Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА II

(РИМАН-СТИЛТЕЈСОВ ИНТЕГРАЛ.
МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ)

Скопје, 2019

Рецензенти
Проф. Д-р Алекса Малчески
Проф. Д-р Весна Манова Ераковиќ

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.55(075.3)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математичка анализа 2 : (Риман-Стилтејсов интеграл. метрички простори) / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 366 стр. ; 25 см

За авторот: стр. 365-366. - Библиографија: стр. 351-356. - Регистри

ISBN 978-608-4904-78-6

а) Математичка анализа - Метрички простори - Вежби
COBISS.MK-ID 111920394

СОДРЖИНА

X глава. ФУНКЦИИ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

XI глава. СЕПАРАБИЛНОСТ

XII глава. КОМПЛЕТНОСТ

XIII глава. КОМПАКТНОСТ

XIV глава. СВРЗАНОСТ

XV глава. ФУНКЦИОНАЛНИ ПРОСТОРИ

ДОДАТОК. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Оваа книга е продолжение на книгите *Основи на математичка анализа* и *Математичка анализа* 1**.** Книгата содржи целосен опфат на разработуваниот материјал кој е неопходен за натамошното изучување на математичката анализа. Материјалот е поделен на осум глави, и тоа:

1. Риман-Стилтејсов интеграл,
2. Метрички простори,
3. Функции на метрички простори,
4. Сепарабилност,
5. Комплетност,
6. Компактност,
7. Сврзаност и
8. Функционални простори.

Носечки дел на книгата се метричките простори и нивните својства кои се разработени во одделните глави. Притоа овие простори се разработуваат од гледна точка на математичката анализа, во што пристапот значително се разликува од соодветните разгледувања во користената литература. Имено, овие простори најчесто се проучуваат како примери на тополошки простори во рамките на бројните монографии од областа на топологијата. Токму затоа, повеќето од бројните теореми, леми и последици се класично докажани и истите можат да се најдат во повеќето книги од користената литература. Последното е од посебна важност, бидејќи совладувањето на изложените содржини може да послужи како добра основа за изучувањето како на топологијата, така и на функционалната анализа.

На крајот од книгава, во посебен додаток, е разработена основната теорема на алгебрата. При доказот на оваа фундаментална теорема користени се само претходно усвоените знаења за полиномите со реални коефициенти, комплексните броеви и метричките простори, па така читателот кој сака да го усвои доказот на оваа теорема нема потреба дополнително да усвојува содржини од комплексната анализа.

Изучувањето на математичката анализа, како и на секоја математичка дисциплина, не е можно без систематско самостојно решавање на задачи. Токму затоа, при изложувањето на материјалот се разработени 108 примери со кои се појаснуваат воведените поими и презентираните тврдења и на крајот од секоја глава се дадени задачи, вкупно 324. Дел од примерите и задачите содржат и по неколку подзадачи, па така бројот на истите е значително поголем. Примерите и задачите се така избрани, што дел од нив се во функција на усвојување на презентираниот материјал, дел се наменети за утврдување на усвоените знаења, но има и задачи кои се од истражувачки карактер. Покрај тоа, да спомeнеме дека во примерите повеќето класични метрички простори, како што се: $(\mathbf{R}^n, \rho_p)$, $1 \le p \le \infty$, l^p, $1 \le p \le \infty$, c, s, c_0, $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_p)$, $1 \le p \le \infty$ и слично, се детално разработени. Притоа, посебно внимание е посветено на разгледувањето на комплетноста, сепарабилноста и компактноста на овие простори.

На крајот од книгата е даден индекс на користените поими, листа на знаменити математичари, како и список на користената литература, кој е доста обемен и ја содржи литературата која е користена при пишувањето на сите делови од едицијата *Математичка анализа*.

Пријатна должност и особено задоволство ми е да им искажам благодарност на рецензентите проф. д-р Алекса Малчески и проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ кои со своите забелешки и сугестии допринесоа за подобрување на содржината на оваа книга. Исто така сакам да му се заблагодарам и на колегите Вера Малческа и Самоил Малчески кои внимателно го прочитаа ракописот, со што допринесоа значително да се намалат грешките кои неминовно го пратат издавањето на секоја книга. Секако, за појавувањето на оваа книга од посебно значење е постојаната несебична подршка на мојата сопруга Цветанка Малческа, за што посебно и благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сум однапред благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија.

Септември, 2011 Авторот
Скопје

VIII ГЛАВА

РИМАН-СТИЛТЕЈСОВ ИНТЕГРАЛ

Во глава V го проучивме Римановиот интеграл и критериумите за интеграбилност по Риман. Во оваа глава ќе се осврнеме на неговото обопштување познато како Риман-Стилтејсов интеграл. За таа цел прво ќе се навратиме на монотоните функции и на таканаречените функции со ограничена варијација.

1. МОНОТОНИ ФУНКЦИИ

1.1. Во овој параграф ќе разгледаме дополнителни својства на монотоно неопаѓачките функции кои ги разгледавме во III 4.5. Во теорема III 6.6 докажавме дека секоја монотоно растечка и непрекината функција $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ таква што

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=c \text{ и } \lim_{x\to b^-} f(x)=d$$

има инверзна функција $g:(c,d)\to\mathbf{R}$ која е непрекината и монотоно растечка. Понатаму, во теорема III 9.5. докажавме дека монотона функција $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ има само точки на прекин од прв ред и тоа најмногу пребројливо многу, а во параграф IV 13 ја разгледавме монотоноста на диференцијабилните функции.

Јасно, за монотоно неопаѓачка функција $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ во секоја точка на прекин $x_0\in(a,b)$ левата и десната граница $f(x_0^-)$ и $f(x_0^+)$ постојат и се конечни, што значи бројот $f(x_0^+)-f(x_0^-)$ постои. Понатаму, ако x_0 е точка на прекин од втор ред на f и ако таа е прекината, на пример од десно во x_0, тогаш десниот извод во таа точка не постои и

$$\lim_{h\to 0^+}\tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty,$$

во зависност од тоа дали функцијата f расте или опаѓа. Меѓутоа, извод на монотона функција не мора да постои дури и во одделни точки во кои функцијата е непрекината, што може да се види од следниов пример.

Пример. Да ја разгледаме функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{за } x<0 \\ \tfrac{1}{2^{2k-1}}, & \text{за } x\in[\tfrac{1}{2^{2k}},\tfrac{1}{2^{2k-1}}],\ k=1,2,3,\dots \\ 3x-\tfrac{1}{2^{2k-2}}, & \text{за } x\in[\tfrac{1}{2^{2k-1}},\tfrac{1}{2^{2k-2}}],\ k=1,2,3,\dots \\ 2, & \text{за } x\geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Функцијата f е непрекината на целата реална права, таа е монотоно неопаѓачка и истата нема извод во $x=0$ и во секоја точка $x_i=\frac{1}{2^i}$, $i=0,1,\ldots$. Притоа, во точката $x=0$ оваа функција нема десен извод.

Бидејќи функцијата (1) нема десен извод во точката $x=0$, добиваме дека функцијата $f(x-c)$ нема десен извод во точката $x=c$. Според тоа, функцијата $g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f(x-c_i)$ нема десен извод во произволно избрани точки $c_i, i=1,2,\ldots,n$ и ако $a_i>0$, тогаш $g(x)$ монотоно не опаѓа.

Понатаму, нека $c_i, i=1,2,\ldots$ е множеството рационални броеви и да ја разгледаме функционалната низа $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, определена со: $g_i(x)=\frac{1}{i^2}f(x-c_i)$, $i=1,2,\ldots$. Притоа, $|g_i(x)|\le\frac{2}{i^2}$, за секој $i=1,2,\ldots$ и како бројниот ред $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{2}{i^2}$ конвергира од теорема VII 3.9 (Ваерштрас) следува дека редот $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}f(x-c_i)$ рамномерно конвергира, а од теорема VII 4.1 следува дека граничната функција $h(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}f(x-c_i)$ е непрекината. Јасно, функцијата $h(x)$ е монотона и за ниту еден рационален број оваа функција нема десен извод. ♦

1.2. Дефиниција. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е монотоно неопаѓачка функција. Ако за точката $x_0\in[a,b]$ важи $f(x_0^+)-f(x_0^-)>0$, тогаш бројот $f(x_0^+)-f(x_0^-)$ го нарекуваме *скок на функцијата* f во точката x_0.

1.3. Лема. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е монотоно неопаѓачка функција и $x_k\in[a,b],\ k=1,2,\ldots,n$ се такви, што $x_i\ne x_j$ за $i\ne j$. Тогаш,

$$\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^+)-f(x_k^-)]\le f(b)-f(a).$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Тогаш

$$f(a)\le f(x_1^+),\ f(x_n^+)\le f(b) \text{ и } f(\tfrac{x_{k-1}+x_k}{2})\le f(x_k^-)\le f(x_k^+)\le f(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}),$$

за $2\le k\le n-1$, па затоа

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^+)-f(x_k^-)]&\le\sum_{k=2}^{n-1}[f(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2})-f(\tfrac{x_{k-1}+x_k}{2})]+f(\tfrac{x_1+x_2}{2})-f(x_1^-)+f(x_n^+)-f(\tfrac{x_{n-1}+x_n}{2})\\&=f(x_n^+)-f(x_1^-)\le f(b)-f(a),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

1.4. Последица. Нека $\{x_n \mid n \ge 1\}$ е множеството од сите точки на скок на монотоно неопаѓачката функција $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. Тогаш,

$$\sum_{k\ge1} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] \le f(b) - f(a). \qquad (2)$$

Доказ. Непосредно следува од лема 1.3. ♦

1.5. Забелешка. Функцијата f може да биде непрекината на $[a,b]$. Тогаш, множеството точки на скок на функцијата е празно и во овој случај сметаме дека левата страна на неравенството (2) е еднаква на нула и истата, воопшто говорено, е ред со ненегативни членови.

1.6. Дефиниција. Нека $\{x_n \mid n \ge 1\}$ е множеството од сите точки на скок на функцијата f на $[a,b]$. Ако

$$\sum_{k\ge1} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] = f(b) - f(a),$$

тогаш функцијата f ја нарекуваме *функција на скок*.

1.7. Теорема (теорема за разложување). Нека f е монотоно неопаѓачка функција на $[a,b]$. Тогаш

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad x \in [a,b]$$

каде g е функција на скок, која има скокови во истите точки и со иста големина, како и функцијата f, а h е монотоно неопаѓачка непрекината функција на $[a,b]$.

Доказ. Нека $\{x_n \mid n \ge 1\}$ се сите точки на скок на функцијата f. Ставаме

$$\begin{aligned} &g(a) = 0, \\ &g(x) = \sum_{n:\, x_n < x} [f(x_n^+) - f(x_n^-)] + f(x) - f(x^-), \quad a < x \le b, \\ &h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Ако $a \le x' < x'' \le b$, тогаш

$$g(x'') - g(x') = f(x'^+) - f(x') + \sum_{n:\, x' < x_n < x''} [f(x_n^+) - f(x_n^-)] + f(x'') - f(x''^-) \qquad (3)$$

Сега од лема 1.3 следува дека

$$0 \le g(x'') - g(x') \le f(x'') - f(x') \qquad (4)$$

и

$$f(x') - g(x') \le f(x'') - g(x''),$$

од што следува дека g и h се монотоно неопаѓачки функции на $[a,b]$. Од равенството (3) добиваме

$$g(x'') - g(x') \geq f(x'^{+}) - f(x'). \tag{5}$$

Сега, од неравенствата (4) и (5), кога $x'' \to x'$ наоѓаме

$$g(x'^{+}) - g(x') \leq f(x'^{+}) - f(x') \text{ и } g(x'^{+}) - g(x') \geq f(x'^{+}) - f(x')$$

што значи

$$g(x'^{+}) - g(x') = f(x'^{+}) - f(x') \text{, т.е. } h(x'^{+}) = h(x').$$

Аналогно се докажува дека $h(x'^{-}) = h(x')$, што значи дека $h \in \mathbf{C}([a,b])$ (непрекинатоста во точката b се докажува аналогно). ♦

1.8. Лема. а) Нека $\{f_n\}$ е низа функции дефинирани на $[a,b]$ такви што функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира за секој $x \in [a,b]$ и нека

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Ако, за секој $n = 1,2,...$ функцијата $f_n(x)$ не опаѓа (не расте) на $[a,b]$, тогаш и функцијата $f(x)$ не опаѓа (не расте) на $[a,b]$.

б) Ако функцијата f монотоно расте и е непрекината на $[a,b]$, $a > 0$, тогаш функцијата $F(x) = \frac{1}{x}\int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$ строго монотоно расте.

