Трет Меморијален Математички Натпревар

Александар Блажевски - Цане

Ден 1: Категорија ЈУНИОРИ

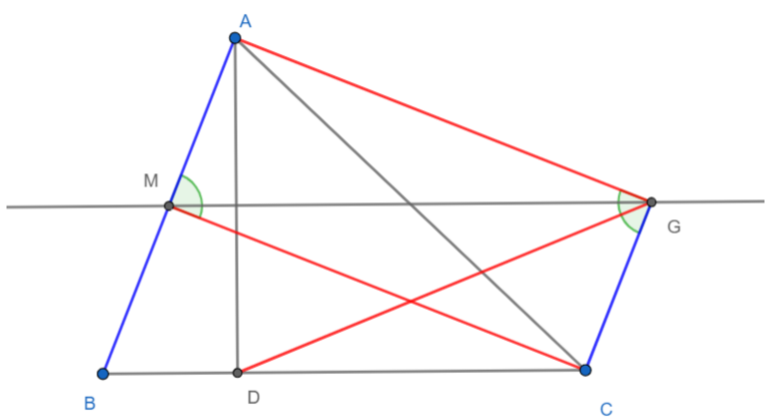
Задача 1. Нека ABC е остроаголен триаголник со висина AD ($D \in BC$). Правата низ C што е паралелна на AB ја сече симетралата на отсечката AD во точка G. Докажете дека: $AC = BC$ ако и само ако $\angle AGC = 90^\circ$.

Решение. Нека M е средишна точка на страната AB. **(1 поен)** Тогаш M е центар на опишаната кружница на $\triangle ADB$ бидејќи $\angle ADB = 90^\circ$, па $MA = MD$. Исто така, $AG = DG$ бидејќи G е точка на симетралата на страната AD. Оттука заклучуваме дека правата MG е всушност симетрала на отсечката AD.

Од $MG \perp AD$ и $AD \perp BC$, добиваме дека $MG \parallel BC$. Сега, од $BM \parallel CG$ и $MG \parallel BC$, четириаголникот $BCGM$ е паралелограм. **(2 поени)**

Следствено $CG = BM$. Меѓутоа, M е средишна точка на AB, па $CG = AM$. Исто така, знаеме дека $AM \parallel CG$, па $AMCG$ е исто така паралелограм и $CM \parallel AG$. **(2 поени)**

Сега, $\angle AMC = \angle AGC$ бидејќи $AMCG$ е паралелограм, па затоа $\angle AGC = 90^\circ$ ако и само ако $\angle AMC = 90^\circ$. Условот $\angle AMC = 90^\circ$ е еквивалентен со $AC = BC$ бидејќи M е средишна точка на AB. **(2 поени)**

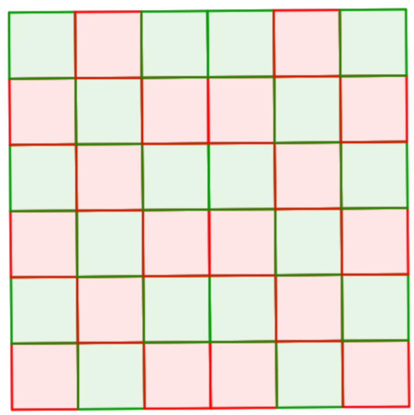


□

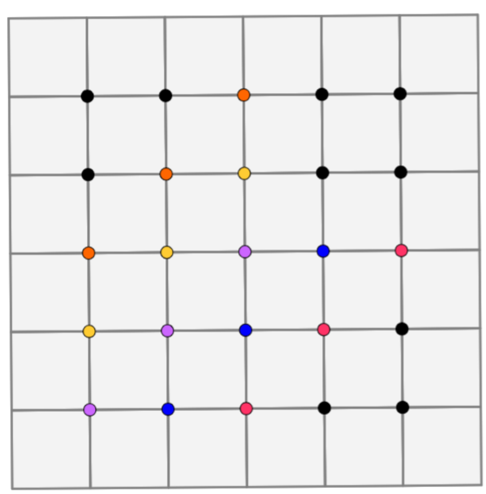
Задача 2. Дадена е 6×6 табла на која секое единечно квадратче е обоено во црвена или зелена боја. Притоа нема 4 еднаквообени единечни квадратчиња кои се соседни по хоризонтална, вертикална или дијагонална линија. За 2×2 квадрат на таблата велиме дека е *шаховски* доколку има една црвена и една зелена дијагонала. Одредете го најголемиот можен број на шаховски квадрати.

Решение. Одговор: 20.

Најпрво ќе покажеме дека 20 е достижен. Доколку ја обоиме таблата како што е прикажано на сликата подолу, добиваме точно 20 *шаховски* квадрати при што не постојат 4 еднаквообоени единечни квадрати што се соседни по хоризонтала, вертикала или дијагонала. **(3 поени)**



Да забележиме дека секој 2×2 квадрат може да се идентификува на единствен начин според неговиот центар. Поради тоа, ќе се фокусираме на 5×5 мрежата од сите возможни центри прикажана на сликата подолу.



Да ја обоиме 5×5 мрежата како што е прикажано на претходната слика.

Ако некои три соседни центри (кои одговараат на *шаховските* квадрати) се наоѓаат на иста дијагонала во 5×5 мрежата, тоа би значело дека постојат 4 соседни единечни квадрати во иста боја кои што се во иста дијагонала, што не е можно.
Поради ова, може да постојат најмногу по 2 портокалови, жолти, виолетови, сини и розеви

центри кои што соодветствуваат на $5 \cdot 2 = 10$ *шаховски* квадрати. Заедно со останатите 10 црно обоени точки добиваме најмногу $10 + 5 \cdot 2 = 20$ *шаховски* квадрати. **(4 поени)** $\square$

Забелешки. За доделувањето парцијални поени важи следното:

(1) Не се доделуваат парцијални поени за првиот дел (доказ дека може да се добијат 20 шаховски квадрати).

(2) Парцијални поени за вториот дел (доказ дека не може да се добијат повеќе од 20 шаховски квадрати) се доделуваат во следниве ситуации:

  (а) Добиена е нетривијална горна граница за бројот на шаховски квадрати. **(1 поен)**

  (б) Разгледувана е 5×5 мрежата од центри. **(2 поени)**

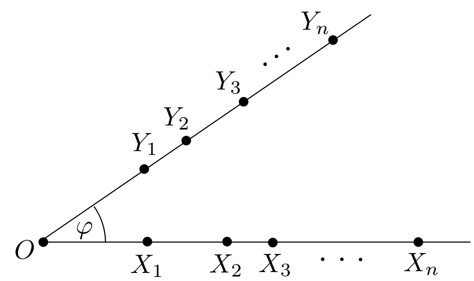
(3) Првиот и вториот дел се вреднуваат независно еден од друг. Секоја точна конструкција при која има 20 шаховски квадрати вреди **3 поени**, и секој точен доказ дека 20 е горна граница вреди **4 поени**.

