=2$ добиваме $1+2^2=5$, па затоа единствено решение на задачата е бројот 5.

83. Определи ги сите прости броеви p и q, $p \leq q$ за кои

$$pq \,|\, (5^p-2^p)(7^q-2^q).$$

Решение. Најпрво ќе ја докажеме следната лема.

Лема. Нека r и q се прости непарни броеви такви што $r \leq q$. Ако $r \,|\, 7^q-2^q \quad (r \,|\, 5^q-2^q)$, тогаш $r=5 \quad (r=3)$.

Доказ. Нека $r \,|\, 7^q-2^q$.

1) Нека $r=q$. Според малата теорема на Ферма имаме $7^q \equiv 7(\bmod q)$, $2^q \equiv 2(\bmod q)$, од каде $7^q-2^q \equiv 7-2=5(\bmod q)$. Значи, $r \,|\, 5$, односно $r=5$.

2) Нека $r<q$. Според малата теорема на Ферма имаме $7^{r-1} \equiv 1(\bmod r)$, $2^{r-1} \equiv 1(\bmod r)$. Значи, $7^{r-1} \equiv 2^{r-1}(\bmod r)$. Од тука и од $r \,|\, 7^q-2^q$, следува дека $7^n \equiv 2^n(\bmod r)$ за сите природни броеви кои се деливи со $r-1$ и q. Бидејќи $\text{NZD}(r-1,q)=1$, постојат природни броеви m и k такви што $qk=(r-1)m+1$(или $(r-1)k=qm+1$). Тогаш

$$2^{(r-1)m+1}=2^{qk} \equiv 7^{qk}=7^{(r-1)m+1}=7\cdot 7^{(r-1)m} \equiv 7\cdot 2^{(r-1)m}(\bmod r).$$

Според тоа, $r \,|\, 5\cdot 2^{(r-1)m}$, односно $r=5$.

Аналогно се покажува другото тврдење. ■

Очигледно, p и q се непарни прости броеви.

Ако $p \,|\, 5^p-2^p$, тогаш $p=3$. Според тоа, $3q \,|\, 3^2\cdot 13(7^q-2^q)$, односно $q \,|\, 3\cdot 13(7^q-2^q)$.

Конечно, ако ја искористие горната лема добиваме дека $q \in \{3,5,13\}$.

Ако $p \mid 7^q - 2^q$, тогаш $p = 5$. Според тоа, $5q \mid 3093(7^q - 2^q)$. Бидејќи $3093 = 3 \cdot 1031$ и 1031 е прост број, ако ја искористиме горната лема добиваме $q \in \{3,5,1031\}$.

Значи, $(p,q) = \{(3,3),(3,5),(3,13),(5,3),(5,5),(5,1031)\}$.

84. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се подели на две дисјунктни подмножества такви што производите на елементите во двете подмножества се еднакви.

Решение. Меѓу шест последователни броеви најмногу еден може да биде делив со 7. Ако некој од броевите $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ е делив со 7, тогаш поделбата на множеството на две дисјунктни подмножества со еднакви производи не е можна, бидејќи еден од производите ќе биде делив со 7, а другиот не. Според тоа, меѓу разгледуваните броеви нема делив со 7 и $n = 7k + 1$, за некој ненегативе цел број k.

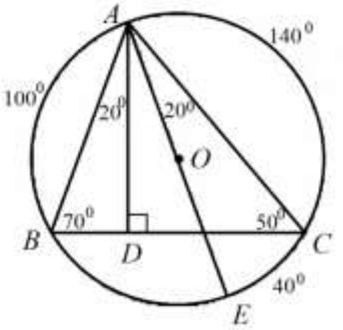
Нека претпоставиме дека бараната поделба е можна и нека x е производот на броевите во секое од подмножествата. Тогаш

$$\begin{aligned} x^2 &= (7k+1)(7k+2)(7k+3)(7k+4)(7k+5)(7k+6) \\ &= 7M + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 6 (\bmod 7), \end{aligned}$$

од каде следува дека $x^6 \equiv 6^6 \equiv 6 (\bmod 7)$. Но, $\mathrm{NZD}(x,7) = 1$ и 7 е прост број, па од малата теорема на Ферма следува дека $x^6 \equiv 1 (\bmod 7)$. Од последните две конгруенции добиваме дека $1 \equiv x^6 \equiv 6 (\bmod 7)$, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека не постои природен број n за кој е можна бараната поделба на множеството $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$.

III ГЕОМЕТРИЈА

1. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ACB=50^\circ$ и $\measuredangle CBA=70^\circ$. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката A кон страната BC, O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и E е точката на кружницата која е дијаметрално спротивна на точката A. Определи ја големината на $\measuredangle DAE$.



Решение. Во правоаголниот $\triangle ABD$ важи $\measuredangle BAD=20^\circ$. Понатаму,

$$\measuredangle AOC=2\measuredangle ABC=140^\circ.$$

Затоа

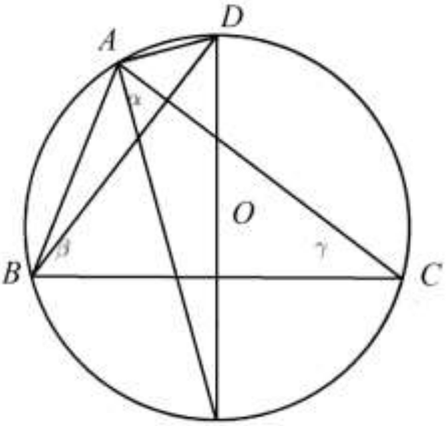
$$\measuredangle COE=180^\circ-\measuredangle AOC=40^\circ,$$

што значи дека $\measuredangle CAE=20^\circ$.

Бидејќи $\measuredangle BAC=60^\circ$, добиваме дека

$$\measuredangle DAE=\measuredangle BAC-\measuredangle BAD-\measuredangle EAC=60^\circ-20^\circ-20^\circ=20^\circ.$$

2. Околу $\triangle ABC, b\geq c$ опишана е кружница. Од средината E на лакот BC кој не ја содржи точката A повлечен е дијаметар ED. Докажи дека $\measuredangle DEA=\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, каде β и γ се аглите на триаголникот во темињата B и C, соодветно.



Решение. Аголот $\measuredangle DAE$ е прав агол, како периферен агол на д сијаметарот DE на кружницата. Понатаму,

$$\measuredangle ADE=\measuredangle ADB+\measuredangle BDE \quad (1)$$

$$\measuredangle ADB=\measuredangle ACB=\gamma \quad (2)$$

(како периферни агли над исти лак AB) и

$$\measuredangle BDE=\measuredangle BAE=\frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

(бидејќи $BE=CE$). Сега од (1), (2) и (3) следува

$$\measuredangle ADE=\gamma+\frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

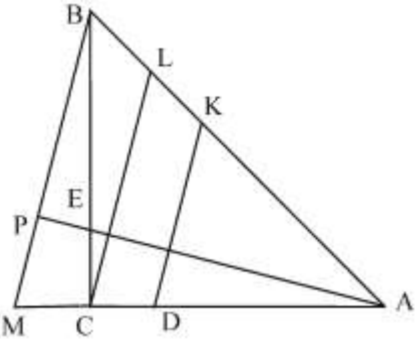
Понатаму, од правоаголниот $\triangle ADE$ добиваме

$$\measuredangle DEA = 90^\circ - \measuredangle ADE = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \measuredangle ADE ,$$

а оттука заради (4) имаме

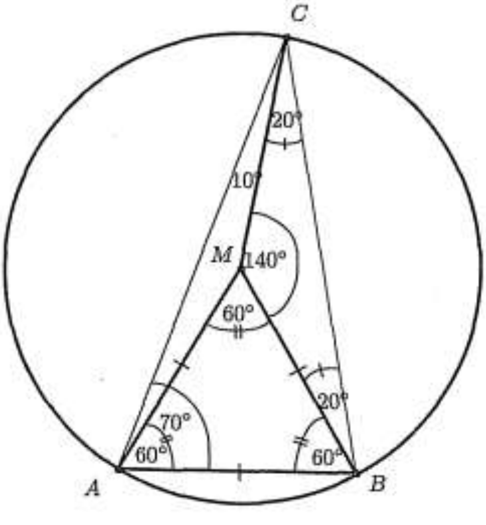
$$\measuredangle DEA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - (\gamma + \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(\beta - \gamma) .$$

3. На катетите CA и CB на рамнокракиот правоаголен триаголник ABC избрани се точки D и E , соодветно, такви што $\overline{CD} = \overline{CE}$. Од точките D и C повлечени се нормали кон правата AE кои ја сечат хипотенузата AB во точките K и L , соодветно. Докажи дека $\overline{KL} = \overline{LB}$.



Решение. На продолжението на правата AC избираме точка M таква што $\overline{CE} = \overline{CM}$. Тогаш триаголниците ACE и BCM се складни, па правата MB е нормална на правата AE, односно правата MB е паралелна со правата CL . Од тоа што $\overline{MC} = \overline{CD} = \overline{CE}$ и правите DK, CL и MB се паралелни следува $\overline{KL} = \overline{LB}$.

4. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ со агли $\measuredangle BAC = 70^\circ$ и $\measuredangle ABC = 80^\circ$ земена е точка M . Ако $\measuredangle ACM = 10^\circ$ и $\measuredangle CBM = 20^\circ$, докажи дека $\overline{AB} = \overline{MC}$.

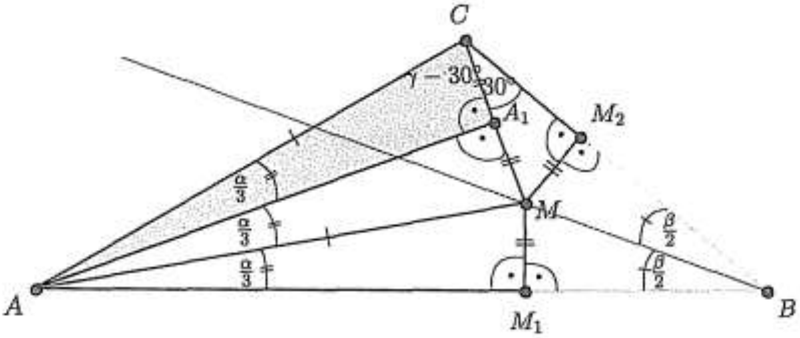


Решение. Од условот на задачата следува $\measuredangle BCA = 30^\circ$ и $\measuredangle BCM = 20^\circ$. Според тоа, $\triangle BMC$ е рамнокрак и $\measuredangle BMC = 140^\circ$. Да опишеме кружница k со центар во точката M и радиус $\overline{MB} = \overline{MC}$.

Централниот агол над тетивата BC е еднаков на 140°, па затоа периферниот агол над оваа тетива е еднаков на 70° . Од $\measuredangle BAC = 70^\circ$ следува дека точката A лежи на кружницата k. Според тоа k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а M е нејзиниот центар. Затоа $\overline{MA}=\overline{MB}$. Но, $\measuredangle BCA=30^\circ$, па затоа $\measuredangle AMB=60^\circ$, што значи дека дека рамнокракиот $\triangle ABM$ е рамностран и $\overline{AB}=\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$, што и требаше да се докаже.

5. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ на симетралата на аголот B е дадена точка M таква што $\overline{AM}=\overline{AC}$ и $\measuredangle BCM=30^\circ$. Докажи, дека $\measuredangle AMB=150^\circ$.

Решение. Нека M_1 и M_2 се подножјата на нормалите повлечени од точката M на страните AB и BC, соодветно и A_1 е средината на отсечката CM. Бидејќи M лежи на симетралата на аголот B важи



$\overline{M_1M}=\overline{M_2M}$. Според условот на задачата $\triangle CAM$ е рамнокрак, па затоа $\triangle AA_1M$ и $\triangle AA_1C$ се правоаголни складни триаголници.

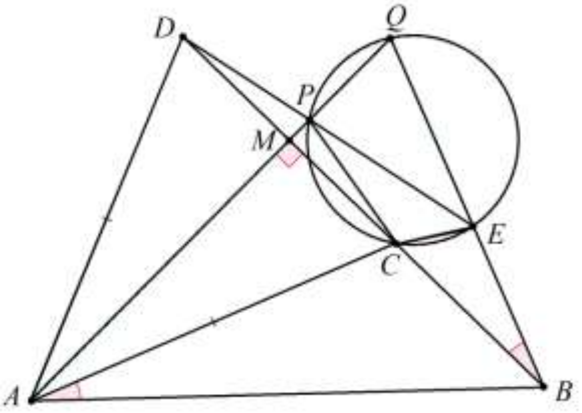
Сега, $\measuredangle AA_1M=\measuredangle AM_1M=90^\circ$, $\overline{AM}=\overline{AM}$ и $\overline{A_1M}=\overline{M_1M}$, па затоа $\triangle AA_1M\cong\triangle AM_1M$. Значи, $\triangle AM_1M\cong\triangle AA_1M\cong\triangle AA_1C$, па затоа правите AA_1 и AM го делат аголот при темето A на три еднакви дела. Од $\triangle AA_1C$ добиваме дека $\measuredangle ACA_1=90^\circ-\frac{\alpha}{3}$ и $\measuredangle ACA_1=\gamma-30^\circ$. Значи, $\gamma-30^\circ=90^\circ-\frac{\alpha}{3}$, па затоа $\frac{2\alpha}{3}+\beta=60^\circ$, т.е. $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}=30^\circ$.

Сега, од $\triangle AMB$ лесно се добива дека $\measuredangle AMB=180^\circ-(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2})=150^\circ$.

6. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle C=\measuredangle A+90^\circ$. Нека D точката на продолжението на страната BC преку темето C за која важи $\overline{AC}=\overline{AD}$. Точката E припаѓа на полурамнината определена со правата BC која

не ја содржи точката A и е таква што $\measuredangle EBC=\measuredangle A$ и $\measuredangle EDC=\frac{1}{2}\measuredangle A$. Докажи, дека $\measuredangle CED=\measuredangle ABC$.

Решение. Нека M е средината на CD. Тогаш AM е симетрала на отсечката CD. Нека AM ги сече DE и BE во точките P и Q соодветно. Тогаш $\overline{PE}=\overline{PD}$. Затоа важи



$$\measuredangle EBA+\measuredangle CAB=\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle A=180^\circ-\measuredangle C+\measuredangle A=90^\circ.$$

Тоа значи, дека $AC\perp BE$. Затоа во $\triangle ABQ$ правите BC и AC се висини, што значи дека C е ортоцентар на $\triangle ABQ$ и

$$\measuredangle CQE=\measuredangle CQB=\measuredangle A=\frac{1}{2}\measuredangle A+\frac{1}{2}\measuredangle A=\measuredangle PDC+\measuredangle PCD=\measuredangle CPE.$$

Според тоа, четириаголникот $CPQE$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle CED=\measuredangle CEP=\measuredangle CQP=\measuredangle CQA=\measuredangle ABC.$$

7. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L\in AC$ е симетралата на $\measuredangle ABC$, а $AH, H\in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A. Докажи, дека $\measuredangle AHL=\measuredangle ALB$ ако и само ако $\measuredangle BAC=\measuredangle ACB+90^\circ$.

Решение. Нека $\measuredangle AHL=\measuredangle ALB=\varphi$ и I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABH$. Тогаш

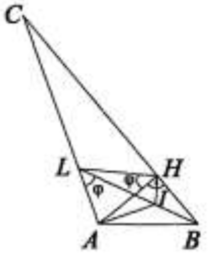
$$\measuredangle AHI=\frac{1}{2}\measuredangle AHB=45^\circ \text{ и } \measuredangle AIL=180^\circ-\measuredangle AIB=45^\circ.$$

Оттука,

$$\measuredangle LAI+\measuredangle LHI=(180^\circ-\measuredangle ALI-\measuredangle ALI)+(\measuredangle AHL-\measuredangle AHI)$$

$$=(180^\circ-\varphi-45^\circ)+(\varphi+45^\circ)=180^\circ.$$

Според тоа, четириаголникот $AIHL$ е тетивен, па затоа $\varphi=45^\circ$. Сега



имаме

$$\measuredangle BAC = 90^\circ + \measuredangle BAI = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(90^\circ - \measuredangle ABC).$$

Ако во последното равенство замениме

$$\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ACB,$$

добиваме

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ACB + 90^\circ.$$

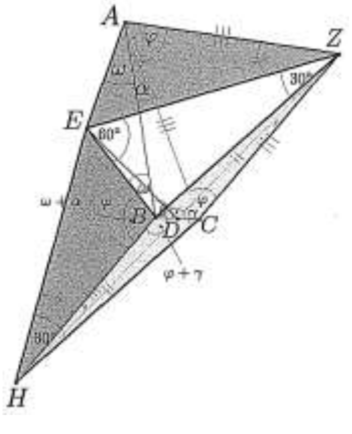
За да ја докажеме обратната импликација, ќе ги корисиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Нека $\alpha = \gamma + 90^\circ$. Тогаш лесно се гледа, дека AL е надворешна симетрала на агол за $\triangle ABH$. Според тоа, L е центар на припишаната кружница за $\triangle ABH$ кон страната AH. Сега имаме $\measuredangle AHL = \tfrac{1}{2}\measuredangle CHA = 45^\circ$. Од друга страна

$$\measuredangle ALB = 180^\circ - \measuredangle BAL - \measuredangle ABL = 180^\circ - \alpha - \tfrac{\beta}{2}$$

$$= 180^\circ - \alpha - \tfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 90^\circ - \tfrac{\alpha - \gamma}{2} = 45^\circ.$$

Конечно, $\measuredangle AHL = \measuredangle ALB$.

8. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A < 90^\circ$. Во надворешноста на $\triangle ABC$ се конструирани рамнокраки триаголници ABE и ACZ со основи AB и AC, соодветно. Ако точката D е средина на страната BC и важи $DE \perp DZ$ и $\overline{EZ} = 2 \cdot \overline{ED}$, докажи дека $\measuredangle AEB = 2 \cdot \measuredangle AZC$.



Решение. Нека H е точка на правата ZD таква што $\overline{ZD} = \overline{DH}$. Бидејќи точката D е средина на отсечката BC, заклучуваме дека дијагоналите на четириаголникот $BHCZ$ се половат, што значи дека $BHCZ$ е паралелограм. Оттука и бидејќи $\triangle ACZ$ е рамнокрак следува дека $\overline{BH} = \overline{ZC} = \overline{ZA}$. Понатаму, од рамнокракиот $\triangle ABE$ следува $\overline{BE} = \overline{AE}$. Понатаму, бидејќи $DE \perp DZ$ и ED е тежишна линија на $\triangle EZH$ следува дека $\triangle EZH$ е рамнокрак и $\overline{EH} = \overline{EZ}$. Според тоа, страните на триаголниците EBH и EAZ се еднакви, па затоа $\triangle EBH \cong \triangle EAZ$. Оттука следува дека $\measuredangle BEH = \measuredangle AEZ, \measuredangle EBH = \measuredangle EAZ, \measuredangle EHB = \measuredangle AZE$.

Аглите на $\triangle ABC$ да ги означиме со вообичаените ознаки α,β,γ и да означиме $\measuredangle EBA=\measuredangle EAB=\omega$ и $\measuredangle ZAC=\measuredangle ZCA=\varphi$. Од паралелограмот $BHCZ$ наоѓаме $\measuredangle CBH=\measuredangle BCZ=\gamma+\varphi$. Од равенството $\measuredangle EBH=\measuredangle EAZ$ следува

$$360^\circ-\measuredangle EBA-\beta-\measuredangle CBH=\measuredangle EBA+\alpha+\measuredangle CAZ,$$

т.е. $360^\circ-\omega-\beta-(\gamma+\varphi)=\omega+\alpha+\varphi$. Од последното равенство следува

$$2(\omega+\varphi)=360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)=360^\circ-180^\circ=180^\circ$$

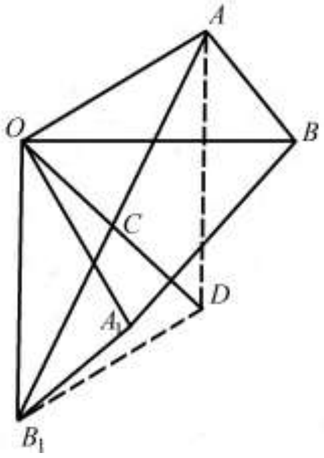
односно $\omega+\varphi=90^\circ$. Од правоаголниот $\triangle EZD$ заради условот $\overline{EZ}=2\cdot\overline{ED}$ следува $\measuredangle EZD=30^\circ$. Но, $\triangle EZH$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle EHD=\measuredangle EZD=30^\circ$. Понатаму, од паралелограмот $BHCZ$ добиваме $\measuredangle BHD=\measuredangle CZD$ и како $\measuredangle EHB=\measuredangle AZE$ наоѓаме

$$\begin{aligned}\measuredangle AZC&=\measuredangle AZE+\measuredangle EZD+\measuredangle DZC=\measuredangle EHB+30^\circ+\measuredangle BHD\\&=\measuredangle EHB+30^\circ=30^\circ+30^\circ=60^\circ.\end{aligned}$$

Оттука следува дека рамнокракиот $\triangle AZC$ е рамностран и $\varphi=60^\circ$, што значи $\omega=30^\circ$. Сега добиваме $\measuredangle AEB=180^\circ-2\omega=120^\circ$ и едноставно се проверува дека $\measuredangle AEB=120^\circ=2\cdot\measuredangle AZC$.

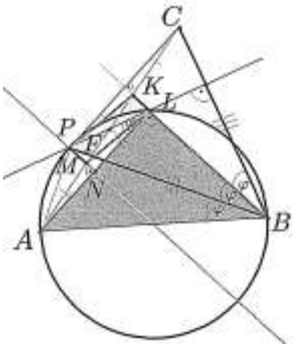
9. Триаголникот AOB со ротација во рамнината околу темето O за агол 90° се пресликува во триаголник A_1OB_1, при што A_1 е слика на A и B_1 е слика на B. Докажи дека тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1 е нормална на правата A_1B.

Решение. Нека OC е тежишната линија на триаголникот OAB_1 повлечена кон страната AB_1. Нека D лежи на продолжението на OC така што $\overline{OC}=\overline{CD}$ (види цртеж). Ќе докажеме дека $\triangle AOD\cong\triangle OA_1B$. Јасно, $\overline{OA_1}=\overline{AO}$. Понатаму, четириаголникот AOB_1D е паралелограм, па затоа $\overline{AD}=\overline{OB_1}=\overline{OB}$. Но, $AO\perp OA_1$, $BO\perp OB_1$ и $AD\,||\,OB_1$, па затоа $\measuredangle OAD=\measuredangle A_1OB$. Оттука следува дека $\triangle AOD\cong$



$\triangle OA_1B$ и две страни на едниот триаголник се нормални на соодветните две страни на другиот триаголник, па затоа и третата страна на првиот триаголник е нормална на соодветната страна на вториот триаголник, т.е. $OD \perp A_1B$, што и требаше да се докаже.

10. На страната AC на $\triangle ABC$ избрана е точка K таква што $\overline{AK} = 2\overline{KC}$ и $\measuredangle ABK = 2\measuredangle KBC$. Нека F е средина на AC, а L е проекцијата на A врз BK. Докажи, дека правите FL и BC се заемно нормални.

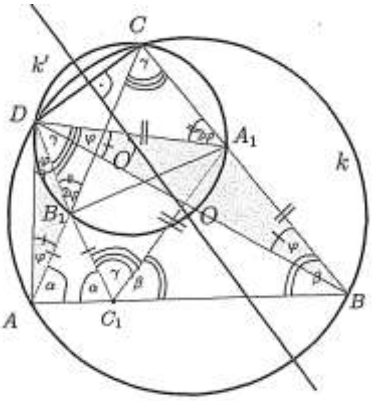


Решение. Нека M и N се средините на отсечките AK и AL (цртеж десно) и P е пресечната точка на правите MN и FL. Точката M е центар на опишаната кружница околу правоаголниот $\triangle AKL$, па затоа $\overline{CK} = \overline{AM} = \overline{MK} = \overline{ML}$. Бидејќи MN е средна линија на $\triangle AKL$ важи $MN \parallel BL$. Понатаму, $\overline{KF} = \overline{MF}$, $\measuredangle MFP = \measuredangle KFL$ (накрсни) и $\measuredangle MPF = \measuredangle KLF$ (агли со паралелни краци), па затоа $\triangle KLF \cong \triangle MPF$. Од складноста следува $\overline{MP} = \overline{KL}$ и како $MP \parallel KL$ заклучуваме дека четириаголникот $KLMP$ е паралелограм, па затоа важи $\overline{ML} = \overline{KP}$.

Од досега изнесеното следува дека $\overline{CK} = \overline{MK} = \overline{ML} = \overline{KP}$, па затоа $\measuredangle CPM = 90^\circ$ (периферискиагол над дијаметар CM). Од $MP \parallel BK$ следува $BK \perp CP$, а бидејќи $\overline{CK} = \overline{KP}$ заклучуваме дека правата BK е симетрала на страната CP, па затоа $\overline{BP} = \overline{BC}$ и $\measuredangle PBK = \measuredangle CBK$. Според условот на задачата имаме $\measuredangle ABK = 2\measuredangle KBC$, па затоа BP е симетрала на $\measuredangle ABL$. Бидејќи P е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ABL$ и симетралата на страната AL таа припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABL$ и затоа $\measuredangle ALF = \measuredangle ALP = \frac{\measuredangle ABL}{2}$ (периферискиагол над тетивата AP). Конечно, $\measuredangle ALF = \measuredangle CBL$ и како $AL \perp BL$ заклучуваме дека и другите два крака на еднаквите агли мора да се заемно нормални, т.е. $FL \perp BC$.

11. Нека A_1, B_1 и C_1 се точки на страните BC, CA и AB, соодветно на $\triangle ABC$ такви што $\overline{AB_1} = \overline{C_1B_1}$ и $\overline{BA_1} = \overline{C_1A_1}$. Нека D е симетричната точка на точката C_1 во однос на правата AB ($D \neq C$). Докажи дека

CD е нормална на правата која минува низ центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABC и A_1B_1C.



Решение. Воведуваме ознаки $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle ABC, \gamma = \measuredangle BCA$.

Од рамнокракиот $\triangle AB_1C_1$ следува

$$\measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle C_1AB_1 = \alpha,$$

а од рамнокракиот $\triangle BA_1C_1$ добиваме $\measuredangle BC_1A_1 = \beta$. Сега

$$\measuredangle A_1C_1B_1 = 180^\circ - \measuredangle AC_1B_1 - \measuredangle BC_1A_1$$
$$= 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma.$$

Понатаму, заради симетрија во однос на правата A_1B_1 добиваме $\measuredangle A_1DB_1 = \measuredangle A_1C_1B_1 = \gamma$. Според тоа, $\measuredangle A_1DB_1 = \gamma$ и $\measuredangle A_1CB_1 = \gamma$, па затоа четириаголникот A_1DCB_1 е тетивен и нека k' е кружницата опишана околу него.

Од рамнокракиот $\triangle AB_1C_1$ и симетријата во однос на правата A_1B_1 следува $\overline{B_1A} = \overline{B_1C_1} = \overline{B_1D}$, па затоа $\triangle AB_1D$ е рамнокрак. Аналогно $\overline{A_1B} = \overline{A_1C_1} = \overline{A_1D}$. Нека $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle ADB_1 = \varphi$.

Имаме $\measuredangle DB_1C = 2\varphi$ како надворешен агол на рамнокракиот $\triangle AB_1D$. Понатаму, од тетивниот четириаголник B_1CDA_1 следува

$$\measuredangle CA_1D = \measuredangle DB_1C = 2\varphi,$$

како периферсики агли над тетивата CD. Сега, бидејќи $\measuredangle CA_1D$ е надворешен агол на рамнокракиот $\triangle BA_1D$, добиваме дека важи

$$\measuredangle A_1BD = \frac{\measuredangle CA_1D}{2} = \varphi.$$

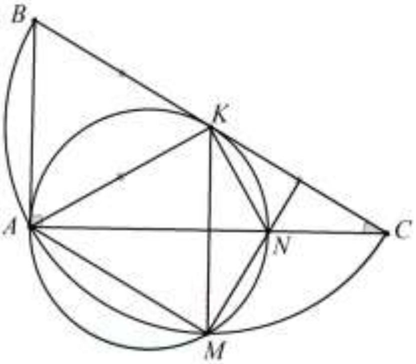
Значи,

$$\measuredangle CAD = \measuredangle B_1AD = \varphi = \measuredangle A_1BD = \measuredangle CBD,$$

па затоа четириаголникот $ABCD$ е тетивен и нека околу него опишаната кружница е k. Конечно, CD е заедничка тетива на кружниците k и k', па затоа таа е нормална на правата која минува низ центрите на k и k', а како k е опишана околу $\triangle ABC$ и k' е опишана околу $\triangle A_1B_1C$ тврдењето на задачата е докажано.

12. Даден е правоаголен $\triangle ABC, \measuredangle A = 90^\circ, \measuredangle C = 30^\circ$. Кружницата ω минува низ точката A и ја допира страната BC во нејзината средина K.

Нека ω ги сече страната AC и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките N и M, соодветно. Докажи, дека $MN \perp BC$.



Решение. Имаме $\overline{AK} = \overline{KC}$, па затоа

$$\measuredangle KAC = \measuredangle NKC = 30^\circ,$$

од каде добиваме

$$\measuredangle ANK = \measuredangle NKC + \measuredangle ACB = 60^\circ.$$

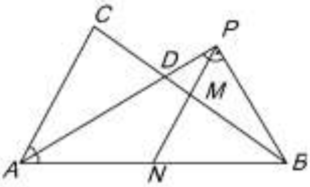
Точките A, K, N, M лежат на ω, па затоа

$$\measuredangle KAN = \measuredangle KMN = 30^\circ,$$

$$\measuredangle AMK = 60^\circ.$$

Понатаму, K е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, па затоа $\overline{AK} = \overline{KC} = \overline{KM}$. Според тоа, $\triangle AKM$ е рамностран. Значи, $\measuredangle AKM = 60^\circ$, па како $\measuredangle AKB = 60^\circ$, добиваме дека $\measuredangle MKC = 60^\circ$. Од друга страна, $\measuredangle KMN = 30^\circ$, па затоа $MN \perp BC$.

13. Нека M и N се средините на страните BC и AB на триаголникот ABC, соодветно и точката D лежи на страната BC. Докажи, дека ако $P = AD \cap MN$, тогаш $AP \perp BP$ ако и само ако AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$.



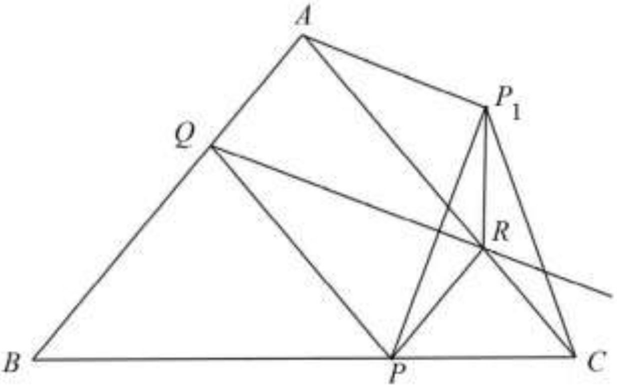
Решение. Нека $AP \perp BP$. Тогаш триаголникот ABP е правоаголен и PN е тежишна линија повлечена кон хипотенузата. Според тоа, $\overline{PN} = \overline{AN} = \overline{BN}$, од каде следува дека $\measuredangle PAN = \measuredangle APN$. Освен тоа, бидејќи MN е средна линија за триаголникот ABC добиваме дека $\measuredangle APN = \measuredangle PAC$. Според тоа, $\measuredangle CAP = \measuredangle PAN$, т.е. AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$.

Нека AD е симетрала на аголот $\measuredangle CAB$. Тогаш од $\measuredangle CAP = \measuredangle PAN = \measuredangle APN$ следува, дека $\overline{PN} = \overline{AN}$, што значи дека триаголникот ABP е правоаголен, т.е. $AP \perp BP$.

