

БМО 2013

1. Во триаголник ABC припаханата кружница наспроти темето A ги допира правата AB во точката P и правата AC во точката Q , а припишаната кружница наспроти темето B ги допира правата AB во точката M и правата BC во точката N . Нека K и L соодветно се подножјата на нормалите повлечени од C кон правите MN и PQ . Докажи, дека четириаголникот $MKLP$ е тети-вен.

Решение. *Прв начин.* Аглите на триаголникот да ги означиме со α, β, γ . Бидејќи

$$\angle KMP = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

доволно е да докажеме дека

$$\angle KLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

т.е. дека $\angle KLC = \frac{\beta}{2}$.

Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC и D е допирната точка на впишаната кружница со AB . Од $CK \parallel IB$ и $CL \parallel IA$ следува $\angle KCL = \angle AIB$. Понатаму, од

$$\overline{CN} = \overline{AD} = \frac{b+c-a}{2} \text{ и } \angle KCN = \frac{\beta}{2} \text{ следува}$$

$$\overline{CK} = \overline{CN} \cos \frac{\beta}{2} = \overline{AD} \cos \frac{\beta}{2} = \overline{AI} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Аналогно $\overline{CL} = \overline{BI} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$, па затоа $\frac{\overline{CK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}}$. Според тоа, триаголниците

KCL и AIB имаат по две пропорционални страни и еднаков агол меѓу нив, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\angle KLC = \angle ABI = \frac{\beta}{2}$, па затоа $\angle KLP = \angle KLC + \angle CLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

Втор начин. Нека I е центарот на опишаната кружница во $\triangle ABC$, а T е проекцијата на I на страната AB . Ќе докажеме дека $\triangle KCL \sim \triangle AIB$.

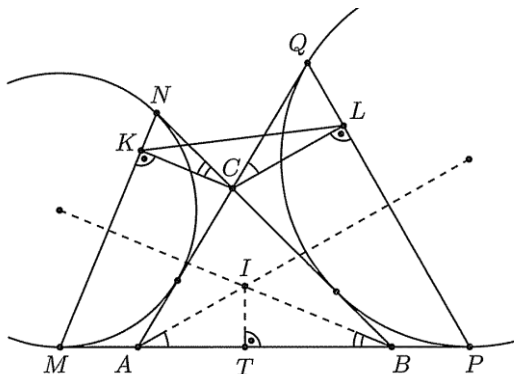
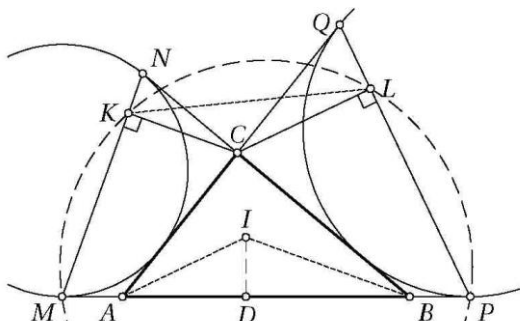
Од $AI \perp PQ$ и $BI \perp MN$ добиваме $AI \parallel CL$ и $BI \parallel CK$.

Тогаш

$$\angle KCL = \angle AIB,$$

$$\angle QCL = \angle QZI = \angle IAT,$$

$$\angle NCK = \angle NBI = \angle IBT.$$



Од последните две равенства следува дека $\triangle QCL \sim \triangle IAT$ и $\triangle NCK \sim \triangle IBT$, па затоа $\frac{\overline{CL}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AT}}$ и $\frac{\overline{CK}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{BI}}$. Но, $\overline{CQ} = \overline{BT} = p - b$, $\overline{CN} = \overline{AT} = p - a$ и така добиваме $\overline{CL} \cdot \overline{AI} = (p - a)(p - b) = \overline{CK} \cdot \overline{BI}$, што значи $\frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{IA}}$. Од друга страна, $\angle KCL = \angle AIB$, па затоа $\triangle KCL \sim \triangle AIB$. Тогаш

$$\angle KLP + \angle PMK = (90^\circ + \angle ABI) + (90^\circ - \angle ABI) = 180^\circ,$$

со што доказот е завршен.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Решение. *Прв начин.* Сведуваме по модул 11 и добиваме $x^5 + 4^y \equiv 0 \pmod{11}$, при што важи $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$, па мора да важи $4^y \equiv \pm 1 \pmod{11}$. Конгруенцијата $4^y \equiv -1 \pmod{11}$ не важи за ниту еден y , а додека конгруенцијата $4^y \equiv 1 \pmod{11}$ важи ако и само ако $5 \mid y$.

