Задачите се скенирани од книгата:
Републички натпревари по математика во СР Макесонија 1968-1977
Подготвена од
Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XIX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1976

1.(I,76). Да се најде остатокот од делењето на полиномот $ax^3 + bx^2 + cx + d$ со $x-\alpha$. Користејќи го тој резултат да се одреди к така што остатоците од делењето на полиномот $2x^3 - x^2 + kx + 1$ со $x-1$ и $x+1$ да се еднакви. Потоа, за така добиениот к, полиномот $2x^3 - x^2 + kx + 1$ да се разложи на прости множители.

Решение. Делејќи го полиномот $ax^3 + bx^2 + cx + d$ со $x-\alpha$ добиваме остаток $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$.

Да ги означиме со R_1 и R_2 остатоците што се добиваат при делењето на полиномот $2x^3 - x^2 + kx + 1$ со $x-1$ и $x+1$ соодветно. Според претходното имаме

$$R_1 = 2+k, \qquad R_2 = -2-k.$$

Од $R_1 = R_2$ добиваме $k=-2$.

За $k=-2$ имаме

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 2x + 1 &= x^2(2x-1) - (2x-1) = \\ &= (2x-1)(x^2-1) = \\ &= (2x-1)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

2.(I,76). Да се покаже дека бројот $\frac{k}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{6}$ е цел за кој било природен број к.

Решение. Имаме:

$$\frac{к}{3} + \frac{к^2}{2} + \frac{к^3}{6} = \frac{2к + 3к^2 + к^3}{6} = \frac{к(2 + 3к + к^2)}{6} = \frac{к(к+1)(к+2)}{6} .$$

Броевите к, к+1 и к+2 се три последователни природни броеви, па производот к(к+1)(к+2) е делив со 2 и со 3, т.е. со 6.

Следствено, дадениот број е цел за који било природен број к.

<u>3.(I,76)</u>. На еден ученик му е дадена следнава задача: Бројот 78 да се помножи со двоцифрен број во кој бројот на десетиците е трипати поголем од бројот на единиците. По грешка ученикот го помножил бројот 78 со двоцифрен број со изменет редослед на цифрите поради што добил производ кој бил за 2808 помал од бараниот. Кој е бројот со кој требало да се помножи бројот 78?

<u>Решение</u>. Ако бројот на единиците го означиме со x, тогаш бројот на десетиците ќе биде 3x. Од условот на задачата имаме

$$78(10\cdot 3x + x) = 78(10x + 3x) + 2808,$$

од каде што добиваме $1404x = 2808$, т.е. $x = 2$.

Значи, бараниот број е 62.

<u>4.(I,76)</u>. Кој од броевите $tg\,4x$ и $4\,tgx$ е поголем ако $0 < x < \frac{\pi}{8}$? Дали важи истото и за $\sin 4x$ и $4\sin x$?

<u>Решение</u>. Најпрво имаме

$$tg\,4x = \frac{2\,tg\,2x}{1 - tg^2 2x} .$$

Од $0 < x < \frac{\pi}{8}$ следува $0 < tg\,2x < 1$, па и $0 < tg^2 2x < 1$, а од тоа, пак, следува $0 < 1 - tg^2 2x < 1$. Следствено

$$tg\,4x = \frac{2\,tg\,2x}{1 - tg^2 2x} > 2\,tg\,2x.$$

Со иста дискусија добиваме дека $tg2x > 2tgx$, па, значи, $tg4x > 4tgx$.

За $\sin 4x$ имаме:

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x < 2\sin 2x = 4\sin x\cos x < 4\sin x .$$

1.(II,76). Дадена е равенката

$$x^2 - ax + a + 1 = 0 \qquad (1)$$

чии корени се x_1 и x_2. Да се определи параметарот a така што x_1 и x_2 да се реални и $x_1^3 + x_2^3 = a$.