(4) Доколку вториот дел не е комплетен, можните парцијални поени НЕ се адитивни. Натпреварувачот може да добие најмногу 2 парцијални поени за овој дел.

Задача 3. За даден цел број $n \geq 2$, нека $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ и $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ се позитивни реални броеви. Докажете дека за секоја вредност $C \in (-2, 2)$ (земајќи $y_{n+1} = y_1$) важи

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + Cx_iy_i + y_i^2} < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + Cx_iy_{i+1} + y_{i+1}^2}\,.$$

Решение. Постои $\varphi \in (0, \pi)$ таков што $C = -2\cos\varphi$. Разгледуваме агол со големина φ (радијани) и теме во точка O. На едниот крак од аголот избираме точки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за кои важи $OX_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и слично на другиот крак избираме точки $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ со $OY_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. **(2 поени)**

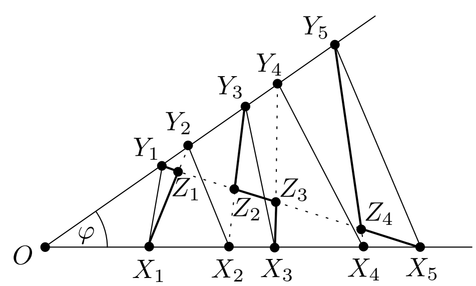


Посакуваното неравенство добива облик:

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i < \sum_{i=1}^{n} X_iY_{i+1}\,.$$

(1 поен)

Да се потсетиме дека најкратко растојание меѓу две точки X и Y во Евклидова рамнина е точно должината на отсечката XY. **(1 поен)** Нека Z_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ се пресечните точки на X_iY_{i+1} и X_nY_1 (случајот $n = 5$ е прикажан на долната слика). **(1 поен)**



Тогаш

$$\begin{array}{rcl}
X_1Y_1 & < & X_1Z_1 + Z_1Y_1 \\
X_2Y_2 & < & X_2Z_2 + Z_1Z_2 + Z_1Y_2 \\
X_3Y_3 & < & X_3Z_3 + Z_2Z_3 + Z_2Y_3 \\
\cdots & & \\
X_nY_n & < & X_nZ_{n-1} + Z_{n-1}Y_n
\end{array}$$

и едноставно ги собираме соодветните страни на овие n неравенства. **(2 поени)** $\square$

Ден 2: Категорија ЈУНИОРИ

Задача 4. Најдете ги сите позитивни цели броеви n за кои множеството $S = \{1, 2, 3, \ldots 2n\}$ може да се разбие на две подмножества S_1 и S_2, т.е. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ и $S_1 \cup S_2 = S$, така што S_1, S_2 имаат по n елементи и збирот на елементите на S_1 е делив со збирот на елементите на S_2.

Решение. Одговор: n е парен, или делив со 3, или дава остаток 1 при делење со 3.
Нека s_1 е збирот на елементите на S_1, а s_2 е збирот на елементите на S_2. Вкупниот збир изнесува $s = s_1 + s_2 = n(2n + 1)$.
Бидејќи $s_2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$, важи $\frac{s}{s_2} = \frac{s_1}{s_2} + 1 \leq \frac{4n+2}{n+1} < 4$, што повлекува дека $\frac{s_1}{s_2} = 1$ или 2. **(4 поени)**

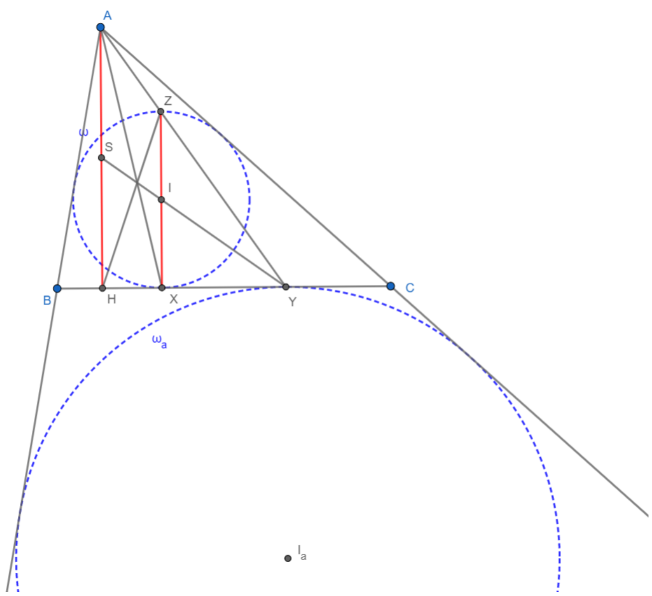
Да ги разгледаме двете можности:

Случај 1: $\frac{s_1}{s_2}=1$. Тогаш вкупниот збир $s = n(2n + 1)$ е парен број, и оттука n е парен, т.е. $n = 2n_1$. Ги групираме броевите во $2n_1$ пара т.ш. збирот во секој пар изнесува $4n_1 + 1$, на следниот начин: $(1, 4n_1), (2, 4n_1 - 1), \ldots, (2n_1, 2n_1 + 1)$. Ставаме n_1 од овие парови во S_1 и преостанатите n_1 парови во S_2. **(1 поен)**

Случај 2: $\frac{s_1}{s_2}=2$. Тогаш вкупниот збир $s = s_1 + s_2 = 3s_2$ е делив со 3.
(а) Ако n е делив со 3, т.е. $n = 3k$, нека S_2 го сочинуваат броевите од следните тројки: $(1, 2, 6k - 2), (3, 4, 6k - 4), \ldots, (2k - 1, 2k, 2k + 2)$. Тоа се точно k тројки, секоја со збир $6k + 1$. Така S_2 се состои од $n = 3k$ елементи, со вкупен збир $k(6k + 1)$. **(1 поен)**
(б) Ако $2n + 1$ е делив со 3, тогаш $n = 3k + 1$ и $s_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2n(2n+1)}{2} = (2k + 1)(3k + 1)$. Значи во S_2 треба да сместиме $n = 3k + 1$ од броевите т.ш. просекот изнесува $2k + 1$. Го ставаме бројот $2k + 1$ во S_2, и ги додаваме броевите од k тројки од кои секоја има просек $2k + 1$, односно збир $6k + 3$. Со други зборови, S_2 се состои од бројот $2k + 1$ и броевите од следните тројки: $(1, k + 1, 5k + 1), (2, k + 2, 5k - 1), \ldots, (k, 2k, 3k + 3)$. **(1 поен)** □

Задача 5. Нека ABC е остроаголен триаголник со впишана кружница ω и A-припишана кружница ω_a. Нека I е центарот на ω. Кружниците ω и ω_a ја допираат страната BC во точките X и Y, соодветно. Нека Z е онаа пресечна точка на правата AY со ω што е поблиску до A. Точката H е подножје на висината спуштена од A. Докажете дека правите HZ, IY и AX имаат заедничка точка.