Воведуваме смена $t = 4^{\frac{y}{5}}$ и ја добиваме равенката

$$x^5 + t^5 = A \cdot B = 2013^z,$$

каде $\text{NZD}(x, t) = 1$, $A = x + t$ и $B = x^4 - x^3t + x^2t^2 - xt^3 + t^4$. Понатаму, од

$$B = A(x^3 - 2x^2t + 3xt^2 - 4t^3) + 5t^4$$

следува дека $\text{NZD}(A, B) = \text{NZD}(A, 5t^4) \mid 5$, но $5 \nmid 2013^z$, па мора да важи $\text{NZD}(A, B) = 1$. Според тоа, $A = a^z$ и $B = b^z$, за некои природни броеви a и b такви што $ab = 2013$.

Меѓутоа, од неравенството $\frac{1}{16}A^4 \leq B \leq A^4$, кое се докажува со едноставна примена на неравенствата меѓу средините, добиваме

$$\frac{1}{16}a^4 \leq b \leq a^4, \text{ т.е. } \frac{1}{16}a^5 \leq ab = 2013 \leq a^5.$$

Оттука следува $5 \leq a \leq 8$, што не е можно бидејќи 2013 нема делители меѓу броевите 5, 6, 7 и 8.

Втор начин. Имаме $4^y \equiv 4, 5, 9, 3, 1 \pmod{11}$, $x^5 \equiv 0, 1, 10 \pmod{11}$, па затоа $2013^z \equiv 0 \pmod{11}$, па затоа мора да е $4^y \equiv 0 \pmod{11}$, од каде добиваме $5 \mid y$. Нека $y = 5t$, $t \in \mathbb{N}$ и равенката да ја запишеме во видот

$$(x + 4^t)(x^4 - 4^t x^3 + 4^{2t} x^2 - 4^{3t} x + 4^{4t}) = (3 \cdot 11 \cdot 61)^z.$$

Како и при првиот начин на решавање заклучуваме дека множителите на левата страна на последната равенка се заемно прости и бидејќи 3 не е делител

на вториот множител (Докаѓи!), заклучуваме дека $3^z \mid x+4^t$. Ќе разгледаме два случаја. Ако $\text{NZD}(x+4^t, 11 \cdot 61) = 1$, тогаш

$$3^z = x+4^t \text{ и } 2013^z = x^5 + 4^{5t} < (x+4^t)^5 = 243^z,$$

што е противречност. Ако пак $\text{NZD}(x+4^t, 11 \cdot 61) > 1$, тогаш

$$x+4^t \geq 33^z \text{ и } 2013^z = x^5 + 4^{5t} \geq \frac{(x+4^t)^5}{15} \geq \frac{33^{5z}}{16} > 2 \cdot (33^4)^z > 2013^z,$$

што е противречност.

3. Со \mathbb{R}_+ да го означиме множеството позитивни реални броеви. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ такви што за секои $x, y, z, k \in \mathbb{R}_+$ важи

- 1) $xf(x, y, z) = zf(z, y, x)$,
- 2) $f(x, ky, k^2z) = kf(x, y, z)$ и
- 3) $f(1, k, k+1) = k+1$.

Решение. *Прв начин.* Од својствата на функцијата f следува дека за секои $x, y, z, a, b > 0$ важи

$$f(a^2x, aby, b^2z) = bf(a^2x, ay, z) = b \frac{z}{a^2x} f(z, ay, a^2x) = \frac{bz}{ax} f(z, y, x) = \frac{b}{a} f(x, y, z).$$

Броевите a и b ќе ги избереме така што тројката (a^2x, aby, b^2z) и од облик $(1, k, k+1)$, за некој k . Нека земеме $a = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и b така да важи $b^2z - aby = 1$.