Доказ. а) Нека за секој $n = 1,2,...$ функцијата $f_n(x)$ не опаѓа на $[a,b]$. Тогаш, за секои $x_1, x_2 \in [a,b]$ такви, што $x_1 < x_2$ важи

$$f_n(x_1) \leq f_n(x_2) \text{, за секој } n = 1,2,...$$

што значи $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x_1) \leq \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x_2)$, од што следува $f(x_1) \leq f(x_2)$.

б) Од теорема V 11.5 следува дека $f \in \mathbf{R}([a,b])$, а од теорема V 16.2 следува дека функцијата

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt \text{, } x \in [a,b]$$

е диференцијабилна во секоја точка од $[a,b]$ и притоа важи $H'(x) = f(x)$, за секој $x \in [a,b]$.

Од монотоноста на функцијата f следува $f(t) \leq f(x)$, за секој $t \in [a,x]$, па од последица V 14.7 следува

$$\int_a^x f(t)dt \le \int_a^x f(x)dt = (x-a)f(x) < xf(x) .$$

Понатаму, за диференцијабилната функција $F(x) = \frac{1}{x} H(x)$ важи

$$F'(x) = [\tfrac{1}{x} H(x)]' = -\tfrac{1}{x^2} H(x) + \tfrac{1}{x} H'(x) = \tfrac{1}{x^2}[xf(x) - \int_a^x f(t)dt] > 0 .$$

Конечно, од теорема IV 13.2 следува дека функцијата $F(x)$ строго монотоно расте на $[a,b]$. ♦

1.9. Забелешка. Ако во лема 1.8 само една од функциите $f_n(x)$ монотоно расте (монотоно опаѓа), тогаш и функцијата $f(x)$ монотоно расте (монотоно опаѓа). Меѓутоа, ако е дадена низа функции $\{g_n\}$, дефинирани на $[a,b]$ и ако

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \text{, за секој } x \in [a,b]$$

и ако сите функции монотоно растат, тогаш функцијата $g(x)$ не мора монотоно да расте, бидејќи при $x_1 < x_2$ од $g_n(x_1) < g_n(x_2)$, за секој $n = 1,2,...$ следува само

$$g(x_1) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_1) \le \lim_{n\to\infty} g_n(x_2) = g(x_2) .$$

Понатаму, ако ненегативната функција $f(x)$ не опаѓа на $[a,b]$ и $\lambda > 0$, тогаш и функцијата $[f(x)]^\lambda$ не опаѓа на $[a,b]$, а функцијата $[f(x)]^{-\lambda}$ не расте на $[a,b]$. Исто така, ако функциите g и f не опаѓаат, тогаш и функцијата $g(f(x))$ не опаѓа, а ако функцијата g не расте, а функцијата f не опаѓа, тогаш функцијата $f(g(x))$ не расте. Точноста на претходно искажаните тврдења непосредно следува од својствата на степенската фунција и дефиницијата на монотоните функции.

1.10. Пример. а) Да ги разгледаме функциите $f(x) = x$ и $g(x) = x^3$, $x \in [-2,3]$ кои монотоно растат на разгледуваниот интервал. Меѓутоа, функцијата $f(x)g(x) = x^4$ не е монотона на овој интервал.

б) Во пример 1.1 ја конструиравме функцијата $h(x)$ која е непрекината, монотона и за ниту еден рационален број оваа функција нема десен извод. Овде ќе дадеме пример на монотоно растечка функција која е прекината во секоја рационална точка, а е непрекината во секоја ирационална точка.

Нека $\{q_i\}_{i=1}^\infty$ е низата од сите рационални броеви од интервалот $[0,1]$. Понатаму, нека $\sum_{n=1}^\infty a_n = A$ е конвергентен ред со позитивни членови. Дефинираме функција

$$f(x)=\sum_{q_n<x} a_n\ ,\ x\in[0,1]\,, \qquad (6)$$

каде се собираат само оние членови на редот a_n за чиј индекс важи $q_n < x$.

Ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1 < x_2$, тогаш постои q_m таков што $x_1 < q_m < x_2$, па затоа $f(x_2) - f(x_1) \geq a_m > 0$, што значи дека f монотоно расте на $[0,1]$.

Нека $x \in [0,1]$ е рационален број и $x = q_p$. Тогаш

$$f(x+h)-f(x)\geq a_p\,,\ \text{за секој}\ h>0\,,$$

па затоа

$$f(x^+)-f(x)\geq a_p>0\,,$$

односно f е прекината од десно во x. Аналогно се докажува дека f е прекината од лево во x.

Нека $x \in [0,1]$ е ирационален број, а n_0 е таков, што

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n<\varepsilon\,.$$

Земаме h таков, што во интервалот $[x, x+h]$ не се содржи ниеден од броевите $q_1, q_2, ..., q_{n_0}$. Тогаш,

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{x\leq q_n<x+h} a_n<\varepsilon\,,$$

од што следува дека функцијата f е непрекината од десно. Непрекинатоста од лево се докажува аналогно. ♦

2. ФУНКЦИИ СО ОГРАНИЧЕНА ВАРИЈАЦИЈА

2.1. Дефиниција. Функцијата $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ја нарекуваме *функција со ограничена варијација* на интервалот $[a,b]$, ако постои $M \in \mathbf{R}$ таков што за секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ важи

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\,f(x_{i+1})-f(x_i)\,|\leq M\,.$$

Множеството од сите функции со ограничена варијација на $[a,b]$ го означуваме со $\mathbf{BV}([a,b])$. Ако $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш бројот

$$V(f,[a,b])=\sup_{\lambda}\sum_{i=0}^{n-1} |\,f(x_{i+1})-f(x_i)\,|\,,$$

каде супремумот се зема по сите можни поделби $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$, го нарекуваме *варијација на функцијата* f *на* $[a,b]$.

Ако $V(f,[a,b]) = +\infty$, тогаш за f велиме дека *нема ограничена варијација на* $[a,b]$.

2.2. Пример. а) Нека f е монотона функција на $[a,b]$. Тогаш $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и $V(f,[a,b]) = |f(b) - f(a)|$.

Навистина, нека f монотоно не опаѓа на $[a,b]$. За секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = f(x_n) - f(x_0)\\ &= f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|\end{aligned}$$

Аналогно се разгледува случајот кога f монотоно не расте на $[a,b]$.

б) Ако функцијата f на $[a,b]$ има ограничен извод, т.е. ако постои $M > 0$ таков што $|f'(x)| \le M$, за секој $x \in [a,b]$, тогаш

$$f \in \mathbf{BV}([a,b]) \text{ и } V(f,[a,b]) \le M(b-a) .$$

Навистина, од теоремата на Лагранж следува дека за секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ постојат точки $c_i \in (x_i, x_{i+1}), i = 0,1,...,n-1$ такви, што

$$\tfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_i) \text{, за } i = 0,1,...,n-1 ,$$

па затоа

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)| \le \sum_{i=0}^{n-1} M\, |x_{i+1} - x_i| = M(b-a) .$$

в) Функцијата f може да има конечен и определен извод во секоја точка од дефиниционата област, но притоа да не биде функција со ограничена варијација. Во случајов изводот на функцијата е неограничен.

Навистина, да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = x^2 \cos \pi x^{-2} \text{, за } x \in (0,1] \text{ и } f(0) = 0 .$$

Очигледно, изводот на оваа функција постои за секој $x \in [0,1]$ и притоа важи

$$f'(x) = 2x \cos \pi x^{-2} + \tfrac{2\pi}{x} \sin \pi x^{-2} \text{, за } x \in (0,1] \text{ и } f'(0) = 0 .$$

Меѓутоа, функцијата f не е со ограничена варијација на $[0,1]$. Имено, ако ја земеме поделбата

$$x_0 = 0 \text{ , } x_i = \tfrac{1}{\sqrt{n+1-i}} \text{, за } i = 1,2,...,n$$

добиваме

$$\sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i+1} \to \infty, \text{ кога } n \to \infty .$$

г) Очигледно, за да функцијата f, која има определен извод во секоја точка од интервалот $[a,b]$, не е функција со ограничена варијација на овој интервал потребно е таа на овој интервал да има бесконечно многу минимуми и максимуми и уште повеќе нејзиниот извод да не е ограничен на $[a,b]$. Меѓутоа, овие услови не се доволни, што може да се види ако ја разгледаме функцијата

$$f(x) = x^2 \cos \pi x^{-4/3}, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f(0) = 0 .$$

Оваа функција има бесконечно многу максимуми и минимуми на $[0,1]$ и во секоја точка $[0,1]$ има определен извод

$$f'(x) = 2x \cos \pi x^{-4/3} + \tfrac{4\pi}{3} x^{-1/3} \sin \pi x^{-4/3}, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f'(0) = 0$$

кој не е ограничен на $[0,1]$, но сепак таа е со ограничена варијација. Имено, функцијата на секој интервал $[(2k+1)^{-3/4},(2k)^{-3/4}]$, $k = 1,2,...$ има по еден минимум во точка $x_k^{'}$, кој е негативен и по апсолутна вредност помал од $(2k)^{-3/2}$, а на секој интервал $[(2k)^{-3/4},(2k-1)^{-3/4}]$, $k = 1,2,...$ има по еден максимум во точка $x_k^{''}$, кој е позитивен и помал од $(2k-1)^{-3/2}$. Сега, за секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ имаме

$$\sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | < \sum_{k=1}^{\infty} | f(x_k^{''}) - f(x_k^{'}) | < \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^{3/2}} < +\infty,$$

што значи дека функцијата е со ограничена варијација.

д) Класата непрекинати функции и класата функции со ограничена варијација се меѓусебно неспоредливи. Имено, од една страна според а) монотоните функции се функции со ограничена варијација, но како што знаеме монотона функција не мора да биде непрекината. Од друга страна, функцијата

$$f(x) = x \cos \tfrac{\pi}{2x}, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f(0) = 0$$

е непрекината на интервалот $[0,1]$, но таа не е функција со ограничена варијација. Навистина, за поделбата $\lambda = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, ..., \frac{1}{2}, 1\}$ добиваме

$$\sum_{i=0}^{2n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \to +\infty, \text{ кога } n \to \infty . \blacklozenge$$

2.3. Лема. а) $V(f,[a,b]) \geq 0$.

б) $| f(b) - f(a) | \leq V(f,[a,b])$.

в) Ако $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш f е ограничена на $[a,b]$.

Доказ. Тврдењето под а) непосредно следува од дефиниција 2.1, а за тврдењето под б) доволно е во дефиниција 2.1 да земеме $\lambda = \{a,b\}$.

в) Нека $x \in [a,b]$. Тогаш,

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le |f(a)| + |f(x) - f(a)| \le |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \\ &\le |f(a)| + V(f,[a,b]).\end{aligned}$$

Според тоа,

$$|f(x)| \le |f(a)| + V(f,[a,b]) \text{, за секој } x \in [a,b]. \ \blacklozenge$$

2.4. Лема. Ако $f, g \in \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш

а) $cf \in \mathbf{BV}([a,b])$ за секој $c \in \mathbf{R}$,

б) $f \pm g, fg \in \mathbf{BV}([a,b])$,

в) ако дополнително постои $\alpha > 0$ таков што за секој $x \in [a,b]$ важи $|g(x)| \ge \alpha$, тогаш $\frac{f}{g} \in \mathbf{BV}([a,b])$ и

г) $|f| \in \mathbf{BV}([a,b])$.

Доказ. а) За секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ имаме

$$\sum_{i=0}^{n-1} |(cf)(x_{i+1}) - (cf)(x_i)| = |c| \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le |c| \cdot V(f,[a,b]),$$

што значи $cf \in \mathbf{BV}([a,b])$ и притоа важи $V(cf,[a,b]) = |c| V(f,[a,b])$ (зошто?).

б) За секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) + g(x_{i+1}) - f(x_i) - g(x_i)| &\le \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \\ &\le V(f,[a,b]) + V(g,[a,b])\end{aligned}$$

што значи $f + g \in \mathbf{BV}([a,b])$ и притоа важи

$$V(f+g,[a,b]) \le V(f,[a,b]) + V(g,[a,b]).$$

Сега од а) имаме $-g \in \mathbf{BV}([a,b])$, па затоа $f - g \in \mathbf{BV}([a,b])$ и притоа важи

$$V(f-g,[a,b]) \le V(f,[a,b]) + V(-g,[a,b]) = V(f,[a,b]) + V(g,[a,b]).$$

Понатаму, од лема 2.3 следува

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)| \le$$

$$\leq [|g(a)|+V(g,[a,b])]\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|+[|f(a)|+V(f,[a,b])]\sum_{i=0}^{n-1}|g(x_{i+1})-g(x_i)|$$
$$\leq [|g(a)|+V(g,[a,b])]\cdot V(f,[a,b])+[|f(a)|+V(f,[a,b])]V(g,[a,b]),$$

што значи $fg \in \mathbf{BV}([a,b])$.