Решение. Прво ќе докажеме дека точките X, I и Z се колинеарни. Правите AB и AC се заеднички тангенти на ω и ω_a, па хомотетијата $\mathcal{H}$ со центар A и коефициент $k = \frac{AI}{AI_a}$ ја пресликува ω_a во ω. Бидејќи $Y \in \omega_a \cap AY$, сликата $\mathcal{H}(Y)$ е истовремено на кружницата $\mathcal{H}(\omega_a) = \omega$ и $\mathcal{H}(AY) = AY$, па затоа $\mathcal{H}(Y) = Z$. Од друга страна, тангентата на ω_a во Y е BC, па тангентата на ω во Z е паралелна со BC. Тоа значи дека $IZ \perp BC$, што заедно со $IX \perp BC$ ни кажува дека XZ е дијаметар во ω и дека точките X, I и Z се колинеарни. **(3 поени)**



Правата AH е нормална на BC, па $AH \parallel XZ$. Бидејќи I е средина на XZ и $AH \parallel XZ$, правата IY минува низ средината S од AH. **(2 поени)** Ако ја примениме Талесовата теорема на паралелните прави AH и XZ добиваме

$$\frac{YZ}{ZA} = \frac{YX}{XH}.$$

(1 поен)

Оттука,

$$\frac{AS}{SH} \cdot \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YZ}{ZA} = \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YX}{XH} = 1.$$

Сега од теоремата на Чева, правите YS, HZ и AX се конкурентни, па заклучокот следи од тоа што точката I е на правата YS. **(1 поен)** □

Забелешка. За првиот дел (точките X, I и Z се колинеарни) нема можност за парцијални поени. Слично, за вториот дел ($AHXZ$ е трапез во кој правата IY ги преполовува основите AH и ZX) нема можност за парцијални поени. Последните 2 поени од решението може да се заработат и со повикување на теоремата на Штајнер (без доказ).

Задача 6. За позитивен цел број n велиме дека е *маркантен* доколку неговата бинарна репрезентација содржи повеќе единици одошто нули. (На пример, бројот 25 е маркантен бидејќи бинарната репрезентација $25 = (11001)_2$ содржи 3 единици и 2 нули). Дали постојат бесконечно многу маркантни броеви кои се полни квадрати? (Одговорот да се образложи.)

Решение. Одговор: Постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати. Ќе дадеме два конструктивни докази и еден доказ со контрадикција.

Конструкција 1: Ќе докажеме дека за секој цел број $k > 1$ бројот

$$\frac{2^{k\cdot(2^k-1)}-1}{2^k-1} = \sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}$$

е таков што неговиот квадрат

$$a_k = \left(\frac{2^{k\cdot(2^k-1)-1}}{2^k-1}\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}\right)^2 = \sum_{i=1}^{2^k-1} i\cdot 2^{(i-1)\cdot k} + \sum_{i=1}^{2^k-2} (2^k-i-1)\cdot 2^{(2^k+i-2)\cdot k}$$

е маркантен.

Бидејќи коефициентите пред секој степен на двојка во формулата погоре се помали од 2^k, сите се раздвоени во бинарната репрезентација. На пример, кога $k = 3$, имаме

$$(\underbrace{1}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{100}_{4}\underbrace{101}_{5}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{2^3-1}\underbrace{110}_{6}\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}\underbrace{011}_{3}\underbrace{010}_{2}\underbrace{001}_{1})_2.$$

Исто така, бидејќи

$$1 + (2^k - 2) = 2 + (2^k - 3) = ... = (2^{k-1} - 1) + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

е број со k единици, секој од паровите $(1, 2^k - 2)$, ... , $(2^{k-1} - 1, 2^{k-1})$, како и бројот $2^k - 1$ имаат точно k единици.

Сега можеме да го пресметаме бројот на единици во бинарната репрезентација на $a_k - k \cdot (2^k - 1)$, па бидејќи бројот на неговите цифри во бинарната репрезентација е $2k \cdot (2^k - 2) + 1 < 2\left(k \cdot (2^k - 1)\right)$, бројот a_k е маркантен за секој $k > 1$.

Конструкција 2: Ќе докажеме дека квадратот на бројот $n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2$ има повеќе единици отколку нули во бинарната репрезентација за секој природен број $k \geq 0$.

Нека P е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на единици во неговата бинарна репрезентација. Нека Q е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на нули во истата репрезентација.

Во следните пресметки, ги изоставуваме заградите што означуваат бинарен запис кога работиме со броевите во бинарна репрезентација заради поедноставно претставување.

За секој ваков n имаме

$$n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2 = 2^0 + 2^2 + ... + 2^{6k+4} = \frac{2^{6k+6}-1}{2^2-1} = \frac{2^{6k+6}-1}{3}.$$

Следствено, добиваме

$$n^2 = (2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{9} = 7(2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{2^6-1} =$$
$$= (2^3-1)(2^{6k+6}-1)(1+2^6+...+2^{6k}) =$$

$$
\begin{gathered}
= (2^3-1)(2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}-2^{6k}-2^{6k-6}-...-1) = \\
= (2^{12k+9}+2^{12k+3}+...+2^{6k+9}+2^{6k}+2^{6k-6}+...+1)- \\
(2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}+2^{6k+3}+2^{6k-3}+...+2^3) = \\
= \underbrace{100000100000...100000}_{6k}\underbrace{100000000}_{9}\underbrace{100000100000...100000}_{6k}1_2- \\
\underbrace{000100000100...000100}_{6k}\underbrace{000100100}_{9}\underbrace{000100000100...000100}_{6k}0_2 = \\
= [100000_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+100000000_2\cdot 2^{6k+1}+1_2]- \\
[000100_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+000100100_2\cdot 2^{6k+1}+0_2] = \\
= (2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot(100000_2-000100_2)+ \\
2^{6k+1}\cdot(100000000_2-000100100_2)+(1_2-0_2) = \\
= (2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot 011100_2+2^{6k+1}\cdot 011011100_2+1_2 = \\
= \underbrace{011100011100...011100}_{6k}\underbrace{011011100}_{9}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2 = \\
= \underbrace{11100011100...0111000}_{6k}\underbrace{11011100}_{8}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2.
\end{gathered}
$$