Решение. За корените на равенката (1) да бидат реални, треба да биде

$$D = a^2 - 4(a+1) \geqslant 0,$$

од каде што добиваме дека

$$a \in (-\infty, 2(1-\sqrt{2})] \cup [2(1+\sqrt{2}), +\infty).$$

Да го пресметаме $x_1^3 + x_2^3$. Имаме:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1+x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = \\ &= (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = \\ &= a^3 - 3a(a+1) = a(a^2 - 3a - 3). \end{aligned}$$

Од равенството $x_1^3 + x_2^3 = a$, добиваме $a(a^2 - 3a - 4) = 0$, т.е.

$$a \in \{-1, 0, 4\}.$$

Следствено, $a = -1$.

2.(II,76). Да се докаже дека, ако $p \geqslant 5$ е прост број, тогаш бројот $p^2 - 1$ е делив со 24.

Решение. Имаме $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Бидејќи $p \geqslant 5$ е прост број, броевите $p-1$ и $p+1$ се последователни парни броеви, па едниот од нив е делив со 4, а другиот со 2. Значи, $8 \mid p^2-1$.

Од друга страна $p-1$, p и $p+1$ се три последователни броеви, па еден од нив е делив со 3. Но $p \geqslant 5$ е прост број, па, значи, или $p-1$ или $p+1$ е делив со 3, а тоа значи дека $3 \mid p^2-1$.

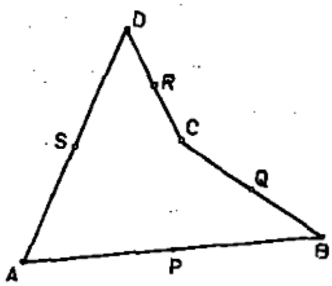
Од $8 \mid p^2-1$ и $3 \mid p^2-1$, следува дека $24 \mid p^2-1$.

3.(II,76). Нека A, B, C и D се произволни точки во просторот, такви што кои било три од нив не се колинеарни. Да се докаже дека средините на отсечките AB, BC, CD и DA лежат во иста рамнина.

Решение. Задачата ќе ја решиме на два начина.

I) Да ги означиме со P, Q, R и S средините на отсечките AB, BC, CD и DA соодветно (црт.1.76). Отсечките PQ и RS се средни линии во триаголниците ABC и CDA соодветно, па, значи, правите PQ и RS се паралелни со правата AC, а од тоа следува дека и правите PQ и RS се паралелни.

Следствено, правите PQ и RS лежат во иста рамнина, а од тоа следува дека и точките P, Q, R и S лежат во иста рамнина.



Црт.1.76

II) На страните од просторниот четириаголник ABCD да ги положиме векторите $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$. За векторот $\vec{PQ}$ имаме:

$$\vec{PQ} = \vec{PB} + \vec{BQ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC} =$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC}) = \vec{SD} + \vec{DR} = \vec{SR}.$$

Од $\vec{PQ} = \vec{SR}$ следува дека четириаголникот PQRS е паралелограм, т.е. точките P, Q, R и S лежат во иста рамнина.

4.(II,76). Да се докаже дека кружницата (O_1, R) ја сече кружницата (O_2, r) во дијаметрално спротивни точки ако и само ако

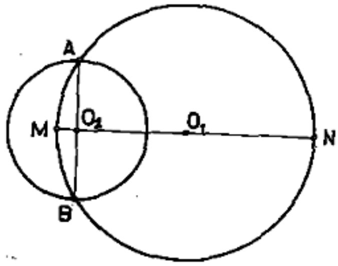
$$R^2 = d^2 + r^2,$$

каде што $d = \overline{O_1O_2}$.

Решение. Да претпоставиме дека кружницата (O_1, R) ја сече кружницата (O_2, r) во дијаметрално спротивни точки (црт.2.76). Триаголникот MAN е правоаголен, па имаме:

$$\overline{AO_2}^2 = \overline{MO_2}\cdot\overline{O_2N} = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2,$$

т.е. $R^2 = d^2 + r^2$.



Црт.2.76

Обратно, да претпоставиме дека за кружниците (O_1, R) и (O_2, r) е исполнето равенството $R^2 = d^2 + r^2$. Тогаш имаме:

$$d^2 = R^2 - r^2 = (R+r)(R-r),$$

па, значи, $R-r < d < R+r$, а тоа значи дека кружниците се сечат во две точки, A и B. Од равенството $R^2 = d^2 + r^2$ следува дека триаголниците O_1O_2A и O_1O_2B се правоаголни. Следствено, точките A, O_2 и B се колинеарни.