Последната равенка ја решаваме по b и добиваме $b = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2z\sqrt{x}}$ и

$k = \frac{y(y + \sqrt{y^2 + 4xz})}{2xz}$. Сега лесно следува дека

$$f(x, y, z) = \frac{a}{b} f(a^2x, aby, b^2z) = \frac{a}{b} f(1, k, k+1) = \frac{a}{b} (k+1) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2x}.$$

Непосредно се проверува дека функцијата f ги задоволува условите на задачата.

Втор начин. Од 2) и 3) следува

$$f(1, tk, t^2(k+1)) = tf(1, k, k+1) = t(k+1).$$

Да ставиме $tk = a$ и $t^2(k+1) = b$. Јасно променливите a и b може да ги при-

мат сите вредности на \mathbb{R}_+ . Тогаш $t = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ и

$$f(1, a, b) = a + t = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Сега од 1) добиваме $f(b, a, 1) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b}$. Според тоа,

$$f(b, c, a) = f\left(b, \frac{a}{\sqrt{c}}, \sqrt{c}, 1 \cdot \sqrt{c^2}\right) = \sqrt{c} f\left(b, \frac{a}{\sqrt{c}}, 1\right) = \sqrt{c} \frac{\frac{a}{\sqrt{c}} + \sqrt{\frac{a^2}{c} + 4b}}{2b} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b},$$

каде c е произволен број од \mathbb{R}_+ . Непосредно се проверува дека функцијата

$$f(x, y, z) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2x}$$

ги задоволува условите на задачата.

4. На математички натпревар некои учесници се пријатели (пријателството е симетрична релација, т.е. ако A е пријател на B , тогаш и B е пријател на A). За различните натпреварувачи A_1, A_2, \dots, A_n , каде $n \geq 3$, велиме дека формираат *скоро пријателски циклус* ако A_i не е пријател со A_{i+1} за $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$), додека сите останати парови натпреварувачи од овој циклус пријатели.

Притоа, на овој натпревар важи:

За секој натпреварувач C и секој скоро пријателски циклус S кој не го содржи C , множеството натпреварувачи D од S кои не се пријатели со C има најмногу еден елемент.

Докажи дека сите натпреварувачи може да се распоредат во три соби така што секои два натпреварувачи кои се наоѓаат во иста соба се пријатели.

Решение. Разгледуваме граф \mathfrak{G} чии темиња соодветствуваат на натпреварувачите при што две темиња се поврзани со ребро ако и само ако соодветните натпреварувачи не се пријатели.

Лема. Графот \mathfrak{G} содржи теме со степен помал или еднаков на 2.

Доказ. Нека претпоставиме дека секое теме има степен поголем или еднаков на три. Да го разгледаме најдолгиот индуциран пат во графот $P = u_0 u_1 \dots u_k$ (пат во кој никои две несоседни темиња не се поврзани). Темето u_0 е поврзано најмалку со уште две темиња v и w и тие се надвор од патот P . Бидејќи P е најдолгиот индуциран пат, темињата v и w мора да имаат соседи во тој пат. Нека u_i и u_j се по ред соседите на v и w со најмали индекси i, j и нека без ограничување на општоста $i \geq j$. Тогаш u_0, u_1, \dots, u_i, v формираат скоро пријателски циклус, а на него w има два соседи u_0 и u_j , што е противречност. ■

Да се вратиме на тврдењето на задачата кое ќе го докажеме со индукција по бројот на темињата n на \mathfrak{G} . За $n \leq 3$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$ и ќе го докажеме за n . Според лемата, во \mathfrak{G} постои теме v чиј степен е помал или еднаков на два. Графот \mathfrak{G}' добиен со бришење на темето v и сите ребра кои излегуваат од него, очигледно ги задоволува условите на задачата, па неговите темиња може да се поделат во три соби на саканиот начин. Притоа v нема соседи барем во една соба, па може да се стави во таа соба. Со ова доказот е завршен.