

**XLIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ**

**VI одделение**

1. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 225 и во чиј декаден запис се само цифрите 0 и 1.

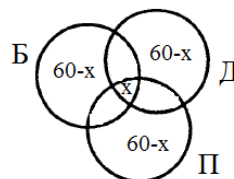
**Решение.** Од  $225 = 9 \cdot 25$  следува дека бараниот број е делив со 9 и со 25. Бидејќи цифрите со кои е запишан бројот се само 0 и 1, за да бројот е делив со 25 потребно е да завршува на две нули, а за да биде делив со 9, потребно е збирот на неговите цифри да е делив со 9. Се бара најмалиот број, па од деливоста со 9 следува дека во записот на бројот треба да има девет единици. Значи, бараниот број е 11111111100.

2. Бојан, Павел и Даниел решиле 100 задачи, при што секој од нив решил по 60 задачи. Сите задачи ги делиме во точно две групи: „лесни“ и „тешки“. „Лесна“ задача е онаа која ја решиле сите тројца, а „тешка“ задача е онаа која ја решил само еден ученик. Колку има „лесни“ и колку „тешки“ задачи решиле заедно?

**Решение.** Нека има  $x$  лесни задачи. Тогаш секој од учениците решил  $60 - x$  тешки задачи. Па

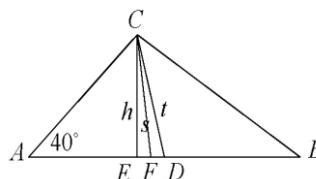
$$3(60 - x) + x = 100,$$

односно  $180 - 3x + x = 100$ . Од овде  $x = 40$ , па лесни се 40 задачи, а тешки 60.



3. Даден е правоаголен триаголник, со агол во темето  $A$  еднаков на  $40^\circ$ . Докажи дека симетралата на правиот агол го преполовува аголот кој го формираат висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол.

**Решение.** Нека  $\angle CAB = 40^\circ$  и висината, симетралата на правиот агол и тежишната линија ја сечат хипотенузата во точките  $E, F, D$  соодветно. Бидејќи  $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$  следува дека  $\triangle DCA$  е рамнокрак, па



затоа  $\angle DCA = 40^\circ$ . Триаголникот  $BCE$  е правоаголен, па затоа  $\angle BCE = 40^\circ$ . Бидејќи

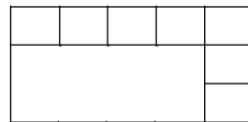
$$\angle BCF = \angle ACF = 45^\circ$$

$$\angle ECF = \angle BCE - \angle BCF = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$$

$$\angle DCF = \angle ACD - \angle ACF = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$$

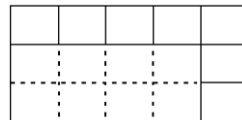
Од каде следува дека  $CF$  е симетрала на  $\angle ECD$ .

4. Никола требало да предложи модел на знаме за неговиот извиднички одред. Тој одлучил знамето да биде составено од еден правоаголник и 7 складни квадрати како на цртежот десно..



Притоа, решил  $\frac{2}{3}$  од знамето да е обоено во една боја, но така што ќе се обоени само цели фигури. Колку различни знамиња може да направи Никола?

**Решение.** Знамето да го дополниме до квадратна мрежа како на цртежот десно. Тогаш знамето содржи 15 складни квадрати, односно, правоаголникот е поделен на 8 вакви квадрати. При



тоа, бидејќи  $\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$ , според условот на задачата, треба да се обојат 10 вакви квадрати. Повторно, заради условот на задачата, може да се бојат само цели фигури, т.е. цели делови од знамето, па бидејќи има 7 мали квадрати, а треба да се обојат вкупно 10, кога би ги обоиле сите мали квадрати, би останало да се обои дел од правоаголникот што не е можно. Затоа, мора да се обои големиот правоаголник. Бидејќи тој содржи мрежа од 8 квадрати, треба од дадените 7, да се обојат два квадрати. За избор на првиот квадрат имаме 7 можности, а потоа за избор на вториот квадрат имаме 6 можности. Притоа, секој избран пар квадрати е брое двапати, па затоа два квадрати може да се изберат на  $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$  начин. Значи, Никола може да направи 21 различно знаме.