в) Нека $\lambda=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ е произволна поделба на $[a,b]$. Од условот и од лема 2.3 имаме

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{f(x_{i+1})}{g(x_{i+1})}-\frac{f(x_i)}{g(x_i)}\right|\leq \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})g(x_i)-f(x_i)g(x_{i+1})|$$
$$\leq \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=0}^{n-1}|g(x_i)|\cdot|f(x_{i+1})-f(x_i)|+\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_i)|\cdot|g(x_{i+1})-g(x_i)|$$
$$\leq \frac{|g(a)|+V(g,[a,b])}{\alpha^2}\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|+\frac{|f(a)|+V(f,[a,b])}{\alpha^2}\sum_{i=0}^{n-1}|g(x_{i+1})-g(x_i)|$$
$$\leq \frac{|g(a)|+V(g,[a,b])}{\alpha^2}V(f,[a,b])+\frac{|f(a)|+V(f,[a,b])}{\alpha^2}V(g,[a,b]),$$

што значи $\frac{f}{g}\in \mathbf{BV}([a,b])$.

г) Нека $\lambda=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ е произволна поделба на $[a,b]$. Имаме

$$\sum_{i=0}^{n-1}||f(x_{i+1})|-|f(x_i)||\leq \sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

што значи $|f|\in \mathbf{BV}([a,b])$. ♦

2.5. Забелешка. Обратното тврдење на лема 2.4 г) не важи. Имено, ако $|f|\in \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш не мора да важи $f\in \mathbf{BV}([a,b])$. Навистина, за функцијата $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ дефинирана со

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q}\\ -1, & x\in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

важи $|f|=1,\ x\in\mathbf{R}$ и јасно $|f|\in \mathbf{BV}([a,b])$, но притоа $f\notin \mathbf{BV}([a,b])$. ♦

2.6. Забелешка. Од лема 2.4 б) и принципот на математичка индукција непосредно следува дека, ако $f\in \mathbf{BV}([a,b])$ и $p\in\mathbf{N}$, тогаш $f^p\in \mathbf{BV}([a,b])$. Природно е да се запрашаме дали од $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$ и $f\in \mathbf{BV}([a,b])$ следува $\sqrt{f}\in$ $\mathbf{BV}([a,b])$.

Одговорот на ова прашање е негативен, што може да се види од следниов пример. Нека $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ е определена со

$$f(x)=x^2\sin^2\frac{1}{x},\ x\in(0,1] \text{ и } f(0)=0.$$

Аналогно како во пример 2.2 г) може да се докаже дека $f \in \mathbf{BV}([0,1])$. Меѓутоа,

$$\sqrt{f(x)} = x\,|\sin\tfrac{1}{x}|,\ x \in (0,1] \text{ и } \sqrt{f(0)} = 0 .$$

Со аналогни размислувања како во пример 2.2 д) се докажuva дека $\sqrt{f} \notin \mathbf{BV}([0,1])$.

Воопшто, дека функцијата $f^p(x), 0 < p < 1$ не мора да биде функција со ограничена варијација, ако $f \in \mathbf{BV}([0,1])$, можеме да видиме ако ја разгледаме функцијата $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/p}, & x = \frac{1}{n}, n = 1,2,3,... \\ 0, & x \neq \frac{1}{n}, n = 1,2,3,... \end{cases}$$

Тогаш, од пример VI 3.2 следува дека

$$V(f,[0,1]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}} < \infty ,$$

т.е. $f \in \mathbf{BV}([0,1])$, меѓутоа

$$V(f^p,[0,1]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty ,$$

што значи дека $f^p \notin \mathbf{BV}([0,1])$. ♦

2.7. Лема (адитивност на варијацијата). Нека $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и $c \in (a,b)$. Тогаш, $f \in \mathbf{BV}([a,c])$, $f \in \mathbf{BV}([c,b])$ и

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) .$$

Доказ. Нека $\lambda_1 = \{u_i\}_{i=0}^{n_1}$ и $\lambda_2 = \{v_i\}_{i=0}^{n_2}$ се поделби на $[a,c]$ и $[c,b]$, соодветно. Тогаш, $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ е поделба на $[a,b]$ и притоа важи

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} |f(u_{i+1}) - f(u_i)| + \sum_{i=0}^{n_2-1} |f(v_{i+1}) - f(v_i)| \le V(f,[a,b]), \tag{1}$$

од што следува

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} |f(u_{i+1}) - f(u_i)| \le V(f,[a,b]) \text{ и } \sum_{i=0}^{n_2-1} |f(v_{i+1}) - f(v_i)| \le V(f,[a,b]) ,$$

па затоа $f \in \mathbf{BV}([a,c])$ и $f \in \mathbf{BV}([c,b])$. Понатаму, од неравенството (1) следува

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \le V(f,[a,b]) . \tag{2}$$

Нека $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ е поделба на $[a,b]$ и $c \in (x_k, x_{k+1}]$. Тогаш,

$$\sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | \le \sum_{i=0}^{k-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | + | f(c) - f(x_k) + | f(x_{k+1}) - f(c) |$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | \le V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]),$$

од што следува

$$V(f,[a,b]) \le V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) . \tag{3}$$

Конечно, од неравенствата (2) и (3) следува бараното равенство. ♦

2.8. Забелешка. Од вториот дел од доказот на претходната теорема непосредно следува тврдењето:

ако $f \in \mathbf{BV}([a,c])$ *и* $f \in \mathbf{BV}([c,b])$, *тогаш* $f \in \mathbf{BV}([a,b])$.

2.9. Теорема (Жордан). $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ ако и само ако f може да се претстави како разлика на две монотоно неопаѓачки функции на $[a,b]$.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека $f(x) = g(x) - h(x)$, каде g и h се монотоно неопаѓачки функции на $[a,b]$. Тогаш, од пример 2.2 а) следува дека $g, h \in \mathbf{BV}([a,b])$, па од лема 2.4 б) следува $f = g - h \in \mathbf{BV}([a,b])$.

$\Rightarrow$. Нека $f \in \mathbf{BV}([a,b])$. Дефинираме функции g и h со:

$$g(a) = 0, \quad g(x) = V(f,[a,x]), x \in (a,b] \text{ и } h(x) = f(x) - g(x), x \in [a,b] .$$

Функцијата g монотоно не опаѓа на $[a,b]$, бидејќи за $a \le x' < x'' \le b$, согласно лемите 2.7 и 2.3 а) важи

$$g(x'') = V(f,[a,x'']) = V(f,[a,x']) + V(f,[x',x'']) \ge V(f,[a,x']) = g(x') .$$

Функцијата h монотоно не опаѓа на $[a,b]$, бидејќи за $a \le x' < x'' \le b$ согласно лемите 2.7 и 2.3 б) важи

$$h(x'') - h(x') = g(x'') - f(x'') - g(x') + f(x') = V(f,[x',x'']) - [f(x'') - f(x')] \ge 0 . \ ♦$$

2.10. Пример. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (1,2] \\ -x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$$

Ќе ја определиме функцијата $v(x) = V(f,[0,x])$, за $x \in [0,3]$.

Прво да забележиме, дека во општ случај при определувањето на функцијата $v(x)$ корисно е дефиниционата област на функцијата f да се разбие на интервали на монотоност, бидејќи варијацијата на монотона функција лесно се пресметува (пример 2.2. а)). Понатаму, додавајќи ги апсолутните вредности на скоковите на краевите на интервалите лесно ја наоѓаме функцијата $v(x)$. Во нашиот случај имаме:

- ако $x \in [0,1]$, тогаш $v(x) = f(x) - f(0) = x^2$,

- ако $x \in (1,2]$, тогаш $v(x) = V(f,[0,1]) + V(f,[1,x]) = f(1) - f(0) + 1 = 2$,

- ако $x \in (2,3]$, тогаш

$$v(x) = V(f,[0,2]) + V(f,[2,x]) = 2 + V(f,[2,x]) = 2 + 1 + |-x+3-1| = 3 + x - 2 = x + 1.$$

Според тоа,

$$v(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in (1,2] \\ x+1, & x \in (2,3]. \end{cases}$$

Понатаму, функциите $v(x)$ и $u(x) = v(x) - f(x)$ се монотоно растечки, па затоа едно од можните претставувања на функцијата f како разлика на две монотони функции е $f(x) = v(x) - u(x)$. ♦

2.11. Во теорема 2.9 докажавме дека $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ ако и само ако $f(x) = g(x) - h(x)$, каде g и h се монотоно неопаѓачки функции на $[a,b]$. Понатаму, според теорема 1.7 имаме

$$g(x) = g_s(x) + \overline{g}(x) \text{ и } h(x) = h_s(x) + \overline{h}(x),$$

каде g_s и h_s се функциите на скок, а $\overline{g}$ и $\overline{h}$ се непрекинатите функции во разложувањата на g и h, соодветно. Јасно, $\overline{f}(x) = \overline{g}(x) - \overline{h}(x)$ е непрекината функција, а $f_s(x) = g_s(x) - h_s(x)$ е функција на скок (зошто?). Според тоа,

$$f(x) = g(x) - h(x) = \overline{g}(x) + g_s(x) - \overline{h}(x) - h_s(x) = \overline{f}(x) + f_s(x).$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Ако $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш $f(x) = \overline{f}(x) + f_s(x)$ каде $f_s(x)$ е функција на скок, а $\overline{f}(x)$ е непрекината функција. ♦

2.12. Последица. Ако $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш f може да има најмногу пребројливо многу точки на прекин и тоа само од прв ред.

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.11 и теорема III 9.5. ♦

2.13. Последица. Ако $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и $u:[c,d] \to [a,b]$ е монотона функција, тогаш $f \circ u \in \mathbf{BV}([c,d])$.

Доказ. Бидејќи $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, од теорема 2.9 следува дека

$$f(x) = g(x) - h(x)\,,\ x \in [a,b]\,,$$

каде g и h се монотоно неопаѓачки функции. Понатаму, лесно се проверува дека $g \circ u$ и $h \circ u$ се монотони функции на $[a,b]$ и како

$$(f \circ u)(x) = (g \circ u)(x) - (h \circ u)(x)\,,\ x \in [c,d]$$

од пример 2.2 а) и лема 2.4 б) следува дека $f \circ u \in \mathbf{BV}([c,d])$. ♦

2.14. Забелешка. Ако u е функција со ограничена варијација, а f е монотона функција, тогаш $f \circ u$ не мора да е функција со ограничена варијација. Навистина, функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е монотона на интервалот $[0,1]$, а за функцијата

$$u(x) = x^2 \sin^2 \tfrac{1}{x},\ x \in (0,1],\ u(0) = 0$$

важи $u \in \mathbf{BV}([0,1])$, но од примерот во забелешка 2.6 следува дека $f \circ u \notin \mathbf{BV}([0,1])$. ♦

2.15. Теорема. Нека $f_n \in \mathbf{BV}([a,b])$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира по точки кон функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. Ако низата $\{V(f_n,[a,b])\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, т.е. ако постои $M \in \mathbf{R}$ таков, што

$$V(f_n,[a,b]) \le M \text{ , за секој } n \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

тогаш $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и притоа важи $V(f,[a,b]) \le M$.

Доказ. Нека $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{m}$ е произволна поделба на $[a,b]$. Од $f_n \in \mathbf{BV}([a,b])$, следува

$$\sum_{i=0}^{m-1} | f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i) | \le V(f_n,[a,b]) \text{, за секој } n \in \mathbf{N} \qquad (5).$$

Понатаму, од (4) и (5) добиваме дека

$$\sum_{i=0}^{m-1} | f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i) | \le M \text{ , за секој } n \in \mathbf{N}\,. \qquad (6).$$

Низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира по точки кон функцијата f и ако во (6) земеме $n \to \infty$ добиваме

$$\sum_{i=0}^{m-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | \le M\ .$$

Но, $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{m}$ е произволна поделба на $[a,b]$, па од последното неравенство следува $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и притоа важи $V(f,[a,b]) \le M$. ♦

2.16. Пример. На крајот од овој параграф ќе ја споредиме класата функции со ограничена варијација со класата Липшицови функции, т.е. функциите кои го задоволуваат Липшицовиот услов (III 8.7). Имено, ќе докажеме, дека ако функцијата f го задоволува Липшицовиот услов на $[a,b]$, тогаш f е со ограничена варијација на $[a,b]$, но дека не секоја функција со ограничена варијација го задоволува Липшицовиот услов.

Навистина, нека постои $K \in \mathbf{R}$ таков што

$$|f(y)-f(x)| \leq K|y-x|, \text{ за секои } x,y \in [a,b].$$

Тогаш, за секоја поделба $\pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ на $[a,b]$ имаме

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})-f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} K|x_{i+1}-x_i| = K\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) = K(b-a),$$

од што следува дека f е функција со ограничена варијација.