14. Низ точката P која лежи на основата BC на рамнокракиот триаголник ABC, повлечени се прави паралелни со краците на триаголникот. Ако Q и R се пресечните точки на правите со краците AB и AC, соодветно, а P_1 е симетрична точка на P во однос на правата QR,

тогаш P_1 лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи!

Решение. Нека $\overline{PC} < \overline{PB}$. Точките P и A се еднакво оддалечени од правата QR и точките P и P_1 се еднакво оддалечени од правата QR, па затоа $AP_1 \| QR$. Бидејќи $\overline{AQ} = \overline{PR} = \overline{P_1R}$, следува дека трапезот QRP_1A е рамнокрак, па затоа $\measuredangle QAP_1 = \measuredangle RP_1A$. Триаголникот CRP_1 е рамнокрак, па затоа $\measuredangle RCP_1 = \measuredangle RP_1C$. Конечно



$$\measuredangle QAP_1 + \measuredangle BCA + \measuredangle RCP_1 = \measuredangle RP_1A + \measuredangle ABC + \measuredangle RP_1C,$$

т.е.

$$\measuredangle BAP_1 + \measuredangle BCP_1 = \measuredangle ABC + \measuredangle AP_1C.$$

Значи точката P_1 лежи на кружницата опишана околу триаголникот ABC.

15. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Опишаната кружница ω околу $\triangle HAB$ по втор пат ја сече отсечката BC во точката D. Правата DH ја сече отсечката AC во точката P, а Q е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ADP$. Докажи дека центарот на ω лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

Решение. Со R да го означиме центарот на ω и нека E е пресечната точка на правите BH и AC. Тогаш

$$\measuredangle RBD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle DRB = 90^\circ - \measuredangle DHB = 90^\circ - \measuredangle PHE$$
$$= \measuredangle BPH = 180^\circ - \measuredangle APD.$$

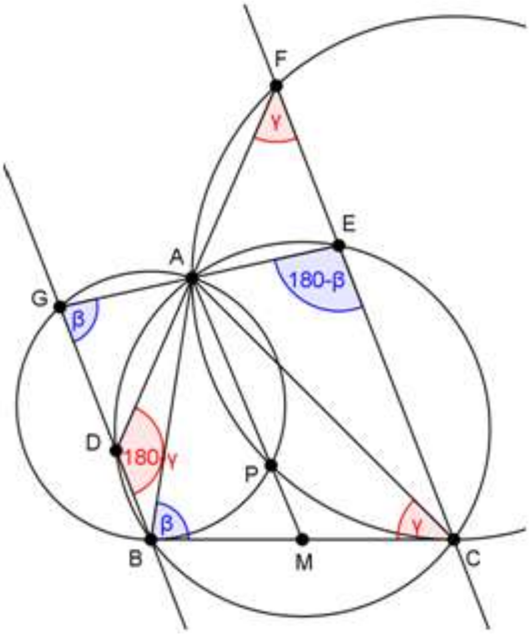
Од друга страна

$$\measuredangle MQD = \tfrac{1}{2}\measuredangle AQD = \tfrac{1}{2}(360^\circ - 2\measuredangle APD) = 180^\circ - \measuredangle APD = \measuredangle RBD$$

од каде следува дека R лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

16. Нека ABC е триаголник и нека D и E се точки на неговата опишана кружница, така што $D\in AB$ кој не ја содржи C, $E\in AC$ кој не ја содржи B и $BD\,||\,CE$. Нека пресекот на правите DA и CE е F, а пресекот на правите EA и BD е G. Нека P е вториот пресек на опишаните кружници на $\triangle ABG$ и $\triangle ACF$. Докажи дека правата AP минува низ средината на страната BC.

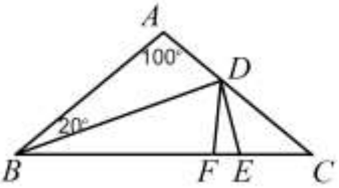
Решение. Нека $\measuredangle ABC=\beta$ и $\measuredangle ACB=\gamma$. Од тетивниот четириаголник $ABCE$ добиваме $\measuredangle AEC=180°-\beta$. Како спротивни агли на трансверзала GE за $BG\,||\,CE$, имаме $\measuredangle BGA=180°-\measuredangle AEC=\beta$. Значи, $\measuredangle BGA=\measuredangle ABC$, па од својството за агол помеѓу тангента и тетива следува дека BC е тангента на опишаната кружница на $\triangle BGA$. Нека $AP\cap BC=M$. Тогаш, од бидејќи $\triangle MAB\sim\triangle MBP$ (Докажи!), добиваме $\overline{MB}^2=\overline{MP}\cdot\overline{MA}$.



Слично се добива и дека BC е тангента на опишаната кружница на $\triangle CFA$, па затоа $\overline{MC}^2=\overline{MP}\cdot\overline{MA}$.

Конечно, $\overline{MB}^2=\overline{MP}\cdot\overline{MA}=\overline{MC}^2$ па затоа $\overline{MB}=\overline{MC}$, т.е. AP минува низ средината на BC.

17. Нека ABC е рамнокрак триаголник и $\measuredangle BAC = 100^\circ$. Нека D е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ABC$ и страната AC. Докажи, дека $\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{BC}$.



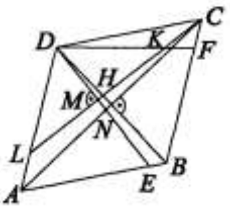
Решение. Нека E е точка на BC таква што $\overline{BE}=\overline{BD}$. Тогаш $\triangle BED$ е рамнокрак со агол меѓу краците 20°, па затоа аглите при основата му се 80°. Аголот $\measuredangle BED$ е надворешен за $\triangle ECD$, па затоа $80^\circ = \measuredangle BED = \measuredangle ECD + \measuredangle CDE$. Сега, бидејќи $\measuredangle ECD = 40^\circ$ добиваме $\measuredangle CDE = 40^\circ$, па затоа $\triangle ECD$ е рамнокрак и важи $\overline{DE}=\overline{EC}$. Нека F е точка на BC таква што $\overline{BF}=\overline{BA}$. Тогаш триаголниците ABD и FBD се складни (признак САС). Оттука следува дека $\measuredangle BDF = \measuredangle BDA = 60^\circ$ и $\overline{AD}=\overline{DF}$. Но, тогаш $\measuredangle FDC = 60^\circ$. Од друга страна $\measuredangle CFD$ е надворешен за $\triangle BFD$, па затоа $\measuredangle CFD = 80^\circ$. Според тоа, $\triangle CDF$ е рамнокрак, па затоа $\overline{AD}=\overline{DF}=\overline{DE}=\overline{EC}$. Конечно, $\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{EC}+\overline{BE}=\overline{BC}$.

18. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се избрани точки E и F такви што DE е симетрала на $\measuredangle ADF$ и $\overline{AE}+\overline{CF}=\overline{DF}$. Правата низ C која е нормална на DE, ја сече страната AD во точката L и ја сече дијагоналата BD во точката H. Нека DE ја сече AC во точката N.

а) Докажи, дека $\overline{AE}=\overline{DL}$.

б) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC}=\overline{CD}$.

в) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е квадрат.



Решение. а) Нека $M \in DE \cap CL, K \in DF \cap CL$. Тогаш DM е висина и симетрала на агол во $\triangle LKD$, па затоа $\overline{DL}=\overline{DK}$. Значи, $\triangle LKD \sim \triangle CKF$, па затоа $\overline{KF}=\overline{CF}$ и значи

$$\overline{AE}=\overline{DF}-\overline{CF}=\overline{DF}-\overline{KF}=\overline{DK}=\overline{DL}.$$

б) Од сличностите $\triangle ANE \sim \triangle CND$, $\triangle HNC \sim \triangle LAC$ и $\triangle LHD \sim \triangle CHB$ следува

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{LH}}{\overline{HC}}=\frac{\overline{DL}}{\overline{BC}}.$$

Конечно, бидејќи $\overline{AE}=\overline{DL}$ добиваме $\overline{BC}=\overline{CD}$.

в) Од б) следува, дека четириаголникот $ABCD$ е ромб, таков што $DB\perp AC$, па значи H е ортоцентар во $\triangle DNC$. Според тоа, $HN\perp DC$, па затоа $AD\perp DC$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е квадрат.

19. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка од страната AD, така што $\overline{AE}:\overline{ED}=m$. Нека F е точка од CE, така што $BF\perp CE$, и точката G е симетрична на F во однос на AB. Ако точката A е центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, најди ја вредноста на m.

Решение. За да да точката A биде центар на опишаната кружница околу триаголникот BFG, треба $\overline{AB}=\overline{AG}=\overline{AF}$. Бидејќи точката G е симетрична на F во однос на AB имаме дека $\overline{AG}=\overline{AF}$. Останува да го одредиме m од условот $\overline{AB}=\overline{AF}$.

Нека S е точка од страната BC, така што $\overline{CS}:\overline{SB}=\overline{AE}:\overline{ED}=m$, тогаш $AS\,||\,CE$. Нека M е пресечната точка на AS и BF, а точката B_1 нека е симетрична точка на B во однос на M. Тогаш, имаме дека $\overline{BM}=\overline{MB_1}$, $AM\perp BF$ (од $BF\perp CE$ и $AS\,||\,CE$), па следува дека $\overline{AB}=\overline{AB_1}$. Бидејќи треба да важи $\overline{AB}=\overline{AF}$, го бараме m од условот $\overline{AB_1}=\overline{AF}$. Бидејќи $\overline{AB}=\overline{AB_1}$ и B,B_1,F се колинеарни, тогаш $\overline{AB_1}=\overline{AF}$ ако $B_1\equiv F$, т.е ако M е средина на BF, односно ако S е средина на BC, односно ако $m=\overline{AE}:\overline{ED}=1$.

20. Кружниците ω_1 и ω_2 се сечат во две точки A и B. Нека t_1 и t_2 се тангентите на ω_1 и ω_2, соодветно, низ точката A. Нека вториот пресек на ω_1 и t_2 е C, а вториот пресек на ω_2 и t_1 е D. На полуправата AB, по B, се дадени точки P и E такви што $\overline{AE}=2\cdot\overline{AP}$. Опишаната кружница на $\triangle BCE$ ја сече t_2 по втор пат во точка Q, а опишаната кружница на $\triangle BDE$ ја сече t_1 по втор пат во точка R. Докажи дека точките P,Q и R се колинеарни.

Решение. Од својството за агол меѓу тангентата t_1 и тетивата AB во ω_1 следува $\measuredangle BCA=\measuredangle BAD$. Од тетивниот четириаголник $BCQE$ имаме $\measuredangle QEB+\measuredangle QCB=180^\circ$. Значи,

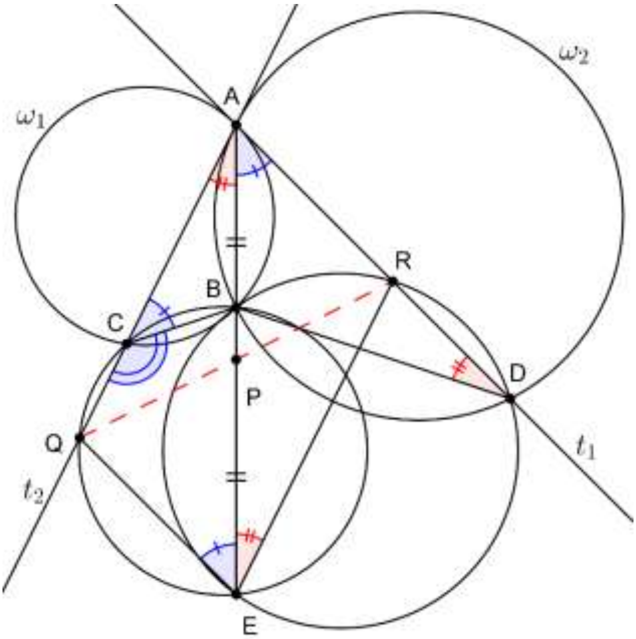
$$\measuredangle QEA=\measuredangle QEB=180^\circ-\measuredangle QCB=\measuredangle BCA=\measuredangle BAD\equiv\measuredangle EAR,$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $QE \parallel AR$.

Од својството за агол меѓу тангентата t_2 и тетивата AB во ω_2 имаме $\measuredangle ADB = \measuredangle BAC$. Четириаголник $BRDE$ е тетивен, па затоа важи $\measuredangle REB = \measuredangle RDB$. Значи,

$$\measuredangle REA = \measuredangle REB = \measuredangle RDB = \measuredangle ADB = \measuredangle BAC = \measuredangle EAQ,$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $RE \parallel AQ$.



Значи, четириаголникот $AQER$ е паралелограм. Од $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$, добиваме $\overline{AP} = \overline{PE}$, т.е. P е средина на дијагоналата AE во паралелограмот $AQER$. Бидејќи дијагоналите во паралелограм се преполовуваат во пресечната точка, добиваме дека P мора да е средина и на другата дијагонала QR, т.е. дека $P \in QR$. Значи, точките P, Q и R се колинеарни.

21. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $\measuredangle ADC = 30^\circ$ и $\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$. Докажи, дека дијагоналата BD е симетрала на аголот $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека B_1 и B_2 се симетричните точки на точката B во однос на правите DA и DC, соодветно. По конструкција имаме

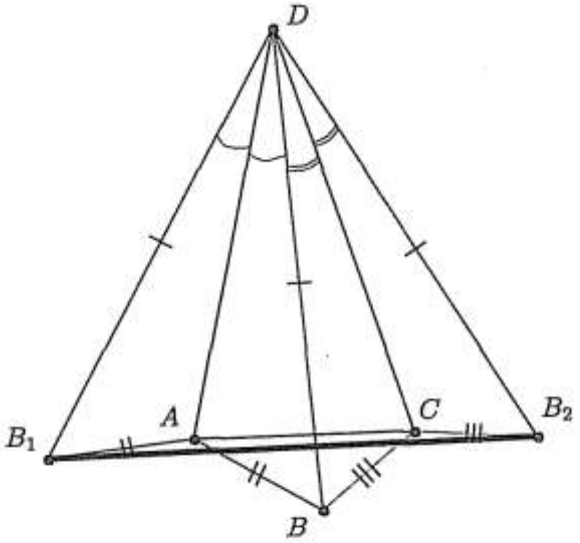
$$\overline{DB_1}=\overline{DB}=\overline{DB_2}\,,\ \measuredangle B_1DA=\measuredangle BDA \text{ и } \measuredangle B_2DC=\ \measuredangle BDC\,.$$

Според тоа, $\overline{DB_1}=\overline{DB_2}$ и

$$\begin{aligned}\measuredangle B_1DB_2&=\measuredangle B_1DA+\measuredangle BDA+\measuredangle CBD+\measuredangle B_2DC=2(\measuredangle BDA+\measuredangle CBD)\\&=2\measuredangle ADC=2\cdot 30^\circ=60^\circ\end{aligned},$$

што значи дека $\triangle B_1DB_2$ е рамностран и

$$\overline{B_1B_2}=\overline{B_1D}=\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\,.$$



Од неравенството на триаголник следува

$$\overline{B_1A}+\overline{AC}+\overline{CB_2}\geq\overline{B_1B_2}\,. \qquad (1)$$

Според конструкцијата на точките B_1 и B_2 имаме $\overline{B_1A}=\overline{BA}$ и $\overline{CB_2}=\overline{CB}$, па затоа

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{B_1A}+\overline{AC}+\overline{CB_2}\geq\overline{B_1B_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$$

од каде следува дека во (1) важи знак за равенство, па затоа точките A и C припаѓаат на правата B_1B_2. Од рамностраниот $\triangle B_1DB_2$ следува дека $\measuredangle DBA=\measuredangle DB_1B_2=60^\circ$. По конструкција на точката B_1 следува $\measuredangle DBA=\ \measuredangle DB_1A=60^\circ$.

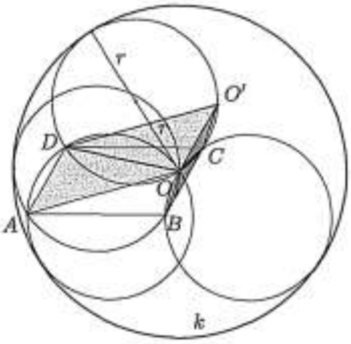
Аналогно се докажува дека $\measuredangle DBC=\measuredangle DB_2A=60^\circ$. Затоа важи $\measuredangle DBA=\measuredangle DBC=60^\circ$, т.е. BD е симетрала на аголот $\measuredangle ABC$.

22. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што

$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = \measuredangle BOC + \measuredangle DOA.$$

Докажи, дека постои кружница k која ги допира кружниците опишани околу триаголниците AOB, BOC, COD и DOA.

Решение. Бидејќи



$\measuredangle AOB + \measuredangle COD + \measuredangle BOC + \measuredangle DOA = 360^\circ$, од условот на задачата следува дека

$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = \measuredangle BOC + \measuredangle DOA = 180^\circ$. Конструираме точка O' надвор од паралелограмот $ABCD$ таква што $\overline{AO} = \overline{DO'}$ и $\overline{BO} = \overline{CO'}$. Оттука следува дека четириаголниците $AOO'D$ и $BCO'O$ се паралелограми. Од

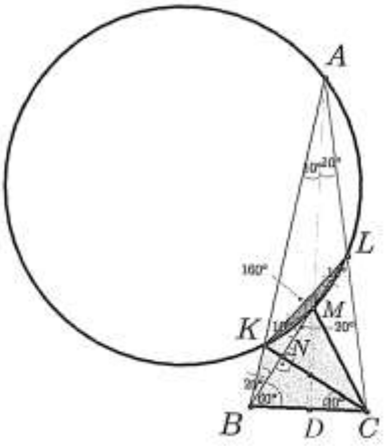
$$\measuredangle CO'D + \measuredangle COD = \measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ$$

следува дека четириаголникот $CO'DO$ е тетивен. Од паралелограмот $AOO'D$ следува дека $\triangle DOA \cong \triangle ODO'$, а од паралелограмот $BCO'O$ следува дека $\triangle BOC \cong \triangle O'CO$. Значи, радиусите на опишаните кружници околу триаголниците AOB, BOC, COA и DOA се еднакви. Бидејќи овие кружници се сечат во точката A, кружницата со центар во O и радиус $2r$, каде r е радиусот на опишаните кружници околу триаголниците AOB, BOC, COA и DOA е бараната кружница.

23. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A = 20^\circ$ и $\measuredangle B = \measuredangle C = 80^\circ$. Нека K и L се точки на страните AB и AC, соодветно такви што $\measuredangle KCB = 30^\circ$ и $\measuredangle LBC = 60^\circ$. Определи го $\measuredangle KLB$.

Решение. Нека AD висина на $\triangle ABC$, M е пресечната точка на AD и BL и N е пресечната точка на CK и BL. Од $\measuredangle KCB = 30^\circ$ и $\measuredangle LBC = 60^\circ$ следува дека $\triangle BMC$ е правоаголен, па затоа $\overline{BN} = \overline{BD} = \overline{DC}$.

Понатаму, AD е симетрала на BC, па затоа $\overline{BM} = \overline{MC}$ и од $\measuredangle LBC = 60^\circ$ заклучуваме дека $\triangle BMC$ е рамностран. Сега од $CN \perp BM$ следува дека CN е симетрала на BM, па

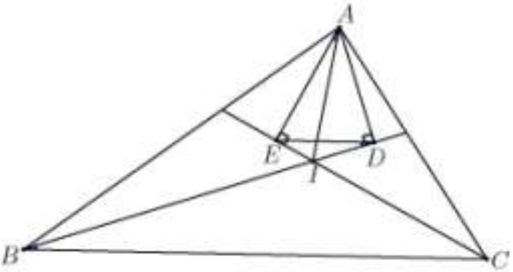


затоа $\triangle BNK \cong \triangle MNK$. Значи, $\measuredangle KMN = \measuredangle KBN = \measuredangle KBL = 20^\circ$, па затоа $\measuredangle KML = 160^\circ$.

За четириаголникот $AKML$ важи $\measuredangle A = 20^\circ$ и $\measuredangle KML = 160^\circ$, па затоа тој е тетивен. Сега од еднаквоста на периферииските агли над иста тетива следива $\measuredangle KLB = \measuredangle KLM = \measuredangle KAM = \measuredangle BAD = 10^\circ$.

24. Даден е $\triangle ABC$. Точките D и E се подножјата на нормалите повлечени од темето A на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C. Докажи дека $DE \parallel BC$.

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница (цртеж десно). Тогаш четириаголникот $ADIE$ е тетивен, па затоа $\measuredangle IDE = \measuredangle IAE$. Според тоа,



$$\measuredangle IDE = \measuredangle IAE = \measuredangle CAE - \measuredangle CAI = 90^\circ - \frac{\measuredangle ACB}{2} - \frac{\measuredangle BAC}{2} = \frac{\measuredangle ABC}{2} = \measuredangle IBC,$$

што значи дека $DE \parallel BC$.

25. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е центар на припишаната кружница наспроти темето A. Нека оваа кружница ги допира правите AB и BC во точките E и F, соодветно и точката J е пресекот на BD и EF. Докажи дка $\measuredangle CJB = 90^\circ$.

Решение. Бидејќи

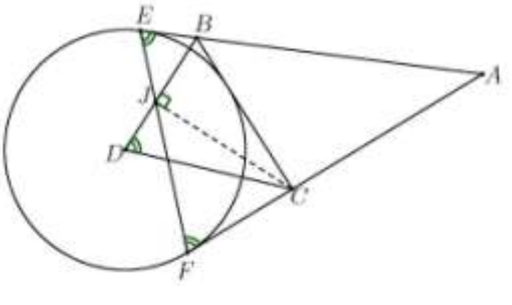
$$\measuredangle BDC = 90^\circ - \frac{\measuredangle BAC}{2} \text{ и}$$

$$\measuredangle EFC = 90^\circ - \frac{\measuredangle BAC}{2}$$

(второто заради $\overline{AE} = \overline{AF}$), добиваме

$$\measuredangle JDC = \measuredangle JFC,$$

што значи дека четириаголникот $JDFC$ е тетивен, па затоа $\measuredangle CJB = \measuredangle CFD = 90^\circ$.



26. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\measuredangle DAC=\measuredangle BDC$ $=36^{\circ}$, $\measuredangle CBD=18^{\circ}$ и $\measuredangle BAC=72^{\circ}$. Ако P е пресечната точка на дијагоналите AC и BD, определи го $\measuredangle APD$.

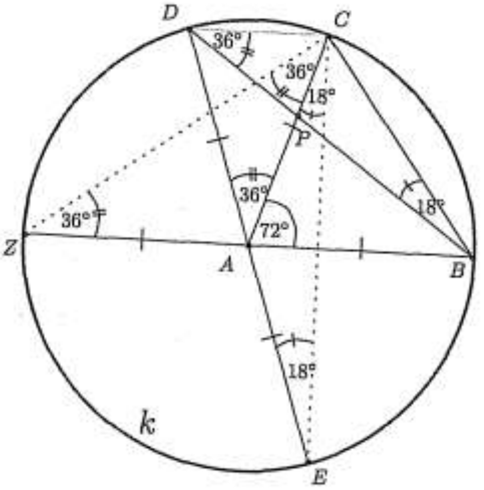
Решение. *Прв начин.* На правите AD и BA, преку точката A, да земеме точки E и Z соодветно, такви шт $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{AZ}$. Од

$\measuredangle DEC=\frac{\measuredangle DAC}{2}=18^{\circ}=\measuredangle CBD$

следува дека четириаголникот $DEBC$ е тетивен. Аналогно,

$\measuredangle AZC=\frac{\measuredangle BAC}{2}=36^{\circ}=\measuredangle BDC$,

па затоа четириаголникот $CBZD$ е тетивен. Значи, петаголникот $BCDZE$ е вишан во кружницата $k(A,\overline{AC})$. Оттука следува



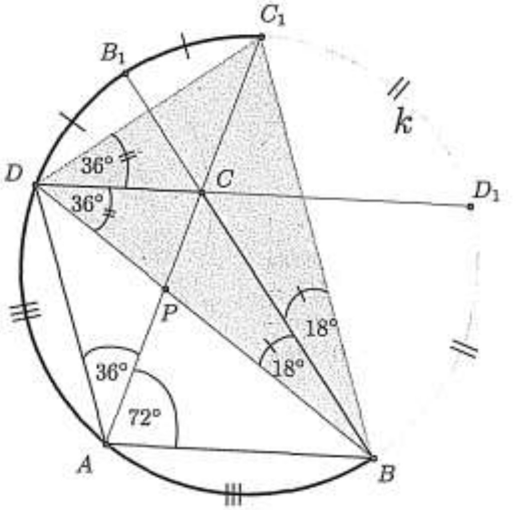
$$\overline{AC}=\overline{AD} \text{ и } \measuredangle ACD=\measuredangle ADC=\frac{180^{\circ}-36^{\circ}}{2}=72^{\circ}.$$

Сега, од $\triangle CPD$ имаме

$$\measuredangle CPD=180^{\circ}-\measuredangle PCD-\measuredangle PDC=180^{\circ}-72^{\circ}-36^{\circ}=72^{\circ}.$$

Оттука $\measuredangle APD=108^{\circ}$.

Втор начин. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ADB$ и B_1,C_1,D_1 се пресечните точки на k со правите BC,AC,CD, соодветно. Од $\measuredangle DBB_1=18^{\circ}$ и $\measuredangle DBC_1=36^{\circ}$ следува дека $\measuredangle B_1BC_1=18^{\circ}$, од каде следува дека B_1 е средина на лакот DC_1. Аналогно D_1 е



средина на лакот BC_1.

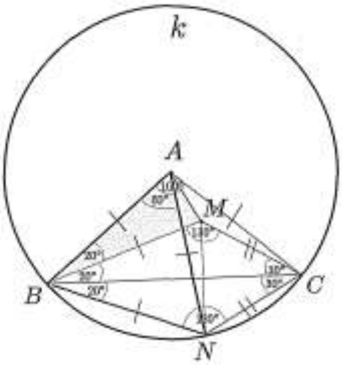
Значи, BB_1 и DD_1 се симетрали на $\measuredangle DBC_1$ и $\measuredangle BDC_1$ соодветно. Според тоа, точката C е центар на впишаната кружница во $\triangle BDC_1$ и $\measuredangle DC_1A = \measuredangle AC_1B = 36^\circ$, бидејќи AC_1 е симетрала на

$$\measuredangle BC_1D = 180^\circ - \measuredangle BAD .$$

Сега

$$\measuredangle APD = \measuredangle C_1DB + \measuredangle AC_1D = 2 \cdot 36^\circ + 36^\circ = 108^\circ .$$

27. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A = 100^\circ$ и $\measuredangle B = \measuredangle C = 40^\circ$. Точката M е во внатрешноста на триаголникот и важи $\measuredangle MBC = 20^\circ$ и $\measuredangle MCB = 30^\circ$. Определи го $\measuredangle CAM$.



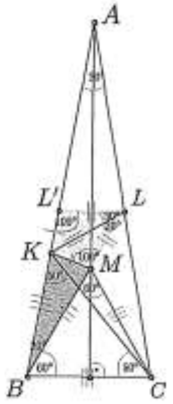
Решение. Од условот на задачата следува $\measuredangle BMC = 130^\circ$. Нека N е симетричната точка на точката M во однос на страната BC. Тогаш $\measuredangle BNC = 130^\circ$. Нека k е кружницата со центар во точката A и радиус $\overline{AB} = \overline{AC}$. Бидејќи $\measuredangle BAC = 100^\circ$ е централен агол над тетивата BC соодветниот периферни агли се еднакви на 50° и 130°. Оттука следува дека точката N припаѓа на кружницата k, т.е. $\overline{AN} = \overline{AB}$. Според тоа,

$$\measuredangle ABN = \measuredangle ABC + \measuredangle CBN = \measuredangle ABC + \measuredangle CBM = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ .$$

Значи, во рамнокракиот триаголник ABN аглите при основата се еднакви на 60°, па затоа тој е рамностран и $\overline{BN} = \overline{AB}$. Но, по конструкција $\overline{BN} = \overline{BM}$, па затоа триаголникот ABM е рамнокрак. Од условот на задачата следува $\measuredangle ABM = 20^\circ$, па затоа $\measuredangle BAM = 80^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle CAM = \measuredangle BAC - \measuredangle BAMC = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ .$$

28. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A = 20^\circ$ и $\measuredangle B = \measuredangle C = 80^\circ$. Нека K и L се точки на страните AB и AC, соодветно такви што $\measuredangle KCB = 50^\circ$ и $\measuredangle LBC = 60^\circ$. Определи го $\measuredangle BLK$.



Решение. Нека L' е точката симетрична на точката L во однос на висината повлечена од темето A во $\triangle ABC$. Заради симетријата правите BL и CL' се сечат на висината повлечена од темето A и нека M е нивната пресечна точка. Имаме $\overline{MB}=\overline{MC}$ и $\measuredangle LBC=60^\circ$, па затоа $\triangle BMC$ е рамностран. Тоа значи $\overline{MB}=\overline{BC}$. Од условот на задачата $\measuredangle B=80^\circ$ и $\measuredangle KCB=50^\circ$, па затоа $\triangle KBC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{BK}=\overline{BC}$. Но, $\measuredangle KBL=20^\circ$, па затоа $\measuredangle BKM=\measuredangle BMK=80^\circ$.

Правите LL' и BC се нормални на висината повлечена од темето A, па затоа $LL' \| BC$ и важи $\measuredangle KL'L=100^\circ$. Значи,

$$\measuredangle LMK=\measuredangle LL'K=100^\circ.$$

Триаголникот LML' е рамностран бидејќи

$$\overline{ML}=\overline{ML'} \text{ и } \measuredangle L'LM=\measuredangle LBC=60^\circ$$

(агли со паралелни краци). Затоа $\overline{LL'}=\overline{LM}$ и како $\overline{LK}=\overline{LK}$ според признакот ССА добиваме дека $\triangle LL'K \cong \triangle LMK$. Оттука следува дека $\measuredangle L'LK=\measuredangle MLK$, што значи дека LK е симетрала на $\measuredangle L'LM=60^\circ$, па затоа $\measuredangle BLK=\measuredangle MLK=30^\circ$.

29. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\measuredangle ABC<90^\circ$ и $\overline{AB}<\overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D. Ако $\measuredangle EDA=\measuredangle FDC$, опереди го $\measuredangle ABC$.

Решение. Нека l е симетралата на $\measuredangle EDF$. Бидејќи DE и DF се тангенти на ω правата l минува низ центарот O на ω.

Разгледуваме симетрија во однос на l. Од $\measuredangle EDA=\measuredangle FDC$, следува дека лакот DC се пресликува во лакот DA. Бидејќи l минува низ O, заклучуваме дека кружницата ω се пресликува во самата себе. Според тоа, сликата C' на C лежи како на DA така и на ω. Но, $\overline{AD}\neq\overline{DC}$, па затоа точките C' и A се различни.

Добивме $\measuredangle DC'C=\measuredangle DCC'$. Бидејќи A,B,C,C' лежат на ω, добиваме дека $\measuredangle DC'C=\measuredangle ABC=\measuredangle ADC$. Според тоа $\triangle DCC'$ е рамностран, па затоа $\measuredangle ABC=\measuredangle CDC'=60^\circ$.

30. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D и отсечките AD и CE се сечат. Ако $\measuredangle ABF = \measuredangle DCE$, определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Бидејќи точката D е надворешна за ω, заклучуваме дека $\measuredangle ABC$ е остар. Нека A' е втората пресечна точка на DC и ω. Бидејќи $\overline{AC} < \overline{BC}$, имаме $\measuredangle DCA = \measuredangle CAB > \measuredangle CBA = \measuredangle DA'A$ и затоа C е меѓу D и A'. Сега од $180^\circ - \measuredangle ECA' = \measuredangle ECD = \measuredangle ABF$ следува дека лаците ACF и ECA' се еднакви.

Нека l е симетралата на $\measuredangle EDF$. Бидејќи DE и DF се тангенти на ω, правата l минува низ центарот O на ω.