5. Првите четири члена на една низа се: 2, 0, 1, 8. Секој нареден член на низата е цифрата на единиците на збирот од претходните четири члена. (пр. петтиот член е 1). Дали 2018-тиот член на низата е парен или непарен број? Одоговорот да се образложи!

**Решение.** Да ги испишеме првите 20 членови од низата:

$$2, 0, 1, 8, 1, 0, 0, 9, 0, 9, 8, 6, 3, 6, 3, 8, 0, 7, 8, 3.$$

Очигледно е дека првите десет члена се по ред: парен, парен, непарен, парен, непарен, парен, парен, непарен, парен, непарен. Потоа наредните

десет се во истиот редослед. Бидејќи  $2018 = 201 \cdot 10 + 8$ , јасно е дека 2018-тиот член е непарен број.

## VII одделение

1. Определи ги цифрите  $x, y$  така што бројот  $\overline{x74y}$  е делив со 15.

**Решение.** Бидејќи бројот  $\overline{x74y}$  е делив со 15, тој е делив со 3 и со 5, па затоа  $y$  може да биде 0 или 5.

Ако  $y=0$ , тогаш од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите  $x+7+4+0=x+11$  е делив со 3, што е можно ако  $x=1$  или  $x=4$  или  $x=7$ , па се добиваат броевите 1740, 4740 и 7740.

Ако  $y=5$ , тогаш повторно од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите  $x+7+4+5=x+16$  е делив со 3, што е можно ако  $x=2$  или  $x=5$  или  $x=8$ , па ги добиваме броевите 2745, 5745 и 8745.

2. Даден е триаголник  $ABC$ . Нека  $E$  и  $D$  се произволни точки на страните  $AC$  и  $BC$ , соодветно. Симетралите на  $\angle CAD$  и  $\angle CBE$  се сечат во точката  $F$ . Докажи дека  $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$ .

**Решение.** Согласно условите на задачата  $x, u, z, w$  ги означиме аглиите како на цртежот десно. Тогаш:

$$\angle AFB = 180^\circ - (x + w + u + z)$$

$$\angle AEB = 180^\circ - (2x + w + z)$$

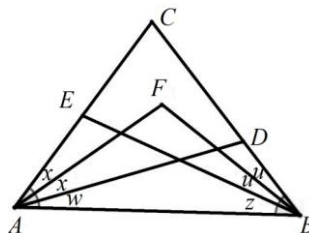
$$\angle ADB = 180^\circ - (2u + z + w)$$

Затоа:

$$\angle AEB + \angle ADB = 360^\circ - (2x + 2u + 2z + 2w)$$

$$2\angle AFB = 360^\circ - (2x + 2w + 2u + 2z)$$

од каде што следува тврдењето на задачата.



3. Нека  $n$  е природен број запишан со 2018 единици, 2018 двојки и определен број нули. Докажи дека  $n$  не е точен квадрат.

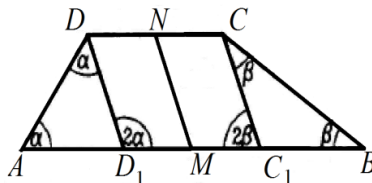
**Решение.** Збирот на цифрите на дадениот број е  $2018(1+2) = 2018 \cdot 3$ , од каде следува дека 3 е делител на  $n$ . Но,  $3 \nmid 2018$ , што значи дека  $9 \nmid n$ . Според тоа, дадениот број не може да биде точен квадрат на природен број.

4. Даден е траpez  $ABCD$  со основи  $\overline{AB} = a, \overline{CD} = b, a > b$ . Нека  $M$  и  $N$  се средини на основите  $AB$  и  $CD$  соодветно и  $\overline{MN} = \frac{a-b}{2}$ . Пресметај го збирот на аглите на поголемата основа.

**Решение.** Го конструираме паралелограмот  $MNCC_1$  и  $MNDD_1$ . Тогаш

$$\overline{DN} = \overline{NC} = \frac{b}{2}, \overline{AM} = \overline{MB} = \frac{a}{2} \text{ и}$$

$$\overline{MN} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \frac{a-b}{2}.$$



Понатаму,

$$\overline{AD_1} = \overline{AM} - \overline{MD_1} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} = \overline{BM} - \overline{MC_1} = \overline{BC_1}.$$