Функцијата

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln x}, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

е непрекината и монотоно растечка на интервалот $[0,\frac{1}{2}]$, па затоа таа е со ограничена варијација на $[0,\frac{1}{2}]$. Ќе докажеме дека за секој $K > 0$ постојат точки $x_1, x_2 \in [0,\frac{1}{2}]$ такви што $|g(x_2)-g(x_1)| > K|x_2-x_1|$, што значи дека функцијата g не го задоволува Липшицовиот услов.

Навистина, ако земеме $x_1 = 0$, тогаш од равенството

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|g(x)-g(0)|}{|x-0|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x\ln x|} = +\infty$$

следува дека за секој $K > 0$ постои $x_2 > 0$ таков, што $\frac{|g(x_2)-g(0)|}{|x_2-0|} > K$, т.е.

$$|g(x_2)-g(x_1)| > K|x_2-x_1|. \ \blacklozenge$$

3. ДЕФИНИЦИЈА НА РИМАН-СТИЛТЕЈСОВ ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

3.1. Нека функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$, $[a,b] \subset \mathbf{R}$ е ограничена на интервалот $[a,b]$ и функцијата $\alpha:[a,b] \to \mathbf{R}$ моното не опаѓа на $[a,b]$. За поделбата $\pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ на $[a,b]$ и функцијата f да ставиме

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, за $i = 0,1,...,n-1$ и

$$d(\pi) = \max_{i=0,1,...,n-1} \Delta x_i .$$

Дефиниција. *Долна сума на Дарбу-Стилтејс* го нарекуваме збирот

$$L(f,\alpha;\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)] .$$

Горна сума на Дарбу-Стилтејс го нарекуваме збирот

$$U(f,\alpha;\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)] .$$

За $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,1,2,...,n-1$ збирот

$$S(f,\alpha;\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)] .$$

го нарекуваме *интегрална сума на Стилтејс*.

Забелешка. При $\alpha(x) = x$, $x \in [a,b]$, претходната дефиниција ги опфаќа како парцијален случај сумите на Дарбу и интегралната сума на Риман (дефиниции V 9.3 и V 10.1).

3.2. Лема. За секоја поделба $\pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ на $[a,b]$ и за секои $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,...,n-1$ важи

$$\begin{aligned} \inf_{x\in[a,b]} f(x)\cdot[\alpha(b)-\alpha(a)] \le L(f,\alpha;\pi) \le S(f,\alpha;\pi) \le U(f,\alpha;\pi) \\ \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)\cdot[\alpha(b)-\alpha(a)] \end{aligned} \tag{1}$$

Доказ. Нека $\pi = \{x_i\}_{i=0}^n$ е произволна поделба на $[a,b]$. Бидејќи α монотоно не опаѓа на $[a,b]$ имаме $\alpha(x_{i+1}) \ge \alpha(x_i)$, за $i = 0,1,...,n-1$. Ако неравенствата

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le \sup_{x\in[a,b]} f(x) ,\ i = 0,1,...,n-1$$

ги помножиме со $\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i) \ge 0$, $i = 0,1,...,n-1$, соодветно и ги собереме ги добиваме неравенствата (1). ♦

3.3. Забелешка. Од претходната лема непосредно следува дека множествата $\{L(f,\alpha;\pi) \mid \pi\}$ и $\{U(f,\alpha;\pi) \mid \pi\}$ се ограничени, па затоа има смисла следнава дефиниција.

3.4. Дефиниција. *Долен интеграл на Риман-Стилтејс* го нарекуваме бројот

$$\underline{\int} f(x)d\alpha(x) = \sup_{\pi} L(f,\alpha;\pi) .$$

Горен интеграл на Риман-Стилтејс го нарекуваме бројот

$$\overline{\int} f(x)d\alpha(x) = \inf_{\pi} U(f,\alpha;\pi) .$$

Ако

$$\overline{\int} f(x)d\alpha(x) = \underline{\int} f(x)d\alpha(x) ,$$

тогаш за функцијата f ќе велиме дека е *интеграбилна во однос на функцијата* α *на интервалот* $[a,b]$, а бројот

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \overline{\int} f(x)d\alpha(x) = \underline{\int} f(x)d\alpha(x)$$

го нарекуваме *интеграл на Риман-Стилтејс за функцијата* f *во однос на функцијата* α *на интервалот* $[a,b]$ и пишуваме $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

3.5. Лема. Ако π и π^* се две поделби на $[a,b]$ такви што π^* е пофина од π, тогаш

$$L(f,\alpha;\pi) \le L(f,\alpha;\pi^*) \tag{2}$$

и

$$U(f,\alpha;\pi^*) \le U(f,\alpha;\pi) . \tag{3}$$

Доказ. Нека претпоставиме дека π^* содржи само една точка повеќе од π и нека тоа е точката x^*, $x^* \in (x_{i-1},x_i)$. Означуваме

$$m_1^* = \inf_{x\in[x_{i-1},x^*]} f(x) \text{ и } m_2^* = \inf_{x\in[x^*,x_i]} f(x) .$$

Јасно, $m_1^* \ge m_i$ и $m_2^* \ge m_i$, па затоа

$$\begin{aligned} L(f,\alpha;\pi^*) - L(f,\alpha;\pi) &= m_1^*[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})] + m_2^*[\alpha(x_i)-\alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})] \\ &= (m_1^*-m_i)[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})] + (m_2^*-m_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x^*)] \ge 0. \end{aligned}$$

Сега, ако π^* содржи k точки повеќе од π, тогаш претходното размислување ќе го повториме k -пати и го добиваме неравенството (2).

Аналогно се докажува неравенството (3). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.6. Последица. За секои поделби π_1 и π_2 на $[a,b]$ важи

$$L(f,\alpha;\pi_1) \le U(f,\alpha;\pi_2) .$$

Доказ. Поделбата $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ е пофина од π_1 и π_2. Сега од лемите 3.2 и 3.5 добиваме

$$L(f,\alpha;\pi_1) \le L(f,\alpha;\pi) \le U(f,\alpha;\pi) \le U(f,\alpha;\pi_2).\blacklozenge$$

3.7. Последица. $\underline{\int} f(x)d\alpha(x) \le \overline{\int} f(x)d\alpha(x)$.

Доказ. Нека π_1 и π_2 се произволни поделби на $[a,b]$. Од последица 3.6 имаме $L(f,\alpha;\pi_1) \le U(f,\alpha;\pi_2)$. Од произволноста на π_1 следува

$$\sup_{\pi_1} L(f,\alpha;\pi_1) \le U(f,\alpha;\pi_2), \text{ т.е. } \underline{\int} f(x)d\alpha(x) \le U(f,\alpha;\pi_2).$$

Понатаму, од произволноста на π_2 следува

$$\underline{\int} f(x)d\alpha(x) \le \inf_{\pi_2} U(f,\alpha;\pi_2), \text{ т.е. } \underline{\int} f(x)d\alpha(x) \le \overline{\int} f(x)d\alpha(x). \ \blacklozenge$$

3.8. Теорема. $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π на $[a,b]$ таква што

$$U(f,\alpha;\pi) - L(f,\alpha;\pi) < \varepsilon. \tag{4}$$

Доказ. $\Leftarrow$. За секоја поделба π на $[a,b]$ важи

$$L(f,\alpha;\pi) \le \underline{\int} f(x)d\alpha(x) \le \overline{\int} f(x)d\alpha(x) \le U(f,\alpha;\pi). \tag{5}$$

Ако за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π на $[a,b]$ таква што важи (4), тогаш од неравенствата (5) имаме

$$\overline{\int} f(x)d\alpha(x) - \underline{\int} f(x)d\alpha(x) < \varepsilon.$$

Од произволноста на ε следува

$$\overline{\int} f(x)d\alpha(x) = \underline{\int} f(x)d\alpha(x),$$

т.е. $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

$\Rightarrow$. Обратно, нека $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, постојат поделби π_1 и π_2 такви, што

$$U(f,\alpha;\pi_2) - \int_a^b f(x)d\alpha(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) - L(f,\alpha;\pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Земаме $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ и од последица 3.6 и неравенствата (6) и (7) добиваме

$$U(f,\alpha;\pi)\le U(f,\alpha;\pi_2)<\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)+\tfrac{\varepsilon}{2}<L(f,\alpha;\pi_2)+\varepsilon\le L(f,\alpha;\pi)+\varepsilon ,$$

т.е. неравенството (4) е исполнето за поделбата π . ♦

3.9. Теорема. Ако $f\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$, $f(x)\in[m,M]$, $x\in[a,b]$ и $\varphi\in \mathbf{C}([m,M])$, тогаш $h(x)=\varphi(f(x))\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Доказ. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Според теорема III 8.4 функцијата φ е рамномерно непрекината на $[m,M]$, па затоа постои $\delta>0$ таков, што

$$|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon \text{, кога } |s-t|<\delta \text{, за } s,t\in[m,M].$$

Земаме $\delta<\varepsilon$.

Од $f\in \mathbf{RS}([a,b])$ и теорема 3.8 следува дека постои поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ на $[a,b]$ таква, што

$$U(f,\alpha;\pi)-L(f,\alpha;\pi)<\delta^2 . \tag{8}$$

Нека m_i и M_i се броевите од дефиниција 3.1, а m_i^* и M_i^* се аналогните броеви за функцијата h. Множеството $\{1,2,...,n\}$ го делиме на две дисјунктни множества A и B такви, што

а) $i\in A$ ако и само ако $M_i-m_i<\delta$ и

б) $i\in B$ ако и само ако $M_i-m_i\ge\delta$.

Ако $i\in A$, тогаш од изборот на δ имаме $M_i^*-m_i^*\le\varepsilon$, а ако $i\in B$, тогаш $M_i^*-m_i^*\le 2k$, каде $k=\sup\limits_{t\in[m,M]}|\varphi(t)|$. Сега, од неравенството (8) следува

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i\le\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i\le\delta^2 ,$$

што значи $\sum\limits_{i\in B}\Delta\alpha_i\le\delta$. Според тоа,

$$\begin{aligned}U(h,\alpha;\pi)-L(h,\alpha;\pi)&=\sum_{i\in A}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i+\sum_{i\in B}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i\\&\le\varepsilon\sum_{i\in A}\Delta\alpha_i+2k\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i\le\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]+2k\delta\\&<\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)+2k].\end{aligned}$$

Конечно, од произволноста на ε, согласно теорема 3.8 добиваме $h\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$. ♦

3.10. Теорема. а) Ако $f\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$, тогаш $cf\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$, за секој $c\in \mathbf{R}$ и $\int\limits_a^b cfd\alpha=c\int\limits_a^b fd\alpha$.

б) Ако $f, g \in \mathbf{RS}(\alpha, [a,b])$, тогаш $f + g \in \mathbf{RS}(\alpha, [a,b])$ и

$$\int_a^b (f+g)d\alpha = \int_a^b fd\alpha + \int_a^b gd\alpha .$$

в) Ако $f \in \mathbf{RS}(\alpha_i, [a,b]), i = 1,2$, тогаш $f \in \mathbf{RS}(\alpha_1 + \alpha_2, [a,b])$ и

$$\int_a^b fd(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b fd\alpha_1 + \int_a^b fd\alpha_2 .$$

Доказ. а) Јасно, тврдењето важи за $c = 0$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено и $c > 0$. Од теорема 3.8 следува дека постои поделба π на $[a,b]$ таква што

$$U(f,\alpha;\pi) - L(f,\alpha;\pi) < \tfrac{\varepsilon}{c},$$

што значи $cU(f,\alpha;\pi) - cL(f,\alpha;\pi) < \varepsilon$. Понатаму, од

$$cU(f,\alpha;\pi) = U(cf,\alpha;\pi) \text{ и } cL(f,\alpha;\pi) = L(cf,\alpha;\pi)$$

следува

$$U(cf,\alpha;\pi) - L(cf,\alpha;\pi) < \varepsilon$$

што според теорема 3.8 значи $f \in \mathbf{RS}(\alpha, [a,b])$.

Нека $c < 0$. Од теорема I 18.1 следува

$$-L(f,\alpha;\pi) = U(-f,\alpha;\pi) \text{ и } -L(-f,\alpha;\pi) = U(f,\alpha;\pi)$$

па затоа

$$U(-f,\alpha;\pi) - L(-f,\alpha;\pi) = U(f,\alpha;\pi) - L(f,\alpha;\pi) .$$

Според тоа, $-f \in \mathbf{RS}(\alpha, [a,b])$. Сега, од $-c > 0$ и првиот дел од доказот имаме $cf = (-c)(-f) \in \mathbf{RS}(\alpha, [a,b])$.