1.(III,76). Да се реши системот равенки

$$\operatorname{ctg}x \operatorname{ctg}z = 3,$$
$$\operatorname{ctg}y \operatorname{ctg}z = 6,$$
$$x + y + z = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Од првите две равенки следува релацијата

$$\operatorname{ctg}y = 2\operatorname{ctg}x. \qquad (1)$$

Од $x+y+z = \frac{\pi}{2}$ и (1), добиваме:

$$\operatorname{ctg}z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \frac{\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y}{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y - 1} = \frac{3\operatorname{ctg}x}{2\operatorname{ctg}^2x - 1}.$$

Заменувајќи во првата равенка добиваме $\operatorname{ctg}^2 x = 1$. Значи, дадениот систем равенки е еквивалентен со следниве два система:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= 1, \\ \operatorname{ctg} y &= 2, \\ x+y+z &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \qquad (2) \qquad\qquad \begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= -1, \\ \operatorname{ctg} y &= -2, \\ x+y+z &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Решенијата на системот (2) се:

$$x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi, \quad y = \operatorname{arcctg} 2 + k_2\pi, \quad z = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcctg} 2 - (k_1+k_2)\pi,$$

а на системот (3) се:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi, \quad y = \operatorname{arcctg}(-2) + k_2\pi, \quad z = \frac{3}{4}\pi - \operatorname{arcctg}(-2) - (k_1+k_2)\pi,$$

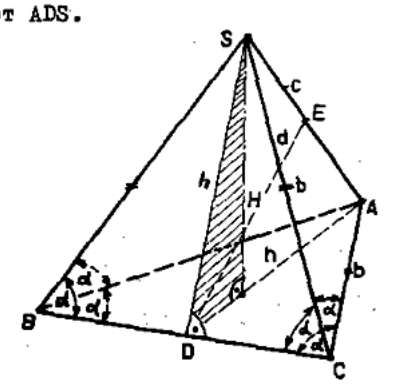
каде што k_1 и k_2 се произволни цели броеви.

<u>2.(III,76)</u>. Во тристрана пирамида SABC сите рамнински агли при темињата B и C се еднакви на α, а работ BC е еднаков на a. Да се најде волуменот на пирамидата.

<u>Решение</u>. Од условот на задачата следува дека триаголниците ABC и BCS (црт.3.76) *се рамнокраки и складни при што* $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{SB} = \overline{SC}$. За плоштината P на триаголникот ABC имаме

$$P = \frac{a\overline{AD}}{2} = \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

За да го најдеме волуменот на пирамидата потребно е да ја најдеме нејзината висина H спуштена од темето S. Висината H е висина и за триаголникот ADS.



Црт.3.76

Од $\triangle DCS$ имаме:

$$\overline{CS}^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{SD}^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{AD}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\ tg^2\alpha = \frac{a^2}{4\cos^2\alpha},$$

па, значи, $\overline{AC} = \overline{CS} = \frac{a}{2\cos\alpha}$. Потоа, од $\triangle ACS$ имаме:

$$\overline{AS} = 2\overline{AC}\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

Од друга страна, за висината DE на триаголникот ADS имаме:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 - AE^2 = \frac{a^2}{4}tg^2\alpha - \frac{\overline{AS}^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2}{4}tg^2\alpha - \frac{a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\cos^2\alpha} = \frac{a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\cdot\cos^2\alpha}(1+2\cos\alpha),$$

т.е.

$$\overline{DE} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

Следствено, за висината H имаме:

$$H = \frac{2P_{ADS}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AS}\cdot\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

На крајот:

$$V = \frac{PH}{3} = \frac{a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\cos^2\alpha}\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

3.(III,76). Во едно шише има a% алкохол. Шишето се дополнува до врвот со b% алкохол. По промешувањето, од него се истура толку течност колку што било дотурено. Оваа постапка се изведува n пати и во шишето се добива c% алкохол. Кој дел од волуменот на шишето бил наполнет во почетокот?