Бидејќи триаголниците  $ADD_1$  и  $BCC_1$  се рамнокраки, следува дека  $\angle C_1D_1D = 2\alpha$  и  $\angle D_1C_1C = 2\beta$  (надворешниот агол на триаголник е еднаков на збирот на двата несоседни агли). Конечно, од  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$  следува  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

5. Околу кружна маса се наредени 11 столчиња, а на почетокот седат 10 деца чии столчиња во насока на движењето на стрелките на часовникот се означени со броевите од 1 до 10. Треба да им се приклучи уште Павел. Откако сите ќе седнат околу масата децата играат игра на испаѓање: почнуваат во насока на движењето на стрелките на часовникот да бројат од детето кое седи на столчето означено со бројот 1 и испаѓа тринаесеттото дете. Останатите продолжуваат со играта таму каде што застанало броењето, тринаесеттиот пак испаѓа итн, додека не остане само едно дете. На кое место, односно меѓу кои две деца од десетте кои веќе седеле на масата, треба да седне Павел, за да победи во играта?

**Решение.** Кога Павел ќе седне, на масата ќе има 11 деца. Столчињата околу масата ги нумерираме одново во насока на движење на стрелките на часовникот така што столчето кое пред тоа беше означено со бројот 1 повторно го означуваме со бројот 1. Почнуваме да броиме како што е опишано во играта и го прецртуваме секој тринаесетти број. Последователно че ги прецртуваме 2, 5, 9, 4, 1, 3, 8, 10, 11, 6, а на крајот ќе остане бројот 7, што значи дека Павел треба да седне меѓу децата кои седат на столчињата кои првично се означени со броевите 6 и 7.

### VIII одделение

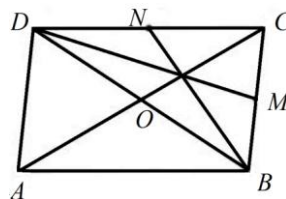
1. Определи ја најголемата вредност на природниот број  $n$ , така што бројот  $39^n$  е делител на бројот  $39!$  Одговорот да се образложи.

**Решение.** Имаме  $39=3 \cdot 13$ . Во бројот  $39!$ , простиот број 13 се појавува како делител на 13, 26 и 39. Затоа најголемата вредност на бројот  $n$  е 3.

2. Даден е паралелограм  $ABCD$ . Нека  $M$  и  $N$  се средини на страните  $BC$  и  $CD$  соодветно. Докажи дека правите  $DM$  и  $BN$  се сечат во точка од дијагоналата  $AC$ .

**Решение.** Ја повлекуваме дијагоналата  $BD$ .

Нека дијагоналите се сечат во точка  $O$  (цртеж десно). Дијагоналите во паралелограм се преполовуваат. Тогаш  $M$ ,  $N$  и  $O$  се средини на  $BC$ ,  $CD$  и  $BD$  соодветно. Следува  $DM$ ,  $BN$  и  $CO$  се тежишни линии во  $\triangle BCD$ , па затоа се сечат во една точка. Според тоа, правите  $DM$  и  $BN$  се сечат во точка од дијагоналата  $AC$ .



3. Павел во 2018 година ќе наполни онолку години колку што е збирот на цифрите од годината во која е роден. Колку години има Павел?

**Решение.** Ако Павел е роден во 20-тиот век, тогаш според условот на задачата, ја добиваме следната равенка:

$$2018 - \overline{19ab} = 1 + 9 + a + b$$

$$2018 - 1900 - 10a - b = 10 + a + b$$

$$11a + 2b = 108$$

Оваа равенка нема решение такво што  $a$  и  $b$  се едноцифрени броеви.

Ако, пак, Павел е роден во 21-виот век, тогаш ја имаме равенката:

$$2018 - \overline{20ab} = 2 + 0 + a + b$$

$$2018 - 2000 - 10a - b = 2 + a + b$$

$$11a + 2b = 16$$

Последната равенка има единствено решение такво што  $a$  и  $b$  се едноцифрени броеви и тоа  $a=0, b=8$ , што значи дека Павел е роден во 2008 година и има 10 години.

4. Нека за паралелограмот  $ABCD$  и правата  $p$  имаат единствена заедничка точка  $D$ . Ако  $M, N, O$  се подножјата на нормалите повлечени од точките  $A, B, C$  на правата  $p$ , соодветно, тогаш  $\overline{AM} + \overline{OC} = \overline{BN}$ . Докажи!