Конечно, од претходните разгледувања следува

$$\int_a^b cfd\alpha = c\int_a^b fd\alpha \text{, за секој } c \in \mathbf{R} .$$

б) Ако $h = f + g$ и π е произволна поделба на $[a,b]$, тогаш од својствата на инфимумот и супремумот имаме

$$L(f,\alpha;\pi) + L(g,\alpha;\pi) \le L(f+g,\alpha;\pi) \le U(f+g,\alpha;\pi) \le U(f,\alpha;\pi) + U(g,\alpha;\pi) \quad (9)$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Ако $f, g \in \mathbf{RS}(\alpha, [a,b])$, тогаш од теорема 3.8 следува дека постојат поделби π_1 и π_2 на $[a,b]$ такви што

$$U(f,\alpha;\pi_1) - L(f,\alpha;\pi_1) < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } U(g,\alpha;\pi_2) - L(g,\alpha;\pi_2) < \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Земаме поделба $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ и од лема 3.5 добиваме дека за оваа поделба важи

$$U(f,\alpha;\pi)-L(f,\alpha;\pi)<\tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } U(g,\alpha;\pi)-L(g,\alpha;\pi)<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Конечно, од последните неравенства и од неравенствата (9) следува дека за поделбата $\pi=\pi_1\cup\pi_2$ важи

$$U(h,\alpha;\pi)-L(h,\alpha;\pi)<\varepsilon,$$

што според теорема 3.8 значи дека $f+g=h\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Јасно, за поделбата $\pi=\pi_1\cup\pi_2$ имаме

$$U(f,\alpha;\pi)\le\int_a^b fd\alpha+\tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } U(g,\alpha;\pi)\le\int_a^b gd\alpha+\tfrac{\varepsilon}{2}$$

па затоа

$$\int_a^b (f+g)d\alpha=\int_a^b hd\alpha\le U(h,\alpha;\pi)\le U(f,\alpha;\pi)+U(g,\alpha;\pi)\le\int_a^b fd\alpha+\int_a^b gd\alpha+\varepsilon$$

и од произволноста на ε следува

$$\int_a^b (f+g)d\alpha\le\int_a^b fd\alpha+\int_a^b gd\alpha. \tag{10}$$

Понатаму, ако во (10) f и g ги замениме со $-f$ и $-g$ добиваме

$$\int_a^b (-f-g)d\alpha\le\int_a^b (-f)d\alpha+\int_a^b (-g)d\alpha$$

па затоа

$$\int_a^b (f+g)d\alpha\ge\int_a^b fd\alpha+\int_a^b gd\alpha. \tag{11}$$

Конечно, од неравенствата (10) и (11) следува

$$\int_a^b (f+g)d\alpha=\int_a^b fd\alpha+\int_a^b gd\alpha.$$

в) За секоја поделба π на $[a,b]$ имаме

$$\begin{aligned} L(f,\alpha_1+\alpha_2;\pi)&=L(f,\alpha_1;\pi)+L(f,\alpha_2;\pi)\\ U(f,\alpha_1+\alpha_2;\pi)&=U(f,\alpha_1;\pi)+U(f,\alpha_2;\pi)\end{aligned} \tag{12}$$

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од $f\in \mathbf{RS}(\alpha_i,[a,b]), i=1,2$ следува дека постојат поделби π_1 и π_2 такви што

$$U(f,\alpha_1;\pi_1)-L(f,\alpha_1;\pi_1)<\tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } U(f,\alpha_2;\pi_2)-L(f,\alpha_2;\pi_2)<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Нека $\pi=\pi_1\cup\pi_2$. Од лема 3.5 следува

$$U(f,\alpha_1;\pi)-L(f,\alpha_1;\pi)<\tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } U(f,\alpha_2;\pi)-L(f,\alpha_2;\pi)<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Конечно, од последните неравенства и равенствата (12) добиваме

$$U(f,\alpha_1+\alpha_2;\pi)-L(f,\alpha_1+\alpha_2;\pi)<\varepsilon$$

што според теорема 3.8 значи $f\in \mathbf{RS}(\alpha_1+\alpha_2,[a,b])$.

Понатаму, за поделбата π имаме

$$U(f,\alpha_1;\pi)\le \int_a^b fd\alpha_1+\tfrac{\varepsilon}{2} \text{ и } U(f,\alpha_2;\pi)\le \int_a^b fd\alpha_2+\tfrac{\varepsilon}{2}$$

па затоа

$$\int_a^b fd(\alpha_1+\alpha_2)\le U(f,\alpha_1+\alpha_2;\pi)=U(f,\alpha_1;\pi)+U(f,\alpha_2;\pi)\le \int_a^b fd\alpha_1+\int_a^b fd\alpha_2+\varepsilon$$

и од произволноста на ε следува

$$\int_a^b fd(\alpha_1+\alpha_2)\le \int_a^b fd\alpha_1+\int_a^b fd\alpha_2\ . \tag{13}$$

Понатаму, ако во (13) f го замениме со $-f$ и во добиеното неравенство помножиме со -1 го добиваме неравенството

$$\int_a^b fd(\alpha_1+\alpha_2)\ge \int_a^b fd\alpha_1+\int_a^b fd\alpha_2\ . \tag{14}$$

Конечно, од неравенствата (13) и (14) следува бараното равенство. ♦

3.11. Лема. Ако $f\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ и за секој $x\in[a,b]$ важи $f(x)\ge 0$, тогаш

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)\ge 0\ .$$

Доказ. Нека $\pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ е поделба на $[a,b]$. Од $f(x)\ge 0$ за секој $x\in[a,b]$ и $\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)\ge 0$, за $i=0,1,2,...,n-1$ следува $L(f,\alpha;\pi)\ge 0$. Според тоа,

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\underline{\int} f(x)d\alpha(x)=\sup_\pi L(f,\alpha;\pi)\ge 0\ .\ ♦$$

3.12. Последица. Ако $f,g\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ и $f(x)\le g(x)$, за секој $x\in[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)\le \int_a^b g(x)d\alpha(x)\ .$$

Доказ. Непосредно следува од лема 3.11 и теорема 3.10. ♦

3.13. Последица. Ако $f, g \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$, тогаш

а) $|f| \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ и $|\int_a^b f(x)d\alpha(x)| \le \int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x)$.

б) $fg \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Доказ. а) За функцијата $g(x)=|x|$ важи $g \in \mathbf{C}([a,b])$ и како $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ од теорема 3.9 следува $g(f(x))=|f(x)| \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$. Понатаму, за секој $x \in [a,b]$ важи

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$

Од последица 3.12 имаме

$$-\int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x) \le \int_a^b f(x)d\alpha(x) \le \int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x),$$

т.е.

$$|\int_a^b f(x)d\alpha(x)| \le \int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x).$$

б) Имаме $x^2 \in \mathbf{C}([a,b])$. Сега тврдењето непосредно следува од равенството

$$f(x)g(x) = \frac{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2}{4}$$

и теоремите 3.9 и 3.10. ♦

3.14. Теорема. Ако $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ и $a<c<b$, тогаш $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,c])$, $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[c,b])$ и

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x). \tag{15}$$

Доказ. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Од теорема 3.8 следува дека постои поделба π на $[a,b]$ таква што $U(f,\alpha;\pi)-L(f,\alpha;\pi)<\varepsilon$. Земаме поделба $\pi^* = \pi \cup \{c\}$, за која согласно лема 3.5 важи

$$U(f,\alpha;\pi^*)-L(f,\alpha;\pi^*) \le U(f,\alpha;\pi)-L(f,\alpha;\pi) < \varepsilon.$$

Понатаму, дефинираме поделби $\pi_1 = \pi^* \cap [a,c]$ и $\pi_2 = \pi^* \cap [c,b]$ на $[a,c]$ и $[c,b]$, соодветно. Јасно,

$$U(f,\alpha;\pi^*) = U(f,\alpha;\pi_1)+U(f,\alpha;\pi_2) \text{ и } L(f,\alpha;\pi^*) = L(f,\alpha;\pi_1)+L(f,\alpha;\pi_2)$$

од што, имајќи го предвид претходното неравенство добиваме

$$U(f,\alpha;\pi_1)-L(f,\alpha;\pi_1)+U(f,\alpha;\pi_2)-L(f,\alpha;\pi_2) < \varepsilon. \tag{16}$$

Од друга страна, од лема 3.2 следува

$$U(f,\alpha;\pi_1)-L(f,\alpha;\pi_1)\geq 0,\quad U(f,\alpha;\pi_2)-L(f,\alpha;\pi_2)\geq 0\,. \tag{17}$$

Конечно, од неравенствата (16) и (17) добиваме

$$U(f,\alpha;\pi_1)-L(f,\alpha;\pi_1)<\varepsilon \text{ и } U(f,\alpha;\pi_2)-L(f,\alpha;\pi_2)<\varepsilon\,,$$

па од теорема 3.8 следува дека $f\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,c])$ и $f\in \mathbf{RS}(\alpha,[c,b])$.

На крајот равенството (15) следува од очигледните неравенства

$$L(f,\alpha;\pi_1)+L(f,\alpha;\pi_2)\leq U(f,\alpha;\pi^*) \text{ и } L(f,\alpha;\pi^*)\leq U(f,\alpha;\pi_1)+U(f,\alpha;\pi_2)\,.$$ ♦

4. КЛАСИ ФУНКЦИИ ИНТЕГРАБИЛНИ ПО СТИЛТЕЈС

4.1. Теорема. $\mathbf{C}([a,b])\subset \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$. Притоа, за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков, што за секоја поделба π за која $d(\pi)<\delta$ важи

$$|S(f,\alpha;\pi)-\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)|<\varepsilon$$

т.е.

$$\lim_{d(\pi)\to 0} S(f,\alpha;\pi)=\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)\,.$$

Доказ. Нека $f\in \mathbf{C}([a,b])$, $\alpha(b)-\alpha(a)>0$ и $\varepsilon>0$ е дадено. Според теорема III 8.4 f е рамномерно непрекината на $[a,b]$, па затоа постои $\delta>0$ таков, што за секои $x',x''\in[a,b]$ такви, што $|x'-x''|<\delta$ важи

$$|f(x'')-f(x')|<\tfrac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}\,.$$

Според тоа, за произволна поделба π за која $d(\pi)<\delta$ имаме

$$\begin{aligned}U(f,\alpha;\pi)-L(f,\alpha;\pi)&=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)[\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)]\\&<\tfrac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)]=\varepsilon,\end{aligned}$$

па од теорема 3.8 следува дека $f\in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Освен тоа, бидејќи

$$L(f,\alpha;\pi)\leq \int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)\leq U(f,\alpha;\pi) \text{ и } L(f,\alpha;\pi)\leq S(f,\alpha;\pi)\leq U(f,\alpha;\pi)$$

добиваме

$$|\int_a^b f(x)d\alpha(x) - S(f,\alpha;\pi)| \le \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{d(\pi)\to 0} S(f,\alpha;\pi) = \int_a^b f(x)d\alpha(x). \ \blacklozenge$$

4.2. Теорема. Нека f е монотона на $[a,b]$, α монотоно не опаѓа на $[a,b]$ и $\alpha \in \mathbf{C}([a,b])$. Тогаш, $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ и

$$\lim_{d(\pi)\to 0} S(f,\alpha;\pi) = \int_a^b f(x)d\alpha(x). \tag{1}$$

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека f монотоно не опаѓа на $[a,b]$ и $f(b) - f(a) > 0$. Од теорема III 8.4 следува дека постои $\delta > 0$ таков, што за секои $x', x'' \in [a,b]$ за кои $|x' - x''| < \delta$ важи

$$|\alpha(x') - \alpha(x'')| < \tfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Сега, за секоја поделба π таква, што $d(\pi) < \delta$ важи

$$\begin{aligned} U(f,\alpha;\pi) - L(f,\alpha;\pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)][\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)] \\ &< \tfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = \varepsilon \end{aligned}$$

па од теорема 3.8 следува $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Равенството (1) се докажува аналогно на доказот на теорема 4.1. ♦

4.3. Теорема. Ако $f \in \mathbf{R}([a,b])$ и α го задоволува условот на Липшиц, тогаш $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Доказ. За секоја поделба π на $[a,b]$ имаме $\Delta\alpha_i \le K\Delta x_i$, $i = 0,1,...,n-1$ каде K е константата од Липшицовиот услов. Од $f \in \mathbf{R}([a,b])$ следува, дека за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π таква, што

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k < \tfrac{\varepsilon}{K}.$$

Според тоа, за оваа поделба π важи

$$\begin{aligned} U(f,\alpha;\pi) - L(f,\alpha;\pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)[\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)] \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)K\Delta x_k = K\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k < K\tfrac{\varepsilon}{K} = \varepsilon, \end{aligned}$$

па од теорема 3.8 следува $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$. ♦

4.4. Теорема. Нека $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и α е монотона на $[a,b]$. Ако точките на прекин на f и α не се совпаѓаат, тогаш $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Доказ. Нека $\varepsilon, \eta > 0$. Од $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ следува дека f е ограничена (лема 2.3. в)) и има најмногу пребројливо многу точки на прекин од прв ред (последица 2.12) и тоа само конечно многу во кои скокот на f е поголем или еднаков на ε. Со $[x_{\nu_i-1}, x_{\nu_i}], i = 1,2,...,k$, $0 < \nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_k < n$ да ги означиме оние интервали на поделбата π во кои лежи еден таков прекин y_i на функцијата f. Нека $\sum'$ е оној дел на збирот

$$U(f,\alpha;\pi) - L(f,\alpha;\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)]$$

кој ги опфаќа подинтервалите $[x_{\nu_i-1}, x_{\nu_i}], i = 1,2,...,k$, а $\sum''$ неговиот преостанат дел. Поделбата π ја избираме така, што

а) $M_i - m_i < \varepsilon$, за секој подинтервал кој припаѓа на збирот $\sum''$ и

б) $\alpha(x_{\nu_i}) - \alpha(x_{\nu_i-1}) = [\alpha(x_{\nu_i}) - \alpha(y_i)] + [\alpha(y_i) - \alpha(x_{\nu_i-1})] < \frac{\eta}{2kM}$.