Решение. Ако x е делот од волуменот на шишето што е наполнет со a% алкохол, тогаш ax е количеството алкохол во шишето. Дополнувајќи го шишето со b% алкохол, количеството алкохол во шишето станува $ax+b(1-x)$, каде што со 1 е означен волуменот на шишето. Притоа, нека е добиен $a_1\%$ алкохол. Тогаш имаме:

$$a_1 = ax+b(1-x) = (a-b)x+b.$$

Истурајќи течност колку што било дотурено и дополнувајќи го шишето пак со $b\%$ алкохол, ќе се добие $a_2\%$ алкохол, при што

$$a_2 = a_1x+b(1-x) = (a-b)x^2+b.$$

По n-тата постапка, се добива $c\%$ алкохол и, притоа,

$$c = a_{n-1}x+b(1-x) = (a-b)x^n+b,$$

од каде што добиваме

$$x = \sqrt[n]{\frac{c-b}{a-b}}.$$

4.(III,76). Ако a, b и c се позитивни реални броеви, покажи дека

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Решение. Нека $a \leqslant b = a+\alpha \leqslant c = a+\alpha+\beta$, каде што $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Бидејќи

$$c^\beta = c^{\beta/3} c^{\beta/3} c^{\beta/3} \geqslant a^{\beta/3} b^{\beta/3} c^{\beta/3} = (abc)^{\beta/3},$$

$$(bc)^\alpha = (bc)^{\alpha/3} (bc)^{2\alpha/3} \geqslant (a^2)^{\alpha/3} (bc)^{2\alpha/3} = (abc)^{2\alpha/3},$$

добиваме

$$a^a b^b c^c = a^a b^{a+\alpha} c^{a+\alpha+\beta} = (abc)^a (bc)^\alpha c^\beta \geqslant$$
$$\geqslant (abc)^a (abc)^{2\alpha/3} (abc)^{\beta/3} = (abc)^{\frac{3a+2\alpha+\beta}{3}} =$$
$$= (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

1.(IV,76). Дадена е кружница и прамен прави што минуваат низ фиксна точка А од рамнината на кружницата. Да се најде геометриското место од средините на тетивите образувани од тие прави.

Решение. Дадената кружница нека биде (O,r). Избираме правоаголен координатен систем на следниов начин: координатниот почеток е во точката O, а x-оската е правата OA. При така избраниот координатен систем равенката на дадената кружница ќе биде

$$x^2+y^2=r^2, \qquad (1)$$

а точката A ќе има координати $(a, 0)$. Произволна права низ точката A ќе има равенка

$$y=k(x-a), \qquad (2)$$

каде што k е произволен реален број. Пресечните точки на правата (2) и кружницата (1) ќе бидат:

$$P\left(\frac{ak^2+\sqrt{r^2+r^2k^2-a^2k^2}}{1+k^2}, \frac{-ak+k\sqrt{r^2+r^2k^2-a^2k^2}}{1+k^2}\right),$$

$$Q\left(\frac{ak^2-\sqrt{r^2+r^2k^2-a^2k^2}}{1+k^2}, \frac{-ak-k\sqrt{r^2+r^2k^2-a^2k^2}}{1+k^2}\right).$$

Ако $a>r$, точките P и Q постојат ако и само ако $k^2\leq\frac{r^2}{a^2-r^2}$; ако $a=r$, тогаш $P\equiv A$; ако, пак, $a<r$, тогаш точките P и Q се различни и постојат за секој k.

Средината на тетивата PQ да ја означиме со $M(x,y)$. Тогаш имаме:

$$x=\frac{ak^2}{1+k^2}, \qquad y=\frac{-ak}{1+k^2}.$$

Со елиминација на параметарот k добиваме

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}. \qquad (3)$$

Значи, бараното геометриско место на точки е дел од кружницата (3). За $a\leqslant r$, тоа е целата кружница, а за $a>r$, тоа е делот од кружницата (3) што лежи внатре во кружницата (1), т.е.

$$\Gamma=\left\{(x,y)\ \middle|\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4},\ 0\leqslant x\leqslant\frac{r^2}{a}\right\}.$$

2.(IV,76). Дадени се три последователни членови $1,\ a,\ a^2$ на една геометриска прогресија, каде што $a>0$.