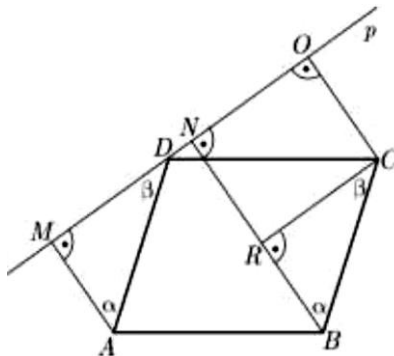
**Решение.** Нека  $R$  е подножјето на нормалата на  $BN$  повлечена од  $C$ . Тогаш

$\angle MAD = \angle RBC$  и  $\angle MDA = \angle RCB$   
(агли со паралелни краци) и  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ,  
па следува дека  $\triangle ADM \cong \triangle BCR$ . Значи,  
 $\overline{AM} = \overline{BR}$ . Јасно,  $\triangle RCON$  е правоаголник,  
па  $\overline{NR} = \overline{OC}$ .

Сега имаме

$$\overline{AM} + \overline{OC} = \overline{BR} + \overline{NR} = \overline{BN},$$

што и требаше да се докаже.



5. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите  $11\dots1$  и  $1111$ .  
2018

**Решение.** Да означиме  $a = 11\dots1$  и  $b = 1111$ . Од  $2018 = 4 \cdot 504 + 2$ ,  
2018

$$11\dots1 = 11\dots100 + 11 \text{ и}$$

2018    2016

$$\begin{aligned} 11\dots100 &= 10^2 \cdot 11\dots1 = 10^2 \cdot \underbrace{11111111\dots1111}_{504 \text{ пати по } 1111} \\ &= 10^2 \cdot 1111 \cdot \underbrace{100010001\dots00010001}_{504 \text{ пати бројот } 1} \\ &= 10^2 \cdot 1111 \cdot (1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{2012}), \end{aligned}$$

добиваме  $a = bq + 11$  за  $q$  природен број. Јасно е дека секој заеднички делител на  $a$  и  $b$  е делител на  $11$ , што значи дека најголемиот заеднички делител на  $a$  и  $b$  е делител на  $\text{NZD}(a, b)$ . Бројот  $11$  е прост па единствени опции за  $\text{NZD}(a, b) = 1$  или  $11$ . Јасно,  $11$  е делител на  $a$  и  $b$  па затоа  $\text{NZD}(a, b) = 11$ .

## IX одделение

1. Ако  $x, y$  се природни броеви за кои важи  $x - y - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$ , пресметај ја вредноста на изразот  $(\frac{x}{y})^{2018} + (\frac{y}{x})^{2018}$ .

**Решение.** *Прв начин.* Ако даденото равенство го помножиме со  $xy$  добиваме  $x^2y + x = xy^2 + y$ , т.е.  $x(xy+1) = y(xy+1)$ . Бидејќи броевите се природни следува дека  $xy+1 \neq 0$ . Значи,  $x = y$ . Според тоа  $(\frac{x}{y})^{2018} + (\frac{y}{x})^{2018} = 2$ .

*Втор начин.* Равенството е еквивалентно на равенството  $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x}$ , т.е. на равенството  $\frac{xy+1}{y} = \frac{xy+1}{x}$ . Броевите се природни, па следува дека  $xy+1 \neq 0$ . Значи,  $\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$ , односно  $x = y$ , па затоа  $(\frac{x}{y})^{2018} + (\frac{y}{x})^{2018} = 2$ .

*Трет начин.* Даденото равенство е еквивалентно на равенството  $(x-y) + \frac{x-y}{xy} = 0$ , т.е. на  $(x-y)\frac{xy+1}{xy} = 0$ . Броевите се природни, па затоа  $xy+1 \neq 0$ . Значи,  $x = y$ . Според тоа  $(\frac{x}{y})^{2018} + (\frac{y}{x})^{2018} = 2$ .

2. Збирот на дијагоналите на еден ромб е еднаков на  $8\text{ cm}$ , а неговата плоштина е еднаква на  $7\text{ cm}^2$ . Определи го периметарот на ромбот?

**Решение.** Нека  $a$  е должината на страната, а  $d_1$  и  $d_2$  се должините на дијагоналите на ромбот. Од  $d_1 + d_2 = 8$  и  $\frac{d_1 d_2}{2} = 7$ , следува

$$64 = (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 = d_1^2 + d_2^2 + 28,$$

односно  $d_1^2 + d_2^2 = 36$ . Значи,  $a^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$ , односно  $a = 3$ .