Да разгледаме симетрија во однос на l. Бидејќи l минува низ O, кружницата ω се пресликува во самата себе. Од $ACF = ECA'$ следува дека A се пресликува во A'. Оттука $\measuredangle DAA' = \measuredangle DA'A$. Од друга страна, A' припаѓа на ω, па затоа $\measuredangle AA'C = \measuredangle ABC = \measuredangle ADA'$. Според тоа, $\triangle DAA'$ е рамностран и затоа $\measuredangle ABC = 60^\circ$

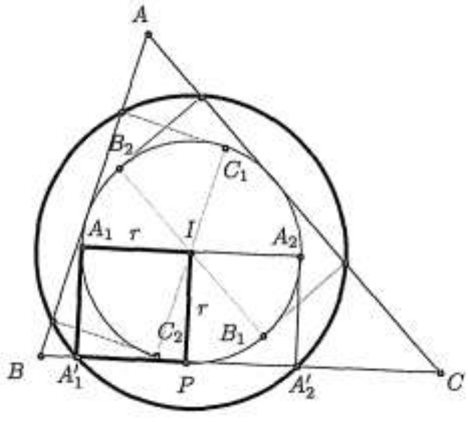
31. Вписаната кружница во триаголникот е проектирана на страните на тој триаголник. Докажи, дека шесте крајни точки на овие проекции припаѓаат на иста кружница.

Решение. Нека A_1A_2 е дијаметарот на вписаната кружница паралелен со страната BC, а проекцијата на кружницата на страната BC е отсечката $A_1^{'}A_2^{'}$, каде $A_1^{'}$ и $A_2^{'}$ се нормалните проекции на точките A_1 и A_2 на страната BC, соодветно. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и P е допирната точка на кружницата со BC. Четириаголникот $A_1IPA_1^{'}$ е квадрат, бидејќи

$$\overline{A_1^{'}P} = \overline{A_1I} = \overline{IP} = r \ ,$$

$$\measuredangle IPA_1^{'} = 90^\circ \text{ и } A_1^{'}P \,||\, A_1I \ .$$

Затоа $\overline{A_1^{'}I} = r\sqrt{2}$. Слично се



покажува и за останатите проекции на впишаната кружница врз страните на триаголникот, што значи дека темињата на добиениот шестаголник лежат на нржница со центар во I и радиус $r\sqrt{2}$.

32. Нека C е кружница со центар во O и радиус R. Од точката A на кружницата C конструираме тангента t на кружницата. Низ центарот O повлекуваме права d која тангентата ја сече во точка M и кружницата ја сече во точките B и D (B лежи меѓу O и M). Ако $\overline{AM} = R\sqrt{3}$, докажи дека:

а) Триагоникот AMD е рамнокрак.

б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на кружницата C .

Решение. Бидејќи t е тангента на кружницата C важи $\measuredangle OAM = 90^\circ$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2 = R^2 + (R\sqrt{3})^2 = 4R^2$$

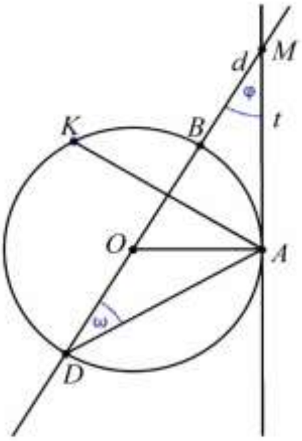
т.е. $\overline{OM} = 2R$. Значи, во правоаголниот триаголник OAM имаме $\overline{OM} = 2\overline{OA}$, па затоа $\varphi = \measuredangle OMA = 30^\circ$. Понатаму, бидејќи $\overline{OA} = \overline{OD} = R$, триаголникот OAD е рамнокрак и важи

$\measuredangle ODA = \measuredangle OAD = \omega$ и $\measuredangle AOD = 180^\circ - \omega$.
Аголот $\measuredangle AOD$ е надворешен за $\triangle OAM$, па затоа

$$\measuredangle AOD = 90^\circ + \measuredangle OMA$$

$$180^\circ - 2\omega = 90^\circ + \varphi$$

$$\omega = \frac{90^\circ - \varphi}{2} = \frac{90^\circ - 30^\circ}{2} = 30^\circ.$$



Според тоа, триаголникот AMD со $\overline{AM} = \overline{AD}$.

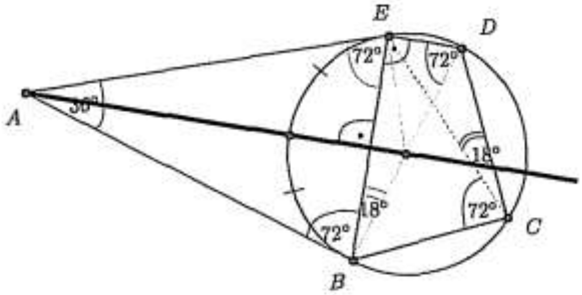
б) Центарот на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ лежи на симетралата на страната MD, која минува низ темето A и ја сече кружницата C во уште една точка k. Според тоа, $KA \perp DM$. Понатаму, $\triangle OAK$ е рамнокрак, па затоа правата DM е симетрала на отсечката KA, што значи дека $\triangle DAK$ е амнокрак ($\overline{DK} = \overline{DA}$). Но, тоа значи дека $\measuredangle ADK = 2\omega = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, па затоа

$$\measuredangle KAD=\measuredangle AKD=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ,$$

т.е. $\triangle DAK$ е рамностран. Според тоа, $\overline{KA}=\overline{KD}$. Од друга страна K припаѓа на симетралата на страната DM, па затоа $\overline{KM}=\overline{KD}$, што заедно со претходно изнесеното повлекува $\overline{KM}=\overline{KD}=\overline{KA}$, т.е. K е центар на опишаната кружница околу $\triangle AMD$.

33. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$ таков што $\overline{AE}=\overline{AB}$, $\measuredangle EAB=36^\circ$, $\measuredangle ECD=18^\circ$ и $\measuredangle EDB=72^\circ$. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle BCE$. Ако AE е тангента на кружницата k, докажи дека средината на отсечката BD, средината на лакот BE и точката A се колинеарни (лежат на една права).

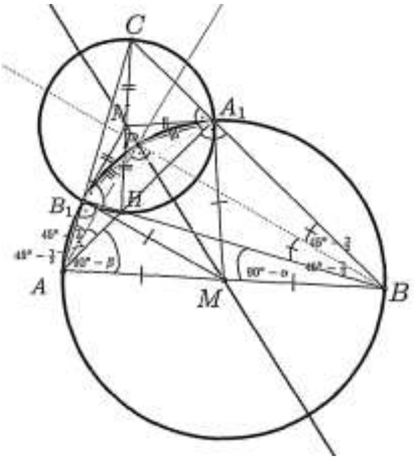
Решение. Кружницата k е опишана околу $\triangle BCE$, па затоа ако AE е нејзина тангента, тогаш и AB е нејзина тангента, па затоа $\triangle EAB$ е рамнокрак. Затоа $\measuredangle AEB=\measuredangle ABE=72^\circ$. Понатаму, $\measuredangle AEB=\measuredangle ECB$, како тангентен и периферен агол на кружницата k, па затоа $\measuredangle ECB=72^\circ$. Но, $\measuredangle EDB=72^\circ$, па затоа и точката D припаѓа на кружницата k. Понатаму, бидејќи $\measuredangle ECD=18^\circ$, добиваме дека $\measuredangle BCD=\ \measuredangle BCE+\measuredangle ECD=90^\circ$, што значи дека центарот на k е средината на отсечката BD.



Центарот на k припаѓа на симетралата на отсечката BE, на која припаѓа и средината на лакот BE. Понатаму, бидејќи $\triangle EAB$ е рамнокрак добиваме дека и A припаѓа на симетралата на отсечката BE, што значи дека разгледуваните три точки припаѓаат на симетралата на отсечката BE, т.е. се колинеарни.

34. Даден е остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H. Докажи дека средините на отсечките AB и CH и пресечната точка на симетралите на аглите $\measuredangle CAH$ и $\measuredangle CBH$ се колинерани точки.

Решение. Нека M е средината на AB, N е средината на CH, P е пресечната точка на симетралите на $\measuredangle CAH$ и $\measuredangle CBH$, A_1 и B_1 се подножјата на висините во $\triangle ABC$ подлечени од темињата A и B соодветно. Аглите во темињата A, B, C на $\triangle ABC$ да ги означиме со α, β, γ, соодветно. Ќе докажеме дека точките M, N и P лежат на симетралата на отсечката A_1B_1, од каде ќе следува тврдењето на задачата.



Во правоаголниот $\triangle ABB_1$ отсечката B_1M е тежишната линија која соодветствува на хипотенузата, па затоа е еднаква на половина од хипотенузата, т.е. $\overline{B_1M} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Аналогно од $\triangle AA_1B$ добиваме $\overline{A_1M} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Значи, $\overline{B_1M} = \overline{A_1M}$, па затоа точката M лежи на симетралата на A_1B_1. Во правоаголниот $\triangle CB_1H$ отсечката B_1N е тежишна линија која соодветствува на хипотенузата CH, па затоа $\overline{B_1N} = \frac{\overline{CH}}{2}$. Аналогно од $\triangle CA_1H$ добиваме $\overline{A_1N} = \frac{\overline{CH}}{2}$. Значи, $\overline{B_1N} = \overline{A_1N}$, па затоа точката N лежи на симетралата на A_1B_1. Од $\triangle CAA_1$ и $\triangle CBB_1$ добиваме $\measuredangle PAA_1 = 45^\circ - \frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle PBB_1 = 45^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Затоа

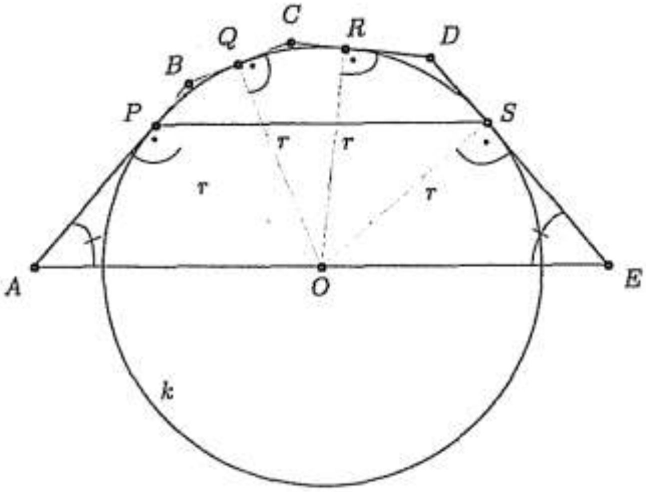
$$\begin{aligned}\measuredangle APB &= 180^\circ - \measuredangle BAP - \measuredangle ABP \\ &= 180^\circ - (45^\circ - \tfrac{\gamma}{2} + 90^\circ - \beta) - (45^\circ - \tfrac{\gamma}{2} - 90^\circ - \alpha) \\ &= \alpha + \beta + \gamma - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

Значи, $\measuredangle AA_1B = \measuredangle APB = \measuredangle AB_1B = 90^\circ$, па затоа точките A, A_1, P, B и B_1 припаѓаат на една кружница. Бидејќи $\measuredangle PAA_1 = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle PBB_1$, а еднакви периферски агли соодветствуваат над еднакви тетиви, заклучуваме дека $\overline{B_1P} = \overline{A_1P}$. Значи точката P лежи на симетралата на A_1B_1, со што е докажано тврдењето на задачата.

35. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB,BC,CD и DE во точките P,Q,R и S, соодветно (различни од темињата на петаголникот). Докажи, дека правите PS и AE се паралелни.

Решение. Нека O е центарот на кружницата k. Имаме $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{DR}=\overline{DS}$ како тангентни отсечки на кружницата k. Од условот $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ следува

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}=\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}+\overline{ES}$$



Оттука добиваме $\overline{AP}=\overline{ES}$. Понатаму, од $\overline{AP}=\overline{ES}$, $\measuredangle APO=\measuredangle ESO$ $=90^\circ$ и $\overline{PO}=\overline{SO}$ (радиуси на k) следува дека $\triangle APO\cong\triangle ESO$, па затоа $\measuredangle PAO=\measuredangle SEO$.

Од рамнокракиот $\triangle POS$ следува $\measuredangle OPS=\measuredangle OSP$, па затоа

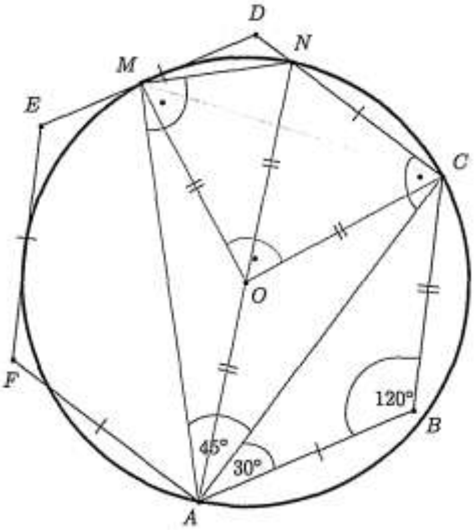
$$\measuredangle APS=\measuredangle APO+\measuredangle OPS=90^\circ+\measuredangle OPS=90^\circ+\measuredangle OSP=\measuredangle PSE .$$

Сега, од четириаголникот $APSE$ заклучуваме

$$2\measuredangle EAP+2\measuredangle APS=\measuredangle EAP+\measuredangle APS+\measuredangle PSE+\measuredangle SEA=360^\circ ,$$

па затоа $\measuredangle EAP+\measuredangle APS=180^\circ$, што значи дека четириаголникот $APSE$ е рамнокрак трапез, т.е. $AE\parallel PS$.

36. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Нека точките M и N се внатрешни точки на страните DE и CD, соодветно такви што $\measuredangle AMN=90^\circ$ и $\overline{AN}=\overline{CM}\sqrt{2}$. Определи го аголот $\measuredangle BAM$.



Решение. Внатрешниот агол на правилен шестаголник е еднаков на 120°, па од рамнокракиот $\triangle ABC$ следува дека $\measuredangle ACB = 30^\circ$. Затоа

$$\measuredangle NCA = \measuredangle DCB - \measuredangle ACB$$

$$= 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Оттука следува дека четириаголникот $AMNC$ е тетивен ($\measuredangle AMN = \measuredangle ACN = 90^\circ$). Центарот на опишаната кружница околу овој четириаголник е во средината на отсечката AN, па затоа

$$\overline{OM} = \overline{OC} = \frac{\overline{AN}}{2} = \frac{\overline{CM}\sqrt{2}}{2}.$$

Во ΔCOM важи

$$\overline{OM}^2 + \overline{OC}^2 = 2\overline{OM}^2 = 2(\frac{\overline{CM}\sqrt{2}}{2})^2 = \overline{CM}^2$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека $\angle COM = 90^\circ$. На овој централен агол соодветниот периферен агол е $\measuredangle CAM = \frac{\measuredangle COM}{2}$ $= 45^\circ$. Затоа бараниот агол е

$$\measuredangle BAM = \measuredangle BAC + \measuredangle CAM = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

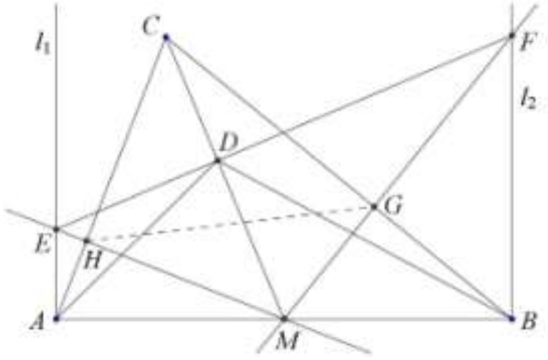
37. Нека ABC е остроаголен триаголник. Правите l_1 и l_2 се нормали на AB во точките A и B, соодветно. Нека точката M е средина на отсечката AB. Нормалите повлечени од точката M на правите AC и BC ги сечат l_1 и l_2 во точките E и F, соодветно. Ако D е пресек на правите EF и MC, докажи дека $\measuredangle ADB = \measuredangle EMF$.

Решение. Нека F, G се пресечните точки на ME, MF со AB, BC соодветно. Од сличноста на $\triangle MHA$ и $\triangle MAE$ следува $\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{ME}}$, односно

$$\overline{MA}^2 = \overline{MH} \cdot \overline{ME}. \qquad (1)$$

Од сличноста на $\triangle MBG$ и $\triangle MFB$ следува $\frac{\overline{MB}}{\overline{MF}}=\frac{\overline{MG}}{\overline{MB}}$, односно

$$\overline{MB}^2=\overline{MF}\cdot\overline{MG}. \qquad (2)$$



Но, $\overline{MA}=\overline{MB}$, па затоа од (1) и (2) добиваме $\overline{MH}\cdot\overline{ME}=\overline{MF}\cdot\overline{MG}$, што значи дека точките E,H,G,F лежат на една кружница. Затоа важи $\measuredangle FEH=\measuredangle FEM=\measuredangle HGM$. Исто така четириаголникот $CHMG$ е тетивен, па важи $\measuredangle CMH=\measuredangle HGC$. Според тоа,

$$\measuredangle FEH+\measuredangle CMH=\measuredangle HGM+\measuredangle HGC=90^\circ,$$

па затоа $CM\perp EF$. Сега, од тетивноста на четириаголниците $FDMB$ и $EAMD$ следува $\measuredangle DFM=\measuredangle DBM$ и $\measuredangle DEM=\measuredangle DAM$. Затоа $\triangle EMF$ е сличен со $\triangle ADB$, од што следува $\measuredangle ADB=\measuredangle EMF$.

38. Ако I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$, I_a е центар на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$ и D е втората пресечна точка на на AI со опишаната кружница околу $\triangle ABC$, тогаш $\overline{DB}=\overline{DC}=\overline{DI}=\overline{DI_a}$.

Решение. Аглите на $\triangle ABC$ ќе ги означиме стандардно со α,β и γ

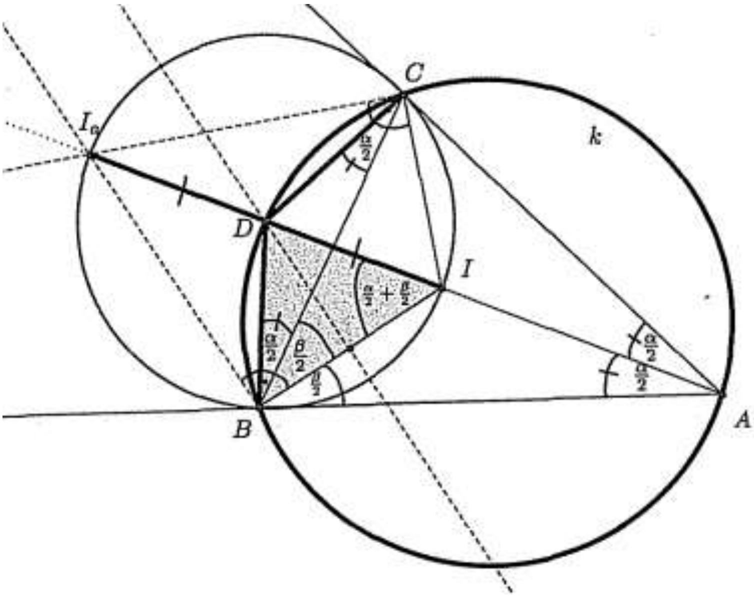
$$\measuredangle BID=\measuredangle BAI+\measuredangle ABI=\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\beta}{2},$$

како надворешен агол на $\triangle BIA$. Од еднаквоста на периферните агли на тетивите DB и DC на опишаната кружница следува $\overline{DB}=\overline{DC}$ и имаме $\measuredangle DBC=\measuredangle DAC=\frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle DCB=\measuredangle DAB=\frac{\alpha}{2}$. Затоа

$$\measuredangle DBI=\measuredangle DCB+\measuredangle CBI=\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\beta}{2}.$$

Значи, $\triangle DIB$ е рамнокрак, па затоа $\overline{DB}=\overline{DI}$. Од

$$\measuredangle I_aBI=\measuredangle I_aBC+\measuredangle CBI=\frac{180^\circ-\beta}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ$$



следува дека $\triangle IBI_a$ е правоаголен. Бидејќи центарот на опишаната кружница на правоаголен триаголник се наоѓа на пресекот на симетралата на една катета и хипотенузата, добиваме дека центарот мора да биде точката D, бидејќи таа припаѓа на II_a, а бидејќи $\overline{DB}=\overline{DI}$ припаѓа и на симетралата на катетата BI. Затоа $\overline{DI_a}=\overline{DB}=\overline{DI}$.

39. Нека е даден $\triangle ABC$ и нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишни линии во триаголникот кои се сечат во точка T и притоа важи $\overline{BA_1}=\overline{A_1T}$. На продолжението на CC_1 избираме точка C_2 таква што $\overline{C_1C_2}=\frac{\overline{CC_1}}{3}$, а на продолжението на BB_1 избираме точка B_2 таква што $\overline{B_1B_2}=\frac{\overline{BB_1}}{3}$. Докажи дека четириаголникот TB_2AC_2 е правоаголник.

Решение. Бидејќи AA_1 е тежишна линаја во $\triangle ABC$ и $\overline{BA_1}=\overline{A_1T}$ добиваме дека $\overline{A_1T}=\frac{\overline{BC}}{2}$ т.е. A_1 е центар на опишана кружница околу $\triangle BCT$. Сега од Талесова теорема имаме $\measuredangle BTC=90^\circ$. Понатаму, $\measuredangle B_2TC_2=90^\circ$ (како накрсни агли). Бидејќи T е тежиште во $\triangle ABC$ имаме $\overline{C_1T}=\frac{\overline{CC_1}}{3}=\overline{C_1C_2}$. Од $\overline{BC_1}=\overline{C_1A}$ следува дека четириаголникот

$BTAC_2$ е паралелограм, па затоа $BT \parallel AC_2$, од каде добиваме

$\measuredangle TC_2A = \measuredangle CTB_2 = 180^\circ - \measuredangle B_2TC_2 = 90^\circ$

(како агли над трансферзала).

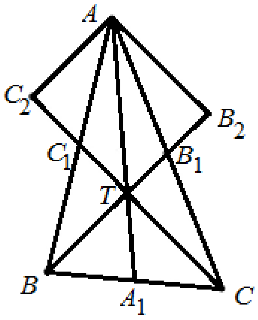
Аналогно се докажува дека четириаголникот TCB_2A е паралелограм, т.е.

$$\measuredangle TB_2A = \measuredangle C_2TB_2 = 90^\circ$$

(како агли над трансферзала). Според тоа,

$$\measuredangle C_2AB_2 = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

т.е. четириаголникот е правоаголник.



40. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека S_a, S_b, S_c, S_d се центрите на вписаните кружници во триаголниците BCD, CDA, DAB, ABC, соодветно. Докажи дека четириаголникот $S_aS_bS_cS_d$ е правоаголник.

Решение. *Лема.* Ако I е центар на вписаната кружница во $\triangle ABC$, тогаш

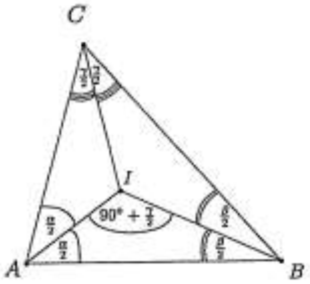
$$\measuredangle AIB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},\ \measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

$$\measuredangle CIA = 90^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Доказ. Навистина, од

$$\measuredangle BAI = \frac{\alpha}{2} \text{ и } \measuredangle ABI = \frac{\beta}{2}$$

(цртеж десно)следува



$$\measuredangle AIB = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

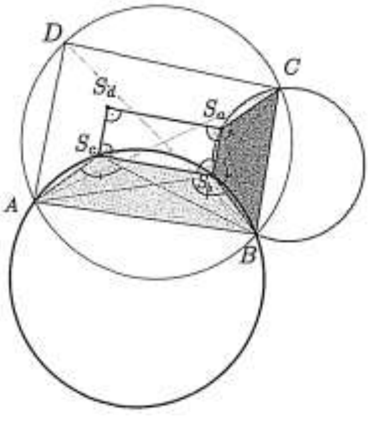
Останатите две равенства се докажуваат аналогно. ■

Од горната лема следува $\measuredangle AS_cB = 90^\circ + \frac{\measuredangle ACB}{2}$ и $\measuredangle AS_dB = 90^\circ + \frac{\measuredangle ADB}{2}$.

Но, четириаголникот $ABCD$ е тетивен па затоа $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$, како периферни агли над тетивата AB. Според тоа, $\measuredangle AS_cB = \measuredangle AS_dB$, што значи дека четириагоникот AS_cS_dB е тетивен. Според тоа,

$$\measuredangle AS_cS_d = 180^\circ - \measuredangle ABS_d$$

и бидејќи BS_d е симетрала на $\measuredangle ABC$ добиваме



$$\measuredangle AS_cS_d = 180^\circ - \tfrac{\measuredangle ABC}{2}.$$

Аналогно се докажува дека четириаголникот AS_cS_bD е тетивен и дека

$$\measuredangle AS_cS_b = 180^\circ - \tfrac{\measuredangle ADC}{2}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle S_cS_bS_d &= 360^\circ - \measuredangle AS_cS_d - \measuredangle AS_cS_b\\ &= 360^\circ - (180^\circ - \tfrac{\measuredangle ABC}{2}) - (180^\circ - \tfrac{\measuredangle ADC}{2})\\ &= \tfrac{\measuredangle ABC + \measuredangle ADC}{2} = 90^\circ,\end{aligned}$$

Бидејќи збирот на спротивните агли во тетивен четириаголник е еднаков на 180°. Аналогно се докажува дека

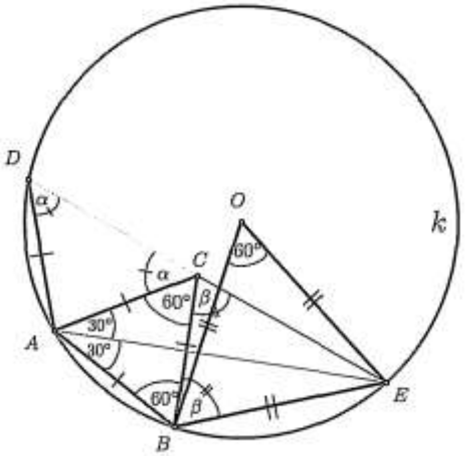
$$\measuredangle S_cS_dS_a = \measuredangle S_dS_aS_b = \measuredangle S_aS_bS_c = 90^\circ,$$

што значи дека четириаголникот $S_aS_bS_cS_d$ е правоаголник.

41. Темињата A и B на рамностран $\triangle ABC$ лежат на кружница k со радиус 1, а темето C се наоѓа во внатрешноста на кружницата k. Точката $D \neq B$ лежи на кружницата k и важи $\overline{AD} = \overline{AB}$. Правата DC ја сече кружницата k уште во точката E. Определи ја должината на отсечката CE.

Решение. Од $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{AC}$ следува дека $\triangle ACD$ е рамнокрак. Да означиме

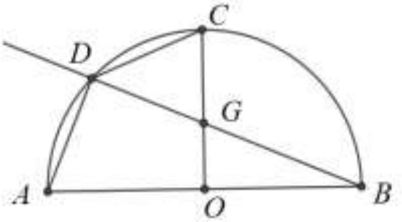
$$\alpha = \measuredangle ADC = \measuredangle ACD \text{ и}$$
$$\beta = \measuredangle BCE.$$



Тогаш $\alpha + \beta = 120^\circ$. Од тетивниот четириаголник $ABED$ следува $\measuredangle ABE = 180^\circ - \alpha$. Тогаш $\measuredangle CBE = 120^\circ - \alpha = \beta$, што значи дека $\triangle CBE$ е рамнокрак и четириаголникот $ABEC$ е делтоид. Оттука следува дека AE е симетрала на $\measuredangle BAC$, бидејќи е дијагонала која го дели делтоидот на два еднакви дела. Затоа $\measuredangle EAB = 30^\circ$, од што следува дека централниот агол над тетивата BE е еднаков на 60°. Според тоа, триаголникот чии темиња се B,E и центарот O на кружницата е рамностран, т.е. $\overline{BE}=1$.

Конечно, од $\triangle CBE$ следува дека $\overline{CE}=\overline{BE}=1$.

42. Нека е дадена полукружница k со центар O и дијаметар AB. Нека C е точка од k таква што $CO\perp AB$. Симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече k во точка D, а OC во точка G. Докажи дека $\overline{AD}=\overline{DG}=\overline{DC}$.



Решение. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, и AB е дијаметар, па затоа $\measuredangle ADB=\measuredangle ACB=90^\circ$. Триаголникот ABC е рамнокрак правоаголен па затоа $\measuredangle CAB=\measuredangle CBA=45^\circ$. Сега, BD е симетрала на $\measuredangle ABC$, па затоа $\measuredangle DBA=\measuredangle CBD=22^\circ 30'$. Од

$$\measuredangle DAC=\measuredangle DBC=22^\circ 30' \text{ и } \measuredangle DCA=\measuredangle DBA=22^\circ 30'$$

следува $\triangle ADC$ е рамнокрак и $\overline{AD}=\overline{DC}$.

Од

$$\measuredangle DAB=\measuredangle DAC+\measuredangle CAB=22^\circ 30' +45^\circ =67^\circ 30'$$

следува

$$\measuredangle DAG=\measuredangle DAB+\measuredangle GAB=67^\circ 30' -22^\circ 30' =45^\circ .$$

Од

$$\measuredangle DGA=180^\circ -(\measuredangle ADG+\measuredangle DAG)=45^\circ$$

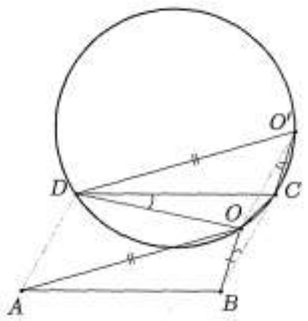
следува $\triangle ADG$ е рамнокрак триаголник т.е. $\overline{AD}=\overline{DG}$. Конечно, од $\overline{AD}=\overline{DC}$ и $\overline{AD}=\overline{DG}$ следува $\overline{AD}=\overline{DG}=\overline{DC}$.

43. Нека O е точка во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ таква што $\measuredangle AOB+\measuredangle COD\ =180^\circ$. Докажи, дека $\measuredangle OBC=\measuredangle ODC$.

Решение. Конструираме точка O' надвор од паралелограмот $ABCD$ таква што

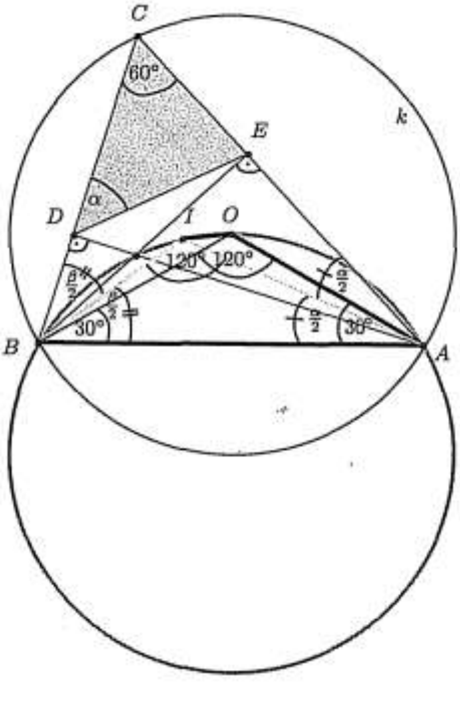
$$\overline{AO}=\overline{DO'} \text{ и } \overline{BO}=\overline{CO'}.$$

По конструкција $\triangle AOB\cong\triangle DO'C$ и $AO\parallel DO'$ и $BO\parallel CO'$. Оттука следува дека четириаголниците $AOO'D$ и $BCO'O$ се паралелограми. Од



$\measuredangle CO'D + \measuredangle COD = \measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ$ следува дека четириаголникот $CO'DO$ е тетивен. Тоа значи дека $\measuredangle ODC = \measuredangle OO'C$, како периферијски агли над тетивата CO, а од паралелограмот $BCO'O$ следува $\measuredangle OO'C = \measuredangle OBC$. Оттука следува дека $\measuredangle ODC = \measuredangle OBC$, што и требаше да се докаже.