Гледаме дека n^2 се состои од k блокови од облик 111000_2 (да ги наречеме овие блокови a), k блокови од облик 011100_2 (да ги наречеме овие блокови b), еден блок од облик 11011100_2 (да го наречеме блок c) и од 1_2 како најдесна цифра во записот. Но, a блоковите и b блоковите имаат својство дека $P(a)=Q(a)$, $P(b)=Q(b)$, додека за блокот c важи $P(c)=Q(c)+2$. Значи

$$P(n^2)=k\cdot P(a)+k\cdot P(b)+P(c)+1=k\cdot Q(a)+k\cdot Q(b)+Q(c)+2+1=Q(n^2)+3>Q(n^2),$$

па бројот $n^2=(\underbrace{1010...101}_{6k+5})^2$ е маркантен полн квадрат за секој $k\geq 0$.

Распределба на поени. Секое конструктивно решение се вреднува согласно следново:

(а) Конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати без доказ. **(3 поени)**

Парцијални поени: Конструкција *со доказ* на бесконечно многу полни квадрати кои имаат подеднакво многу единици и нули во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

(б) Доказ дека конструкцијата од делот (а) е валидна. **(4 поени)**

Забелешка: Маркинг шемата дозволува **0**, **1**, **3** или **7 поени** за контструктивно решение на оваа задача. Доколку натпреварувачот даде точна конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати, но не докаже валидност на конструкцијата, тогаш заработува **3 поени**.

Единствен начин да се заработи **1 поен** е со конструирање на бесконечно многу полни квадрати кои се скоро маркантни (во смисла дека имаат не помалку единици одошто нули во бинарната репрезентација. Ова е многу едноставна конструкција.

Тврдењето дека постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати само по себе (без конструкција и без доказ) се вреднува со **0 поени**.

Доказ со контрадикција: Да претпоставиме дека постојат само конечно многу маркантни полни квадрати. Нека $m^2=a_1a_2\dots a_{k-1}$ е најголемиот таков број, и нека тој има точно $k-1$ цифри во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

Го разгледуваме $s=m\cdot(2^k+1)$. Така

$$s^2=m^2(2^{2k}+2^{k+1}+1)=a_1a_2\dots a_{k-1}a_1a_2\dots a_{k-1}00a_1a_2\dots a_{k-1}.$$

Да забележиме дека s^2 е маркантен, што е посакуваната противречност. Имено, постојат барем $\frac{k}{2}$ единици меѓу цифрите a_i, што повлекува дека постојат барем $\frac{3k}{2}$ единици меѓу вкупно $(3k-1)$ бинарни цифри на s^2. **(5 поени)** Бројот 1 потврдува дека множеството маркантни полни квадрати е непразно. **(1 поен)** $\square$

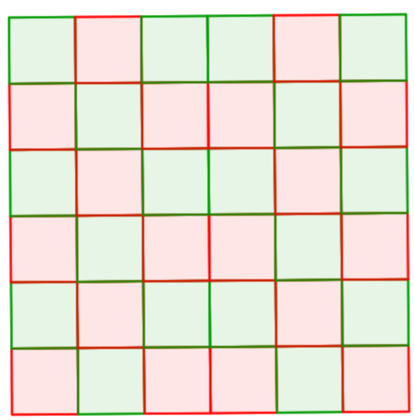
Забелешка: Последниот поен се доделува само за комплетно решение со контрадикција.

Ден 1: Категорија СЕНИОРИ

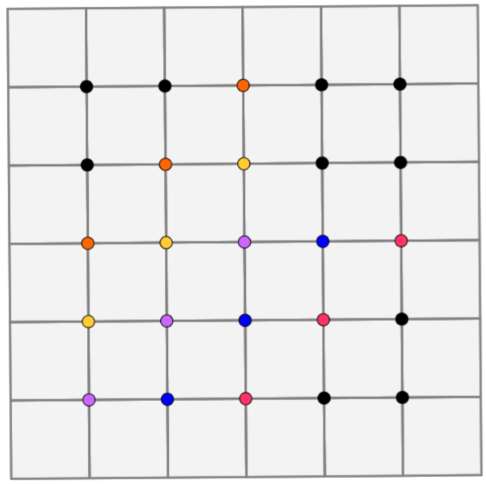
Задача 1. Дадена е 6×6 табла на која секое единечно квадратче е обоено во црвена или зелена боја. Притоа нема 4 еднаквообени единечни квадратчиња кои се соседни по хоризонтална, вертикална или дијагонална линија. За 2×2 квадрат на таблата велиме дека е *шаховски* доколку има една црвена и една зелена дијагонала. Одредете го најголемиот можен број на шаховски квадрати.

Решение. Одговор: 20.

Најпрво ќе покажеме дека 20 е достижен. Доколку ја обоиме таблата како што е прикажано на сликата подолу, добиваме точно 20 *шаховски* квадрати при што не постојат 4 еднаквообоени единечни квадрати што се соседни по хоризонтала, вертикала или дијагонала. **(3 поени)**



Да забележиме дека секој 2×2 квадрат може да се идентификува на единствен начин според неговиот центар. Поради тоа, ќе се фокусираме на 5×5 мрежата од сите возможни центри прикажана на сликата подолу.



Да ја обоиме 5×5 мрежата како што е прикажано на претходната слика.

Ако некои три соседни центри (кои одговараат на *шаховските* квадрати) се наоѓаат на иста дијагонала во 5×5 мрежата, тоа би значело дека постојат 4 соседни единечни квадрати во иста боја кои што се во иста дијагонала, што не е можно.
Поради ова, може да постојат најмногу по 2 портокалови, жолти, виолетови, сини и розеви центри кои што соодветствуваат на $5 \cdot 2 = 10$ *шаховски* квадрати. Заедно со останатите 10 црно обоени точки добиваме најмногу $10 + 5 \cdot 2 = 20$ *шаховски* квадрати. **(4 поени)** $\square$

Забелешки. За доделувањето парцијални поени важи следното:

(1) Не се доделуваат парцијални поени за првиот дел (доказ дека може да се добијат 20 шаховски квадрати).