Последното е можно, бидејќи α е непрекината во точките y_i. Тогаш, од една страна

$$\sum'' < \varepsilon \sum''[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)] < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)] = \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

додека од друга страна

$$\sum' < \sum' 2M[\alpha(x_{\nu_i}) - \alpha(x_{\nu_i-1})] < \eta.$$

Според тоа,

$$U(f,\alpha;\pi) - L(f,\alpha;\pi) = \sum' + \sum'' < \eta + \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Сега тврдењето следува од теорема 3.8 и произволноста на ε и η. ♦

4.5. Забелешка. На крајот од овој дел ќе дадеме пример во кој $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, α е монотона на $[a,b]$, f и α имаат една заедничка точка на прекин и $f \notin \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$, што значи дека условот f и α да немаат заеднички точки на прекин во претходната теорема не може да се изостави .

Со помош на истиот пример ќе покажеме дека обратното тврдење на теорема 3.14 не важи, односно дека од $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,c])$, $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[c,b])$ не следува $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$.

Имено, да ги разгледаме функциите f и α дефинирани на $[-1,1]$ со

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\end{cases} \text{ и } \alpha(x)=\begin{cases}0, & -1\le x< 0\\ 1, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

Тогаш, интегралите

$$\int_{-1}^{0} f(x)d\alpha(x) \text{ и } \int_{0}^{1} f(x)d\alpha(x)$$

постојат и двата се еднакви на нула, меѓутоа интегралот

$$\int_{-1}^{1} f(x)d\alpha(x)$$

не постои. Навистина, да земеме произволна поделба π на $[-1,1]$ таква што $0\notin\pi$ и да ја разгледаме интегралната сума

$$S(f,\alpha;\pi)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)] .$$

Јасно, постои $k\in\{0,1,...,n-1\}$ таков, што $x_{k-1}<0<x_k$, па затоа во збирот останува само $k-$от собирок, бидејќи ако точките x_i, x_{i+1} се од една страна на нулата, тогаш $\alpha(x_{i+1})=\alpha(x_i)$. Според тоа,

$$S(f,\alpha;\pi)=f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=f(\xi_k)$$

и притоа важи $S(f,\alpha;\pi)=0$ или $S(f,\alpha;\pi)=1$ во зависност од тоа дали $\xi_k\le 0$ или $\xi_k>0$, соодветно. Значи, границата

$$\lim_{d(\pi)\to 0} S(f,\alpha;\pi)$$

не постои, т.е. $f\notin \mathbf{RS}(\alpha,[-1,1])$.

Јасно, за претходно дефинираните функции важи $f\in\mathbf{BV}([-1,1])$, α е монотона на $[-1,1]$, f и α имаат прекин во точката $x_0=0$ и како што видовме $f\notin\mathbf{RS}(\alpha,[-1,1])$, што значи дека условот f и α да немаат заеднички точки на прекин во претходната теорема не може да се изостави . ♦

5. ИНТЕГРАЛ НА РИМАН-СТИЛТЕЈС ВО ОДНОС НА ФУНКЦИЈА СО ОГРАНИЧЕНА ВАРИЈАЦИЈА

5.1. Ако $\alpha\in\mathbf{BV}([a,b])$, тогаш согласно со теорема 2.8 , $\alpha=\beta-\gamma$, каде β и γ се монотоно неопаѓачки функции на $[a,b]$. Затоа, природно е интегралот $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ да го определиме како разлика на два интеграли, т.е.

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\beta(x) - \int_a^b f(x)d\gamma(x)\,. \tag{1}$$

Ќе дадеме дополнително објаснување за равенството (1). Прво, разложувањето на Жордан $\alpha = \beta - \gamma$ не е единствено, второ се бара интеграбилност на f во однос на сите разложувања на Жордан. Со помош на теоремите 4.1, 4.2 и 4.4 постоењето на интегралот се гарантира во следните случаи:

1) $f \in \mathbf{C}([a,b])$, $\alpha \in \mathbf{BV}([a,b])$;

2) $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, $\alpha \in \mathbf{BV}([a,b]) \cap \mathbf{C}([a,b])$; и

3) $f, \alpha \in \mathbf{BV}([a,b])$ и f и α немаат заеднички точки на прекин;

во кои функцијата f е интеграбилна во однос на компонентите на разложувањето. Ќе докажеме дека разликата (1) не зависи од различните претставувања на α. Навистина, нека $\alpha = \beta - \gamma$ и $\alpha = \beta_1 - \gamma_1$. Тогаш, $\beta_1 + \gamma = \beta + \gamma_1$ и затоа

$$\int_a^b f(x)d[\beta_1(x) + \gamma(x)] = \int_a^b f(x)d[\beta(x) + \gamma_1(x)]\,,$$

па ако ја искористиме теорема 3.10 в) добиваме

$$\int_a^b f(x)d\beta_1(x) - \int_a^b f(x)d\gamma_1(x) = \int_a^b f(x)d\beta(x) - \int_a^b f(x)d\gamma(x)\,,$$

што значи дека интегралот $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, дефиниран со (1) не зависи од конкретното разложување на α, туку доволно е f да припаѓа на $\mathbf{RS}(\beta,[a,b])$ и $\mathbf{RS}(\gamma,[a,b])$.

5.2. Лема. Ако за функциите f и α важат условите 1), 2) или 3) од 5.1, тогаш

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leq M \cdot V(\alpha,[a,b])\,,$$

каде $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Доказ. Оценката следува од низата неравенства

$$|S(f,\alpha;\pi)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot |\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)| \leq M \cdot V(\alpha,[a,b])$$

бидејќи според претпоставката интегралот $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ постои. ♦

5.3. Теорема (парцијална интеграција). Ако постои еден од интегралите $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$ или $\int\limits_a^b \alpha(x)df(x)$, тогаш постои и другиот интеграл и притоа важи:

$$\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)+\int\limits_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a). \tag{2}$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме, дека постои $\int\limits_a^b \alpha(x)df(x)$. За произволна поделба $\pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ да ја разгледаме интегралната сума $S(f,\alpha;\pi)$, која со помош на равенството на Абел (VI 6.4) може да се запише во видот

$$\begin{aligned}S(f,\alpha;\pi) &= \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)]\\
&= f(\xi_0)[\alpha(x_1)-\alpha(a)]+f(\xi_1)[\alpha(x_2)-\alpha(x_1)]+...+f(\xi_{n-1})[\alpha(b)-\alpha(x_{n-1})]\\
&= f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)+\alpha(a)[f(a)-f(\xi_0)]+\alpha(x_1)[f(\xi_0)-f(\xi_1)]+\\
&\quad +...+\alpha(x_{n-1})[f(\xi_{n-2})-f(\xi_{n-1})]+\alpha(b)[f(\xi_{n-1})-f(b)]\\
&= f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha(x_{i+1})[f(\xi_{i+1})-f(\xi_i)]\\
&= f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-S(\alpha,f;\pi^*)\end{aligned}$$

каде $\pi^*=\{\xi_i\}_{i=0}^n$ е некоја поделба на $[a,b]$ во која точките a и b може да припаѓаат или да не припаѓаат, бидејќи изборот на точките $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ е произволен. Но, по претпоставка, $\int\limits_a^b \alpha(x)df(x)$ постои и притоа важи

$$\lim_{d(\pi^*)\to 0} S(\alpha,f;\pi^*)=\int\limits_a^b \alpha(x)df(x).$$

Понатаму, од

$$\xi_{i+1}-\xi_i \le x_{i+2}-x_i \le 2d(\pi)$$

следува $d(\pi^*)\to 0$ кога $d(\pi)\to 0$, па затоа

$$\begin{aligned}\lim_{d(\pi)\to 0} S(f,\alpha;\pi) &= f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\lim_{d(\pi^*)\to 0} S(\alpha,f;\pi^*)\\
&= f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int\limits_a^b \alpha(x)df(x)\end{aligned}$$

т.е. постои $\int\limits_a^b f(x)d\alpha(x)$ и притоа важи (2). ♦

5.4. Пример. Ако ја искористиме формулата (2) добиваме

$$\int_0^{\pi/2} xd\sin x = x\sin x\,|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin xdx = x\sin x\,|_0^{\pi/2} - \cos x\,|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \,.\ \blacklozenge$$

6. ГРАНИЧЕН ПРЕМИН КАЈ РИМАН-СТИЛТЕЈСОВИОТ ИНТЕГРАЛ

6.1. Теорема. Нека $\{f_n\}$ е низа непрекинати функции која на интервалот $[a,b]$ рамномерно конвергира кон функцијата f и $\alpha \in \mathbf{BV}([a,b])$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha \,.$$

Доказ. Од теорема VII 2.11 следува дека функцијата f е непрекината на $[a,b]$, па затоа интегралите

$$\int_a^b f_n d\alpha,\ n \geq 1 \text{ и } \int_a^b f d\alpha$$

постојат. Сега, од лема 5.2 имаме

$$|\int_a^b f_n d\alpha - \int_a^b f d\alpha| \leq \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot V(\alpha,[a,b]) \,.$$

Конечно, тврдењето следува од последното неравенство, бидејќи за низата функции $\{f_n\}$ која на интервалот $[a,b]$ рамномерно конвергира кон функцијата f имаме

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{, кога } n \to \infty \,.\ \blacklozenge$$

6.2. Теорема (Хели). Нека $f \in \mathbf{C}([a,b])$, а α и $\alpha_n, n \geq 1$ се монотоно неопаѓачки функции на $[a,b]$. Ако $\alpha_n(x) \to \alpha(x), n \to \infty$ во секоја точка $x \in [a,b]$ во која функцијата α е непрекината и ако

$$\alpha_n(a) \to \alpha(a), \alpha_n(b) \to \alpha(b),\ n \to \infty \,,$$

тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x) \,. \tag{1}$$

Доказ. Прво да забележиме дека сите интеграли во равенството (1) постојат. За поделбата $\pi = \{x_i\}_{i=1}^{m-1}$, каде $x_i, i = 1,...,m-1$ се точки на непрекинатост на функцијата α, да го разгледаме следното помошно неравенство

$$\Delta_n = \left|\int_a^b f(x)d\alpha_n(x) - \int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{m-1}\left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)d\alpha_n(x) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)d\alpha(x)\right]\right|$$

$$= \Big|\sum_{k=0}^{m-1}\Big\{\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-f(x_k)]d\alpha_n(x) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)d\alpha_n(x) -$$

$$-\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)d\alpha(x) - \int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x)-f(x_k)]d\alpha(x)\Big\}\Big| \qquad (2)$$

$$\le \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x)-f(x_k)|\,d\alpha_n(x) + \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x)-f(x_k)|\,d\alpha(x)$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}|f(x_k)|(|\alpha_n(x_{k+1})-\alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k)-\alpha(x_k)|)$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $f \in \mathbf{C}([a,b])$ следува дека постои $\delta > 0$ таков што за секои $x', x'' \in [a,b]$ за кои $|x' - x''| < \delta$ важи

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\varepsilon}{3[1+\alpha(b)-\alpha(a)]}.$$

Сега дополнително да претпоставиме, дека поделбата π во неравенството (2) има дијаметар $d(\pi) < \delta$ и е фиксирана. Тогаш,

$$\Delta_n \le \tfrac{\varepsilon}{3[1+\alpha(b)-\alpha(a)]}[\alpha_n(b)-\alpha_n(a)] + \tfrac{\varepsilon}{3[1+\alpha(b)-\alpha(a)]}[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

$$+\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{k=0}^{m-1}\{|\alpha_n(x_{k+1})-\alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k)-\alpha(x_k)|\}$$