44. Во остроаголниот $\triangle ABC$ точките D и E се подножја на висините повлечени од темињата A и B, соодветно, $\overline{AC} > \overline{BC}$ и $\overline{AB} = 2\overline{DE}$. Со O и I да ги означиме центарите на опишаната и впишаната кружница, соодветно. Определи го $\measuredangle AIO$.



Решение. Од $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $AEDB$ е тетивен. Затоа, $\measuredangle CDE = \measuredangle BAC = \alpha$ како надворешен агол на тетивен четириаголник. Според тоа, $\triangle CDE$ и $\triangle ABC$ имаат еден заеднички агол и еден пар еднакви агли, па затоа $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Од сличноста следува

$$\overline{CD} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{AB}$$

и користејќи го условот добиваме $\overline{AC} = 2\overline{CD}$. Значи, во правоаголниот $\triangle ACD$ хипотенузата е двапати поголема од катетата, па затоа $\gamma = \measuredangle ACD = 60^\circ$. Оттука непосредно добиваме

$$\measuredangle AOB = 120^\circ \text{ и } \measuredangle ABO = \measuredangle BAO = 30^\circ.$$

Бидејќи $\gamma = 60^\circ$, важи $\alpha + \beta = 120^\circ$, па од $\triangle AIB$ имаме

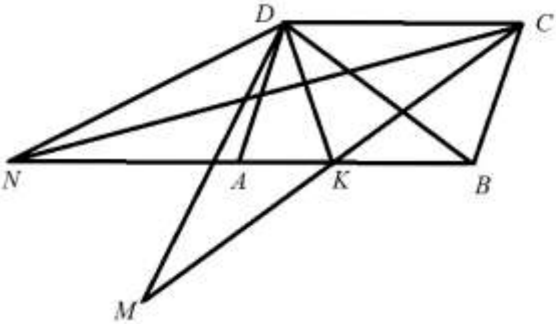
$$\measuredangle AIB = 180^\circ - (\measuredangle ABI + \measuredangle BAI) = 180^\circ - (\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Значи, $\measuredangle AIB = \measuredangle AOB = 120^\circ$, па затоа четириаголникот $AOIB$ е тетивен, при што неговите темиња се воовој распоред бидејќи $\overline{AC} > \overline{BC}$. Затоа $\measuredangle AIO = \measuredangle ABO = 30^\circ$.

45. Во паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BD}$. Нека K е точка на AB, различна од A таква што $\overline{KD} = \overline{AD}$. Нека M е точката симетрична на точката C во однос на K, а N е точката симетрична на точката B во однос на A. Докажи, дека $\overline{DM} = \overline{DN}$.

Решение. Бидејќи

$$\measuredangle BKD = 180^\circ - \measuredangle DKA = 180^\circ - \measuredangle KAD = \measuredangle CBK$$



и $\overline{DK} = \overline{DA} = \overline{BC}$, добиваме дека триаголниците DKB и KBC се складни. Затоа, $\overline{CK} = \overline{DB} = \overline{AB} = \overline{CD}$ и

$$\measuredangle NBD = \measuredangle KDB = \measuredangle BKC = \measuredangle DCM .$$

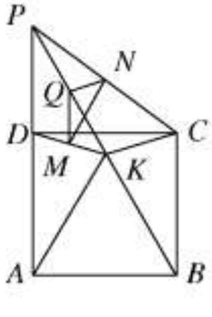
Сега, бидејќи

$$\measuredangle DCM = \measuredangle NBD ,\ \overline{DC} = \overline{BD} \text{ и } \overline{CM} = 2\overline{CK} = 2\overline{DB} = 2\overline{AB} = \overline{NB} ,$$

добиваме дека триаголниците CDM и BDN се складни, од каде следува дека $\overline{DM} = \overline{DN}$.

46. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е конструиран рамностран триаголник ABK. Правите BK и AD се сечат во точка P. Докажи, дека должината на отсечката која ги поврзува средините на отсечките KD и CP е еднаква на половината од должината на страната на квадратот.

Решение. Триаголникот ABP е правоаголен и $\measuredangle APB = 30^\circ$, па затоа $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, од каде следува дека $\overline{PK} = \overline{AB}$. Нека M, N, Q се средините на DK, PC, PK, соодветно. Тогаш QM е средна линија во $\triangle DPK$, па затоа $QM \parallel DP$ и $\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{DP}$. Аналогно $QN \parallel KC$ и $\overline{QN} = \frac{1}{2}\overline{KC}$. Освен тоа



$$\measuredangle MQN = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ .$$

Понатаму $\triangle DKC$ е рамнокрак и $\measuredangle KDC = 15^\circ$, па затоа $\measuredangle KDP = 105^\circ$. Значи, $\triangle QMN \sim \triangle DPK$ со коефициент на сличност $\frac{1}{2}$, па затоа

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PK}} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{AB} .$$

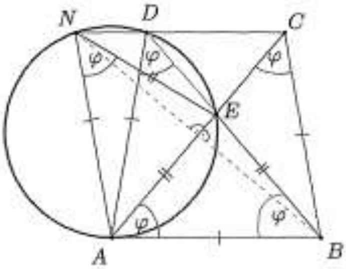
47. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез таков што $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}, AB \| DC$ и $\overline{AB} > \overline{CD}$. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD и нека точката N е симетрична на точката B во однос на правата AC. Докажи, дека четириаголникот $ANDE$ е тетивен.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \varphi$. Од рамнокракиот $\triangle ABC$ следува $\measuredangle ACB = \varphi$. Понатаму, заради симетрија на рамнокракиот трапез $ABCD$ важи

$$\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = \varphi \text{ и}$$

$$\measuredangle ABD = \measuredangle BAC = \varphi .$$

Значи, $\measuredangle ADE = \varphi$ и $\measuredangle ANE = \measuredangle ABE = \varphi$ заради симетрија во однос на правата AC. Конечно, од $\measuredangle ADE = \varphi = \measuredangle ANE$ следува дека точките A, N, D и E лежат на една кружница, т.е. четириаголникот $ANDE$ е тетивен.



48. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат под агол од 90° во точката O. Нека K, L, M и N се ортогоналните проекции на точката O на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Докажи, дека четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

Решение. Четириаголникот $AKON$ е тетивен, па затоа важи $\measuredangle OAN = \measuredangle OKN$. Аналогно заклучуваме дека важи $\measuredangle OBL = \measuredangle OKL, \measuredangle ODN = \measuredangle OMN, \measuredangle OCL = \measuredangle OML$. Ако ги собереме овие равенства добиваме

$$\measuredangle LKN + \measuredangle LMN = \measuredangle OAD + \measuredangle ODA + \measuredangle OBC + \measuredangle OCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ ,$$

што значи четириаголникот $KLMN$ е тетивен.

49. Дадена е полукружница k со центар O и дијаметар AB. Нека C е точката од k таква што $CO \perp AB$. Симетралата на $\angle ABC$ ја сече k во точката D. Нека E е точката од AB таква што $DE \perp AB$ и нека F е средината на CB. Докажи дека четириаголникот $EFCD$ е тетивен.

Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак правоаголен. Нека $CD \cap AB = \{H\}$. Од $\measuredangle AED = \measuredangle ADB = 90^\circ$ и $\measuredangle DAE = \measuredangle DAB$ следува дека $\triangle ADE \sim \triangle ABD$. Од тетивноста на четириаголникот $ABCD$ следува $\measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle ABC = 135^\circ$, т.е. $\measuredangle HDA = 45^\circ$. Тогаш

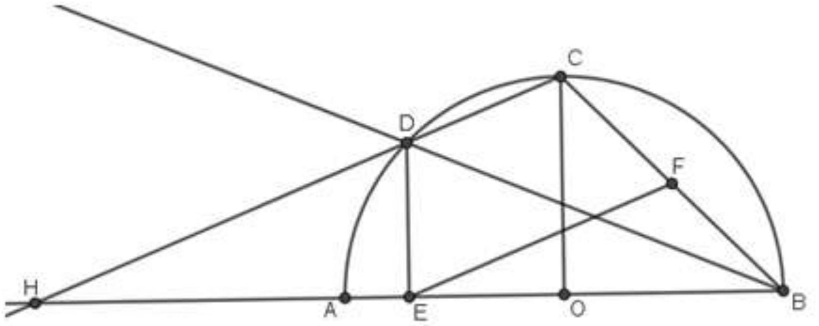
$$\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \measuredangle CAB = \measuredangle DBC + \measuredangle CAB = 22^\circ 30' + 45^\circ = 67^\circ 30'.$$

Според тоа,

$$\measuredangle HAD = 180^\circ - \measuredangle DAB = 180^\circ - 67^\circ 30' = 112^\circ 30',$$

односно

$$\measuredangle AHD = 180^\circ - (\measuredangle HAD + \measuredangle HDA) = 180^\circ - 157^\circ 30' = 22^\circ 30'$$



т.е. $\triangle HDB$ е рамнокрак. Бидејќи $\triangle HDB$ е рамнокрак и $DE \perp AB$ следува дека E е средина на HB. Но, E е средина на HB и F е средина на CB, па затоа EF е средна линија во ΔHBC т.е. $EF \| HC$ т.е. $EF \| CD$. Значи, четириаголникот $EFCD$ е трапез. Понатаму, $EF \| HC$ следува $\measuredangle FEB = \measuredangle CHB = 22^\circ 30'$. Од $DE \perp AB$ имаме

$$\measuredangle DEF = 90^\circ - \measuredangle FEB = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'.$$

Според тоа,

$$\measuredangle EFB = 180^\circ - (\measuredangle FEB + \measuredangle EBF) = 180^\circ - 67^\circ 30' = 112^\circ 30'.$$

т.е.

$$\measuredangle CFE = 180^\circ - \measuredangle EFB = 67^\circ 30'.$$

Конечно, $EFCD$ е рамнокрак трапез, од каде следува тврдењето.

50. (задача на Наполеон). Даден е $\triangle ABC$, над чии страни кон надворешноста на триаголникот се конструирани рамнострани триаголници $\triangle BCP, \triangle CAQ$ и $\triangle ABR$. Докажи,

а) $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}$.

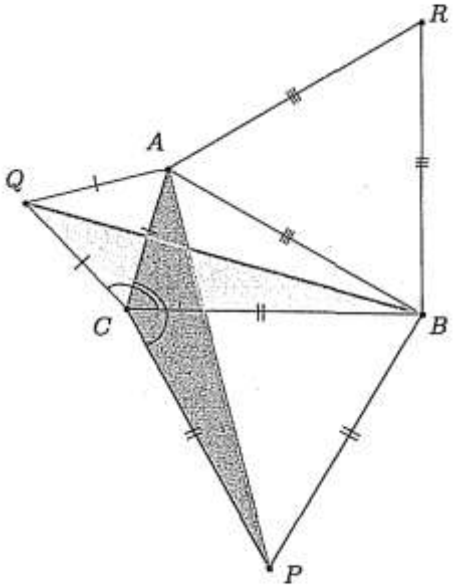
б) Правите AP, BQ и CR се сечат во една точка.

в) Центрите на рамностраните $\triangle BCP, \triangle CAQ$ и $\triangle ABR$ се темиња на рамностран триаголник.

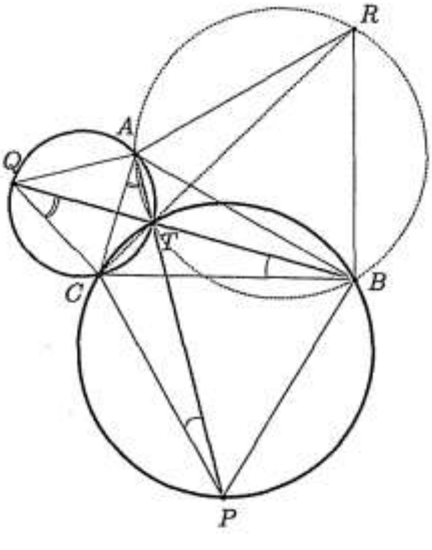
Решение. а) Да ги разгледаме $\triangle ACP$ и $\triangle BCQ$. Имаме $\overline{AC}=\overline{CQ}$ и $\overline{CP}=\overline{CQ}$. Понатаму,

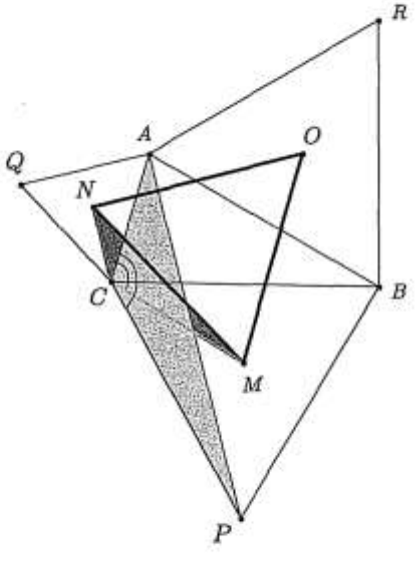
$$\measuredangle BCQ=\measuredangle BCA+\measuredangle ACQ$$
$$=\measuredangle BCA+60^{\circ}$$

и аналогно $\measuredangle ACP=\measuredangle BCA+60^{\circ}$. Сега од признакот САС следува дека $\triangle ACP\cong\triangle QCB$, па затоа $\overline{BQ}=\overline{AP}$. Аналогно, разгледувајќи ги $\triangle ABP$ и $\triangle CBR$, се докажува дека $\overline{AP}=\overline{CR}$, со што тврдењето е докажано.



б) Нека T е пресекот на правите AP и BQ. Треба да докажеме дека точките C,T и R се колинеарни. Од решението под а), т.е. од $\triangle ACP\cong\triangle QCB$, следува дека $\measuredangle APC=\measuredangle QBC$, т.е. $\measuredangle CPT=\measuredangle CBT$. Според тоа, четириаголникот $BPCT$ е тетивен. Од тетивноста на четириаголникот следува дека





$$\measuredangle BTC = 180^\circ - \measuredangle BCP = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ .$$

Бидејќи точките B, T и Q се колинеарни, добиваме

$$\measuredangle CTQ = 180^\circ - \measuredangle BTC = 60^\circ .$$

Од рамностраниот $\triangle ACQ$ имаме $\measuredangle CAQ = 60^\circ$, па затоа $\measuredangle CTQ = \measuredangle CAQ$, т.е. четириаголникот $ATCQ$ е тетивен. Оттука лесно следува дека $\measuredangle ATC = 120^\circ$. Сега, лесно наоѓаме

$$\measuredangle ATB = 360^\circ - \measuredangle ATC - \measuredangle BTC = 120^\circ ,$$

што значи дека четириаголникот $ARBT$ е тетивен. Но, последното значи дека $\measuredangle ATR = \measuredangle ABR = 60^\circ$. Сега имаме

$$\measuredangle CTR = \measuredangle CTA + \measuredangle ATR = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

од каде следува дека точките C, T и R се колинеарни.

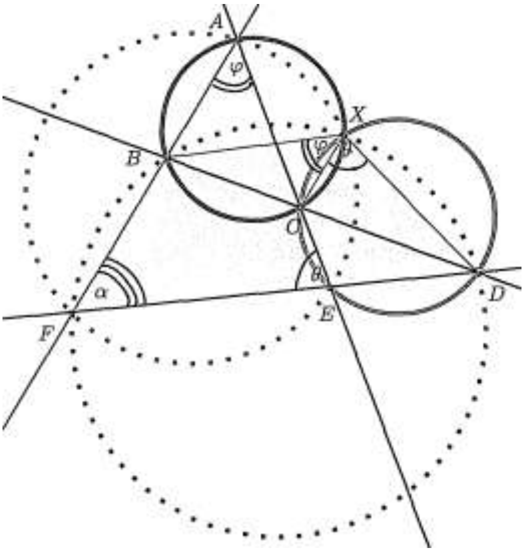
в) Со M, N и P да ги означиме центрите на рамностраните $\triangle BCP, \triangle CQA$ и $\triangle ABR$, соодветно. Да ги разгледаме $\triangle ACP$ и $\triangle ABR$. Важи $\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{CP}$ и $\overline{NC} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AC}$. Затоа $\overline{MC} : \overline{NC} = \overline{PC} : \overline{AC}$. Поната-му, $\measuredangle MCN = \measuredangle BCA + 60^\circ$ и $\measuredangle ACN = 30^\circ + \measuredangle BCA + 30^\circ = \measuredangle BCA + 60^\circ$, што значи дека $\triangle ACP \sim \triangle NCM$. Аналогно се докажува дека $\overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{CR}$ и $\overline{NO} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BQ}$. Сега од тврдењето под а) следува дека $\overline{MN} = \overline{NO} = \overline{OM}$, т.е. $\triangle MNO$ е рамностран.

51. (Теорема на Микел). Четири прави кои по парови не се паралелни определуваат четири триаголници. Докажи, дека опишаните кружници околу овие триаголници минуваат кон една точка.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека пресечните точки на правите се означени со A, B, C, D, E и F, а аглите со

$$\measuredangle AFE = \measuredangle BFD = \alpha ,\ \measuredangle BAC = \varphi \text{ и } \measuredangle AEF = \measuredangle CEF = \theta ,$$

види цртеж. Нека претпоставиме дека опишаните кружници околу $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$ се сечат упте во точката X. Ќе докажеме дека опишаните кружници околу $\triangle BDF$ и $\triangle AFE$ минуваат низ точката X. За да докажеме дека опишаната кружница околу $\triangle BDF$ минува низ точката X, доволно е да докажеме дека четириаголникот $BXDF$ е тетивен.



Четириаголникот $ABCX$ е тетивен, па затоа
$\measuredangle BXC = \measuredangle BAC \ = \varphi$,
како периферни агли над тетивата BC. Четириаголникот $CXDE$ е тетивен, па затоа $\measuredangle CXD = \measuredangle CEF = \theta$. Оттука следува дека

$$\measuredangle BXD = \measuredangle BXC + \measuredangle CXD$$
$$= \varphi + \theta.$$

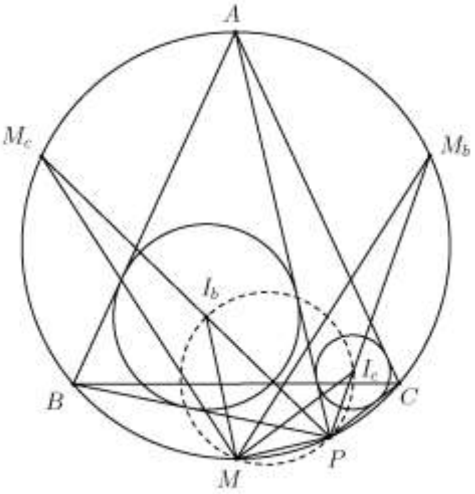
Понатаму, збирот на аглите во $\triangle AEF$ е 180°, па затоа

$$\measuredangle BFD + \measuredangle BXD = \alpha + (\varphi + \theta)$$
$$= 180^\circ.$$

Последното значи, дека опишаната кружница околу $\triangle BDF$ минува низ точката X.

Аналогно се докажува дека и опишаната кружница околу $\triangle AFE$ минува низ точката X, со што тврдењето е докажано.

52. Рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$) е впишан во кружница ω. Нека P е произволна точка од лакот BC кој не ја содржи A. Точките I_B и I_C се центрите на впишаните кружници цо триаголниците ABP и ACP, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle PI_BI_C$ минува низ постојана точка која не зависи од изборот на точката P.



Решение. Нека M е средината на лакот BC кој не ја содржи A. Ќе докажеме дека M го има саканото својсто.

Од $\measuredangle MPA = 90^\circ$ и PA е симетрала на $\measuredangle I_BPI_C$ следува дека PM е надворешна симетрала на овој агол, па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{MI_B}=\overline{MI_C}$. Со M_B и M_C да ги означиме вториоте пресечни точки на правите PI_B и PI_C со кружницата ω, соодветно. Тогаш

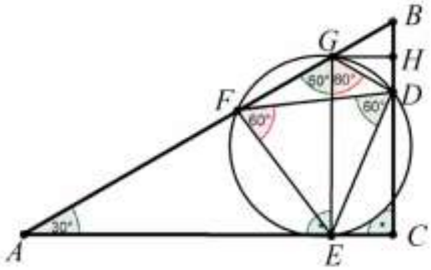
$$\overline{M_BI_B}=\overline{M_BB}=\overline{M_CC}=\overline{M_CI_C} \text{ и } \measuredangle I_BM_BM=\tfrac{PB}{2}=\measuredangle I_CM_CM .$$

Според тоа, $\triangle I_BM_BM\cong\triangle I_CM_CM$, од каде следува $\overline{MI_B}=\overline{MI_C}$.

53. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle C=90^\circ, \measuredangle A=30^\circ$ и $\overline{BC}=1$. Во $\triangle ABC$ е впишан рамностран триаголник (на секоја страна на $\triangle ABC$ лежи по едно теме на впишаниот рамностран триаголник). Определи ја најмалата можна должина на страната на впишаниот рамностран триаголник.

Решение. Нека $\triangle DEF$ е рамностран триаголник впишан во $\triangle ABC$ (цртеж десно). Ако $EG\perp AC$, тогаш од правоаголниот $\triangle AEG$ имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle FGE&=90^\circ-\measuredangle EAG\\&=90^\circ-30^\circ=60^\circ.\end{aligned}$$



Понатаму, бидејќи $\measuredangle EDF=\measuredangle FGE$, заклучуваме дека точките F,E,D,G лежат на една кружница, од што следува дека $\measuredangle EGD=\measuredangle EFD$. Според тоа, $\measuredangle DGB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. Но, $\measuredangle DBG=60^\circ$, па затоа $\triangle GBD$ е рамностран.

Нека $\overline{BD}=x$ и GH е висината во $\triangle GBD$. Имаме $\overline{GH}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Понатаму, четириаголникот $ECHG$ е правоаголник, па затоа $\overline{EC}=\overline{GH}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

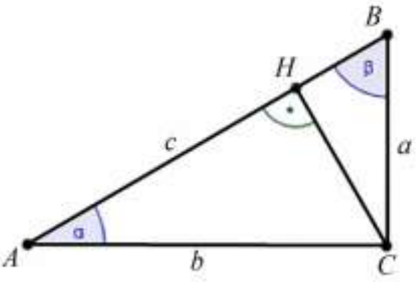
Сега, од правоаголниот $\triangle ECD$ имаме

$$\begin{aligned}\overline{ED}^2&=\overline{EC}^2+\overline{CD}^2=(\tfrac{x\sqrt{3}}{2})^2+(1-x)^2\\&=\tfrac{7x^2}{4}-2x+1=(\tfrac{\sqrt{7}}{2}x-\tfrac{2}{\sqrt{7}})^2+\tfrac{3}{7}\geq\tfrac{3}{7},\end{aligned}$$

т.е. $\overline{ED}\geq\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Ќе докажеме дека во последното неравенство се достигнува знак за равенство. Јасно, $\overline{ED}=\sqrt{\frac{3}{7}}$ ако и само ако $\frac{\sqrt{7}}{2}x-\frac{2}{\sqrt{7}}=0$, т.е. ако и само ако $x=\frac{4}{7}$. Ќе докажеме дека за секоја вредност $\overline{BD}=x\in(0,1)$ постои рамностран $\triangle FDE$. Нека B е точка на страната AC таква што $\overline{EC}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ и нека G е точка на страната AB таква што $\overline{BG}=x$. Тогаш $\triangle BGD$ е рамностран и ако GH е неговата висина, важи $\overline{GH}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, $\overline{EC}=\overline{GH}$, т.е. четириаголникот $ECHG$ е правоаголник. Од $\triangle AEG$ следува $\measuredangle FGE=60^\circ$, па затоа $\measuredangle EGD=60^\circ$. Сега на страната AB да земеме точка F таква што $\measuredangle EDF=60^\circ$. Тогаш $\measuredangle EDF=\measuredangle FGE$, па затоа точките $F,E,D<G$ лежат на иста кружница, од што следува дека $\measuredangle EGD=\measuredangle EFD=60^\circ$. Според тоа, $\measuredangle EDF=\measuredangle EFD=60^\circ$, па затоа $\triangle DEF$ е рамностран.

54. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека H е подножјето на висината повлечена од темето C на страната AB. Докажи, дека збирот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC, \triangle BCH$ и $\triangle ACH$ е еднаков на $\overline{CH}$.



Решение. За елементите на $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Нека $s=\frac{a+b+c}{2}$. Бидејќи AH е висина во $\triangle ABC$ имаме $\measuredangle AHC=90^\circ$, што значи дека триаголниците $\triangle AHC\sim\triangle ABC\sim\triangle BCH$. Нека r,r_1,r_2 се радиусите на впишаните кружници во $\triangle ABC$, $\triangle ACH$, $\triangle BCH$. Од сличностите на триаголниците следува $\frac{r}{r_1}=\frac{c}{b}, \frac{r}{r_2}=\frac{c}{a}$, па затоа

$r_1=r\frac{b}{c},\ \ r_2=r\frac{a}{c}$. Понатаму, од

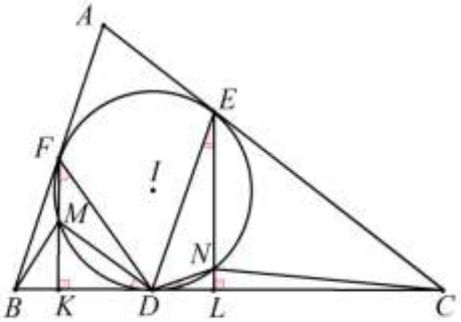
$$r=\frac{P}{s}=\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{ab}{a+b+c},$$

добиваме $r_1=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{b}{c},\ \ r_2=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a}{c}$. Според тоа,

$$r+r_1+r_2=\frac{ab}{a+b+c}+\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{b}{c}+\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a}{c}=\frac{ab}{a+b+c}(1+\frac{b}{c}+\frac{a}{c})=\frac{ab}{c}.$$

Од друга страна, од $\triangle AHC \sim \triangle ABC$ следува $\frac{b}{c} = \frac{\overline{CH}}{a}$, т.е. $\overline{CH} = \frac{ab}{c}$. Значи, $r + r_1 + r_2 = \overline{CH}$, што и требаше да се докаже.

55. Вписаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, AC и AB во точките D, E и F, соодветно. Со K и L да ги означиме се подножјата на нормалите повлечени од точките F и E на страната BC, соодветно. Нека вторите пресечни точки на овие нормали со вписаната кружница се M и N, соодветно. Докажи, дека $\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}$.



Решение. Нека I е центарот на вписаната кружница во $\triangle ABC$. Имаме

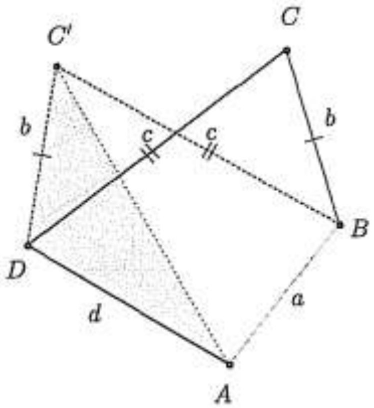
$$\measuredangle BFK = 90^\circ - \measuredangle B \text{ и}$$

$$\measuredangle BFD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle B,$$

па затоа $\measuredangle DFM = \frac{1}{2}\measuredangle B$. Но, $\measuredangle DFM = \measuredangle MDK$, па затоа $\measuredangle MDK = \frac{1}{2}\measuredangle B$. Значи, $\triangle MDK$ и $\triangle BID$ имаат еднакви агли, т.е. тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\frac{\overline{MK}}{\overline{DK}} = \frac{r}{\overline{BD}}$, каде r е радиусот на вписаната кружница во $\triangle ABC$. На потполно ист начин се докажува дека $\frac{\overline{NL}}{\overline{DL}} = \frac{r}{\overline{CD}}$. Затоа, $r = \frac{\overline{MK}\cdot\overline{BD}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{NL}\cdot\overline{CD}}{\overline{DL}}$, од каде добиваме

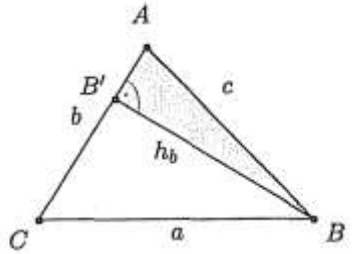
$$\frac{P_{\triangle BMD}}{P_{\triangle CND}} = \frac{\overline{MK}\cdot\overline{BD}}{\overline{NL}\cdot\overline{CD}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DL}}.$$

56. Нека $ABCD$ е четириаголник со должини на страни $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b,$ $\overline{CD} = c, \overline{DA} = d$. Докажи, дека плоштината на четириаголникот е помала или еднаква на $\frac{ac+bd}{2}$.



Решение. Конструираме точка C' таква што $\overline{BC'} = c$ и $\overline{DC'} = b$, види цртеж. Јасно, $\triangle BCD \cong \triangle BC'D$, признак ССС. Затоа четириаголниците

$ABCD$ и $ABC'D$ имаат еднакви плоштини. Според тоа, бараното неравенство треба да го докажеме за четириаголникот $ABC'D$.
Ќе го искористиме тврдењето според кое плоштината на триаголникот е помала или еднаква на полупроизводот на две негови страни. Ова неравенство ќе го докажеме на следниот начин. Ќе докажеме дека за секој $\triangle ABC$ важи $P_{\triangle ABC} \le \frac{bc}{2}$ (за останатите парови страни тврдењето се докажува аналогно).



Нека $\overline{BB'} = h_b$ е висината повлечена од темето B. Од правоаголниот $\triangle BB'A$ добиваме $h_b \le c$, при што знак за равенство важи ако и само ако $B' \equiv A$. Затоа важи

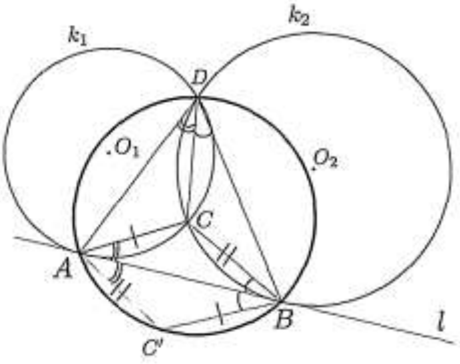
$$P_{\triangle ABC} = \frac{bh_b}{2} \le \frac{bc}{2}.$$

Сега, користејќи го ова неравенство добиваме

$$P_{ABCD} = P_{ABC'D} = P_{ABD} + P_{BC'D} \le \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2} = \frac{ad+bc}{2},$$

со што задачата е решена.

57. Две кружници k_1 и k_2 со радиуси R и r, соодветно се сечат во точките C и D, а допираат права l во точките A и B. Докажи дека радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ABC и ABD се еднакви и изрази ги овие радиуси со помош на R и r.



Решение. Ја повлекуваме отсечката CD. Имаме

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ADC$$

како периферен и тангентен агол над тетивата AC во кружницата k_1 и

$$\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$$

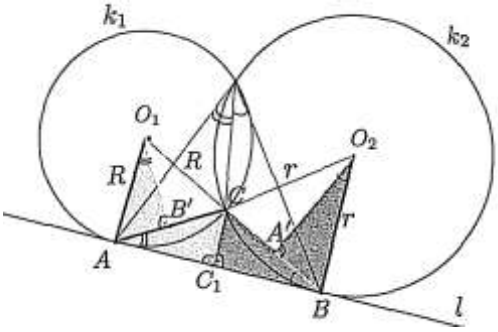
како тангентен и периферен агол над тетивата BC во кружницата k_2. Затоа важи

$$\measuredangle ADB + \measuredangle ACB = \measuredangle ADC + \measuredangle ACD + \measuredangle ACB$$
$$= \measuredangle BAC + \measuredangle CAB + \measuredangle ACB = 180^\circ.$$

Нека C' е симетрична на точката C во однос на првата l (цртеж десно). Тогаш $\triangle ACB \cong \triangle AC'B$, па затоа

$$\measuredangle ADB + \measuredangle AC'B = \measuredangle ADB + \measuredangle ACB = 180^\circ ,$$

т.е. четириаголникот $ADBC'$ е тетивен, од што следува дека триаголниците ADB и $AC'B$ имаат еднакви радиуси на опишани кружници. Понатаму, бидејќи $\triangle ACB \cong \triangle AC'B$ добиваме дека и триаголниците ABC и ADB имаат еднакви радиуси на опишани кружници.