(2) Парцијални поени за вториот дел (доказ дека не може да се добијат повеќе од 20 шаховски квадрати) се доделуваат во следниве ситуации:

   (а) Добиена е нетривијална горна граница за бројот на шаховски квадрати. **(1 поен)**

   (б) Разгледувана е 5×5 мрежата од центри. **(2 поени)**

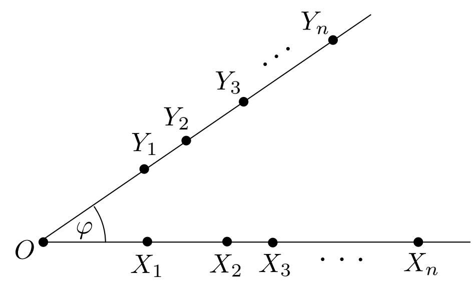
(3) Првиот и вториот дел се вреднуваат независно еден од друг. Секоја точна конструкција при која има 20 шаховски квадрати вреди **3 поени**, и секој точен доказ дека 20 е горна граница вреди **4 поени**.

(4) Доколку вториот дел не е комплетен, можните парцијални поени НЕ се адитивни. Натпреварувачот може да добие најмногу 2 парцијални поени за овој дел.

Задача 2. За даден цел број $n \geq 2$, нека $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ и $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ се позитивни реални броеви. Докажете дека за секоја вредност $C \in (-2, 2)$ (земајќи $y_{n+1} = y_1$) важи

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + Cx_iy_i + y_i^2} < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + Cx_iy_{i+1} + y_{i+1}^2}\,.$$

Решение. Постои $\varphi \in (0, \pi)$ таков што $C = -2\cos\varphi$. Разгледуваме агол со големина φ (радијани) и теме во точка O. На едниот крак од аголот избираме точки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за кои важи $OX_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и слично на другиот крак избираме точки $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ со $OY_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. **(2 поени)**

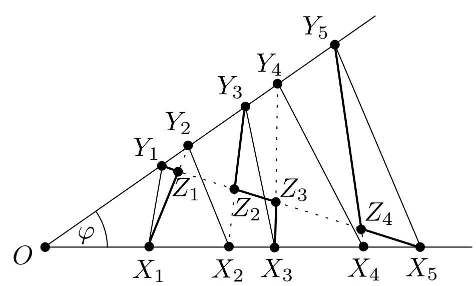


Посакуваното неравенство добива облик:

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i < \sum_{i=1}^{n} X_iY_{i+1}\,.$$

(1 поен)

Да се потсетиме дека најкратко растојание меѓу две точки X и Y во Евклидова рамнина е точно должината на отсечката XY. **(1 поен)** Нека Z_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ се пресечните точки на X_iY_{i+1} и X_nY_1 (случајот $n = 5$ е прикажан на долната слика). **(1 поен)**



Тогаш

$$\begin{aligned}
X_1Y_1 &< X_1Z_1 + Z_1Y_1 \\
X_2Y_2 &< X_2Z_2 + Z_1Z_2 + Z_1Y_2 \\
X_3Y_3 &< X_3Z_3 + Z_2Z_3 + Z_2Y_3 \\
&\cdots \\
X_nY_n &< X_nZ_{n-1} + Z_{n-1}Y_n
\end{aligned}$$

и едноставно ги собираме соодветните страни на овие n неравенства. **(2 поени)** $\square$

Задача 3. Најдете ги сите тројки (x, y, z) од позитивни цели броеви такви што

$$x^2 + y^2 + x + y + z = xyz + 1\,.$$

Решение. Нека тројката (x, y, z) е едно решение на равенката. Дефинираме $t = xz - y - 1$. Од

$$t(xz-1) = t(t+y) = t^2 + xyz - y^2 - y = t^2 + x^2 + x + z - 1 > 0,$$

и $xz - 1 \geq 0$, заклучуваме дека $t > 0$. Да забележиме дека притоа

$$\begin{aligned} x^2 + t^2 + x + t + z - xtz - 1 &= t(t - xz + 1) + x^2 + x + z - 1 \\ &= -yt + x^2 + x + z - 1 \\ &= x^2 + y^2 + x + y + z - xyz - 1 = 0. \end{aligned}$$

Значи $(x, t, z) = (x, xz - y - 1, z)$ е исто така решение на равенката. **(2 поени)**

Поради симетрија, и тројката $(yz - x - 1, y, z)$ е решение. Следствено, ако $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ е низата дефинирана со

$$(a_0, a_1) = (x, y),\ \text{и}\ a_{n+2} + a_n = za_{n+1} - 1\ ,\ \text{за секој}\ n \in \mathbb{Z},$$

тогаш (a_i, a_{i+1}, z) и (a_{i+1}, a_i, z) се решенија за секој $i \in \mathbb{Z}$. **(1 поен)**

Бидејќи $a_i > 0$ за секој $i \in \mathbb{Z}$, постои индекс j за кој a_j е најмалиот член на низата $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ќе означуваме

$$(a_{j-1}, a_j, a_{j+1}) = (Y, X, T),$$

со тоа што $Y, T \geq X$. Ако притоа $Y = X$ тогаш $2X^2 + 2X + z = X^2z + 1$, што повлекува дека $(X + 1)(2X - Xz + z) = 1$. Но последното е невозможно бидејќи $X + 1 > 1$. Значи $Y > X$. Аналогно $T > X$. Имаме

$$(X+1)^2 + z - X - 2 = X^2 + X + z - 1 = YT \geq (X+1)^2,$$

што повлекува дека $z \geq X + 2$. Тогаш

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + X + Y &= z(XY - 1) + 1 \\ &\geq X^2Y + 2XY - X - 1 \\ &\geq X^2Y + 2X(X+1) - X - 1 \\ &= X^2Y + 2X^2 + X - 1, \end{aligned}$$

и оттука $Y^2 \geq (X^2 - 1)(Y + 1)$. Имајќи предвид дека $Y + 1 > Y$, добиваме дека $Y > X^2 - 1$ (дури и кога $X^2 - 1 = 0$ бидејќи во тој случај неравенството $Y > X^2 - 1 = 0$ важи затоа што Y е позитивен). Следствено $Y \geq X^2$. Аналогно $T \geq X^2$. Оттука

$$YT = X^2 + X + z - 1 \implies XYT = X^3 + X^2 + Xz - X = X^3 + X^2 - X + Y + T + 1.$$

Имајќи предвид дека $XT - 1 \geq 0$, добиваме

$$X^3 + X^2 - X + T + 1 = (XT - 1)Y \geq (XT - 1)X^2.$$

Бидејќи $X^3 - 1 \geq 0$, следува

$$X^3 + X^2 - X + 1 \geq (XT - 1)X^2 - T = (X^3 - 1)T - X^2 \geq (X^3 - 1)X^2 - X^2.$$