Избираме n_0 таков што

1) за секој $n \ge n_0$ важи $\alpha_n(b) - \alpha_n(a) < \alpha(b) - \alpha(a) + 1$ и

2) за секој $n \ge n_0$ важи

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{k=0}^{m-1}\{|\alpha_n(x_{k+1})-\alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k)-\alpha(x_k)|\} < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Тогаш, за секој $n \ge n_0$ важи $\Delta_n < \varepsilon$, т.е. точно е равенството (1). ♦

6.3. Пример. Нека $f \in \mathbf{C}([0,1])$. Пресметајте

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)d\left(\tfrac{[nx]}{n}\right).$$

Решение. За секој $n \in \mathbf{N}$ функцијата $\alpha_n(x) = \frac{[nx]}{n}$ монотоно расте, па затоа

$$V(\alpha_n,[0,1]) = \tfrac{[n\cdot 1]}{n} - \tfrac{[n\cdot 0]}{n} = 1 .$$

Понатаму, ако во очигледните неравенства

$$\tfrac{[nx]}{n} \le x < \tfrac{[nx]+1}{n}$$

земеме $n \to \infty$ добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{[nx]}{n} = x = \alpha(x) .$$

Конечно, функциите f,α и $\alpha_n, n \ge 1$ ги задоволуваат условите од теорема 6.2, па затоа

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) d(\tfrac{[nx]}{n}) = \int_0^1 f(x)dx . \ \blacklozenge$$

6.4. Теорема. Нека $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и нека $\{\alpha_n\}$ е низа функции на $[a,b]$ која конвергира по точки кон функцијата α . Ако низата функции $\{\alpha_n\}$ е со *рамномерно ограничена варијација* на $[a,b]$, т.е. ако постои константа K таква што за секој n важи

$$V(\alpha_n,[a,b]) < K , \tag{3}$$

тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x) . \tag{4}$$

Доказ. Според теорема 2.15 функцијата α е со ограничена варијација на $[a,b]$, па затоа интегралот на десната страна во (4) постои.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $f \in \mathbf{C}([a,b])$ следува дека f е рамномерно непрекината на $[a,b]$, па затоа постои поделба $\pi = \{x_i\}_{i=0}^m$ на $[a,b]$ таква што

$$| f(x) - f(x_i) | < \tfrac{\varepsilon}{2K} \text{ , за секој } x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,1,...,m-1 . \tag{5}$$

Тогаш,

$$\begin{aligned}\int_a^b f d\alpha &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f d\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\alpha + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] d\alpha \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)] + O(f,\alpha)\end{aligned}$$

и притоа од неравенството (5) следува

$$\begin{aligned}| O(f,\alpha) | &= | \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] d\alpha | \le \tfrac{\varepsilon}{2K} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\alpha \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2K} \sum_{i=0}^{m-1} V(\alpha,[x_i,x_{i+1}]) < \tfrac{\varepsilon}{2K} V(\alpha,[a,b]) \le \tfrac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека

$$\int_a^b f d\alpha_n = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)[\alpha_n(x_{i+1}) - \alpha_n(x_i)] + O(f,\alpha_n)$$

каде

$$|O(f,\alpha_n)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\text{, за } n = 1,2,\dots .$$

Конечно,

$$|\int_a^b f d\alpha_n - \int_a^b f d\alpha| \le |\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)[\alpha_n(x_{i+1}) - \alpha_n(x_i) - \alpha(x_{i+1}) + \alpha(x_i)]| + |O(f,\alpha)| + |O(f,\alpha_n)|$$

$$< |\sum_{i=0}^{m-1} f(x_i)[\alpha_n(x_{i+1}) - \alpha_n(x_i) - \alpha(x_{i+1}) + \alpha(x_i)]| + \varepsilon$$

и како $\{\alpha_n\}$ конвергира по точки кон α на $[a,b]$ и $\varepsilon > 0$, од последното неравенство следува равенството (4). ♦

7. ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА РИМАН-СТИЛТЕЈСОВИОТ ИНТЕГРАЛ

7.1. Теорема. Ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и α е таква што $\alpha' \in \mathbf{R}([a,b])$, тогаш

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx .$$

Доказ. Од претпоставките следува дека Риман-Стилтејсовиот интеграл $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ и Римановиот интеграл $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ постојат. Притоа имаме

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)] ,$$

независно од изборот на точките ξ_i во $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,n-1$. Да ги избереме точките ξ_i така што

$$\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i) = \alpha'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),\ \ i = 0,1,\dots,n-1 .$$

Тогаш,

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\alpha'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) ,$$

и десната страна по дефиниција е Римановиот интеграл на функцијата $f(x)\alpha'(x)$. ♦

7.2. Пример. Пресметајте $\int\limits_0^1 xd(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Бидејќи $f(x)=x\in\mathbf{C}([0,1])$ и $\alpha'(x)=(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}\in\mathbf{R}([0,1])$ од теорема 7.1 добиваме

$$\int\limits_0^1 xd(\operatorname{arctg} x)=\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln 2\ .\blacklozenge$$

7.3. Теорема. Нека $f\in\mathbf{C}([a,b])$ и нека функцијата α има во (a,b) конечно многу прекини во точките $x_1,x_2,...,x_n$ и константни вредности во интервалите $(a,x_1),(x_1,x_2),...,(x_{n-1},x_n),(x_n,b)$. Тогаш,

$$\int\limits_a^b fd\alpha=\sum_{k=1}^n f(x_k)[\alpha(x_k^+)-\alpha(x_k^-)]+f(a)[\alpha(a^+)-\alpha(a)]+f(b)[\alpha(b)-\alpha(b^-)].$$

Доказ. Очигледно функцијата α е со ограничена варијација на $[a,b]$, па затоа интегралот $\int\limits_a^b fd\alpha$ постои.

Нека $x_0=a$ и $x_{n+1}=b$. Тогаш

$$\int\limits_a^b fd\alpha=\sum_{k=0}^n \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} fd\alpha\ . \tag{1}$$

По дефиниција да го пресметаме $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} fd\alpha,\ \ k=0,1,...,n$. Нека $\pi=\{x_i^{(k)}\}_{i=0}^{m_k}$ е поделба на интервалот $[x_k,x_{k+1}]$ и нека $\xi_{i+1}^{(k)}\in[x_i^{(k)},x_{i+1}^{(k)}]$, $i=0,1,...,m_k-1$. Бидејќи функцијата α е константна на интервалот (x_k,x_{k+1}) за интегралната сума на Стилтејс добиваме

$$S(f,\alpha;\pi)=f(\xi_1^{(k)})[\alpha(x_1^{(k)})-\alpha(x_0^{(k)})]+f(\xi_{m_k}^{(k)})[\alpha(x_{m_k}^{(k)})-\alpha(x_{m_k-1}^{(k)})].$$

Понатаму, функцијата f е непрекината, а за функцијата α во секоја точка постојат едностраните граници (зошто?), па ако земеме $d(\pi)\to 0$ добиваме

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} fd\alpha=f(x_k)[\alpha(x_k^+)-\alpha(x_k)]+f(x_{k+1})[\alpha(x_{k+1})-\alpha(x_{k+1}^-)]\ . \tag{2}$$

Конечно, за $k=0,1,...,n$ ги собираме равенствата (2) и од равенството (1) го добиваме тврдењето на теоремата. ♦

7.4. Пример. а) Пресметајте $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^2 d\alpha_n(x)$, каде

$$\alpha_n(x)=\begin{cases}\frac{nx}{1+nx}, & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ \frac{1}{n}, & x\in(\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

б) Нека $f,\varphi\in\mathbf{C}([a,b])$ и φ е строго монотона на $[a,b]$. Пресметајте го интегралот $\int\limits_a^b f(x)d[\varphi(x)]$.

Решение. а) Од

$$\begin{aligned}V(\alpha_n,[0,1])&=V(\alpha_n,[0,\tfrac{1}{2}])+V(\alpha_n,[\tfrac{1}{2},1])\\&=\tfrac{n}{n+2}+|\tfrac{n}{n+2}-\tfrac{1}{n}|<2\end{aligned}$$

следува дека низата $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ е со рамномерно ограничена варијација. Но, $f(x)=x^2\in\mathbf{C}([0,1])$, па од теорема 6.4. следува

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^2 d\alpha_n(x)=\int\limits_0^1 x^2 d\alpha(x),$$

каде

$$\alpha(x)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\in(0,\frac{1}{2}]\\ 0, & x\in(\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Конечно, од теорема 7.3 добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^2 d\alpha_n(x)=\int\limits_0^1 x^2 d\alpha(x)=(\tfrac{1}{2})^2(-1)=-\tfrac{1}{4}.$$

б) Функцијата φ е непрекината на интервалот $[a,b]$, па затоа $A=\varphi([a,b])$ е затворен интервал и како φ е монотона, заклучуваме дека крајните точки на интервалот $\varphi([a,b])$ се $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$. Јасно, функцијата $g=[\varphi]$ е монотона на интервалот $[a,b]$ и како f е непрекината на $[a,b]$ заклучуваме дека $f\in\mathbf{RS}(g,[a,b])$.

Функцијата φ е строго монотона на $[a,b]$, па затоа таа е биекција и има инверзна функција $\varphi^{-1}:A\to[a,b]$.

Нека φ строго монотоно расте на $[a,b]$ и да ставиме

$$x_0=a,\ x_i=\varphi^{-1}([\varphi(a)]+i),\ \text{за}\ i\in\{1,2,\dots,n=[\varphi(b)]-[\varphi(a)]\}.$$

Тогаш,

$$g(x)=[\varphi(a)]+i-1 \text{, за } x\in[x_{i-1},x_i) \text{, } i=1,2,...,n \text{ и } g(x)=[\varphi(b)] \text{, за } x\in[x_n,b],$$

т.е. функцијата g е константна на интервалите (x_{i-1},x_i), има скокови од лево со големина 1 во точките x_i, а $g(a^+)=g(a)$. Според тоа,

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=\sum_{i=[\varphi(a)]+1}^{[\varphi(b)]} f(\varphi^{-1}(i)).$$

Нека φ строго монотоно опаѓа на $[a,b]$ и да ставиме

$$x_i=\varphi^{-1}([\varphi(a)]-i+1) \text{, за } i\in\{1,2,...,n=[\varphi(a)]-[\varphi(b)]\} \text{ и } x_{n+1}=b.$$

Тогаш,

$$g(x)=[\varphi(a)] \text{, за } x\in[a,x_1] \text{ и } g(x)=[\varphi(a)]-i \text{, за } x\in(x_i,x_{i+1}] \text{, } i=1,2,...,n,$$

т.е. функцијата g е константна на интервалите (x_{i-1},x_i), има скокови од десно со големина -1 во точките x_i, а $g(b^-)=g(b)$. Според тоа,

$$\int_a^b f(x)dg(x)=-\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=-\sum_{i=1}^{n} f(x_{n-i+1})=\sum_{i=[\varphi(b)]+1}^{[\varphi(a)]} f(\varphi^{-1}(i)).\ ♦$$

7.5. Теорема. Нека $f\in\mathbf{C}([a,b])$, $\alpha\in\mathbf{BV}([a,b])$ и α има во (a,b) прекини во точките x_k. Ако $\alpha=\alpha_s+\overline{\alpha}$, каде α_s е функцијата на скок на α, а $\overline{\alpha}$ е нејзиниот непрекинат дел, тогаш

$$\begin{aligned}\int_a^b fd\alpha &=\int_a^b fd\overline{\alpha}+\int_a^b fd\alpha_s\\ &=\int_a^b fd\overline{\alpha}+\sum_k f(x_k)[\alpha(x_k^+)-\alpha(x_k^-)]+f(a)[\alpha(a^+)-\alpha(a)]+f(b)[\alpha(b)-\alpha(b^-)].\end{aligned}$$

Доказ. Доволно е да докажеме дека

$$\int_a^b fd\alpha_s=\sum_k f(x_k)[\alpha(x_k^+)-\alpha(x_k^-)]+f(a)[\alpha(a^+)-\alpha(a^-)]+f(b)[\alpha(b^+)-\alpha(b^-)]. \quad (3)$$

Дефинираме низа $\{\alpha_n\}$ така што $\alpha_n(a)=0$ и

$$\alpha_n(x)=\alpha(a^+)-\alpha(a)+\sum_{\substack{x_k<x\\ k\le n}}[\alpha(x_k^+)-\alpha(x_k^-)]+[\alpha(x)-\alpha(x^-)],$$

за $x\in(a,b]$. Очигледно $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(a)=0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x)=\alpha(a^+)-\alpha(a)+\sum_{x_k<x}[\alpha(x_k^+)-\alpha(x_k^-)]+[\alpha(x)-\alpha(x^-)],$$