Нека O_1 и O_2 се центрите на кружниците k_1 и k_2. Нека B' и A' се средините на тетивите AC и BC, соодветно, а C_1 е подножјето на нормалата повлечена од C на правата l. Со ρ да го означиме радисусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Имаме

$$\rho = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4P_{\triangle ABC}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{2\overline{AB}\cdot\overline{CC_1}} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{2\overline{CC_1}} .$$

Понатаму, $\measuredangle AO_1B' = \measuredangle BO_2A' = 90^\circ$ и бидејќи

$$\measuredangle C_1AC = \measuredangle ADC = \frac{\measuredangle AO_1C}{2} = \measuredangle AO_1B'$$

заклучуваме дека триаголниците ACC_1 и O_1AB' се слични. Затоа $\overline{AO_1} : \overline{AB'} = \overline{AC} : \overline{CC_1}$ и бидејќи $\overline{AO_1} = R$ и $\overline{AB'} = \frac{\overline{AC}}{2}$ добиваме $\overline{AC}^2 = 2R\cdot\overline{CC_1}$, т.е. $\overline{AC} = \sqrt{2R\cdot\overline{CC_1}}$. Аналогно се докажува дека $\overline{BC} = \sqrt{2r\cdot\overline{CC_1}}$, па затоа

$$\rho = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{2\overline{CC_1}} = \frac{\sqrt{2R\cdot\overline{CC_1}}\sqrt{22\cdot\overline{CC_1}}}{2\overline{CC_1}} = \sqrt{Rr} .$$

58. Правоаголник е поделен со отсечки паралелни со неговите страни на квадрати 1×1. Во секој квадрат е запишан еден број. Збирот на сите броеви во секој ред е 1, а збирот на сите броеви во секоја колона е 2. Може ли плоштината на тој правоаголник да е 2004?

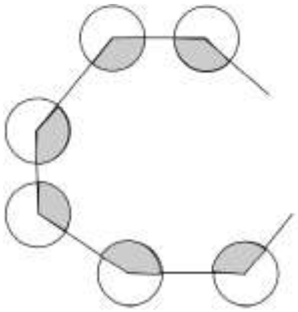
Решение. Нека m е бројот на редовите, а n е бројот на колоните. Ако плоштината на правоаголникот е 2004, тогаш $mn = 2004$ и за вкупниот збир на сите броеви во сите квадратчиња важи $m = 2n$. Значи $2n^2 = 2004$, т.е. $n^2 = 1002$. Бидејќи

$$31^2 = 961 < 1002 < 1024 = 32^2$$

следува дека плоштината на правоаголникот не може да биде 2004.

59. Даден е конвексен 2004–аголник чии должини на страни се поголеми од 2. Околу секое теме е опишана кружница со радиус 1. Пресметај го збирот на плоштините на деловите од круговите зафатени со внатрешните агли на многуаголникот.

Решение. Збирот на надворешните агли во многуаголник е 2π. Нека $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2004}$ се аглите на многуаголникот и $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{2004}$ се нивните надворешни агли соодветно. Имаме $\alpha_i + \beta_i = \pi$ и $\sum_{i=1}^{2004} \beta_i = 2\pi$.



Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{2004} (\alpha_i + \beta_i) = 2004\pi,$$

па затоа

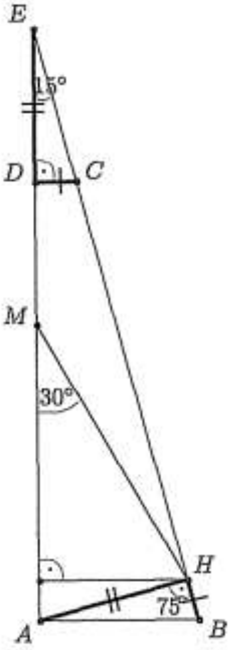
$$\sum_{i=1}^{2004} \alpha_i = 2004\pi - \sum_{i=1}^{2004} \beta_i = 2002\pi.$$

Бараниот збир е

$$P = \sum_{i=1}^{2004} \frac{r^2 \alpha_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \alpha_i = 1001\pi.$$

60. Во правоаголен трапез $ABCD, (AB \parallel CD)$ аголот при темето B е еднаков на 75°. Точката H е подножје на нормалата повлечена од точката A на правата BC. Ако $\overline{BH} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} + \overline{AH} = 8$, пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$.

Решение. Нека краците на трапезот се сечат во точката E. Бидејќи $\measuredangle AHB = \measuredangle CDE = 90^\circ$, $\measuredangle DCE = \measuredangle HBA = 75^\circ$ и $\overline{BH} = \overline{CD}$, добиваме дека $\triangle ABH \cong \triangle ECD$. Оттука следува дека плоштината на трапезот $ABCD$ е еднаква на



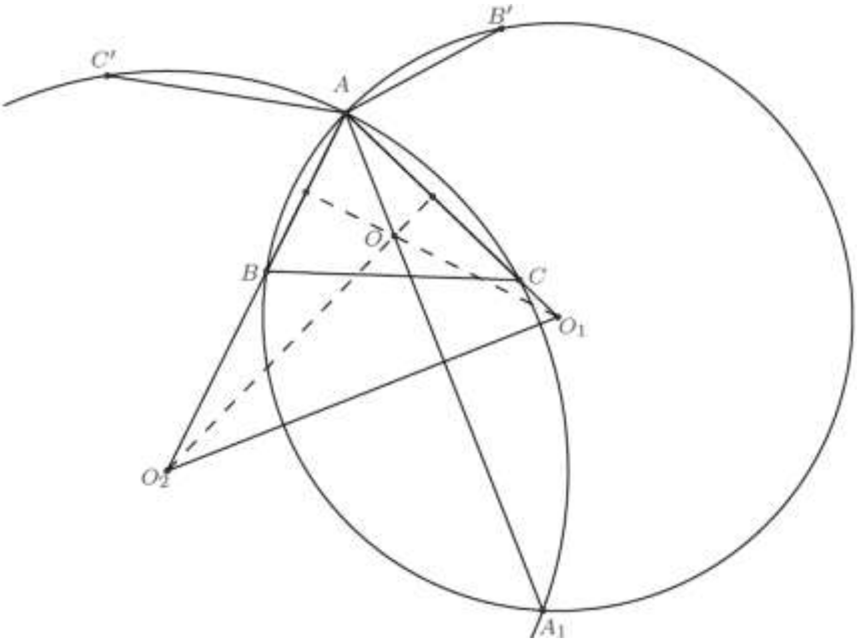
плоштината на $\triangle EAH$. За хипотенузата на овој триаголник важи

$$\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{AH}=8.$$

Нека M е средината на отсечката AE. Тогаш $\overline{ME}=\overline{MA}=\overline{MH}=4$ и бидејќи $\measuredangle AEH=15^\circ$, добиваме $\measuredangle AMH=30^\circ$. Оттука следува дека висината повлечена од H на AE е еднаква на половина од MH, т.е. на 2. Конечно, одовде следува дека бараната плошина е еднаква на $\frac{8\cdot 2}{2}=8$.

61. Нека ABC е остроаголен триаголник, A',B' и C' се симетричните точки на темињата A,B и C во однос на правите BC,CA и AB, соодветно и нека кружниците опишани околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат и во точката A_1. Точките B_1 и C_1 се аналогно дефинирани. Докажи дека правите AA_1,BB_1 и CC_1 имаат една заедничка точка.

Решение. Нека O_1,O_2 и O се центрите на опишаните кружници околу ABB',ACC' и ABC, соодветно. Бидејќи AB е симетрала на отсечката CC', O_2 е пресекот на симетралата на отсечката AC со AB. Слично, O_1 е пресекот на симетралата на отсечката AB со AC. Следува дека O е ортоцентар на триаголникот AO_1O_2. Според тоа,



AO е нормална на O_1O_2. Од друга страна, AA_1 е заедничка тетива за двете кружници, од каде следува дека е нормална на O_1O_2. Добиваме дека AA_1 минува низ O.

Слично се покажува дека BB_1 и CC_1 минуваат низ O, од каде следува дека трите прави минуваат низ точката O.

62. Даден е $\triangle ABC$. На лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката A, земени се точки X и Y такви што $\measuredangle BAX = \measuredangle CAY$. Нека M е средината на тетивата AX. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу ΔABC. Тогаш $OM \perp AX$. Повлекуваме нормала од B на OM и нека таа ја сече опишаната кружница во точката Z.

Од $BZ \perp OM$ следува дека OM е симетрала на BZ. Според тоа, $\overline{MZ} = \overline{MB}$. Сега од неравенството на триаголник следува

$$\overline{BM} + \overline{MC} = \overline{ZM} + \overline{MC} > \overline{CZ}.$$

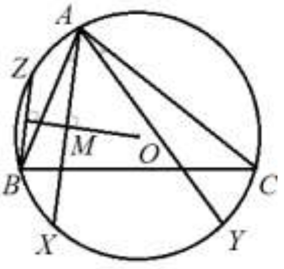
Но, $BZ \parallel AX$, па затоа

$$AZ = BX = CY$$

од каде добиваме

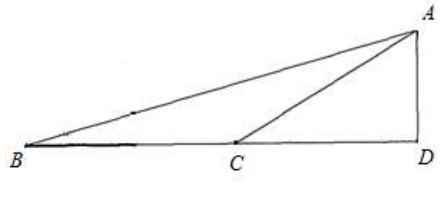
$$ZAC = ZA + AC = YC + CA = YCA$$

т.е. $\overline{CZ} = \overline{AY}$. Затоа $\overline{BM} + \overline{CM} > \overline{AY}$.



63. Нека $\triangle ABC$ што $\measuredangle BCA \geq 90^\circ$. Тогаш точно е неравенството

$$\overline{AB}^2 \geq \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2. \qquad (1)$$



Доказ. Ако $\measuredangle BCA = 90^\circ$, тогаш $\triangle ABC$ е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

т.е. точно е неравенството (1).

Нека $\measuredangle BCA > 90^\circ$. Ја продолжуваме страната BC преку темето C и нека D е подножјето на нормалата повлечена од темето A кон правата BC. Тогаш триаголниците ABD и ACD се правоаголни, со прав агол при темето D, па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2 \text{ и } \overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2 .$$

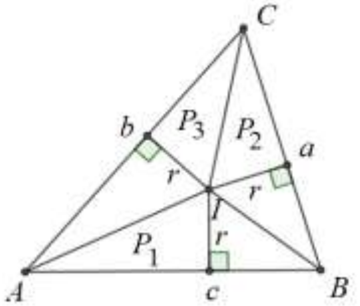
Но, $\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}$, па од претходните две равенства следува

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+(\overline{BC}+\overline{CD})^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\overline{BC}\cdot\overline{CD}+\overline{CD}^2\\&=\overline{BC}^2+(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)+2\overline{BC}\cdot\overline{CD}=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2\overline{BC}\cdot\overline{CD}\\&>\overline{BC}^2+\overline{AC}^2,\end{aligned}$$

т.е. во (1) важи знак за стриги неравенство.

64. Даден е $\triangle ABC$ со страни a, b и c и радиус на опишана кружница R. Нека I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а P_1, P_2 и P_3 се плоштините на $\triangle ABI$, $\triangle BCI$ и $\triangle CAI$, соодветно. Докажи дека

$$\frac{R^4}{P_1^2}+\frac{R^4}{P_2^2}+\frac{R^4}{P_3^2}\geq 16$$



Решение. Нека r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Имаме $P_1=\frac{rc}{2}$, $P_2=\frac{ra}{2}$ и $P_3=\frac{rb}{2}$. Според тоа,

$$\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}=\frac{4}{r^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right). \quad (1)$$

Од теоремата на Лајбниц имаме дека ако H е ортоцентар и O е центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$, тогаш $\overline{OH}^2=9R^2-a^2-b^2-c^2$, па затоа $9R^2\geq a^2+b^2+c^2$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и последното неравенство следува

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{1}{R^2}. \quad (2)$$

Конечно, од (1), (2) и неравенството на Ојлер, односно од $R\geq 2r$ следува неравенството

$$\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}\geq\frac{4}{r^2R^2}=\frac{16}{R^4},$$

кое е еквивалентно со даденото неравенство.

65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека h_a,h_b,h_c се висините, t_a,t_b,t_c тежишните линии на повлечени кон страните a,b,c соодветно, r е радиусот на впишаната и R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Докажи, дека $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}\leq 1+\frac{R}{r}$. Кога важи знак за равенство.

Решение. Со A',B',C' да ги означиме средините на страните BC,CA,AB, соодветно (види цртеж). Двете страни на неравенството да ги помножиме со P (P е плоштината на триаголникот). Ако искористиме дека

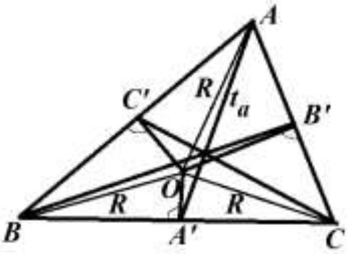
$$P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}=rs=r\frac{a+b+c}{2}$$

го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{at_a}{2}+\frac{bt_b}{2}+\frac{ct_c}{2}\leq P+R\frac{a+b+c}{2},$$

т.е. неравенството

$$\frac{a(t_a-R)}{2}+\frac{b(t_b-R)}{2}+\frac{c(t_c-R)}{2}\leq P. \qquad (1)$$



За да го докажеме последното неравенство, да забележиме дека во $\triangle AOA'$ важи $\overline{AO}+\overline{OA'}\geq \overline{AA'}$, т.е. важи $t_a-R\leq \overline{OA'}$. Аналогно, точни се неравенствата $t_b-R\leq \overline{OB'}$ и $t_c-R\leq \overline{OC'}$. Ако последните неравенства ги помножиме со a,b и c соодветно, ги собереме добиените неравенства и поделиме со 2 наоѓаме

$$\frac{a(t_a-R)}{2}+\frac{b(t_b-R)}{2}+\frac{c(t_c-R)}{2}\leq \frac{\overline{OA'}\cdot a}{2}+\frac{\overline{OB'}\cdot b}{2}+\frac{\overline{OC'}\cdot c}{2}=P,$$

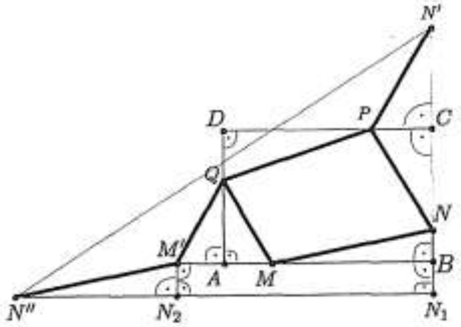
Т.е. точно е неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $t_a-R=\overline{OA'}$, $t_b-R=\overline{OB'}$ и $t_c-R=\overline{OC'}$, т.е. ако и само ако $\triangle ABC$ е рамностран.

66. Даден е правоаголник $ABCD$. Нека M,N,P и Q се произволни точки на страните AB,BC,CD и DA, соодветно. Ако со p и S ги означиме периметарот и плоштината на четириаголникот $MNPQ$, докажи дека

а) $p\geq \overline{AC}+\overline{BD}$,

б) ако $p=\overline{AC}+\overline{BD}$, тогаш $S\leq \frac{1}{2}P_{ABCD}$.

Решение. а) Нека N' е симетричната точка на точката N во однос на правата CD, M' е симетричната точка на точката M во однос на правата AD, N_1 е симетричната точка на точката N во однос на правата AB и точките N_2,M_1 и N'' припаѓаат на правата низ N_1 која е паралелна на правата AB и се такви што



$\overline{N_1N_2}=\overline{AB}$,

$\overline{M_1N_2}=\overline{M'A}$ и

$\overline{N''M_1}=\overline{BM}$

(цртеж десно). Јасно,

$\overline{N'P}=\overline{NP}$,

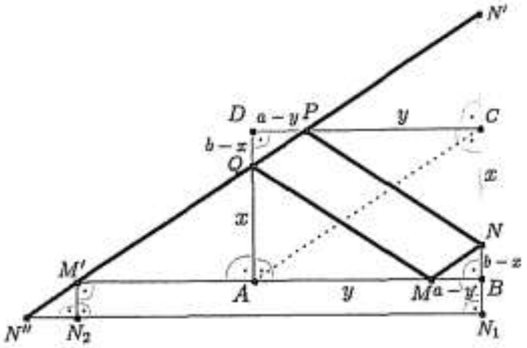
$\overline{M'Q}=\overline{MQ}$ и

$\overline{N''M'}=\overline{MN}$.

Понатаму, катетите на $\triangle N'N_1N''$ се еднакви на $2\overline{BC}$ и $2\overline{AB}$, па бидејќи дијагоналите на правоаголникот се еднакви добиваме $\overline{N'N''}=2\overline{AC}=\overline{AC}+\overline{BD}$. Сега од неравенството на триаголник следува

$$\overline{N'P}+\overline{PQ}+\overline{QM'}+\overline{M'N''}\geq\overline{N'N''}, \text{ т.е.}$$

$$p=\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PQ}+\overline{QA}\geq\overline{AC}+\overline{BD}.$$



б) Јасно, $p=\overline{AC}+\overline{BD}$ ако и само ако точките N',P,Q,M' и N'' се колинеарни, што значи ако и само ако $MN\,||\,PQ\,||\,AC$ и $QM\,||\,NP\,||\,BD$, т.е. ако и само ако четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм со страни паралелни со дијагоналите на правоаголникот $ABCD$. Од Талесовата теорема следува дека последното е можно ако и само ако

$$\overline{AM}:\overline{BM}=\overline{CN}:\overline{BN}=\overline{CP}:\overline{DP}=\overline{DQ}:\overline{AQ}.$$

Ако се исполнети последните равенства, тогаш

$$\overline{AM}=\overline{CP}, \overline{BM}=\overline{DP}, \overline{BN}=\overline{DQ} \text{ и } \overline{CN}=\overline{AQ}.$$

Според тоа, $\triangle MAQ\cong\triangle PCN$ и $\triangle MBN\cong\triangle PDQ$. Да означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b, \overline{AQ}=x$ и $\overline{AM}=y$. Од Талесовата теорема следува

$$\frac{x}{b-x}=\frac{y}{a-y}, \text{ т.е. } ax=by,$$

па затоа $\frac{y}{a}=\frac{x}{b}=k$, за некој $k\in(0,1)$. Според тоа,

$$\begin{aligned} S &= P_{ABCD} - P_{MAQ} - P_{MBN} - P_{CPN} - P_{PDQ} \\ &= P_{ABCD} - 2P_{MAQ} - 2P_{PDQ} = ab - xy - (a-y)(b-x) \\ &= ax + by - 2xy. \end{aligned}$$

Сакаме да докажеме дека $S \le \frac{ab}{2}$, што е еквивалентно со

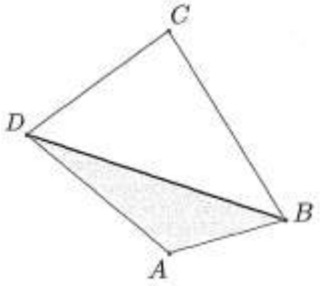
$$2\tfrac{x}{b} - 2\tfrac{y}{a} - 4\tfrac{x}{b}\cdot\tfrac{y}{a} \le 1,$$

т.е. со $4k - 4k^2 \le 1$. Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина $\sqrt{k(1-k)} \le \frac{k+1-k}{2} = \frac{1}{2}$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $k = \frac{1}{2}$, т.е. ако и само ако M, N, P и Q се средини на страните AB, BC, CD и DA, соодветно.

67. Четири точки во рамнината определуваат шест отсечки со должини $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6$. Докажи дека $a_1\sqrt{2} \le a_6$.

Решение. Ќе го користиме претходно докажаното својство за неостроаголен триаголник. Ќе разгледаме неколку случаи.

Прв случај. Четирите точки, да ги означиме со A, B, C, D, се темиња на конвексен четириаголник $ABCD$ (цртеж десно). Тогаш еден од аглите на четириаголникот е поголем или еднаков на 90°. Без ограничување наопштоста можеме да претпоставиме дека тоа е аголот во темето A. Тогаш за $\triangle DAB$ важи



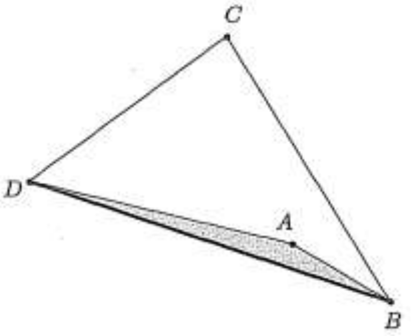
$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \le \overline{BD}^2. \qquad (2)$$

Бидејќи $\overline{BD} \le a_6$ и $a_1 \le \overline{AB}$, $a_1 \le \overline{AD}$ од (2) следува

$$2a_1^2 = a_1^2 + a_1^2 \le \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \le \overline{BD}^2 \le a_6^2,$$

па затоа $2a_1^2 \le a_6^2$, т.е. $a_1\sqrt{2} \le a_6$

Втор случај. Три од дадените точки се во темиња на триаголник во кој се наоѓа четвртата точка. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точката A се наоѓа во внатрешноста на $\triangle BCD$ (цртеж



десно). Јасно, најмалку еден од $\measuredangle BAD, \measuredangle BAC, \measuredangle CAD$ е тап и без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е BAD. Тогаш повторно важи (2) и како во првиот случај се докажува дека $a_1\sqrt{2} \leq a_6$.

Трет случај. Четирите точки се колинеарни. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точките A, B, C и D се распоредени како на цртежот десно. Тогаш $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ и како

$$\overline{AD} = a_6, \text{ а } \overline{AB} \geq a_1, \overline{BC} \geq a_1, \overline{CD} \geq a_1$$

добиваме

$$\overline{AD} = a_6 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \geq 3a_1 > a_1\sqrt{2}.$$

68. Нека A, B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c, соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC, докажи дека

$$r^2 \leq \tfrac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2).$$

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните на $\triangle ABC$. Јасно,

$$s = \tfrac{a+b+c}{2} = r_a + r_b + r_c.$$

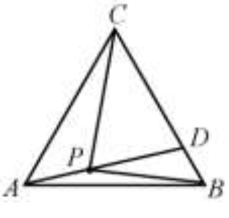
Имаме $P = sr$, $s-a = r_a, s-b = r_b, s-c = r_c$, па од Хероновата формула следува

$$r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c}.$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

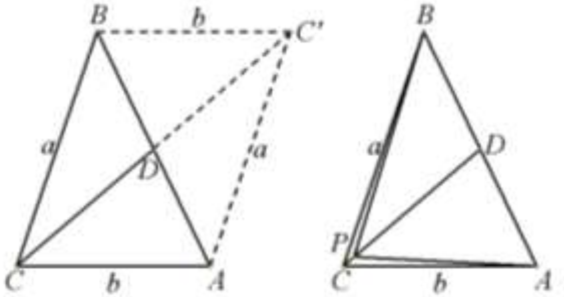
$$r^2 = \frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c} \leq \frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{9}.$$

69. Докажи дека еден триаголник е рамностран ако и само ако отсечките кои ја поврзуваат која и да е негова внатрешна точка со темињата на триаголникот се страни на триаголник.



Решение. Нека $\triangle ABC$ е рамностран со должина на страна a и P е точка од неговата внатрешност. Правата AP ја сече страната BC во точката D. Го разгледуваме оној од аглите $\measuredangle ADB$ и $\measuredangle ADC$ кој што не е остар. Во случајов тоа е $\measuredangle ADB$. Тогаш во $\triangle ABD$ најголемата страна е $\overline{AB}=a$. Значи, $a>\overline{AD}>\overline{AP}$. Од $\triangle BPC$ следува $\overline{BP}+\overline{CP}>\overline{BC}=a$. Значи, $\overline{BP}+\overline{CP}>a>\overline{AP}$, т.е. $\overline{BP}+\overline{CP}>\overline{AP}$. Тоа значи дека отсечките *AP*, *BP* и *CP* са страни на триаголник.

Нека $\triangle ABC$ не е рамностран. Ќе докажеме дека во негоавата внатрешност постои точка *P*, за која отсечките *AP*, *BP* и *CP* не се страни на триаголник. Нека $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ и D е средината на AB. де покажеме дека на тежишната линија CD има точка P со саканото својство. Пред тоа ќе го докажеме неравенството $\overline{CD}<\frac{a+b}{2}$. Нека C' е онаа точка од правата CD, за која D е средината на отсечката CC'. Тогаш четириаголникот $ACBC'$ е паралелограм бидејќи $\overline{BC'}=b$ и $\overline{CC'}=2\overline{CD}$. Од неравенството на триаголник, применето на $\triangle CC'B$, добиваме $\overline{CC'}<\overline{BC}+\overline{BC'}$. Оттука следува неравенството $\overline{CD}<\frac{a+b}{2}$.



Нека сега P е точка од тежишната линија CD, за која важи $\overline{CP}=\frac{2}{3}k\cdot\overline{CD}$, каде k е позитивен број, кој ќе го определиме покасно. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a>b$. Од триаголниците BPC и APC следува $\overline{BP}>a-\overline{CP}$ и $\overline{AP}<b+\overline{CP}$ соодветно. Од овие неравенства добиваме $\overline{BP}-\overline{AP}>a-b-2\overline{CP}$. Ако ја искористиме дефиницијата на P и погоре докажаното неравенство последователно добиваме:

$$\overline{BP}-(\overline{AP}+\overline{CP})>a-b-3\overline{CP}=a-b-2k\overline{CD}>a-b-k(a+b).$$

Сега избираме $k=\frac{a-b}{a+b}$. Тогаш $\overline{BP}-(\overline{AP}+\overline{CP})>0$, т.е. $\overline{BP}>\overline{AP}+\overline{CP}$. Значи, ако ја избереме точката P така што $\overline{CP}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a-b}{a+b}\cdot\overline{CD}$, тогаш за отсечките AP, BP и CP нема да е исполнето неравенството на триаголник. Тоа значи дека точката P го има саканото својство. Од претходните разгледувања е јасно дека за секој k, за кој $0 < k \leq \frac{a-b}{a+b}$, се добиваат точки P на CD со својството: Со отсечките AP, BP и CP не може да се конструира триаголник.

IV МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. На шаховски турнир секој игра со секого по една партија. Натпреварувачите се мајстори и велемајствори. На крајот од турнирот се покажало дека сите велемајстори ги победиле сите мајстори и во тие партии ги освоиле половината од бодовите кои може да се освојат на турнирот. Ако во секоја партија победникот добива 1 поен, поразениот 0 поени, а во случај на реми (нерешен исход) секој од двата играчи добива по половина поен, докажи дека бројот на учесниците на турнирот е квадрат на некој природен број.

   Решение. Нека на турниорот учествуваат n мајстори и m велемајстори. Секоја партија носи 1 поен, што значи дека бројот на поените кои може да се освојат на турнирот е $\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}$. Бројот на поените кои ги освоиле велемајсторите против мајсторите е еднаков на mn, па затоа од условот на задачата следува

   $$\frac{(n+m)(n+m-1)}{4}=mn\,.$$

   Оттука последователно добиваме

   $$n^2+2mn+m^2-(n+m)=4mn$$

   $$n+m=n^2-2mn+m^2=(m-n)^2,$$

   што и требаше да се докаже.

2. Здравко, Борис, Невен, Славко и Милан играат тениски турнир во парови. Секои двајца како партнери мора да играат против сите парови кои може да се формираат од преостанатите играчи. Секои двајца играчи може да бидат во пар најмногу еднаш во текот на денот. Кој е најмалиот број денови потребен да се одигра ваков турнир?

   Решение. Секој пар мора да игра против три пара и тие натпревари се играат во различни денови, па затоа турнирот мора да трае најмалку три дена.

   Нека претпоставиме дека турнирот може да се одигра во три дена. Вкупниот број парови е $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ и секој пар игра три пати, па затоа вкупниот број натпревари на турнирот е $\frac{10\cdot 3}{2}=15$. Да забележиме дека во еден ден не може да се одиграат повеќе од 5 натпревари, бидејќи за да во еден ден се играат 6 натпревари, потребни се $6\cdot 2=12$ различни парови. Затоа, ако турнирот трае три дена, секој ден се играат по 5 натпревари.

Со почетните букви на иомињата да ги означиме играчите. Нека првиот ден играат МЗ против СН. Тогаш барем еден од натпреварите МБ против СЗ и МБ против ЗН мора да се одржи првиот ден. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е натпреварот МБ против СЗ. Исто така натпреварот БН против МС мора да се одигра првиот ден. Тогаш првиот ден МН игра против БЗ и БС игра против ЗН. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека вториот ден МБ игра против ЗН. Тогаш вториот ден МС игра против БЗ. Вториот ден СН не може да игра против МБ, како ни против БЗ, бидејќи овие два пара своите натпревари за вториот ден веќе ги одиграле, а натпреварот против МЗ е веќе одржан првиот ден. Според тоа, натпреварите СН против МБ и СН против БЗ треба да се играат третиот ден, што според условот на задачата не е можно (парот СН не смее да игра два натпревара во ист ден). Оттука следува дека турнирот не може да заврши за три дена.

За да покажеме дека турнирот може да се одигра за четири дена, доволно е да наведеме пример. Еве како тоа може да се организира:

Прв ден. МБ-СН, МС-НЗ, МН-СЗ, МЗ-БС
Втор ден. МБ-НЗ, МС-БН, МН-БС, БЗ-СН
Трет ден. МБ-СЗ, МН-БЗ, МЗ-БН, БС-НЗ
Четврт ден. МС-БЗ, МЗ-СН, БН-СЗ.

3. Нека n трицифрени броеви ги задоволуваат следните својства:

(1) Сите броеви не ја содржат цифрата 0.
(2) Збирот на цифрите на секој број е 9.
(3) Цифрите на единиците на било кои два броја се различни.
(4) Цифрите на десетките на било кои два броја се различни.
(5) Цифрите на стотките на било кои два броја се различни.

Определи ја најголемата можна вредност за n.

Решение. Нека S го означува множеството од трицифрените броеви кои имаат збир на цифрите 9 и ниту една од нив не е 0. Најпрво ќе го определиме бројот на елементите на множеството S. Секој елемент на S може да се добие од 111 со низа од 6 букви A (што значи дека додаваме 1 на соодветната цифра) и 2 букви G (што значи одиме на наредната цифра). На пример бројот 324 може да се добие од 111 со низата AAGAGAAA. Постојат вкупно $\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28$ такви зборови (низи букви), односно S содржи 28 броеви. Од условите (3), (4), (5), ако $\overline{abc}$ е во бараното множество T, тогаш секој од броевите од облик $\overline{**c}$, $\overline{*b*}$ и $\overline{a**}$ не може да биде во Т. Бидејќи има $a+b-2$ броја од првиот тип, $a+c-2$ од вториот и $b+c-2$ од третиот, вкупно од сите три типа има

$$(a+b-2)+(b+c-2)+(c+a-2)=2(a+b+c)-6=2\cdot 9-6=12$$

различни броја кои не може да се во T ако $\overline{abc}$ е во Т. Според тоа, ако T има n броеви, тогаш $12n$ броеви од S не се дозволени. Но, секој број од S може да биде забранет не повеќе од три пати, по еднаш за секоја негова цифра, од каде следува $n+\frac{12n}{3}\leq 28$, т.е. $n\leq \frac{28}{5}$. Бидејќи n е цел број, добиваме $n\leq 5$. За $n=5$ можеме да го земеме множеството $T=\{144,252,315,423,531\}$.

Забелешка. Бројот на елементите на множеството S може да се пресмета на повеќе начини. За бројот на решенијата на равенката

$$x_1+x_2+...+x_k=n$$

во множеството на природни броеви, каде редоследот на x_i е важен, е познато дека е еднаков на $\binom{n-1}{k-1}$. Во нашиот случај сакаме да го изброиме бројот на решенија на равенката $a+b+c=9$ во множеството природни броеви. Според горната дискусија, $\binom{9-1}{3-1}=28$. Користејќи го општиот резултат од погоре, можеме исто така да покажеме дека постојат $a+b-2$ броја од облик $\overline{**c}$.

4. Определи го бројот на пермутациите на броевите 0, 1, 2, ..., 9 кај кои:

а) броевите 0 и 1 се соседни,

б) броевите 0 и 1 се соседни и 0 е пред 1,

в) бројот 0 се наоѓа пред бројот 1,

г) броевите 0 и 1 не се соседни.