Последното равенство може да се запише и во облик

$$X^3 + 3X^2 + 1 \geq X^5 + X.$$

Ако $X \geq 2$ тогаш $X^3 \leq \frac{1}{4}X^5$ и $3X^2 \leq \frac{3}{8}X^5$ и $1 < X$, што повлекува

$$X^5 + X \leq X^3 + 3X^2 + 1 < \frac{5}{8}X^5 + X,$$

противречност! Затоа $X = 1$. **(3 поени)**

Оттука
$$YT = X^2 + X + z - 1 = z + 1 = Xz + 1 = Y + T + 2,$$
односно $(Y-1)(T-1) = 3$, што води до заклучокот дека $\{Y, T\} = \{2, 4\}$ и $z = 7$. Значи за низата $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ има две можности: или е тоа низата $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ дефинирана со
$$(b_0, b_1) = (1, 2), \text{ и } b_{n+2} + b_n = 7b_{n+1} - 1 \text{ , за секој } n \in \mathbb{Z},$$
или пак е тоа низата $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ дефинирана со
$$(c_0, c_1) = (1, 4), \text{ и } c_{n+2} + c_n = 7c_{n+1} - 1 \text{ , за секој } n \in \mathbb{Z},$$
што всушност задоволува $c_n = b_{-n}$, за секој $n \in \mathbb{Z}$. Заклучуваме дека сите решенија се $(b_i, b_{i+1}, 7)$ и $(b_{i+1}, b_i, 7)$, за секој $i \in \mathbb{Z}$, каде
$$b_n = \frac{(6+\sqrt{5})(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5})^n + (6-\sqrt{5})(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5})^n + 3}{15} \in \mathbb{Z} \text{ , за секој } n \in \mathbb{Z}.$$

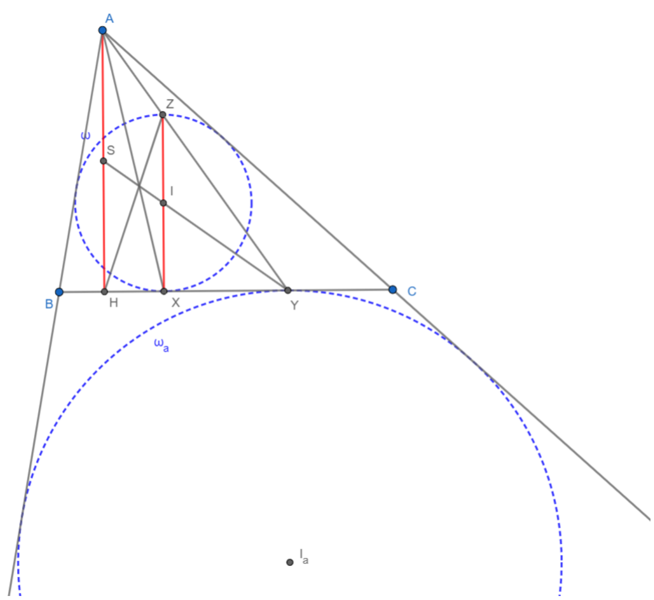
(1 поен)

□

Ден 2: Категорија СЕНИОРИ

Задача 4. Нека ABC е остроаголен триаголник со впишана кружница ω и A-припишана кружница ω_a. Нека I е центарот на ω. Кружниците ω и ω_a ја допираат страната BC во точките X и Y, соодветно. Нека Z е онаа пресечна точка на правата AY со ω што е поблиску до A. Точката H е подножје на висината спуштена од A. Докажете дека правите HZ, IY и AX имаат заедничка точка.

Решение. Прво ќе докажеме дека точките X, I и Z се колинеарни. Правите AB и AC се заеднички тангенти на ω и ω_a, па хомотетијата $\mathcal{H}$ со центар A и коефициент $k = \frac{AI}{AI_a}$ ја пресликува ω_a во ω. Бидејќи $Y \in \omega_a \cap AY$, сликата $\mathcal{H}(Y)$ е истовремено на кружницата $\mathcal{H}(\omega_a) = \omega$ и $\mathcal{H}(AY) = AY$, па затоа $\mathcal{H}(Y) = Z$. Од друга страна, тангентата на ω_a во Y е BC, па тангентата на ω во Z е паралелна со BC. Тоа значи дека $IZ \perp BC$, што заедно со $IX \perp BC$ ни кажува дека XZ е дијаметар во ω и дека точките X, I и Z се колинеарни. **(3 поени)**



Правата AH е нормална на BC, па $AH \parallel XZ$. Бидејќи I е средина на XZ и $AH \parallel XZ$, правата IY минува низ средината S од AH. **(2 поени)** Ако ја примениме Талесовата теорема на паралелните прави AH и XZ добиваме

$$\frac{YZ}{ZA} = \frac{YX}{XH}.$$

(1 поен)

Оттука,

$$\frac{AS}{SH} \cdot \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YZ}{ZA} = \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YX}{XH} = 1.$$

Сега од теоремата на Чева, правите YS, HZ и AX се конкурентни, па заклучокот следи од тоа што точката I е на правата YS. **(1 поен)** $\square$

Забелешка. За првиот дел (точките X, I и Z се колинеарни) нема можност за парцијални поени. Слично, за вториот дел ($AHXZ$ е трапез во кој правата IY ги преполовува основите AH и ZX) нема можност за парцијални поени. Последните 2 поени од решението може да се заработат и со повикување на теоремата на Штајнер (без доказ).

Задача 5. За позитивен цел број n велиме дека е *маркантен* доколку неговата бинарна репрезентација содржи повеќе единици одошто нули. (На пример, бројот 25 е маркантен бидејќи бинарната репрезентација $25 = (11001)_2$ содржи 3 единици и 2 нули). Дали постојат бесконечно многу маркантни броеви кои се полни квадрати? (Одговорот да се образложи.)

Решение. Одговор: Постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати. Ќе дадеме два конструктивни докази и еден доказ со контрадикција.

Конструкција 1: Ќе докажеме дека за секој цел број $k > 1$ бројот

$$\frac{2^{k\cdot(2^k-1)}-1}{2^k-1} = \sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}$$

е таков што неговиот квадрат

$$a_k = \left(\frac{2^{k\cdot(2^k-1)-1}}{2^k-1}\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}\right)^2 = \sum_{i=1}^{2^k-1} i\cdot 2^{(i-1)\cdot k} + \sum_{i=1}^{2^k-2} (2^k-i-1)\cdot 2^{(2^k+i-2)\cdot k}$$

е маркантен.