Значи, периметарот на ромбот е  $L = 4a = 12\text{ cm}$ .

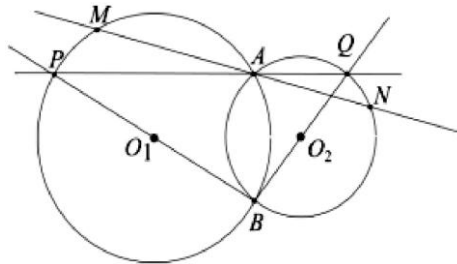
3. На првенство во фудбал во едно училиште учествуваат 8 екипи. Секоја екипа игра само по еден натпревар со секоја од останатите екипи. Докажи дека во секој момент за време на првенството, постојат барем две екипи кои дотогаш одиграле еднаков број на натпревари.

**Решение.** Ако секоја екипа одиграла некој натпревар, тогаш секоја од екипите одиграла 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7 натпревари. Бидејќи имаме седум можности, а осум екипи, според принципот на Дирихле, следува дека има барем две екипи кои одиграле еднаков број на натпревари.

Ако во некој момент има некоја екипа (барем една) која сè уште не одиграла ниту еден натпревар, тогаш сигурно не постои екипа која ги одиграла сите натпревари. Јасно, во тој момент секоја од екипите можела да одигра: 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6 натпревари. Бидејќи имаме осум екипи, а седум можности повторно според принципот на Дирихле, две екипи одиграле еднаков број на натпревари.

4. Две кружници со центри  $O_1$  и  $O_2$  имаат две заеднички точки  $A$  и  $B$ . Права низ точката  $A$ , ги сече двете кружници во точките  $M$  и  $N$ . Докажи дека  $\sphericalangle O_1MB = \sphericalangle O_2NB$ .

**Решение.** Ги повлекуваме правите  $BO_1$  и  $BO_2$ . Бидејќи аглите  $PAB$  и  $QAB$  се прави, следува дека точките  $P, Q$  и  $A$  се колинеарни. Значи  $\sphericalangle PAM = \sphericalangle QAN$  како накрсни агли. Од друга страна  $\sphericalangle MBP = \sphericalangle MAP$



(како агли над ист кружен лак  $MP$ ) и  $\sphericalangle NBQ = \sphericalangle NAQ$  (како агли над ист кружен лак  $NQ$ ). Така  $\sphericalangle MBP = \sphericalangle NBQ$ .

Бидејќи триаголниците  $O_1MB$  и  $O_2NB$  се рамнокраки, добиваме дека  $\sphericalangle O_1MB = \sphericalangle O_1BM$  и  $\sphericalangle O_2NB = \sphericalangle O_2BN$ . Конечно  $\sphericalangle O_1MB = \sphericalangle O_2NB$ .

5. За целите броеви  $x, y$  е исполнето  $90|x^2 + xy + y^2$ . Докажи дека  $900|xy$ .

**Решение.** Од условот  $90|x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy$  добиваме дека  $3|(x - y)^2$ , па затоа  $9|(x - y)^2$ . Од истиот услов следува дека  $3|xy$  односно барем еден од броевите  $x$  и  $y$  е делив со 3. Меѓутоа,  $3|x - y$  односно  $x$  и  $y$  имаат ист остаток при делење со 3, од што следува дека и двата мора да се деливи со 3.



Ќе докажеме  $100 \mid xy$ . Од  $90 \mid x^2 + xy + y^2$  и од  $x^2 + xy + y^2 \mid x^3 - y^3$  следува дека  $10 \mid x^3 - y^3$ . Остатоци при делење со 10 се 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Со директна проверка добиваме дека остатоци при делење на кубот од природен број со 10 се 0, 1, 2, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, соодветно. Следува дека кубовите на два броја имаат ист остаток при делење со 10 ако и само ако двата броја имаат ист остаток при делење со 10. Добиваме  $10 \mid x - y$ . Сега од

$$10 \mid x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy$$

добиваме  $10 \mid xy$  па затоа барем еден од броевите е делив со 10. Од  $10 \mid x - y$  добиваме дека  $100 \mid xy$ . Конечно од  $9 \mid xy$  и  $100 \mid xy$  следува тврдењето на задачата.