Решение. а) Да го разгледаме 01 како еден број. Сега имаме девет броеви, што значи дека имаме $9!$ пермутации. Понатаму, исто толку пермутации имаме ако 10 го разгледуваме како еден број, па затоа бараниот број е $2\cdot 9!$.

б) Ако 0 и 1 се соседни и 0 е пред 1, тогаш 01 го разгледуваме како еден број и добиваме дека бараниот број пермутации е $9!$.

в) На секој распоред во кој 0 се наоѓа пред 1 му соодветствува распоред во кој 1 се наоѓа пред 0 и обратно. Затоа вкупниот број пермутации на десетте броеви треба да го поделиме со 2. Тоа значи дека бараниот број пермутации е $\frac{10!}{2}=5\cdot 9!$.

г) Вкупниот број пермутации на десетте броеви го делиме на две дисјунктни множества такви што во едното броевите 0 и 1 се соседни, а во другото броевите 0 и 1 не се соседни. Затоа бараниот број пермутации е еднаков на $10!-2\cdot 9!=(10-2)\cdot 9!=8\cdot 9!$.

5. Нека $p_1, p_2,..., p_k$ се различни прости броеви. Определи го бројот на природни броеви од облик $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k=p_1p_2...p_k$.

Решение. Јасно, од $p_1p_2...p_k=\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$ следува за секој $i\in\{1,...,k\}$ важи $p_i\,|\,\alpha_s$, за некој $s\in\{1,2,...,k\}$. Имајќи го предвид последното ќе конструираме подредена $k-$торка $(\alpha_1,...,\alpha_k)$ природни броеви за која е исполнето равенството $p_1p_2...p_k=\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$. Земаме $k-$торка $(1,1,...,1)$. Со бројот p_1 множиме произволен (еден) член на оваа $k-$торка, што значи дека за p_1 имаме k можности. Понатаму, во добиената $k-$торка со p_2 множиме произволен (еден) нејзин член, што значи дека за p_2 имаме k можности. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека за секој од простите броеви p_3 ,..., p_k имаме k можности. Според тоа, добиваме дека постојат k^k подредени $k-$торки $(\alpha_1,...,\alpha_k)$ за кои важи $p_1p_2...p_k=\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$. Јасно, секоја од овие $k-$торки определува број од видот $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$ и различните подредени $k-$торки определуваат различни броеви од бараниот вид. Навистина, ако $(\alpha_1,...,\alpha_k)\neq(\beta_1,...,\beta_k)$, тогаш $\alpha_i\neq\beta_i$ за барем еден $i\in\{1,2,...,k\}$, па затоа $p_i^{\alpha_i}\neq p_i^{\beta_i}$, од каде следува $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}\neq p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$.

Обратно, секој број од видот $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k=p_1p_2...p_k$ определува подредена $k-$торка $(\alpha_1,...,\alpha_k)$ природни броеви за која е исполнето равенството $p_1p_2...p_k=\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$.

Конечно, бројот на природни броеви од облик $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$ за кои важи $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k=p_1p_2...p_k$ е еднаков на k^k.

6. Претставувањето на природниот број n како збир на природни броеви, при што редоследот на собирците е важен, го нарекуваме *подредено разбивање* на бројот n. На пример, имаме 8 подредени разбивања на бројот 4 и тоа:

$$4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=1+3=3+1=2+2.$$

Докажи, дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1}.

Решение. Да разгледаме n единици запишани во редица. Меѓу секои две соседни единици можеме да ставиме или да не ставиме преграда (вертикална црта). На секое поставување на прегради меѓу единиците соодветствува единствено подредено разбивање на бројот n и обратно, на секое подредено разбивање соодветствува единствено поставување на прегради меѓу единиците (ги собираме единиците меѓу две прегради, со што се добива собирокот во претставувањето). Според тоа, бројот на подредените разбивања е еднаков на бројот на поставувањата на преградите меѓу единиците. Бидејќи прегради може да се поставаат или да не се поставаат на $n-1$ место, добиваме дека вкупниот број на поставувања на прегради е еднаков на 2^{n-1}, што значи дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1}.

7. За еден број со 2017 цифри ќе велиме дека е *лош*, ако секој број формиран од три негови последователни цифри не е делив со 3. Определи го бројот на лошите броеви во чиј декаден запис учествуваат само цифрите 1, 6 и 8.

Решение. Нека $\overline{a_1a_2}$ е двоцифрен број запишан со цифрите 1, 6 и 8. Јасно,

- ако $\overline{a_1a_2}=3k$, тогаш $3|\overline{a_1a_26}$, $3\nmid\overline{a_1a_21}$ и $3\nmid\overline{a_1a_28}$,
- ако $\overline{a_1a_2}=3k+1$, тогаш $3|\overline{a_1a_28}$, $3\nmid\overline{a_1a_21}$ и $3\nmid\overline{a_1a_23}$, и
- ако $\overline{a_1a_2}=3k+2$, тогаш $3|\overline{a_1a_21}$, $3\nmid\overline{a_1a_26}$ и $3\nmid\overline{a_1a_28}$.

Според тоа, два од броевите $\overline{a_1a_21}, \overline{a_1a_26}$ и $\overline{a_1a_28}$ се лоши, а еден не е лош. Значи, од еден двоцифрен број (лош или не) запишан со цифрите 1, 6 и 8 со додавање на една од цифрите 1, 6 и 8 може да се добијат точно два трицифрени лоши броја. Нека сега $\overline{a_1a_2...a_n}$, $n>1$ е лош $n-$цифрен број запишан со цифрите 1, 6 и 8. На потполно иста начин, разгледувајќи ги двоцифрените завршетоци $\overline{a_{n-1}a_n}$ добиваме дека со додавање на цифрите 1, 6 и 8 од бројот $\overline{a_1a_2...a_n}$ може да се добијат точно два лоши броја.

Конечно, бидејќи со цифрите 1, 6 и 8 може да се запишат $3^2=9$ различни двоцифрени броеви, а за да добиеме број запишан со 2017 цифри, треба да допишеме 2015 цифри, заклучуваме дека бројот на лошите 2017-цифрени броеви е еднаков на $9\cdot 2^{2015}$.

8. Во НБА има 30 тимови, секој од кои треба во текот на една сезона да одигра по 82 натпревари. Дали е можно тимовите да се поделат во две конференции (не задолжително со еднаков број тимови) – Источна и Западна, и натпреварувањето да се организира така што бројот на натпреварите меѓу тимовите од различните конференции да е еднаков на половина од бројот на сите натпревари?

Решение. Ќе докажеме дека натпреварувањето не може да се организира така што ќе биде исполнет сакaниот услов.

Со x и y да го означиме бројот на натпреварите одиграни внатре во Источната и Западната конференција, соодветно, а со z да го означиме бројот на одиграните натпревари меѓу тимовите од различните конференции. Треба да докажеме дека равенството $z=\frac{x+y+z}{2}$ не е можно.

Секој тим (k на број) од Источната конференција учествува во 82 натпревари и затоа $82k=2x+z$ (коефициентот 2 се појавува заради фактот дека при броењето на секој внатрешен натпревар истиот го броиме и за двата тима кои го играат натпреварот). Според тоа, бројот $z=82k-2x$ е парен број. Од друга страна, за вкупниот број натпревари добиваме $x+y+z=\frac{30\cdot 82}{2}$, односно $z=\frac{x+y+z}{2}=\frac{30\cdot 82}{4}=15\cdot 41$ е непарен број, што е противречност.

9. Определи го бројот на решенија во множеството природни броеви на равенката:

а) $x+y=2008$,

б) $x+y+z=2008$ и

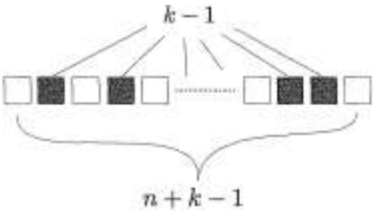
в) $x+y+z+t=2008$.

Решение. Прво ќе докажеме две леми.

Лема 1. Во множеството ненегативни цели броеви бројот на решенијата на равенката

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n$$

е еднаков на $\binom{n+k-1}{k-1}$.



Доказ. На цртежо десно во редот имаме $n+k-1$ квадратчиња, од кои $k-1$ ги боиме црно. Од лево на десно да ги преброиме белите квадратчиња кои се наоѓаат меѓу црвено и следното црвено квадратче. Збирот на овие k броеви е еднаков на $n+k-1-(k-1)=n$ и секое боење дава едно решение на равенката.

Обрано, едно решение на равенката задава алгоритам забоење. Првите x_1 квадратчиња ги оставаме бели, па следното го боиме, па следните x_2 квадратчиња не ги боиме, па следното го боиме итн. На овој начин воспоставуваме биекција меѓу бројот на решенијата на дадената равенка и бројот на боењата.

Јасно, секое боење се добива со избор на $k-1$ квадратче од дадените $n+k-1$ квадратчиња, па затоа бројот на боењата, т.е. бројот на решенијата на дадената равенка е $\binom{n+k-1}{k-1}$. ■

Лема 2. Во множеството природни броеви бројот на решенијата на равенката

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n$$

е еднаков на $\binom{n-1}{k-1}$.

Доказ. Да забележиме дека ако на секој број во решението на равенката му одземеме 1, добиваме решение на равенката

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n - k .$$

Обратно, ако на секое решение на горната равенка му додадеме 1, добиваме решение на бараната равенка. Според тоа, бројот на решенијата на овие две равенки е еднаков. Според Лема 1 добиваме дека тој број е

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} . ■$$

Сега одлема 2 следува дека бројот на решенијата:

а) е $\binom{2008-1}{2-1} = 2007$,

б) е $\binom{2008-1}{3-1}=2007\cdot1003$ и

в) е $\binom{2008-1}{4-1}=669\cdot1003\cdot2005$.

10. Од кутија која содржи 10 различни топчиња без гледање еднополруго се врши избор на 4 топчиња. Определи го бројот на различните избори:

а) ако редоследот на извлечените топиња е важен и изборот се врши со враќање на извлеченото топче,

б) ако редоследот на извлечените топќиња не е важен и изборот се врши со враќање,

в) ако редоследот на извлечените топчиња е важен и изборот се врши без враќање,

г) ако редоследот на извлечените топчиња не е важен и изборот се врши без враќање.

Решение. а) При секое извлекување имаме 10 можности, па бараниот број е еднаков на $10\cdot10\cdot10\cdot10=10^4$.

б) Нека топчињата се означени со броевите од 1 до 10. Важно е кое топче колку пати сме го извлекле, што значи дека во множеството ненегативни цели броеви го бараме бројот на решенијата на равенката

$$x_1+x_2+...+x_{10}=4.$$

Според претходната задача тој број е еднаков на $\binom{4+10-1}{10-1}=\binom{13}{9}=\binom{13}{4}$.

в) Првото топче го избираме од 10, второто од 9, третото од 8 и четвртото од 7 топчиња. Според тоа, вкупниот број избори е еднаков на $10\cdot9\cdot8\cdot7$.

г) Од 10 топчиња треба да избереме 4, што може да се направи на $\binom{10}{4}$ начини.

11. Во азбука која се состои од 3 букви a,b и c, определи го бројот на зборовите кои имаат тоно n букви. Колку зборови имаат должина n, а во кои буквата a се појавува парен број пати?

Решение. За секоја буква имаме по 3 можности, па затоа вкупниот број зборови со должина n е еднаков на 3^n.

При парен број појавувања на буквата a имаме $2k$ појавувања на буквата a каде $0\le k\le[\frac{n}{2}]$. Бројот на начините да определиме $2k$ места на кои стои буквата a е $\binom{n}{2k}$, а на останатите $n-2k$ се наоѓа било која од буквите b и c, т.е. овие места ги пополнуваме на 2^{n-2k} начина. Затоа бараниот број е:

$$\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\dots.$$

Понатаму, оако ги собереме равенствата

$$3^n=(2+1)^n=\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{3}2^{n-3}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\dots$$

$$1^n=(2-1)^n=\binom{n}{0}2^n-\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}-\binom{n}{3}2^{n-3}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\dots$$

добиваме

$$3^n+1=2(\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\dots),$$

од каде наоѓаме

$$\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{4}2^{n-4}+\dots=\frac{3^n+1}{2}.$$

12. Во рамнина се дадени две множества од паралелни прави $p_1,p_2,\dots,$ p_{13} и $q_1,q_2,\dots,q_7$ такви што правите од првото се сечат со правите од второто. Колку паралелограми се определени со тие прави?

Решение. Секој пар на прави од првото множество и секој пар од второто множество одредуваат точно еден паралелограм и обратно. Еден пар од првото множество може да се избере на $\binom{13}{2}$ начини, а од другото множество на $\binom{7}{2}$, од каде следува дека постојат $\binom{13}{2}\binom{7}{2}=1638$.

13. На една забава има 15 луѓе, некои од кои меѓусебно се ракувале. Докажи дека постојат две лица кои се разкувале еднаков број пати.

Решение. Бројот на ракувањата на секое лице припаѓа на множеството $\{0,1,2,\dots,14\}$. Бидејќи ова множество содржи 15 елементи и ако не постојат две лица кои се ракувале еднаков број пати, тогаш секој елемент на множеството соодветствува на бројот на ракувањата на некој од присутните на забавата. Значи, постои лица кое се ракувало 0 пати, т.е. не се ракувало со никого и постои лице кое се ракувало 14 пати, т.е. се ракувало со секого. Но, тогаш лицето кое се ракувало со секого се ракувало и со лицето кое не се ракувало со никого, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека постојат две лица кои се ракувале еднаков број пати.

14. На еден натпревар учествуваат $n\geq 4$ натпреварувачи. Меѓу секои 4 натпреварувачи постои барем еден кој ги познава преостанатите три

натпреварувачи. Докажи дека постои натпреварувач кој ги познава сите други натпреварувачи. (познанството е симетрична релација, т.е. ако A го познава B, тогаш B го познава A.)

Решение. За $n=4$ тврдењето е точно според условот на задачата. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој природен број $n\geq 4$ и нека е имаме $n+1$ натпреварувачи. Од натпреварувачите да го одделиме натпреварувачот A. Според индуктивната претпоставка меѓу преостанатите n натпреварвачи постои натпреварувач B кој ги познава останатите $n-1$ натпрварувачи. Ако B го познава A, тогаш тврдењето е докажано. Ќе докажеме дека ако B не го познава A, тогаш останатите $n-1$ натпреваувачи меѓусебно се познаваат. Навистина, ако натпреварувачите C и D не се познаваат, тогаш тие заедно со A и B формираат четворка во која не постои натпреварувач кој ги познава преостанатите тројца, што противречи на условот на задачата. Според тоа, преостанатите $n-1$ натпреварувачи меѓусебно се познаваат. Сега, нека кон овие $n-1$ натпреварувач го додадеме натпреварувачот A и даземеме било кои други три натпреварувачи. Меѓу нив постои натпреварувача кој ги познава преостанатите три натпреварувачи. Ако тоа е A, тогаш било кој од преостанатите три натпреварувачи го познава A, го познава B и ги познава преостанатите натпреварувачи од групата од $n-1$ натпреварувачи, што значи ги познава сите други натпреварувачи. Ако тоа не е A, тогаш тој натпреварувач го познава A, го познава B и ги познава преостанатите натпреварувачи од групата од $n-1$ натпреварувачи, што значи ги познава сите други натпреварувачи. Според тоа, тврдењето важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

15. На една забава се наоѓаат 8 луѓе, од кои секој не разговара најмногу со 3 луѓе. Докажи дека може да се формираат четири пара така што луѓето во секој пар меѓусебно разговараат.

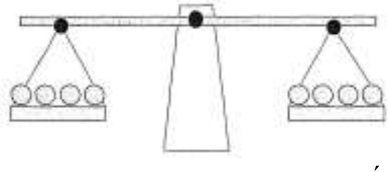
Решение. Да разгледаме произволно спарување на овие 8 луѓе. Парот во кој се наоѓаат луѓе кои мешусебно не разговараат ќе го наречеме лош. Ќе докажеме дека ако постои лош пар, тогаш можеме да извршиме прегрупирање на луѓето при што ќе се намали бројот на лошите парови. Јасно, по најмногу четири такви прегрупирања воопшто нема да имаме лоши парови. Паровите да ги означиме со A,B,C и D, а луѓето кои припаѓаат на парот X со X_1 и X_2. Луѓето кои не разговараат ќе ги наречеме непријатели, а луѓето кои разговараат пријатели. Нека претпоставиме дека парот A е лож. Јасно, лицето A_2 покрај A_1 има упте двајца непријатели. Можни се два случаја.

Прв случај. Другите двајца непријатели на лицето A_2 припаѓаат на ист пар. Нека тоа е парот B. Тогаш лицата C_1, C_2, D_1, D_2 се пријатели на лицето A_2, а не може сите да се непријатели на лицето A_1 (секое лице по услов има најмногу 3 непријатели). Нека C_1 е пријател на A_1. Тогаш паровите B и D не ги менуваме, а ги формираме паровите A_1 со C_1, A_2 со C_2. Јасно, во случајов бројот на лошите парови е намален најмалку за 1.

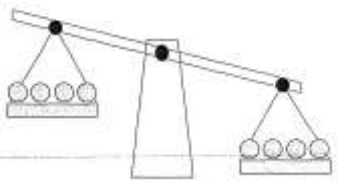
Втор случај. Нека останатите непријатели на на лицето A_2 не се во ист пар. Јасно, во барем еден од паровите B, C, D се наоѓаат лица кои се и двајцата пријатели на A_1. Нека е тоа парот B. Барем едно од лицата B_1 и B_2 мора да е пријател со A_2 и нека тоа е лицето B_1. Сега паровите C и D не ги менуваме, а ги формираме паровите A_1 со B_2 и A_2 со B_1. Јасно и во овој случај бројот на лошите парови е намален најмалку за 1.

16. Во група од 12 златници еден е лажен. Лажниот златник се разликува од исправните само по неговата маса. Со помош на три мерења на вага без тегови определи го лажниот златник, како и дали тој е полесен или потежок од исправните златници.

Решение. Прво златниците ќе ги поделиме во 3 групи од по 4 златници. Во првото мерење на секој тас на вагата ќе ставиме по 4 златници. Можни се два случаја.



Прв случај. Вагата е во рамнотежа. Тоа значи дека овие 8 златници на вагата се исправни, а неисправниот златник се наоѓа меѓу преостанатите четири. Во второто мерење на едниот тас ќе ставиме 3 од 8-те исправни златници, а на вториот тас ќе ставиме 3 од 4-те златници меѓу кои е неисправниот. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш неисправен е златникот кој не е мерен. Во последното мерење ставаме еден исправен златник на едниот тас, а на другиот тас го ставаме неисправниот златник и на тој начин определуваме дали е полесен или е потежок од останатите златници. Ако во второто мерење вагата не е во рамнотежа, тогаш заклучуваме дали групата со исправните златници е потешка или е полесна, т.е. дали неисправниот златник е потежок или е полесен од исправните. Исто така тој се наоѓа на вториот тас, па во третото мерење на секој тас ставаме по еден од овие 3 златници. Ако имаме рамнотежа, тогаш неисправен е третиот златник кој не го ставивме на вагата. Ако немаме рамнотежа, бидејќи веќе знаеме дали неисправниот златник е полесен или потежок, лесно определуваме кој златник е неисправен.



Втор случај. Вагата не е во рамнотежа. Тоа значи дека меѓу овие 8 златници на вагата е неисправниот златник, а четирите златници кои не се мерени се исправни. Да запамтиме дали десниот тас е потежок или полесен. Сега во второто мерење на секој тас ќе ставиме по 2 златника од левиот тас и по 1 златник од десниот тас од првото мерење. Ако тасовите се во рамнотежа, неисправниот златник се наоѓа меѓу златниците од првото мерење кои не ги употребивме во второто мерење. Во последното мерење ќе ги споредиме двата златника од првото мерење кои не ги употребивме во второто мерење и неисправниот златник ќе го определиме како потешкиот или полесниот од нив, зависно од тоа дали десниот тас во првото мерење беше потежок или полесен од левиот тас. Ако во второто мерење положбата на вагата е иста како и во првото мерење, тогаш неисправниот златник се наоѓа на десниот тас. Во последното мерење ќе ги споредиме двата златника од десниот тас кои беа на левиот тас во првото мерење. Ако вагата е во рамнотежа, неисправен е третиот златник и е потежок од исправните златници. Ако вагата не е во рамнотежа, тогаш неисправен е потешкиот златник. Ако во второто мерење положбата на тасовите се менува во однос на првото мерење, тогаш неисправниот златник не се наоѓа на тасот на кој бил во првото мерење. Затоа во последното мерење ќе ги измериме двата златника од левиот тас во првото мерење. Ако се во рамнотежа, тогаш неисправен е златникот кој во првото мерење бил на десниот тас, а во второто бил на левиот тас и зависно од резултатот на мерењето е потежок (полесен) од исправните. Ако вагата не е во рамнотежа неисправен е златникот кој е потежок (полесен), зависно од првото мерење/

17. Група од 65 момчиња треба да поделат 2020 џамлии. Докажи дека при било каква поделба на џамлиите секогаш ќе постојат две момчиња кои добиле еднаков број џамлии.

Решение. Нека го препоставиме спротивното, т.е. дека сите момчиња добиле различен број џамлии. Нека момчињата се наредени во колона според бројот на џамлиите од најмалиот до најголемиот. Тогаш првиот добил барем 0 џамлии, цториот добил барем 1 џамлија итн. $65-$тиот добил барем 64 џамлии. Последното значи дека момчињата вупно имаат најмалку

$$0+1+2+3+...+63+64=\frac{64\cdot 65}{2}=2080>2020$$

џамлии, што е противречност. Од добиената противрелност следува дека барем две момчиња при поделбата мора да добијат еднаков број џамлии.

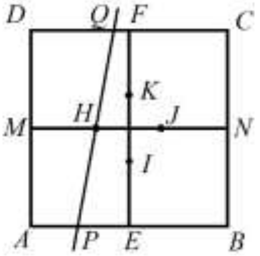
18. Докажи дека од 20 природни броја може да се изберат два броја така што нивниот збир или нивната разлика е делива со 20.

Решение. Ако меѓу дадените 12 броеви постојат два брја кои при делење со 20 даваат еднакви остатоци, тогаш тврдењето е докажано, бидејќи нивната разлика е делива со 20. Нека претпоставиме дека сите броеви даваат различни остатоци при делење со 20. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека овие 12 броеви припаѓаат на множеството $\{0,1,2,3,...,19\}$. Ова множество да го поделиме на множествата $\{1,19\},\{2,18\},\{3,17\},...,\{9,11\},\{0\}$ и $\{10\}$. Според принципот на Дирихле од дадените 12 броја постојат 2 броја кои се наоѓаат во исто множество, па затоа нивниот збир е делив со 20.

19. Нека A е множество од 65 цели броеви кои даваат различни остатоци при делење со 2016. Докажи, дека постои подмножество $B=\{a,b,c,d\}$ на множеството A такво што $2016\,|\,(a+b-c-d)$.

Решение. Доволно е да докажеме дека постојат две двоелементни множества $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$ за кои сите елементи се различни и такви што $a+b\equiv c+d(\mathrm{mod}\,2016)$. Затоа ќе ја разгледаме фамилијата од сите двоелеметни подмножества на множеството A. Вакви множества има $\frac{65\cdot 64}{2}=2080$. За секои две множества кои имаат точно еден ист елемент, збировите на елементите се конгруентни со различни броеви по модул 2016. Значи, не постојат две двоелементни подмножества на множеството A такви што збировите на нивните елементи се конгруентни со ист број по модул 2016 и кои имаат точно еден ист елемент. Значи, ако за множествата $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$ важи $a+b\equiv c+d(\mathrm{mod}\,2016)$, тогаш елементите a,b,c,d на множеството A мора да се различни. Бидејќи вкупниот број на двоелементни подмножества од A е еднаков на $2080>2016$, од принципот на Дирихле следува дека постојат две множества такви што збировите на нивните елементи се конгруентни по модул 2016.

20. Дадени се 9 прави такви што секоја од нив дели даден квадрат *ABCD* на два трапези, чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Докажи дека најмалку три од дадените девет прави минуваат низ иста точка.



Решение. Нека дадениот квадрат е *ABCD*. Јасно, секоја од дадените прави сече по две спротивни страни на квадратот. Нека *a* е една од дадените 9 прави и нека таа го дели квадратот на два трапеза чии плоштини се однесуваат како $2:3$. Нека таа права ги сече страните *AB* и *CD* во точките *P* и *Q*, соодветно. Таа го дели квадратот на трапезите *APQD* и *PBCQ*. Овие два трапези имаат исти висини, па затоа нивните плоштини се однесуваат како должините на соодветните средни линии. Нека *M* и *N* се средините на страните *AD* и *BC*, соодветно. Нека правата *a* ја сече отсечката *MN* во точката *H*. Тогаш *H* е средина на отсечката *PQ*, па затоа *MH* и *HN* се средни линии на трапезите *APQD* и *PBCQ,* соодветно. Бидејќи плоштините се однесуваат како $2:3$, добиваме дека $\overline{MH}:\overline{HN}=2:3$. Нека *J* е симетричната точка на точката *H* во однос на центарот на квадратот. Тогаш секоја права која минува низ точката *J* и го дели квадратот на два трапези има својство дека плоштините на тие два трапези се однесуваат како $2:3$. Аналогно се заклучува дека постојат уште две точки со саканото својство (на цртежот тоа се точките *I* и *K*). Според тоа, секоја од деветте прави минува низ една од четирите точки: *H, I, J* и *K*. Од принципот на Дирихле следува дека барем низ една од овие точки минуваат најмалку три од дадените девет прави.

21. На едно тестирање учествувале 67 ученици. Тестот се состоел од 6 прашања. Ученик кој точно одговорил на $k-$тото прашање добива k бодови, а додека ученик кој неточно одговорил на $k-$тото прашање добива $-k$ бодови.

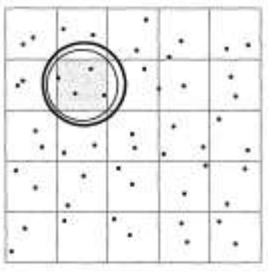
а) Докажи дека постојат најмалку два ученика кои идентично одговориле на сите прашања.

б) Докажи дека постојат најмалку четири ученици кои освоиле ист број на бодови.

Решение. а) Вкупниот број начини на кои еден ученик може да одговори на прашањата, точно или неточно, е $2^6 = 64$. Бидејќи имаме 67 ученици, од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку два ученика кои идентично одговориле на сите прашања.

б) Да забележиме дека максималниот број бодови кои еден ученик може да ги освои (ако точно ги одговорил сите прашања) е $1+2+3+4+5+6=21$, а минималниот $-1-2-3-4-5-6=-21$. Сега да забележиме дека секој ученик точно 3 пати добива непарен број бодови (на првото, третото и петтото прашање). Збир на три непарни и произволен број парни броеви е непарен број, па затоа вкупниот број бодови на секој ученик ќе биде непарен број. Според тоа, вкупниот број бодови на секој ученик ќе биде некој од броевите $-21,-19,-17,$ $...,17,19,21$, што значи дека имаме 22 можности за освоени бодови. Бидејќи на тестирањето учествувале $66=3\cdot 22+1$ ученик, од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку четири ученици кои освоиле ист број на бодови.

22. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 1 на произволен начин се сместени 51 точка. Докажи дека постои круг со радиус помал од $\frac{1}{7}$ кој содржи најмалку 3 од дадените точки.



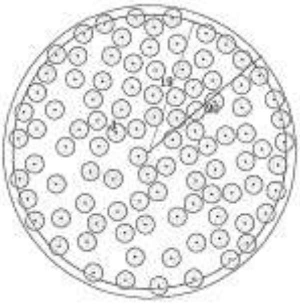
Решение. Дадениот квадрат да го поделиме на 25 еднакви квадрати (цртеж десно). Бидејќи $51=25\cdot 2+1$ од принципот на Дирихле следува дека постои квадрат кој содржи најмалку 3 од дадените точки. Овие 3 точки се наоѓаат во круг со дијаметар $\sqrt{(\frac{1}{5})^2+(\frac{1}{5})^2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$, т.е. радиус $\frac{\sqrt{2}}{10}$. Затоа доволно е да се докаже дека $\frac{\sqrt{2}}{10}<\frac{1}{7}$, што е точно бидејќи $\frac{2}{100}=\frac{1}{50}<\frac{1}{49}$. Според тоа, бараниот круг е со центар во еден од делбените квадрати и има радиус $\frac{1}{7}$.

23. На свера се дадени 5 точки. Докажи дека постои полусвера кој содржи барем 4 од дадените точки.

Решение. Да земеме рамнина која минува низ центарот и 2 од дадените точки. Оваа рамнина ја дели сверата на две полусвери. Остануваат 3 точки, од кои според принципот на Дирихле најмалку 2 се наоѓаат во една од двете делбени полусвери. Како големиот (дијаметралниот) круг на оваа полусвера сожи уште 2 од дадените точки, заклучуваме дека полусверата содржи $2+2=4$ од дадените точки.

24. Докажи дека во круг со радиус $r=19$ не може да се сместат 400 точки така што растојанието меѓу секои две од овие точки е поголемо од 2.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат 400 точки кои се наоѓаат во круг со радиус 19 такви што растојанието меѓу секои две од нив е поголемо од 2. Околу секоја од овие 400 точки да опишеме круг со радиус 1. Тогаш опианите 400 кругови се дисјунктни и секој од нив се наоѓа во кругот кој е концентричен на дадениот круг и има радиус 20. Оттука следува дека плоштината на плоштината на опишаните 400 мали кругови е помала од плоштината на кругот со радиус 20, односно дека



$$400\pi=400\cdot\pi\cdot 1^2<\pi\cdot 20^2=400\pi\,,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

25. На произволен начин од множеството $\{1,2,\dots,25\}$ се избрани 17 различни броеви. Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два различни броја чиј производ е точен квадрат.

Решение. Да ги разгледаме множествата

$$\{1,4,9,16,25\},\{2,8,18\},\{3,12\},\{5,20\},\{6,24\},\{7\},$$
$$\{10\},\{11\},\{13\},\{14\},\{15\},\{17\},\{19\},\{21\},\{22\},\{23\}.$$

Тие се дисјунктни и нивната унија е множеството $\{1,2,\dots,25\}$. Бидејќи се избрани 17 различни броеви, а множества се 16 , според принципот на Дирихле, постојат барем два броја кои се елементи на исто множество. Тоа значи дека меѓу избраните броеви постојат два различни броја чиј производ е полн квадрат.

26. Нека A подмножество од множеството $\{0,1,2,3,...,1997\}$ кое содржи повеќе од 1000 елементи. Докажи дека A содржи број од облик $2^k, k\in\mathbb{N}$ или постојат два различни броја $a,b\in A$ такви што $a+b=2^k, k\in\mathbb{N}_0$.

Решение. Сите броеви да ги поделиме во групи на следниов начин:

$$\{1997,51\},\{1996,52\},\{1995,53\},...,\{1025,1023\},\{1024\},\{50,14\},$$
$$\{49,15\},...,\{33,31\},\{32\},\{13,3\},\{12,4\},...,\{9,7\},\{8\},\{2\},\{1\},\{0\}.$$

Ако од едноелементните множества множеството A содржи некој од броевите 1, 2, 8, 32 или 1024, тогаш содржи број од видот $2^k, k\in\mathbb{N}_0$ и тврдењето е докажано. Затоа нека претпоставиме дека од едноелементните множеста во множеството A е само бројот 0. Тогаш останатите 999 елементи на A се избираат од 997 двоелементни множества, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два елементи на A кои припаѓаат на исто двоелементно множество. Но, тогаш нивниот збир е или $2048=2^{11}$ или $64=2^6$ или $16=2^4$, што значи дека постојат два различни броја $a,b\in A$ такви што $a+b=2^k, k\in\mathbb{N}$, со што тврдењето на задачата е докажано.