а) Да се определи бројот x, така што квадратите на броевите $1-x,\ a-x,\ a^2-x$ да се членови на една аритметичка прогресија.

б) Да се изрази разликата на аритметичката прогресија како функција од a.

За кои вредности на a добиената прогресија е растечка? Во кој интервал, во тој случај, се менува x?

Решение. а) Броевите $(1-x)^2$, $(a-x)^2$ и $(a^2-x)^2$ се членови на аритметичка прогресија ако и само ако

$$(1-x)^2+(a^2-x)^2=2(a-x)^2,$$

од каде што добиваме $x=\frac{1}{2}(a+1)^2$.

б) Имаме:

$$\begin{aligned} d &= (a-x)^2-(1-x)^2=a^2-2ax+x^2-1+2x-x^2= \\ &= a^2-1-2(a-1)x=a^2-1-(a-1)(a+1)^2= \\ &= -a(a^2-1). \end{aligned}$$

Аритметичката прогресија е растечка ако и само ако $d>0$. Бидејќи, по услов, $a>0$, аритметичката прогресија ќе биде растечка ако и само ако $a^2-1<0$, т.е. $0<a<1$. Во овој случај имаме $\frac{1}{2}<x<2$.

3.(IV,76). На полуоската Ox се дадени $n+1$ точка $A_1,\dots,A_{n+1}$, така што $\overline{OA_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\dots=\overline{A_nA_{n+1}}=a$. Нека P е произволна точка од полуоската и нека $\overline{OP}=x$.

а) Да се најдат збировите:

$$S=\overline{A_1A}^2_{n+1}+\overline{A_2A}^2_{n+1}+\dots+\overline{A_nA}^2_{n+1},$$

$$S_1=\overline{A_1P}^2+\overline{A_2P}^2+\dots+\overline{A_{n+1}P}^2,$$

а потоа разликата $S-S_1$ да се изрази како функција од x.

б) Да се определи положбата на точката P, така што $S-S_1$ да има најголема можна вредност.

Решение. а) Имаме:

$$S = \overline{A_1A}_{n+1}^2 + \overline{A_1A}_{n+1}^2 + \dots + \overline{A_nA}_{n+1}^2 =$$
$$= n^2a^2 + (n-1)^2a^2 + \dots + a^2 =$$
$$= a^2(1+2^2+\dots+n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}a^2;$$

$$S_1 = \overline{A_1P}^2 + \overline{A_2P}^2 + \dots + \overline{A_{n+1}P}^2 =$$
$$= (x-a)^2 + (x-2a)^2 + \dots + [x-(n+1)a]^2 =$$
$$= (n+1)x^2 - 2ax[1+2+\dots+(n+1)] + a^2[1+2^2+\dots+(n+1)^2] =$$
$$= (n+1)x^2 - a(n+1)(n+2)x + \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}a^2;$$

$$S - S_1 = (n+1)[-x^2 + a(n+2)x - (n+1)a^2].$$

б) Разликата $S - S_1$ има најголема вредност за $x = \frac{a}{2}(n+2)$.

4.(IV,76). Да се најде $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$, каде што $a_1, a_2, \dots, a_k$ се дадени позитивни броеви.

Решение. Да ставиме

$$x_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}.$$

Можеме да претпоставиме дека $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots \leqslant a_k$. Тогаш имаме

$$x_n \leqslant \sqrt[n]{ka_k^n} = a_k\sqrt[n]{k}.$$

Од друга страна имаме

$$x_n \geqslant \sqrt[n]{a_k^n} = a_k.$$

Бидејќи $\lim_{n\to\infty} a_k\sqrt[n]{k} = a_k$, од $a_k \leqslant x_n \leqslant a_k\sqrt[n]{k}$, добиваме $\lim_{n\to\infty} x_n = a_k$.