Бидејќи коефициентите пред секој степен на двојка во формулата погоре се помали од 2^k, сите се раздвоени во бинарната репрезентација. На пример, кога $k = 3$, имаме

$$(\underbrace{1}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{100}_{4}\underbrace{101}_{5}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{2^3-1}\underbrace{110}_{6}\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}\underbrace{011}_{3}\underbrace{010}_{2}\underbrace{001}_{1})_2.$$

Исто така, бидејќи

$$1 + (2^k-2) = 2 + (2^k-3) = ... = (2^{k-1}-1) + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

е број со k единици, секој од паровите $(1, 2^k-2)$, ... , $(2^{k-1}-1, 2^{k-1})$, како и бројот $2^k - 1$ имаат точно k единици.

Сега можеме да го пресметаме бројот на единици во бинарната репрезентација на $a_k - k\cdot(2^k-1)$, па бидејќи бројот на неговите цифри во бинарната репрезентација е $2k\cdot(2^k-2)+1 < 2\left(k\cdot(2^k-1)\right)$, бројот a_k е маркантен за секој $k > 1$.

Конструкција 2: Ќе докажеме дека квадратот на бројот $n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2$ има повеќе единици отколку нули во бинарната репрезентација за секој природен број $k \geq 0$.

Нека P е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на единици во неговата бинарна репрезентација. Нека Q е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на нули во истата репрезентација.

Во следните пресметки, ги изоставуваме заградите што означуваат бинарен запис кога работиме со броевите во бинарна репрезентација заради поедноставно претставување.

За секој ваков n имаме

$$n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2 = 2^0 + 2^2 + ... + 2^{6k+4} = \frac{2^{6k+6}-1}{2^2-1} = \frac{2^{6k+6}-1}{3}.$$

Следствено, добиваме

$$\begin{aligned}
n^2 = (2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{9} &= 7(2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{2^6-1} = \\
&= (2^3-1)(2^{6k+6}-1)(1+2^6+...+2^{6k}) = \\
&= (2^3-1)(2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}-2^{6k}-2^{6k-6}-...-1) = \\
&= (2^{12k+9}+2^{12k+3}+...+2^{6k+9}+2^{6k}+2^{6k-6}+...+1) - \\
&\quad (2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}+2^{6k+3}+2^{6k-3}+...+2^3) = \\
&= \underbrace{100000100000...100000}_{6k}\underbrace{100000000}_{9}\underbrace{100000100000...100000}_{6k}1_2 - \\
&\quad \underbrace{000100000100...000100}_{6k}\underbrace{000100100}_{9}\underbrace{000100000100...000100}_{6k}0_2 = \\
&= [100000_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+100000000_2\cdot 2^{6k+1}+1_2] - \\
&\quad [000100_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+000100100_2\cdot 2^{6k+1}+0_2] = \\
&= (2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot(100000_2-000100_2) + \\
&\quad 2^{6k+1}\cdot(100000000_2-000100100_2)+(1_2-0_2) = \\
&= (2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot 011100_2 + 2^{6k+1}\cdot 011011100_2 + 1_2 = \\
&= \underbrace{011100011100...011100}_{6k}\underbrace{011011100}_{9}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2 = \\
&= \underbrace{11100011100...0111000}_{6k}\underbrace{11011100}_{8}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2.
\end{aligned}$$

Гледаме дека n^2 се состои од k блокови од облик 111000_2 (да ги наречеме овие блокови a), k блокови од облик 011100_2 (да ги наречеме овие блокови b), еден блок од облик 11011100_2 (да го наречеме блок c) и од 1_2 како најдесна цифра во записот. Но, a блоковите и b блоковите имаат својство дека $P(a) = Q(a)$, $P(b) = Q(b)$, додека за блокот c важи $P(c) = Q(c) + 2$. Значи

$$P(n^2) = k\cdot P(a) + k\cdot P(b) + P(c) + 1 = k\cdot Q(a) + k\cdot Q(b) + Q(c) + 2 + 1 = Q(n^2) + 3 > Q(n^2),$$

па бројот $n^2 = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})^2$ е маркантен полн квадрат за секој $k \geq 0$.

Распределба на поени. Секое конструктивно решение се вреднува согласно следново:

(а) Конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати без доказ. **(3 поени)**

Парцијални поени: Конструкција *со доказ* на бесконечно многу полни квадрати кои имаат подеднакво многу единици и нули во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

(б) Доказ дека конструкцијата од делот (а) е валидна. **(4 поени)**

Забелешка: Маркинг шемата дозволува **0**, **1**, **3** или **7 поени** за контструктивно решение на оваа задача. Доколку натпреварувачот даде точна конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати, но не докаже валидност на конструкцијата, тогаш заработува **3 поени**.

Единствен начин да се заработи **1 поен** е со конструирање на бесконечно многу полни квадрати кои се скоро маркантни (во смисла дека имаат не помалку единици одошто нули во бинарната репрезентација. Ова е многу едноставна конструкција.

Тврдењето дека постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати само по себе (без конструкција и без доказ) се вреднува со **0 поени**.

Доказ со контрадикција: Да претпоставиме дека постојат само конечно многу маркантни полни квадрати. Нека $m^2 = a_1a_2\dots a_{k-1}$ е најголемиот таков број, и нека тој има точно $k-1$ цифри во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

Го разгледуваме $s = m\cdot(2^k+1)$. Така

$$s^2 = m^2(2^{2k}+2^{k+1}+1) = a_1a_2\dots a_{k-1}a_1a_2\dots a_{k-1}00a_1a_2\dots a_{k-1}.$$

Да забележиме дека s^2 е маркантен, што е посакуваната противречност. Имено, постојат барем $\frac{k}{2}$ единици меѓу цифрите a_i, што повлекува дека постојат барем $\frac{3k}{2}$ единици меѓу вкупно $(3k-1)$ бинарни цифри на s^2. **(5 поени)** Бројот 1 потврдува дека множеството маркантни полни квадрати е непразно. **(1 поен)** □

Забелешка: Последниот поен се доделува само за комплетно решение со контрадикција.

Задача 6. За цел број $n \geq 1$, разгледуваме множество P_{2n} од $2n$ точки што се рамномерно распределени на кружница. Секое *совршено спарување* на овие точки се состои од n отсечки чии краеви го сочинуваат P_{2n}. Нека $\mathcal{M}_n$ е множеството од несамопресекувачки совршени спарувања на P_{2n}. За $M \in \mathcal{M}_n$ велиме дека е *централно-симетрично* доколку е инваријантно при симетрија во однос на центарот на кружницата. Одредете го (како фунција од n) вкупниот број на централно-симетрични совршени спарувања во $\mathcal{M}_n$.