27. На еден натпревар учествувале 110 ученици кои решавале 5 задачи. Познато е дека секоја задача ја решиле најмалку 60 ученици. Докажи дека постојат два ученика кои заедно ги решиле сите задачи.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои ученик кој решил најмалку три задачи. Според условот на задачата вкупниот број решени задачи е еднаков на $5\cdot30=300$. Овие 300 задачи ги решиле 110 ученици, па од принципоте на Дирихле следува дека постои ученик кој решил 3 задачи.

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека овој ученик ги решил првата, втората и трета задача. Според условот на задачата 60 ученици ја решиле четвртата задача и 60 ученици ја решиле петтата задача, што значи дека најмалку 5 ученици ја решиле и четвртата и петтата задача. Еден од овие пет ученици со ученикот кој ги решил првата, втората и третата задача се двајцата ученици кои заедно ги решиле сите задачи.

28. Множество S се нарекува *соседно*, ако има точно четири елементи и за секој $x\in S$ барем еден од броевите $x-1$ или $x+1$ припаѓа на S.

Определи го бројот на соседни подмножества од множеството $\{1,2,\dots,n\}$.

Решение. Нека a и b се најмалиот и најголемиот елемент за едно соседно множвство S. Бидејќи $a-1\notin S$, мора $a+1\in S$. Слично заклучуваме дека $b-1\in S$. Значи секое соседно множество има облик $\{a,a+1,b-1,b\}$ каде што $b-a\geq 3$. Ако $b-a=3$, тогаш бројот на соседни подмножества е $n-3$. Ако $b-a=4$, тогаш бројот на соседни подмножества е $n-4$ итн. Значи бројот на соседни подмножества од множеството $\{1,2,\dots,n\}$ е:

$$(n-3)+(n-4)+\dots+2+1=\frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

29. Нека S е множество од n различни реални броеви, а A_S е множеството од аритметичките средини на паровите броеви од S. За дадено $n\geq 2$ определи го најмалиот можен број елементи во множеството A_S.

Решение. Нека $x_1<x_2<...<x_n$, $x_i\in S$, за $i=1,2,...,n$. Тогаш

$$\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{x_1+x_3}{2}<...<\frac{x_1+x_n}{2}<\frac{x_2+x_n}{2}<\frac{x_3+x_n}{2}<...<\frac{x_{n-1}+x_n}{2}.$$

Во горните неравенства има $2n-3$ броеви, па значи бројот на елементите на A_S е поголем или еднаков на $2n-3$. Од друга страна, за $S=\{1,2,...,n\}$ имаме $A_S=\{\frac{3}{2},\frac{4}{2},\frac{5}{2},...,\frac{2n-1}{2}\}$ што значи дека множеството A_S има $2n-3$ елементи.

Значи, најмалиот можен број елементи на A_S е $2n-3$.

30. Од множеството $\{1,2,3,...,2n\}$ се избрани $n+1$ броеви. Докажи дека меѓу нив може да се најдат два броја такви што:

а) едниот е делител на другиот,

б) броевите се заемно прости,

в) нивниот збир е $2n$ или е избран бројот n.

Решение. а) Секој природен број m на единствен начин може да се запише во облик $m=2^a(2k-1)$, каде $a\geq 0, k\geq 1$. Даденото множество да го поделиме на подмножества $A_1,A_3,A_5,...,A_{2n-1}$ така што елементот m шришаѓа на множеството A_{2i-1} ако $2i-1$ е најголемиот непарен делител на бројот m. Според принципот на Дирихле од избраните $n+1$ броеви најмалку два броја мора да припаѓаат на исто подмножество A_{2k-1}. Овие два броја се од видот $2^a(2k-1)$ и $2^b(2k-1)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $b>a$. Тогаш е јасно дека $2^a(2k-1)\,|\,2^b(2k-1)$, со што тврдењето е докажано.

б) Даденото множество да го поделиме на подмножествата

$$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},...,\{2n-1,2n\}.$$

Според принципот на Дирихле од $n+1$ броеви баремдва е бидат од исто подмножество и јасно тие се заемно прости, бидејќи за два последователни броја важи

$$\text{NZD}(a,a+a)=\text{NZD}(a,a+1-a)=\text{NZD}(a,1)=1.$$

в) Да го поделиме даденото множество на подмножествата

$$\{1,2n-1\},\{2,2n-2\},\{3,2n-3\},...,\{n,2n\}.$$

Според принципот на Дирихле два од избраните броеви припаѓаат на исто множество. Ако тоа е подмножеството $\{n,2n\}$ тогаш е исполнет условот на задачата, а ако е тоа множество од видот $\{k,2n-k\}$, тогаш $k+2n-k=2n$, што значи дека повторно е исполнет условот на задачата.

31. Определи го бројот на триелементните подмножества на множеството $S=\{1,2,3,...,19,20\}$ такви што производот на нивните елементи е делив со 4.

Решение. Нека A е множеството од сите триелементни подмножества на множеството S, а

$$B=\{\{a,b,c\}\,|\,\{a,b,c\}\in A,\ 4\,|\,abc\}.$$

Нека $\{x,y,z\}\in A\setminus B$. Тогаш $4\nmid xyz$ и $\{x,y,z\}\subseteq S$. Производот на три природни броја не е делив со 4 ако:

- сите броеви се непарни,
- два броја се непарни, а третиот број е парен број кој не е делив со 4.

Во множеството S парни броеви кои не се деливи со 4 се 2, 6, 10, 14 и 18. Според тоа, имаме 5 парни броеви кои се деливи со 2, а не се деливи со 4 и имаме 10 непарни броеви. Триелементни подмножества на S во кои сите три членови се непарни броеви има

$$\binom{10}{3}=\tfrac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=120.$$

Понатаму, два броја од множеството од 10 непарни броеви можеме да избереме на

$$\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$$

начини и за секој ваков избор имаме 5 можности за третиот број кој треба да е парен и да не е делив со 4. Според тоа, триелементни подмножества во кои еден елемент е парен број кој не е делив со 4, а другите два елементи се непарни броеви има $5\cdot 45=225$. Конечно, множеството $A\setminus B$ има $120+225=345$ елементи. Множеството A е множеството од сите триелементни подмножества на S, па затоа A има

$$\binom{20}{3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}=1140$$

елементи. Значи, $|A|=1140$ и $|A\setminus B|=345$, па како $B\cap(A\setminus B)=\varnothing$, од $A=B\cup(A\setminus B)$ следува $|A|=|B|+|A\setminus B|$, т.е.

$$|B|=|A|-|A\setminus B|=1140-345=795.$$

32. Множествата $M=\{1,2,3,...,27\}$ и $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}\subset\{1,2,3,...,14\}$ го имаат следново својство: секој елемент од M може да се запише како збир на еден или два (не задолжително различни) елементи на A. Определи ја најмалата можна вредност на k.

Решение. Нека n е бројот на непарните, а p е бројот на парните елементи на множеството A. Тогаш од условот на задачата следува дека $n+np\geq 14$, т.е. според условот на задачата бројот на непарните броеви кои се добиваат како комбинација на елементите од A мора да е поголем или еднаков на бројот на непарните елементи на множеството M. Значи, $n(p+1)\geq 14$, па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{n+(1+p)}{2}\geq\sqrt{n(1+p)}\geq\sqrt{14}>3,7\,.$$

Оттука следува $n+p>6,4$, односно $n+p\geq 7$.

Ќе докажеме дека бројот на елементите на множеството A не може да е 7. Нека претпоставиме дека постои множество

$$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\},\ a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7$$

Кое ги задоволува условите на задачата. Бидејќи, според условот на задачата, за броевите 1 и $27=13+14$ имаме единствен запис во бараниот облик, добиваме $a_1=1, a_6=13, a_7=14$. Очигледно $a_2\in\{2,3\}$, па затоа $a_3\leq 5$. Но, $25=14+11=13+12$ се единствените две можности според условот на задачата да се запише бројот 25, па затоа $a_5=11$ или $a_5=12$.

Прв случај. Нека $a_5 = 11$. Според условот на задачата единствените можности за 23 и 21 се дадени со $23 = 14 + 9 = 13 + 10$ ($12 + 11$ не ја земаме предвид, бидејќи $12 \notin A$) и $21 = 14 + 7 = 13 + 8 = 11 + 10$. Оттука следува дека $a_4 = 10$ е единствената можност да се реализираат и двете претставувања. За да се реализира бројот 19, бидејќи $a_3 \le 5$ единствена можност е $19 = 14 + 5$ и $a_3 = 5$, а како $17 = 14 + 3$ добиваме дека $a_2 = 3$. Но, со елементите на множеството $A = \{1, 3, 5, 10, 11, 13, 14\}$ не е можно на саканиот начин да се запишат броевите 7 и 9.

Втор случај. Нека $a_5 = 12$. Од $23 = 14 + 9 = 13 + 10 = 12 + 11$ следува дека $a_4 \in \{9, 10, 11\}$, а од $21 = 14 + 7 = 13 + 8 = 12 + 9 = 11 + 10$ и $20 = 14 + 6$ $= 13 + 7 = 12 + 8 = 11 + 9 = 10 + 10$ следува дека $a_3 \ge 6$, што противречи на $a_3 \le 5$.

Со тоа покажавме дека A мора да има најмалку 8 елементи. На пример, множеството $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14\}$ ги задоволува условите на задачата.

33. Нека n е природен број и $S = \{n, n+1, n+2, ..., 5n\}$.

а) Докажи, дека ако множеството S е поделено на две дисјунктни множества, тогаш постојат три броја x, y, z (не задолжително различни) кои припаѓаат на исто подмножество на S и за кое важи $x + y = z$.

б) Дали тврдењето под а) важи ако наместо множеството S го разгледуваме множеството $S' = \{n, n+1, n+2, ..., 5n-1\}$.

Решение. а) Нека множеството S е поделено на подмножествата A и B. Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно. Нека $n \in A$. Тогаш $n + n = 2n \in B$. Понатаму, мора да важи $2n + 2n = 4n \in A$, па затоа $n + 4n = 5n \in B$. Сега, бројот $3n$ припаѓа или на множеството A или на множеството B. Ако $3n \in A$, тогаш $n + 3n = 4n$, а ако $3n \in B$, тогаш $2n + 3n = 5n \in B$. И во двата случаја добиваме противречност со претпоставката, од што следува точноста на тврдењето.

б) Ако наместо множеството S го разгледуваме множеството S', тогаш тврдењето не важи. Навистина, доволно е да ја разгледаме поделбата на S' на множествата

$$A = \{n, n+1, ..., 2n-1\} \cup \{4n, 4n+1, ..., 5n-1\} \text{ и } B = \{2n, 2n+1, ..., 4n-1\}.$$

34. Нека A е множество со n^2, ($n \ge 2$) елементи, $\mathcal{F}$ е фамилија подмножества од A такви што секое од нив има n елементи и секои две

различни множества од $\mathcal{F}$ имаат најмногу еден заеднички елемент. Докажи,

а) фамилијата $\mathcal{F}$ има најмногу n^2+n елементи,

б) горната граница може да се достигне за $n=3$.

Решение. а) За фиксиран елемент $x\in A$ со $k(x)$ да го означиме бројот на множествата $B\in\mathcal{F}$ кои го содржат елементот x. Овие множества да ги означиме со $B_1,B_2,...,B_{k(x)}$. Тогаш множествата $B_1\setminus\{x\}$, $B_2\setminus\{x\},...,B_{k(x)}\setminus\{x\}$ се дисјунктни подмножества на множеството $A\setminus\{x\}$. Бидејќи секое од овие множества има $n-1$ елемент, а множеството A има n^2-1 елементи, заклучуваме дека важи

$$k(x)\le\tfrac{n^2-1}{n-1}=n+1.$$

Повторувајќи ја постапката за секој елемент $x\in A$ и ако ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$\sum_{x\in A}k(x)\le n^2(n+1).$$

Меѓутоа,

$$\sum_{x\in A}k(x)=\sum_{B\in\mathcal{F}}|B|=n|\mathcal{F}|,$$

па затоа $|\mathcal{F}|\le n^2+n$.

б) Да ги распределиме елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 во табела:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

и множествата на фамилијата $\mathcal{F}$ да ги оформиме како редици, колони и “дијагонали” на оваа фамилија. Така ги добиваме множествата

$$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},$$
$$\{1,6,8\},\{2,4,9\},\{3,5,7\},\{3,4,8\},\{2,6,7\},\{1,5,9\}.$$

35. За едно множество M што содржи 4 елементи велиме дека е „парно сврзано” ако за секој елемент x во M, барем еден од броевите $x-2$ или $x+2$ припаѓа на M. Нека S_n е бројот на „парно сврзани” подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Определи го најмалиот број n така што $S_n\ge 2011$.

Решение. Нека $M=\{a,b,c,d\}$ е „парно сврзано” множество. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c<d$. Бидејќи

$a-2$ не припаѓа на M, следува дека $a+2$ е во M. Исто така бидејќи $d+2$ не припаѓа на M, следува дека $d-2$ е во M. Можни се следниве случаи:

i) $b=a+2; b=d-2, (d=b+2=a+4)$. Овој случај не е можен бидејќи тогаш $c=a+3$ и множеството M е од облик $\{a, a+2, a+3, a+4\}$, но $a+1, a+5 \notin M$.

ii) $b=a+2; c=d-2, (d=c+2)$. Значи, M е од облик $\{a, a+2, c, c+2\}$, $c-a>2$. Овој облик ќе го наречеме **облик 1**.

iii) $b=a+2; a=d-2$. Овој случај не е можен бидејќи се добива $b=d$.

iv) $c=a+2; b=d-2$. Следува $b=a+1$ и $d=a+3$ и множеството M е од облик $\{a, a+1, a+2, a+3\}$. Овој облик ќе го наречеме **облик 2**.

v) $c=a+2; c=d-2$. Следува $b=a+1$, $d=a+4$ и множеството M е од облик $\{a, a+1, a+2, a+4\}$, но $a-1, a+3 \notin M$. Значи и овој случај не е можен.

vi) $c=a+2; a=d-2$. Овој случај не е можен бидејќи се добива $c=d$.

vii) Случајот $d=a+2$ не е можен.

Со тоа се исцрпени сите можности за обликот на M. Нека n е доволно голем. За $\{1, 2, ..., n\}$, ,,парно сврзани" подмножества од **облик 2** се вкупно $n-3$. Останува да го пресметаме бројот на ,,парно сврзани" подмножества од облик 1.

Ако $a=1$ постојат вкупно $n-5$ различни подмножества;

Ако $a=2$ постојат вкупно $n-6$ различни подмножества;

Ако $a=3$ постојат вкупно $n-7$ различни подмножества;

....

Ако $a=n-5$ постои само едно такво подмножество.

Значи бројот на ,,парно сврзани" подмножества од **облик 1** се вкупно

$$1+2+...+(n-5)=\frac{(n-5)(n-4)}{2}=\frac{n^2-9n+20}{2}$$

Значи, вкупниот број на ,,парно сврзани" подмножества на $\{1, 2, ..., n\}$ е:

$$S_n=n-3+\frac{n^2-9n+20}{2}=\frac{n^2-7n+14}{2}=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1.$$

Треба да го одредиме најмалиот n за кој $\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1\geq 2011$, односно $(n-3)(n-4)\geq 4020$. Со проверка се утврдува дека $n\geq 67$. Значи најмалиот број е 67.

36. Дали е можно во рамнината да се обележат 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки (сите различни) така што се исполнети условите:
    - За секоја црвена точка A постои сина точка која е поблиска до точката A од било која зелена точка,
    - За секоја сина точка B постои зелена точка која е поблиска до точката B од било која црвена точка, и
    - За секоја зелена точка C постои црвена точка која е поблиска до точката C од било која сина точка.

    Решение. Нека претпоставиме дека бараното обележување на точки е можно. Меѓу сите парови различно обоени точки да избереме еден од оние со најмало растојание меѓу точките. Нека се тоа црвена точка C и сина точка S. Тогаш од условот на задачата постои зелена точка Z таква што $\overline{SZ} < \overline{SC}$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека во рамнината не може да се обележа 10 црвени, 10 сини и 10 зелени точки такви што се исполнети бараните услови.

37. Даден е конвексен 17-аголник. Сите страни и сите дијагонали се обоени со 3 различни бои. Докажи дека постои триаголник чии страни се обоени со иста боја.

    Решение. Од едно теме А може да се повлечат 14 дијагонали и сметајќи ги и страните во тоа теме, вкупно 16 отсечки. Обоени се со три различни бои. Од принципот на Дирихле следува дека постојат 6 отсечки обоени со иста боја 1. Да ги означиме темињата кон кои се повлечени овие отсечки со $B_1, B_2, ..., B_6$. Сега $B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_1B_5$ и B_1B_6 се обоени со некои од трите бои. Ако некоја од овие отсечки е обоена со бојата 1 тогаш постои ваков триаголник. Ако никоја од овие отсечки не е обоена со бојата 1 тогаш од принцип на Дирихле од 5-те отсечки постојат барем 3 обоени со иста боја 2. Нека тоа се B_1B_2, B_1B_3 и B_1B_4. Тогаш, ако една од B_2B_3, B_2B_4 и B_3B_4 е обоена со бојата 2, добиваме триаголник со исти бои. Ако сите се обоени со бојата 3, триаголникот $B_2B_3B_4$ е со бараното својство.

38. Во рамнината се дадени 2019 плави и црвени точки такви што на секоја единечна кружница со центар во плава точка се наоѓаат точно две црвени точки. Определи го најголемиот можен број на плави точки.

    Решение. Секој пар црвени точки се наоѓа најмногу на две единечни кружници со центри во плави точки. Бидејќи n црвени точки формираат $\frac{n(n-1)}{2}$ парови црвени точки, заклучуваме дека бројот на плавите точки е помал или еднаков на $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$. Затоа вкупниот број плави и црвени точки е помал или еднаков од $n+n(n-1)=n^2$. Но, вкупниот број точки е 2019, па затоа $n^2\geq 2019$, од каде добиваме $n\geq[\sqrt{2019}]+1=45$.

Останува да најдеме пример кој покажува дека постои конфигурација со 45 црвени точки која ги исполнува условите на задачата. Да распоредиме 45 црвени точки на отсечка со должина 1. Околу секоја од овие црвени точки опишуваме кружница со радиус 1. Бидејќи центрите на овие кружници се на растојаниеја помали од 1, добиваме дека секои две од опишаните кружници се сечат. Понатаму, не постојат три од опишаните кружници кои се сечат во иста точка, бидејќи тогаш единичната кружница со центар во таа точка треба отсечката со должина 1 да ја сече во три различни точки, што не е можно. Според тоа, вкупниот број пресечни точки е $45\cdot 44=1980$. Да обоиме 1974 од овие токи во плаво. Сега добивме конфигурација од $1974+45=2019$ плави и црвени точки кои ги задоволува условите на задачата. Бидејќи оваа конфигурација мора да има најмалку 45 црвени точки, таа има најмалку 1974 плави точки.

39. Дефинираме боење на рамнината на следниот начин:
    - избираме природен број m,
    - нека $K_1,K_2,...,K_m$ се различни кругови со ненулти радиуси такви што $K_i\subset K_j$ или $K_j\subset K_i$ за $i\neq j$,
    - точките од рамнината кои што се надвор од произволен од избраните кругови се различно обоени од точките кои што се внатре во кругот.

    Во рамнината се дадени 2019 точки такви што било кои три од нив не се колинеарни. Определи го максималниот број на бои со кои дадените точки можат да се обојат?

    Решение. Од условот на задачата следува дека максималниот број бои е помал или еднаков на 2019.

    Ќе докажеме дека бројот 2019 бои се достигнува. За таа цел доволно е да докажеме дека постојат $K_1,K_2,...,K_{2019}$ кругови кои дефинираат различно боење на точките. Ги повлекуваме сите отсечки кои имаат крајни точки во дадените 2019 точки, вкупно $\frac{2019\cdot2018}{2}$ отсечки. На овие отсечки повлекуваме симетрали. Избираме точка O која не лежи на ниту една од повлечените симетрали. Јасно, растојаниата од таа точка до дадените 2019 точки се меѓу себе различни (избраната точка не лежи на било која од симетралите на отсечките) и овие растојанија ги подредуваме во растечки редослед $0 < s_1 < s_2 < ... < s_{2019}$. Понатаму, наоѓаме броеви $r_i, i = 1, 2, ..., 2019$ тави што

$$s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < ... < s_{2019} < r_{2019}.$$

Конечно, конструираме 2019 концентрични кружници со центар во точката O и радиуси $r_i, 1 \le i \le 2019$. Јасно, овие кружници дефинираат боење во кое секоја од избраните 2019 точки е различно обоена.

40. Секоја точка од рамнината е обоена во црвена или плава боја. Докажи дека постои многуаголник со еднобојни темиња од барем еден од следниве видови:

- рамностран триаголник со должина на страна 2,
- рамностран триаголник со должина на страна $\sqrt{3}$,
- ромб со должина на страна 1.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои еднобоен рамностран триаголник со должина на страна 1 или таков со должина на страна $\sqrt{3}$. Нека претпоставиме дека не постои триаголник од првиот вид. Тогаш постојат точки A и B, A е црвена, B е плава и $\overline{AB} = 1$. Да ја разгледаме точката C за која важи $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека C е плава. Ако M е средината на AC, тогаш таа има иста боја како A или како C, па без ограничување на општоста можеме да земеме дека е бојата на A. Да ги разгледаме рамностраните триаголници ADM и AEM. По претпоставка точките D и E се обоени во плава боја, па затоа триаголникот CDE е плав, рамностран и има должина на страна $\sqrt{3}$.

Сега да претпоставиме дека постои еднобоен (црвен) триаголник PQR, кој е рамностран и има должина на страна 1. Надворешно за него конструираме рамнострани триаголници PQW, QRU и RPV. Тогаш или точките U, V, W се сите плави и тогаш имаме рамностран плав триаголник со должина на страна 2, или една од нив е црвена, на пример U и во тој случај четириаголникот $PQUR$ е ромб со саканите својства.

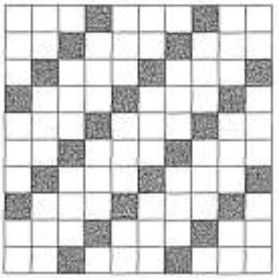
41. Дадена е правоаголна табла со димензии 2017×2018. Дали може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати?

Решение. Да разгледаме правоаголна $m\times n$ табла. Таа е формирана од $m+1$ хоризонтална и $n+1$ вертикална права. Притоа имаме 2 рабни и $m-1$ внатрешна хоризонтална права и 2 рабни и $n-1$ внатрешна вертикална права. Права која на таблата пресекува k единечни квадрати мора да сече $k-1$ внатрешни прави кои ги формираат овие квадрати (зошто?). Бидејќи таблата има $m-1+n-1=m+n-2$ внатрешни прави, добиваме дека правата може да сече најмногу $k-1=m+n-2$ прави, што значи дека таа може да пресекува најмногу $k=m+n-1$ единечни квадрати. Од претходно изнесеното следува дека на табла со димензии 2017×2018 може да се повлече права која ќе пресекува најмногу $k=2017+2018-1=4034$ единечни квадрати. Според тоа, не може да се повлече права која на таблата ќе пресекува 4035 единечни квадрати.

42. Во табела со димензии $2n\times 2n$ се запишани природни броеви кои се помали или еднакви на 10, при што броевите кои се запишани во квадрати со заеднички теме се заемно прости. Докажи, дека постои број кој се појавува барем $\frac{2n^2}{3}$ пати.

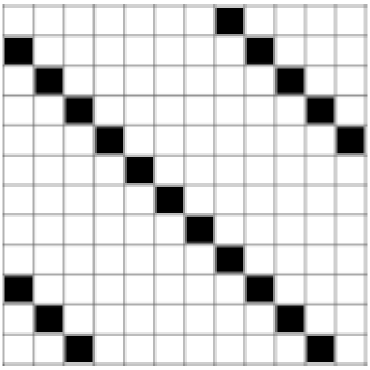
Решение. Да ја поделиме табелата на n^2 квадрати со димензија 2×2. Бидејќи секој од овие квадрати може да содржи најмногу 2 од броевите 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 10, заклучуваме дека секој од овие квадрати содржи барем два од броевите 1, 5 и 7. Но, вакви квадрати има n^2, па затоа броевите 1, 5 и 7 во табелата ќе се појават $2n^2$. Конечно, од принципот на Дирихле следува дека некој од броевите 1, 5 и 7 ќе се појави најмалку $\frac{2n^2}{3}$ пати.

43. Дали може табла со димензии 10×10 да се покрие со правоаголници со димензии 4×1.



Решение. Ако табла со димензии 10×10 може да се покрие со правоаголници со димензии 4×1, тогаш за покривањето се потребни 25 правоаголници. Да ја обоиме таблата како на цртежот десно. При ова боење секој правоаголник со димензии 4×1 покрива точно едно црно поле. Имаме 24 црни поллиња, што значи дека на таблата можеме да поставиме најмногу 24 правоаголници, па затоа бараното покривање не е можно.

44. Дали може да се покрие табла со димензии 12×12 со правоаголници 1×8 и 8×1?



Решение. Таблата со димензии 12×12 има 144 единечни квадрати, па затоа за нејзино покривање се потребни $144:8=18$ правоаголници од дадените видови. Нека таблата ја обоиме како што е прикажано на цртежот десно, при што при секое поставување на праволник од видовите 1×8 или 8×1 се покрива точно едно црно поле. При ваквото боење имаме 19 црни полиња, секое од кои е покриено од различен правоаголник, а на таблата може да поставиме 18 правоаголници. Според тоа, бараното покривање не е можно.

45. Определи го бројот на табелите со m редици и n колони, $m,n\in\mathbb{N}$, елементи $+1$ и -1 такви што производот на елементите во секој ред и секоја колона е еднаков на:

а) $+1$ б) -1

Решение. а) Да забележиме дека ако на првите $n-1$ место во ред произволно ставиме броеви, тогаш последниот број е еднозначно определен. Имено, производо на првите $n-1$ броеви е или 1 или -1, па треба да запишеме 1 или -1. Аналогно за првите $m-1$ место во колона важи истиот заклучок. Затоа ако на произволен начин ја пополниме таблицата со димензии $(m-1)\times(n-1)$, која ја добиваме така што ќе ги испуштиме последниот ред и последната колона, тогаш еднозначно ги пополнуваме преостанатите полиња под и десно од таблицата. Ако производот на броевите во таблицата $(m-1)\times(n-1)$ е еднаков на P, тогаш производот на $n-1$ броеви во $m-$тата колона е еднаков на P, а истото важи и за $m-1$ броеви во $n-$ тата колона. Затоа бројот во долното десно поле на табелата е еднозначно определен, а бројот на начините на пополнување на табелата е $2^{(m-1)(n-1)}$.

б) Како и во случајот под а) ако на првите $n-1$ место во ред произволно ставиме броеви, тогаш последниот број е еднозначно определен, а истото важи и за првите $m-1$ место во колона. Затоа ако на произволен начин пополниме табелата со димензии $(m-1)\times(n-1)$ која ја добиваме со испуштање на последниот ред и последната колона, тогаш полињата долу и десно од оваа табела ги пополнуваме еднозначно. Ако производот на броевите во табелата со димензии $(m-1)\times(n-1)$ е еднаков на P, тогаш производот на $n-1$ броеви во $m-$тата колона е еднаков на $(-1)^{n-1}P$, а производот на $m-1$ броеви во $n-$ тата колона е еднаков на $(-1)^{m-1}P$. Според тоа, долното десно поле може да се пополни така што ќе биде исполнет условот на задачата ако и само ако $(-1)^{n-1}P=(-1)^{m-1}P$, т.е. ако и само ако броевите m и n се со иста парност. Значи, бараниот број пополнувања е еднаков на $2^{(m-1)(n-1)}$ ако m и n се со иста парност и на 0 ако m и n се со различна парност.

46. Во едно од полињата на квадратна 41×41 табла е маскиран тенк. Стрелец со еден истрел погодува едно поле. Ако0 го погоди полето во кое е тенкот, тогаш тенкот се преместува во соседно поле, а во спротивно останува во полето во кое се наоѓа. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна. По истрелот стрелецот не знае дали го погодил или не го погодил тенкот. За да се уништи тенкот треба да е погоден двапати. Кој е најмалиот број истрели со кој стрелецот сигурно ќе го уништи тенкот?

Решение. Таблата да ја обоиме шаховски така што четирите аголни полиња се црни. Нека стрелецот на почетокот стреѓла во сите бели полиња, потоа во сите црни полиња и на крајот повторно во сите бели полиња. Ако тенкот е во бело поле, тој ќе биде погоден и во првата и во втората серија. Ако тенкот е на црно поле, тој ќе биде погоден и во втората и во третата серија. При ваквиот начин на стрелање стрелецот стрела $41^2+\frac{41^2-1}{2}=\frac{3\cdot41^2-1}{2}$ пати.

Сега да разгледаме низа од истрели по која тенкот е погоден двапати. Јасно, во секое поле треба да се стрела барем еднаш. Да претпоставиме дека има две соседни полиња A и B, во кои стрелецот стрелал точно по еднаш, но прво стрелал во A, а потоа во B. Ако тенкот бил во B и по истрелот преминал во A, тој нема да биде униптен и нема второ негово погодување во A. Според тоа, такви две соседни полиња не постојат. Таблата ја покриваме со $\frac{41^2-1}{2}$ домина 1×2 и со едно поле 1×1. Во секое домино стрелецот треба да стрела барем три пати, а во полето 1×1 треба да стрела еднаш. Затоа се потребни најмалку $3\cdot\frac{41^2-1}{2}+1=\frac{3\cdot 41^2-1}{2}$ истрели.

47. Квадрат, поделен на единечни квадратчиња, може да се расече на n складни фигури со по k квадратчиња во секоја фигура. Докажи дека истиот квадрат може да се расече и на k складни фигури со по n квадратчиња во секоја фигура.

Решение. Ако m е должината на страната на квадратот, тогаш $m^2=nk$. Нека $d=\text{NZD}(n,k)$. Тогаш $m=dm_1$ и $n=dn_1$, $\text{NZD}(m_1,n_1)=1$. Затоа $mm_1=kn_1$, од каде следува дека $n_1\,|\,m$. Последното значи дека квадратот може да се подели со хоризонтални паралелни прави на растојание n_1 и вертикални паралелни прави на растојание d. При оваа поделба квадратот е поделен на k складни правоаголници со по $dn_1=n$ единечни квадратчиња.

48. Дали може шаховската фигура скокач да помине по табла со димензии $4\times n$ така што на секое поле ќе застане точно по еднаш и во последниот потег да се врати на почетното поле.

Решение. Да претпоставиме дека скокачот може да помине по табла со димензии $4\times n$ така што на секое поле ќе застане точно по еднаш и во последниот потег да се врати на почетното поле. Полињата на таблата $4\times n$ да ги означиме со буквите a,b,c,d како на цртежот десно. Бидејќи ако постои бараното обиколување на таблата, потполно е сеедно од кое поле ќе тргне скокачот, без ограничување на општоста можеме да земеме дека полето од кое тргнал скокачот е означено со a. Да забележиме дека на поле означено со c може да се дојде само од поле означено со a и од поле означено со c може да се стигне само на поле означено со a. Последното значи дека во низата потези пред и по секое c мора да има по едно a. Бидејќи препоставивме дека скокачот може да помине по таблата на опишаниот начин, во некоја низа потези сме ги помина-

c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d	c	d

ле и сите полиња означени со c. Според тоа, секогаш кога ги поминуваме сите полиња означени со c (тргнавме од поле зоначено со a), до тогаш ги поминуваме сите полиња означени со a. Бидејќи од c се скока на a и на c може да се дојде само од a, заклучуваме дека имаме низа потези $acaca...ac$, што значи дека по последното c мора да одиме на поле на кое веќе сме биле, а притоа не сме ги посетиле сите полиња на таблата (не бевме на полињата b). Последното е противречност, од што следува дека скокачот не може да помине по таблата на саканиот начин.

49. Колку најмногу скокачи (коњи) може да се распоредат на шаховска табла со димензии 5×5 така што секој од нив напаѓа точно по два од останатите скокачи (коњи).