Решение. Нека $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ го означува n-тиот Каталанов број, и $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{M}_n$ е множеството од централно-симетрични совршени спарувања. Ќе докажеме дека за кардиналноста (бројот на елементи) на $\mathcal{S}_n$ важи:

$$|\mathcal{S}_n| = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 1\,; \\ n\cdot C_{(n-1)/2} & \text{ако } n \geq 3 \text{ е непарен}\,; \\ \binom{n}{n/2} & \text{ако } n \text{ е парен}\,. \end{cases}$$

Случајот $n = 1$ е тривијален, и тогаш $\mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n$ се состои од еден дијаметар на кружницата. Пред да преминеме на нетривијалните случаи (за непарен $n \geq 3$ и за парен $n \geq 2$), воведуваме малку терминологија и нотација. За точка P велиме дека е *затскриена позади* тетива e која не е дијаметар на кружницата, доколку P не е крајна точна на e и радиусот од центарот на кружницата до P ја пресекува e. Нека σ е ознака за рефлексијата (централната симетрија) во однос на центарот на кружницата.

Да го разгледаме случајот $n \geq 3$. Започнуваме забележувајќи дека секое спарување $M \in \mathcal{S}_n$ содржи точно еден дијаметар на кружницата. Навистина, бидејќи $e \in M$ повлекува $\sigma(e) \in M$, од $4 \nmid 2n$ следува дека постои отсечка $e \in M$ за која важи $e = \sigma(e)$, т.е., која е дијаметар.

Од друга страна, јасно е дека во $M \in \mathcal{M}_n$ не може да има повеќе дијаметри на кружницата (поради барањето спарувањето M да не е самопресекувачко). **(1 поен)**

Има n дијаметри со краеви во P_{2n}. Откако еден од овие дијаметри е избран, да го означиме со d, ги поминуваме точките од P_{2n} кои лежат на една избрана страна од d и ги именуваме редоследно со $1, 2, \dots, n-1$. Очигледно, за било кое $M \in \mathcal{S}_n$ што го содржи d важи следново: секоја отсечка $e \in M$ има два или нуту еден крај меѓу точките $1, 2, \dots, n-1$. Следствено, централната симетричност на елементите на $\mathcal{S}_n$ повлекува дека $|\mathcal{S}_n|/n$ е еднаков на бројот на несамопресекувачки совршени спарувања на точките $1, 2, \dots, n-1$. **(1 поен)**

Ќе покажеме дека овој број изнесува $C_{(n-1)/2}$. За оваа цел ќе конструираме биекција помеѓу множеството од такви спарувања и множеството од бинарни стрингови со точно $(n-1)/2$ нули и исто толку единици кои ја имаат следнава *префикс особина*: во секој почетен сегмент од таквиот $(n-1)$-стринг бројот на нули не го надминува бројот на единици. (Добро е познато дека за $m \geq 1$ вкупниот број на такви $2m$-стрингови е еднаков на m-тиот Каталанов број $C_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$. Основната идеја на вообичаениот доказ на ова тврдење е т.н. *принцип на рефлексија* на A. D. André.) За даден $M \in \mathcal{S}_n$, ги поминуваме точките $1, 2, \dots, n-1$ во тој редослед, и покрај секоја точка која ја сретнуваме запишуваме 0-бит или 1-бит согласно следново правило: за секоја отсечка (ребро) чии два краја се меѓу $1, 2, \dots, n-1$ запишуваме 1 при средбата со првиот крај, и запишуваме 0 при средбата со вториот крај. Обратно, за даден бинарен стринг со $(n-1)/2$ нули и исто толку единици кој ја поседува префикс особината, да ги означиме точките $1, 2, \dots, n-1$ со битовите од овој $(n-1)$-стринг. Потоа последователно спаруваме точка означена со бит 1 и точка означена со бит 0, водејќи сметка сите точки кои се затскриени зад така добиеното ребро да се веќе спарени. Очигледно е дека опишаните две пресликувања се заемно инверзни. **(1 поен)**

За да ја потврдиме формулата во случајот кога n е парен, воспоставуваме биекција помеѓу множеството $\mathcal{S}_n$ и колекцијата од сите бинарни стрингови со точно $n/2$ нули и исто толку единици. За ова користиме означување $1, 2, \dots, 2n$ на точките во фиксиран кружен редослед. За произволно дадено спарување $M \in \mathcal{S}_n$, поминуваме низ првата половина од точките, т.е. од точката 1 до точката n. За секоја точка што ја сретнуваме, регистрираме еден 0-бит или 1-бит согласно следново правило: за секоја отсечка (ребро) чии два краја се меѓу точките $1, 2, \dots, n$ запишуваме 1 при средбата со првиот крај, и запишуваме 0 при средбата со вториот крај. За секое ребро e кое има точно еден крај меѓу точките $1, 2, \dots, n$, и реброто $\sigma(e)$ ја има истата особина, па тогаш запишуваме 0 при средбата со првата од овие две точки и запишуваме 1 при средбата со втората од овие две точки. Оваа постапка очигледно продуцира бинарен стринг со точно $n/2$ нули и исто толку единици.

Обратно, за произволно даден бинарен стринг со должина n сочинет од точно $n/2$ нули и исто толку единици, надоврзуваме една после друга две копии од овој стринг, што ни дава стринг со должина $2n$. Ги запишуваме покрај точките $1, 2, \dots, 2n$ долж кружницата битовите од вака добиениот стринг. Потоа последователно спаруваме точка покрај која стои бит 1 со точка покрај која стои бит 0, водејќи сметка сите точки кои се затскриени зад така добиеното ребро да се веќе спарени. Бидејќи има точно n точки со бит 0 и n точки со бит 1, оваа постапка резултира со совршено спарување. Притоа, според конструкцијата, секој пар дијаметрално-спротивни точки го имаат покрај себе истиот бит, што повлекува дека секое ребро e е придружено од неговата рефлексија $\sigma(e)$, т.е., навистина добиваме елемент од $\mathcal{S}_n$.

Очигледно е дека опишаните две пресликувања се заемно инверзни. **(4 поени)** □

Забелешки. Парцијални поени не се доделуваат за:

(1) случајот $n = 1$ или за било која друга мала вредност на n;
(2) споменување на Каталановите броеви или наведување на формулата за n-тиот Каталанов број;
(3) нецелосно решавање на случајот кога n е парен.