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека полињата во аглите на таблата се црни. Бидејќи секој скокач напаѓа точно два други скокачи кои се наоѓаат на бели полиња, заклучуваме дека бројот на зафатените црни полиња е еднаков на бројот на зафатените бели полиња. Според тоа, ако бројот на празните бели полиња е еднаков на n, тогаш бројот на празните црни полиња е еднаков на $n+1$. Нека скокачот се наоѓа на централното поле кое е црно. Тогаш бројот на празните бели полиња е најмалку 6, па затоа бројот на празните црни полиња е најмалку 7. Според тоа, на таблата може да се поставаат најмногу $25-6-7=12$ скокачи.

	3		3	
1		4		2
	2		1	
1		3		2
	4		4	

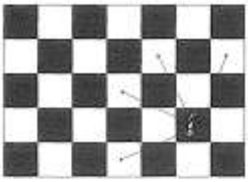
		d		
a	f			
			c	
b	e			
		g		

	S	S	S	
S	S		S	S
S				S
S	S		S	S
	S	S	S	

Нека претпоставиме дека на централното поле нема скокач. Да ги поделиме празните полиња како на цртежот десно. Да претпоставиме дека на полињата означени со бројот 1 се наоѓаат скокачите a,b,c. Тогаш од долниот лев цртеж следува: бидејќи скокачот од полето a мора да напаѓа два скокачи, а централното поле е празно, заклучуваме дека на e и d мора да има скокачи. Аналогно, ако го разгледуваме скокачот на полето b, тогаш мора да има скокачи на полињата f и g. Но, тогаш скокачот c напаѓа 4 други скокачи, што е противречност. Заради симетрија на означувањето на полињата со броевите 1, 2, 3 и 4, заклучуваме дека меѓу полињата означени со ист број мора да има барем едно поле на кое нема скокач. Тоа значи, дека бројот на празните бели полиња е поголем или еднаков на 4, што значи дека бројот на празните црни полиња е поголем или еднаков на 5, а на таблата може да има најмногу $25-4-5=16$ скокачи.

Бидејќи меѓу полињата означени со ист број треба едно да е празно, логично е тоа да биде полето на кое на вториот цртеж се наоѓа скокачот c, кој напаѓа 4 полиња и најмногу го нарушува условот. Сега ако ги оставиме празни четирите полиња означени со 1, 2, 3 и 4, кои се симетрични во однос на средните линии и дијагоналите на таблата, тогаш лесно се конструира распоредот прикажан на горниот десен цртеж.

50. Нека m и n се непарни броеви. Докажи дека шаховската фигура скокач не може да помине по табла со димензии $m\times n$ така што на секое поле ќе застане точно по еднаш и во последниот потег да се врати на почетното поле.



Решение. Нека m и n се непарни броеви и да претпоставиме дека скокачот може да помине по табла со димензии $m\times n$ така што на секое поле ќе застане точно по еднаш и во последниот потег да се врати на почетното поле. Ако ова е можно потполно е сеедно од кое поле скокачот тргнал, па можеме да претпоставиме дека полето од кое скокачот тргнал е црно. Во секој потег скокачот ја менува бојата на полето на кое се наоѓа, што значи дека во секој непарен потез тој ќе се наоѓа на бело поле (види цртеж). Тогаш, бидејќи m и n се непарни броеви, по mn потези скокачот ќе се најде на бело поле, што противречи на претпоставката дека со последниот, $mn-$тиот потез тој се враќа на почетното црно поле. Од добиената противречност следува дека скокачот не може да помени по таблата на саканиот начин.

51. На таблата се запишани броевите 0, 1, 2 и 4. Дозволено е да се изберат било кои два броја и секој од нив да се зголеми за 1. Дали може со конечно многу повторувања на оваа операција да се добиат четири еднакви броја?

Решение. Со операцијата која е дозволена вкупниот збир на броевите се зголемува за 2. Според тоа, по $k-$тиот чекор збирот на броевите кои ќе бидат запишани на таблата ќе биде од видот $2k+7=2(k+3)+1$, т.е. ќе биде непарен број. Ако со конечно многу повторувања на операцијата може да се добијат четири еднакви броја, тогаш нивниот збир ќе биде парен, што е противречност. Од добиената противречност следува дека одговорот на поставеното прашање е негативен.

52. Горјан има голем сад кој на почетокот е празен. Тој секоја секунда или става едно топче во садот или од него вади две топчиња. Дали може по 3^{1999} секунди во садот да има точно $3^{1000}+2$ топчиња.

Решение. Во секоја секунда бројот на топчињата во садот се менува за број кој дава остаток 1 при делење со 3. Со S_i да го означиме бројот на топчињата во садот во $i-$тата секунда. На почетокот $S_0=0$, а од претходно изнесеното следува

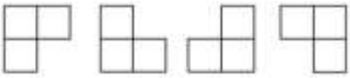
$$S_{i+1} \equiv S_i + 1 (\mathrm{mod} 3).$$

Затоа за секој $k \in \mathbb{N}$ важи

$$S_{3k} \equiv S_{3(k-1)} + 3 \equiv S_{3(k-1)} \equiv S_{3(k-2)} \equiv ... \equiv S_0 \ (\mathrm{mod} 3).$$

Според тоа, во 3^{1999} секунда бројот на топчињата во садот мора да е делив со 3, па затоа тој не може да биде еднаков на $3^{1000}+2$.

53. L-тримино е фигура која може да има еден од четирите облици прикажани на цртежот (секој од нив се состои од 3 единечни квадрати):

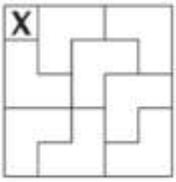


Дадена е табла 5×5, која се состои од 25 единични квадрати и неограничен број на L-тримина. Нека k е даден природен број, таков што $k \leq 25$.

Двајца играчи, *A* и *B*, ја играат следата игра: играта ја почнува играчот *A* и наизменично бојат (со иста боја) по еден единичен квадрат, кој што претходно не е обоен. Велиме дека играта е завршена, кога на таблата се обоени вкупно *k* единечни квадрати.

Велиме дека L-тримината *добро* ги покриваат необоените единични квадрати на таблата ако тие не се преклопуваат и секое од нив покрива точно три необоени единични квадрати на таблата.

Играчот *B* победува ако секое *добро* прекривање со L-тримина остава непокриени најмалку три необоени единични квадрати. Најди ја најмалата можна вредност за *k* за која играчот *B* има победничка стратегија.

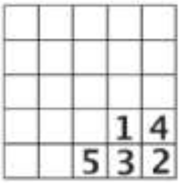


Решение. Ќе докажеме дека играчот A победува ако $k=1,2,3$, а играчот B победува за $k=4$. Според тоа, најмалиот k за кој играчот B победува постои и е еднаков на 4.

Ако $k=1$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата и потоа таблата ја покрива како што е прикажано на цртежот десно.

Ако $k=2$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата. Потоа без разлика кое поле ќе го обои играчот B, играчот A може да ја покрие таблата на истиот начин како во претходниот случај, со тоа што не поставува L-тримино кое го покрива полето кое го обоил играчот B. Јасно, играчот A победува бидејќи има две непокриеби необоени полиња.

За $k=3$ играчот A ја следи истата стратегија. Кога играчот A треба да го обои второто поле, тој го бои едно од двете необоени полиња кои ги покрива L-триминото кое го покрива поето кое веќе го обоил играчот B.



Ќе докажеме дека за $k=4$ играчот B има победничка стратегија. Бидејќи има 21 необоено поле, играчот A мора сите да ги покрие со седум L-тримина. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека во првиот чекор играчот A не обоил ниту едно поле во долните два реда на таблата (во спротивно едноставно ќе ја завртиме таблата). Во првиот чекор играчот B го обои квадратот кој на цртежот десно е означен со 1. Ако играчот A во следниот чекот не обои ниту еден од квадратите означени со 2, 3 и 4, тогаш играчот B го бои квадратот 3. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Ако играчот A во следниот чекор го обои квадратот 2, тогаш играчот B го бои квадратот 5. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 3 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Конечно, ако во следниот чекор играчот A обои еден од квадратите 3 или 4, тогаш играчот B го бои другиот од овие два квадрати. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино.

Забелешка. Во пследниот случај играчот B може да го обои било кој необоен квадрат од таблата.

54. На секое поле на табла со димензии $n\times n$ ($n\geq 2$) се наоѓа жетон. Во еден чекор го поместуваме секој жетон на едно четирите дијагонални соседни полиња на полето на кое се наоѓа жетонот (на некое поле може да има и повеќе жетони). Определи го најголемиот број полиња на кои со повеќекратно реализирање на наведената операција може да нема ниту еден жетон.

    Решение. Таблата да ја обоиме црно-бело на шаховски начин. Тогаш секој жетон при наведената операција не ја менува бојата на полето на кое се наоѓа. Ќе докажеме дека од секоја боја остануваат најмалку две полиња на кои има жетони. Колоните на таблата ги нумерираме со броевите од 1 до n. Во секој чекор жетон кој се наоќа на црно поле на колона нумерирана со непарен број преминува на црно поле на колона нумерирана со парен број и обратно. Бидејќи на почетокот жетоните се наоѓаат на црни полиња нумерирани и со парни и со непарни броеви, заклучуваме дека по секој чекор ќе бидат зафатени барем 2 црни полиња. Аналогно важи и за белите полиња, т.е. во секој чекор ќе бидат зафатени барем 2 бели полиња. Според тоа, во секој чекор ќе бидат зафатени најмалку 4 плиња на таблата.

    Ќе докажеме дека оваа вредност може да се постигне. Во секој чекор да ги поместуваме жетоните кон аголна подтабла со димензии 2×2 (произволно избрана). Ако некој жетон веќе се наоѓа на оваат подтабла, тогаш со соодветното дијагонално поместување можеме да го оставиме на неа. Јасно, по конечен број чекори сите жетони ќе се најдат на оваа подтабла, што значи дека само на 4 полиња на таблата ќе има жетони. Конечно, најголемиот број полиња на кои нема да има жетони е n^2-4.

55. На таблата се запишани n природни броеви. Може да се допишуваат само броеви од видот $\frac{a+b}{a-b}$, каде a и b се веќе запишани броеви. Определи го најмалиот природен број n така што додавајќи броеви на погоре опишаниот начин може да се добие било кој природен број. За вака определениот број n определи ги почетните броеви (испитај ги сите можности).

    Решение. Бидејќи $a+b>a-b$, на опишаниот начин не можеме да го добиеме бројот 1. Значи, бројот 1 мора да биде запишан. Јасно, само со бројот 1 на опишаниот начин не може да се добијат сите природни броеви. Ќе докажеме дека е доволно да се запишани два броја.

Нека x е вториот број. $\frac{x+1}{x-1}$ е единствениот број кој може да се добие во првиот чекор. Бидејќи важи $\frac{x+1}{x-1} \geq 2$, добиваме дека $x \leq 3$. Според тоа, вториот број е 2 или 3. Ќе ги разгледаме двата случаја.

Прв случај. Нека на таблата се запишани броевите 1 и 2. Од $\frac{2+1}{2-1} = 3$ следува дека можеме да го запишеме и бројот 3. Индуктивно ќе докажеме дека на опишаниот начин можеме да го запишеме секој природен број. Нека на таблата се запишани броевите $1, 2, ..., 2k+1$. Тогаш, од

$$\frac{(k+2)+(k+1)}{(k+2)-(k+1)} = 2k+3 \text{ и } \frac{(2k+3)+(2k+1)}{(2k+3)-(2k+1)} = 2k+2$$

следува дека на опишаниот начин можеме да ги запишеме и броевите $2k+3$ и $2k+2$. Сега од прионципот на математичка индукција следува дека можеме да го запишеме секој природен број.

Втор случај. Нека на таблата се запишани броевите 1 и 3. Од $\frac{3+1}{3-1} = 2$ следува дека можеме да го запишеме и бројот 2. Понатаму, разгледувањата се идентични како во првиот случај.

Според тоа, бараниот најмал природен број е $n = 2$ и притоа двата запишани броеви се 1 и 2, или 1 и 3.

56. Темињата на правилем многуаголник со 1000 страни се обоени во три бои: црвена, жолта и плава. Во еден потез е дозволено да се земат две соседни различно обоени темиња и тие да се пребојат во третата боја. Докажи дека по конечен број вакви потези сите темиња може да се обојат во една боја.

Решение. Нека $A_1, A_2, A_3, ..., A_{1000}$ темињата на правилниот $1000-$аголник. Можеме да земеме дека боите на темињата се 0, 1 и 2 и дека постапката е промена на два соседни различни броја во третиот број. Ќе докажеме две тврдења.

Лема 1. Нека три од четири последователни темиња имаат ист број. Тогаш постои низа потези со кои можеда се постогне и овие три темиња да го имаат бројот кој е придружен на четвртото теме.

Доказ. Без ограничување на општоста доволно е да ги разгледаме следниве два случаја.

а) $11\underrightarrow{10} \to 1\underrightarrow{12}2 \to \underrightarrow{10}02 \to 2\underline{20}2 \to \underrightarrow{21}12 \to 00\underline{12} \to 0000$,

б) $1\underline{01}1 \to \underline{12}21 \to 00\underline{21} \to 0000$. ■

Лема 2. Постои низа потези со кои може да се постигне било кои четири последователни темиња да имаат ист број.

Доказ. Формираме два пара соседни темиња и да ги промениме да имаат ист број, ако веќе не се исти. Тогаш тврдењето следува од следнава низа потези:

$$1\underline{12}2 \to \underline{10}02 \to 2\underline{20}2 \to \underline{21}12 \to 00\underline{12} \to 0000. \ \blacksquare$$

Според лема 2 по неколку потези можеме да постигнеме темињата A_1, A_2, A_3, A_4 да имаат ист број, да кажеме 0. Исто така според лема 2 се постигнува по неколку потези и темињата A_5, A_6, A_7, A_8 да имаат ист број. Сега, ако темињата $A_1, A_2, A_3, ..., A_7$ имаат број 0 продолжуваме понатаму, а ако немаат тогаш на темињата A_4, A_5, A_6, A_7 ја применуваме лема 1, по што темињата $A_1, A_2, A_3, ..., A_7$ имаат број 0. Понатаму, повторно користејќи ја лема 2 темињата A_8, A_9, A_{10}, A_{11} ќе имаат ист број. Сега ако темињата $A_1, A_2, A_3, ..., A_9, A_{10}$ имаат ист број 0 продолжуваме понатаму, а ако не тоа го постигнуваме со помош на лема 1, применета на темињата A_7, A_8, A_9, A_{10}. Продолжувајќи ја претходно користената постапка во секој чекор на три темиња го менуваме бројот во 0, со што постигнуваме темињата $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{3k-1}$, $A_{3k}, A_{3k+1}, ..., A_{995}, A_{996}, A_{997}$ да имаат број 0. Сега, повторно користејќи ја лема 3 темињата $A_{998}, A_{999}, A_{1000}, A_1$ ќе имаат ист број и ако тој број е 0, тогаш тврдењето е докажано, а ако, на пример, тој број е 1, тогаш на темињата $A_{997}, A_{998}, A_{999}, A_{1000}$ ја применуваме лема 1, со што добиваме дека теметото A_1 има број 1, а темињата $A_2, A_3, A_4, ...,$ $A_{999}, A_{999}, A_{1000}$ имаат број 0. Сега почнувајќи од темето A_1 со помош на лема 1 на секои последователни темиња $A_{3k-1}, A_{3k}, A_{3k+1}$, за $k = 1, 2, ..., 333$ го менуваме бројот 0 во бројот 1, со што сите темиња имаат број 1, и тврдењето е докажано.

57. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределиле по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.

Определи го најмалиот можен број тегови во кутијата.

Решение. Според условот на задачата, за секој пар тегови (x,y) постои пар тегови (u,v) таков што $x+y=u+v$. Во овој случај ќе велиме дека парот (u,v) го *урамнотежува* парот (x,y).

Нека a,b,c,d,e се различни тежини на теговите од ова множество. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c<d<e$. Да го разгледаме парот (a,b). Бидејќи $2a<a+b<2b$ и $a+b<x+y$ за секои x и y различни од a и b, заклучуваме дека овој пар го урамнотежува само ист таков пар, т.е. парот (a,b). Затоа во множеството од сите тегови S мора да има два тега со маса a и два тега со маса b.

Бидејќи во S постојат најмалку два тега со маса a, треба да го разгледаме парот (a,a). Вкупната маса на овој пар е $a+a=2a$. Секој пар $(x,y)\neq(a,a)$ има поголем збир на маси од парот (a,a). Според претпоставката постои пар тегови кој го урамнотежува, а тоа единствено е можно ако урамнотежувачкиот пар е (a,a). Тоа значи дека имаме најмалку 4 тегови со маса a.

Сега да го разгледаме парот (d,e). Единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар, што значи дека имаме 2 тега со маса d и 2 тега со маса e. Парот (e,e) има најголема вкупна маса, па единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар. Значи, имаме 4 тегови со маса e.

Според условот на задачата постои тег чија маса е поголема од b и е помала од d. Масата на тој тег ја означивме со c.

Од досега изнесеното следува дека бројот на теговите не може да биде помал од $4+2+1+2+4=13$. Ќе докажеме дека тоа е најмалиот број елементи на множеството S. Последното може да го докажеме, ако конструираме множество S со 13 елементи кои го задоволуваат условот на задачата. Такво множество се состои од 4 тегови со маса 1, 2 тега со маса 2, 1 тег со маса 3, 2 тега со маса 4 и 4 тегови со маса 5.

58. Определи множество S со најмал број точки со кои се определени седум различни прави.

Решение. Нека S е множество точки кои определуваат 7 различни прави и нека $|S|=n$.

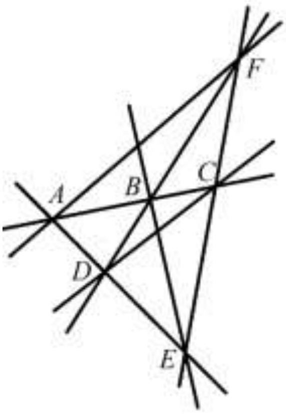
Ако во множеството S не постојат три колинерани точки, тогаш тоа множество определува $\frac{n(n-1)}{2}$ различни прави. Ако ова множество определува 7 прави, тогаш $\frac{n(n-1)}{2}=7$, т.е. $n(n-1)=14$, што не е можно, бидејќи бројот 14 не е производ на два последователни природни броја. Според тоа, ниту едно множество во кое нема барем една тројка колинеарни точки не определува 7 различни прави.

Значи, во множеството S постои најмалку едно триелементно подмножество колинеарни точки. Ако имаме само едно триелементно подмножество колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-2$ различни прави. Имено, триелементното подмножество колинеарни точки определува само една права, а триелементното подмножество содржи три двоелементни подмножества, што значи дека една иста права сме ја броеле трипати. Затоа од $\frac{n(n-1)}{2}$ треба да одземеме 2. Така имаме $\frac{n(n-1)}{2}-2=7$, т.е. $n(n-1)=18$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно две триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-2\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-2\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=22$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно три триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=26$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно четири триелементни подмножества колинеарни точки, но немаме подмноижество од четири колинеарни точки (четири колинеарни точки определуваат четири триелементни подмножества колинеарни точки), тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-4\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=30$. Од последната равенка наоѓаме



$n=6$. Според тоа, множество S од 6 точки, во кое постојат точно четири триелементни подмножества колинеарни точки и не постојат четири колинеарни точки определува точно 7 прави. Нека

$$S=\{A,B,C,D,E,F\},\ S_1=\{A,B,C\},$$

$$S_2=\{A,D,E\}, S_3=\{B,D,F\}, S_4=\{C,E,F\}.$$

Ова множество ги определува правите AB,AE,AF,BF,BE,CD,CE (види цртеж).

59. Дали може во рамнината да се нацртаат 82 кружници такви што вкупниот број точки во кои се сечат овие кружници е 2008 и секоја кружница се сече со некоја друга кружница?

Решение. Ќе нацртаме 80 кружници чии центри се наоѓаат на една права. Прво цртаме 30 концентрични кружници, а потоа цртаме друга група од 30 концентрични кружници така што секоја кружница од првата група се сече со секоја кружница од втората група. На овој начин, бидејќи две кружници се сечат во две точки, добивме $30\cdot 30\cdot 2=$ 1800 преечни точки. Сега цртаме трета група од 10 концентреични кружници која нема заеднички sжточки со веќе нацртаните кружници, и цртаме четврта група од 10 концентрични кружници која нема заеднички точки со кружниците од првите две групи, но секоја кружница од третата група се сече со секоја кружница од четвртата група. На овој начин добивме $10\cdot 10\cdot 2=200$ пресечни точки. Сега да нацртаме кружница која ги сече само двете најголеми кружници од првата и втората група и кружница која ги сече само двете најголеми кружници од третата и четвртата група. На овој начин добивме уште $4+4=8$ пресечни точки, па така имаме $1800+200+8=2008$ пресечни точки.

60. Докажи дека секој конвексен четириаголник со плоштина 1 може да се смести во правоаголник со плоштина 2.

Решение. Нека d е една од најдолгите дијагонали на дадениот конвексен многуаголник. Во крајните точки на оваа дијагонала повлекуваме прави нормални на неа. Потоа од секоја страна на d ги наоѓаме темињата на многуаголникот кои се на најголемо растојание од 1800. На овој начин околу многуаголникот опишавме правоаголник со должини на страни d и h_1+h_2 каде h_1 и h_2 се растојанијата од најоддалечените темиња на многуаголникот до d (цртеж десно). Со $P\leq 1$ да ја означиме плоштината на дадениот конвексен многуаголник. Плоштината на четириаголникот со темиња во крајните точки на дијагоналата d и двете од неа најоддалечени темиња е $\frac{dh_1+dh_2}{2}\leq P$, па затоа за плоштината на опишаниот правоаголник важи

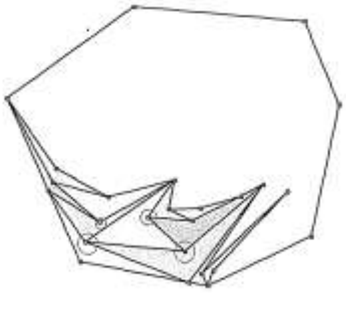
$$d(h_1+h_2)=2\cdot\frac{d(h_1+h_2)}{2}=2\cdot\frac{dh_1+dh_2}{2}\leq 2P\leq 2\cdot 1=2\,.$$

61. Во рамнината се дадени 4000 точки такви што секои три точки не се колинеарни. Докажи дека може да се конструираат 1000 четириаголници кои меѓусебно не се сечат и чии темиња се дадените точки.

Решение. Повлекуваме права x која не е паралелна со ниту една од правите кои се определени со две од дадените 4000 точки. Нека y е права која е нормална на правата x. На овој начин вовоедовме координатен систем во кој секоја од дадените 4000 точки има различна x координата. Сега точните да ги подредиме во растечка низа според координатата x и низ секоја четврата точка да повлечеме права паралелна со $x-$оската. На тој начин добивме 1000 траки во секоја од која се наоѓаат по четири точки. Бидејќи во секоја од добиените четворки точки нема три колинерани точки, секоја четворка точки е темиња на еден четириаголник и тоа се бараните 1000 четириаголници кои меѓусебно не се сечат.

62. Дали постои конвексен многуаголник кој може да се расече на конкавни четириаголници?

Решение. Нека претпоставиме дека постои конвексен $n-$аголник кој може да се расече на m конкавни четириаголници. Да ги разгледаме темињата на конкавните агли на овие четириаголници. Јасно во секој од делбените четириаголници има по еден конкавен агол (четириаголник не може да има два агли поголеми од 180°) и овие агли мораат да бидат внатрешни за $n-$аголникот. Збирот на сите агли чии темиња се во една од овие



воочени точки е 360°. Затоа збирот на внатрешните агли на $m-$те конкавни четириаголници е поголем или еднаков на збирот на внатрешните агли на конвексниот $n-$аголник и збирот на аглите чии темиња се наоѓаат во темињата на $m-$те конкавни агли на делбените четириаголници, т.е.

$$m\cdot 360^\circ \geq m\cdot 360^\circ + (n-2)\cdot 180^\circ,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека бараната поделба не постои.

63. Нека $A_1A_2A_3...A_n$ е правилен многуаголник. Определи пермутација $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ на темињата на многуаголникот така што должината на искршената линија $B_1B_2B_3...B_n$ ќе биде најголема.

Решение. Ќе разгледаме два случаја.

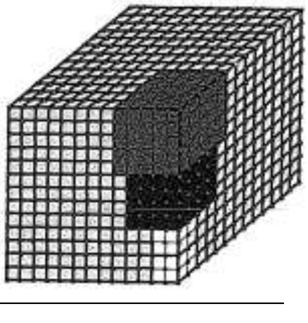
Прв случај. Нека $n=2k+1$. Тогаш дијагоналата A_iA_j има најголема должина ако $|i-j|=k$ или $|i-j|=k+1$. Вкупно имаме $n=2k+1$ вакви отсечки, па затоа најдолга е искршената линија која се состои од сите овие отсечки. Таква е например искршената линија $A_1A_{k+2}A_2A_{k+3}A_3A_{k+4}...A_kA_{2k+1}A_{k+1}$, со што е определена пермутација на темињата со саканото својство.

Втор случај. Нека $n=2k$. Дијагоналата A_iA_j има најголема должина ако $|i-j|=k$ и вкупно има k вакви дијагонали. Следните дијагонали по должина се оние за кои $|i-j|=k+1$ или $|i-j|=k-1$. Најдолга е искршената линија која се состои од k најдолги дијагонали и $k-1$ дијагонали кои се следни по должина. Таква е искршената линија $A_1A_{k+1}A_{2k}A_kA_{2k-1}...A_{k+2}A_2A_{k+1}$, со што е определена пермутација на темињата со саканото својство.

64. Определи го најмалиот природен број n таков што коцка со должина на раб $n\,cm$ може да се расече на 1996 коцки чии должини на рабови изразени во сантиметри се исто така природни броеви.

Решение. Бидејќи

$$12^3 < 1996 \text{ и } 13^3 = 2197 > 1996,$$

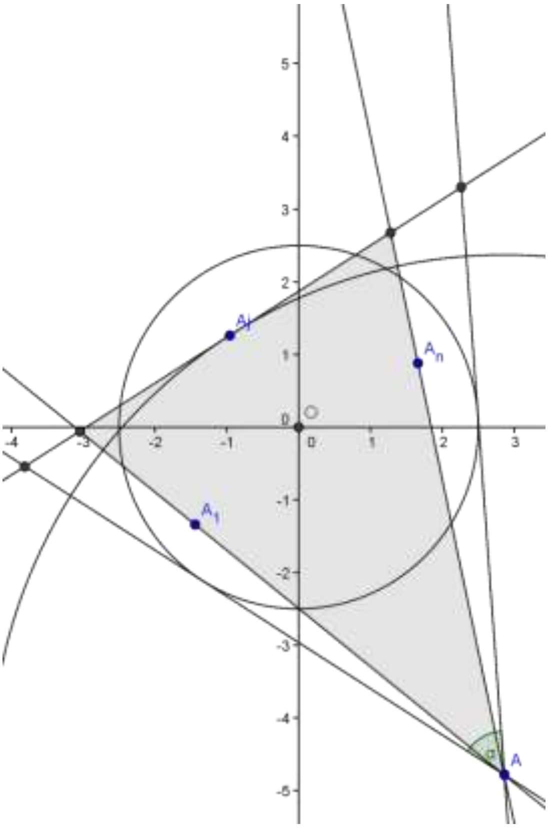


коцката со должина на раб 13 е првата која може да е решение на задачата. Ако од оваа коцка исечеме една коцка со должина на раб 5, една коцка со должина на раб 4, и две коцки со должина на раб 2, ќе ни остане тело со волумен $2197-5^3-4^3-2^3-2^3=1992$. Сега ова тело го расекуваме на 1992 единечни коцки и добиваме вкупно $1992+4=1996$ коцки. Според тоа, најмалиот природен број n со саканото својство е $n=13$.

65. Дадени се $n\geq 4$ точки во рамнина, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека постои триаголник таков што сите точки се во неговата внатрешност, а на неговите страни лежи точно по една точка од дадените точки.

Решение. Дадените точки се конечно, па затоа кружница во чија внатрешност тие се наоѓаат. Имено, ја бараме максимално оддалечената точка од координатниот почеток. Ако тоа растојание го означиме со R, тогаш круг со центар во координатниот почеток и радиус $2R$ ги содржи сите точки во внатрешноста.

Ги повлекуваме сите можни прави меѓу n-те точки во рамнината. Овие прави се конечно многу ($\binom{n}{2}$), па можеме да избереме точка A која не лежи на ниту една од тие прави и е надвор од кружницата која ги содржи точките и најголемиот агол под кој се гледа секоја отсечка од кружницата е остар. Повлекуваме низ A произволна права која не ја сече кружницата. Таа права ја ротираме додека за прв пат не помине низ точка од дадените n и точката да ја означиме со A_1. На таа права се наоѓа една од страните на триаголникот. Продолжуваме со ротацијата додека не добиеме права на која лежи една од дадените точки и ја означуваме со A_n. На таа права се наоѓа друга страна од триаголникот. Било која од двете прави минуваат само низ A_1 и A_n соодветно бидејќи точката A не лежи на ниту една од $\binom{n}{2}$ -те прави.



Нека најоддалечената од сите n точки до точката A ја означиме со A_j, а растојанието со d. Може да има повеќе точки кои се на максимално растојание од A, меѓутоа избираме една од нив произволна. Повлекуваме тангента на кружницата со центар во A и радиус d. На таа права лежи третата од страните на триаголникот (Зошто?).

66. На кружница се запишани 100 цели броеви. Секој од запишаните броеви е поголем од збирот на двата броја запишани по него во насока на движењето на стрелката на часовникот. Определи го најголемиот можен број позитивни броеви.

Решение. Да допуштиме дека меѓу запишаните броеви два ненегативни броја се еден до друг. Тогаш бројот кој е запишан пред нив, кој е поголем од нивниот збир е позитивен. Последното важи за бројот кој е пред него итн., што значи дека сите запишани броеви се ненегативни. Го избираме најмалиот меѓу запишаните броеви и тој не може да биде поголем од збирот на двата броја кои следуваат во насока на движење на стрелката на часовникот.

Од претходните разгледувања следува дека меѓу секои два последователни броја едниот мора да е негативен. Последното значи дека има најмногу 50 позитивни броеви. Да разгледаме три последователни броја $-a,b,-c$ ($a,b,c>0$). Тогаш $-a>b-c>-c$, што значи дека секој негативен број е строго поголем од следниот негативен број, што не е можно бидејќи броевите се запишани на кружница. Од добиената противречност следува дека имааме најмногу 49 позитивни броеви. Лесно се проверува дека броевите

$$-200,1,-202,1,-204,1,-206,...,-296,1,-298,-99$$

запишани во овој редослед ги задоволуваат условите на задачата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
2. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
3. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
4. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
5. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
6. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
7. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
8. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
9. Niven, I., Zuckerman, H. S. An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
10. Sierpinski, W. Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
11. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
12. Аневска, К., Малчески, Р.: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје, 2012
13. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
14. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
15. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
16. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
17. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005

18. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
19. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
20. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
21. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
22. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
23. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
24. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
25. Виноградов, И. М. Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
26. Гроздев, С., Аневска, К.: Боиме броеви, Нумерус, Скопје, 2017
27. Гроздев, С., Малчески, А.: Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
28. Гроздев, С., Малчески, А.: Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2017
29. Гроздев, С.: Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје
30. Гроздев, С.: Две елементарни неравенства и нивна примена, Нумерус, Скопје, 2015
31. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
32. Дуденков, С., Чакърян, К. Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
33. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
34. Кендеров, П., Табов, Й. Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
35. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2012 године, ДМ Србије, 2012
36. Кудреватов, Г. А. Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
37. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
38. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995

39. Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
40. Малчески, Р., Аневска, К.: Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје, 2012
41. Малчески, Р., Аневска, К.: Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје, 2016
42. Малчески, Р., Малчески, А. и др.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
43. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
44. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
45. Малчески, Р.: За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово, 1998
46. Малчески, Р.: Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
47. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
48. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Нумерус, Скопје, 2012
49. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
50. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
51. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
52. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А. Международные математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
53. Нагел, Т. Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
54. Серпинский, В. Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
55. Страшевич, С., Боровкин, Е. Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
56. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
57. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000