за $x \in (a,b]$, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \alpha_s(x)$. Од друга страна

$$V(\alpha_n,[a,b]) = |\alpha(a^+) - \alpha(a)| + |\alpha(b) - \alpha(b^-)| + \sum_{k=1}^{n} \{|\alpha(x_k) - \alpha(x_k^-)| + |\alpha(x_k^+) - \alpha(x_k)|\}$$
$$\le V(\alpha,[a,b])$$

па затоа $V(\alpha_n,[a,b]) \le K$, за секој n. Сега од теорема 6.3 следува

$$\int_a^b f d\alpha_s = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f d\alpha_n .$$

Но, функцијата α_n ги задоволува условите од теорема 7.3, па затоа

$$\int_a^b f d\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[\alpha(x_k^+) - \alpha(x_k^-)] + f(a)[\alpha(a^+) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(b^-)] .$$

Конечно, тврдењето следува од последните две равенства. ♦

7.6. Забелешка. Од равенството (3) следува, дека збирот на секој апсолутно конвергентен ред може да се претстави како Риман-Стилтејсов интеграл. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8. ТЕОРЕМИ ЗА СРЕДНИ ВРЕДНОСТИ КАЈ РИМАН-СТИЛТЕЈСОВИОТ ИНТЕГРАЛ

8.1. Теорема (прва теорема за средна вредност). Ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и α е монотоно растечка на $[a,b]$, тогаш постои $x \in [a,b]$ таков, што

$$\int_a^b f d\alpha = f(x)[\alpha(b) - \alpha(a)] . \tag{1}$$

Доказ. Да ставиме $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ и $m = \inf\limits_{t\in[a,b]} f(t)$. Тогаш,

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \le \int_a^b f d\alpha \le M[\alpha(b) - \alpha(a)] ,$$

па затоа постои $\lambda \in [m,M]$ таков, што $\int\limits_a^b f d\alpha = \lambda[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Конечно, од теорема III 7.8 следува дека постои $x \in [a,b]$ таков што важи равенството (1). ♦

8.2. Забелешка. Во претходната теорема можен е случај кога не постои $x \in (a,b)$ таков што важи равенството (1). Навистина, ако $f \in \mathbf{C}([a,b])$ и

$$\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ 1, & a<x\le b,\end{cases}$$

тогаш

$$\int_a^b f d\alpha = f(a)[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

8.3. Последица (теорема на Блашке). Нека $V(f,[a,b]) \le S$. Ако

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \delta ,$$

за секој $x\in[a,b]$, каде $\delta=\delta(\varepsilon)$ го задоволува неравенството

$$\delta^2+2(b-a)S\delta \le (b-a)\varepsilon ,$$

тогаш

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \varepsilon .$$

Доказ. Да ставиме $A=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Имаме,

$$B=\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-A]^2 dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f^2(x)-2f(x)A+A^2]dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx - A^2 .$$

Од друга страна, со парцијална интеграција на првиот интеграл во равенството за B добиваме

$$B=\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[\int_a^x (A-f(t))dt\right]df(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[(x-a)A-\int_a^x f(t)dt\right]dfx ,$$

па затоа

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx = A^2 + \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[(x-a)A-\int_a^x f(t)dt\right]dfx .$$

Понатаму, бидејќи $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \delta$, за $x\in[a,b]$, каде $\delta=\delta(\varepsilon)$ го задоволува неравенството

$$\delta^2+2(b-a)S\delta \le (b-a)\varepsilon ,$$

т.е. неравенството $\frac{\delta^2}{b-a}+2S\delta\le\varepsilon$ добиваме $|A|\le\frac{\delta}{b-a}$, па затоа од последното равенство и лемите 3.12 и 5.3 следува

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx \le A^2 + \frac{1}{b-a}\int_a^b [(x-a)\cdot|A| + |\int_a^x f(t)dt|]\cdot|dfx|$$

$$\le \frac{\delta^2}{(b-a)^2} + \frac{2\delta}{b-a}\cdot V([a,b],f) \le \frac{\delta^2}{(b-a)^2} + \frac{2\delta S}{b-a},$$

т.е.

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{b-a}\delta^2 + 2\delta S \le \varepsilon . \ \blacklozenge$$

8.4. Последица. Ако $V(f_n,[a,b]) \le S$, за секој $n \in \mathbf{N}$, тогаш од

$$\int_a^x f_n(t)dt \to 0, \text{ кога } n \to \infty \text{ , за секој } x \in [a,b]$$

следува $\int_a^b [f_n(t)]^2 dt \to 0,$ кога $n \to \infty$.

Доказ. Непосредно следува од лема 8.3. ♦

8.5. Забелешка. Тврдењето од последица 8.4 не важи за класата непрекинати функции, што може да се види ако се разгледа низата функции $f_n(x) = \sin n\pi$, $n \in \mathbf{N}$ на интервалот $[0,1]$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8.6. Теорема (втора теорема за средна вредност). Ако f е монотона функција и $\alpha \in \mathbf{C}([a,b]) \cap \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш постои $x \in [a,b]$ таков што

$$\int_a^b f d\alpha = f(a)[\alpha(x) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(x)] .$$

Доказ. Од теоремите 5.2 и 8.1 непосредно следува

$$\int_a^b f d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(x)[f(b) - f(a)]$$

$$= f(a)[\alpha(x) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(x)],$$

за некој $x \in [a,b]$. ♦

8.6. На крајот од овој дел ќе докажеме уште две теореми, кои припаѓаат во групата на теореми за средни вредности на Риман-Стилтејсовиот интеграл и кои се однесуваат на неравенства меѓу интегралите. За таа цел прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека $n \in \mathbf{N}$ и a_i , $i = 0,1,...,n$ се произволни реални броеви, а реалните броеви b_i, c_i , $i = 0,1,...,n$ се такви, што

$$b_i > b_0 \text{, за секој } i = 0,1,...,n \tag{2}$$

и

$$c_i \geq c_{i+1} \geq 0 \text{, за секој } i = 0,1,...,n\,. \tag{3}$$

Тогаш,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(b_i - b_{i-1}) \bullet \min_{1\leq i\leq n} \tfrac{a_i - a_0}{b_i - b_0} \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i - a_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(b_i - b_{i-1}) \bullet \max_{1\leq i\leq n} \tfrac{a_i - a_0}{b_i - b_0}\,. \tag{4}$$

Доказ. Последователно имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i(a_i - a_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} c_i a_i - \sum_{i=1}^{n} c_i a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i - \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i(c_i - c_{i+1}) + a_n c_n - a_0 c_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_0)(c_i - c_{i+1}) + (a_n - a_0)c_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{a_i - a_0}{b_i - b_0}(b_i - b_0)(c_i - c_{i+1}) + \tfrac{a_n - a_0}{b_n - b_0}(b_n - b_0)c_n \\ &\leq [\sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_0)(c_i - c_{i+1}) + (b_n - b_0)c_n] \bullet \max_{1\leq i\leq n} \tfrac{a_i - a_0}{b_i - b_0} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} c_i(b_i - b_{i-1}) \bullet \max_{1\leq i\leq n} \tfrac{a_i - a_0}{b_i - b_0},\end{aligned}$$

со што е докажано десното неравенство во (4). Аналогно се докажува левото неравенство во (4). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

8.7. Теорема. Нека $\alpha, \beta \in \mathbf{BV}([a,b])$ и $\beta(x) - \beta(a) > 0$, за секој $x \in (a,b]$. Ако за ненегативната функција f важи

а) $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b]) \cap \mathbf{RS}(\beta,[a,b])$ и

б) f не расте на $[a,b]$,

тогаш

$$\min_{x\in(a,b]} \tfrac{\alpha(x)-\alpha(a)}{\beta(x)-\beta(a)} \bullet \int_a^b f(x)d\beta(x) \leq \int_a^b f(x)d\alpha(x) \leq \max_{x\in(a,b]} \tfrac{\alpha(x)-\alpha(a)}{\beta(x)-\beta(a)} \bullet \int_a^b f(x)d\beta(x)\,. \tag{5}$$

Доказ. Нека $\pi = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ е произволна поделба на $[a,b]$. За $i = 0,1,2,...,n$ ставаме

$$a_i = \alpha(x_i)\,,\ b_i = \beta(x_i) \text{ и } c_i = f(\xi_i)\text{, каде } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,.$$

Очигледно, броевите a_i, b_i, c_i, $i = 0,1,...,n$ ги задоволуваат условите од претходната лема, па затоа за истите се исполнети неравенствата (4), т.е. важи

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] \bullet \min_{1\le i\le n} \frac{\alpha(x_i)-\alpha(a)}{\beta(x_i)-\beta(a)} \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})] \bullet \max_{1\le i\le n} \frac{\alpha(x_i)-\alpha(a)}{\beta(x_i)-\beta(a)}.$$

Конечно, ако во горните неравенства преминеме кон граница ги добиваме неравенствата (5). ♦

8.8. Последица. Ако функциите α, β и f ги задоволуваат условите од теорема 8.7 и ако $\alpha, \beta \in \mathbf{C}([a,b])$, тогаш постои $c \in [a,b]$ таков што

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \frac{\alpha(c)-\alpha(a)}{\beta(c)-\beta(a)} \bullet \int_a^b f(x)d\beta(x). \tag{6}$$

Доказ. Од $\alpha, \beta \in \mathbf{C}([a,b])$ и $\beta(x) - \beta(a) > 0$, за секој $x \in (a,b]$ следува дека функцијата $\frac{\alpha(x)-\alpha(a)}{\beta(x)-\beta(a)}$ е непрекината на $(a,b]$. Сега тврдењето следува од теорема 8.7 и последица III 7.7. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

8.9. Теорема. Нека $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{BV}([a,b])$. Ако за ненегативната функција f важи

а) $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b]) \cap \mathbf{RS}(\beta,[a,b]) \cap \mathbf{RS}(\gamma,[a,b])$ и

б) f не расте на $[a,b]$,

тогаш од неравенството

$$\beta(x) \le \alpha(x) \le \gamma(x), \text{ за секој } x \in [a,b]$$

следува

$$-f(a)[\alpha(a) - \beta(a)] + \int_a^b f(x)d\beta(x) \le \int_a^b f(x)d\alpha(x) \le f(a)[\gamma(a) - \alpha(a)] + \int_a^b f(x)d\gamma(x). \tag{7}$$

Доказ. Од теорема 5.3 следува егзистенцијата на интегралите

$$\int_a^b \alpha(x)df(x) \text{ и } \int_a^b \gamma(x)df(x)$$

и притоа важи

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)df(x) \tag{8}$$

и

$$\int_a^b f(x)d\gamma(x) = f(b)\gamma(b) - f(a)\gamma(a) - \int_a^b \gamma(x)df(x)\,. \tag{9}$$

Понатаму, функцијата $-f$ монотоно расте на $[a,b]$ и како $\alpha(x) \le \gamma(x)$, за секој $x \in [a,b]$, од последица 3.12 следува

$$-\int_a^b \alpha(x)df(x) = \int_a^b \alpha(x)d[-f(x)] \le \int_a^b \gamma(x)d[-f(x)] = -\int_a^b \gamma(x)df(x)\,. \tag{10}$$

Конечно, од равенствата (8) и (9) и неравенството (10) следува

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d\alpha(x) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)df(x)\\ &\le f(b)\gamma(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \gamma(x)df(x)\\ &= f(b)\gamma(b) - f(a)\alpha(a) - [f(b)\gamma(b) - f(a)\gamma(a)] + \int_a^b f(x)d\gamma(x)\\ &= f(a)[\gamma(a) - \alpha(a)] + \int_a^b f(x)d\gamma(x),\end{aligned}$$

т.е. важи десното неравенство во (7). Левото неравенство се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

9. НЕОПРЕДЕЛЕН РИМАН-СТИЛТЕЈСОВ ИНТЕГРАЛ

9.1. Дефиниција. Нека $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ и $x \in [a,b]$. Функцијата

$$\beta(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t) \tag{1}$$

ја нарекуваме *неопределен Риман-Стилтејсов интеграл* на функцијата f.

9.2. Да забележиме дека при дадените услови егзистенцијата на неопределениот Риман-Стилтејсов интеграл непосредно следува од теорема 3.14.

Лема А. Нека $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$. Тогаш неопределениот интеграл (1) е непрекината функција во секоја точка $x \in [a,b]$ во која е непрекината функцијата α.

Доказ. Имаме

$$|\beta(y) - \beta(x)| = \left|\int_x^y f(t)d\alpha(t)\right| \le M \cdot \int_x^y |d\alpha(t)|$$

каде $M = \sup\limits_{t\in[x,y]} |f(t)|$. Според тоа, ако $x \in [a,b]$ и α е непрекината во x, тогаш

$$|\beta(y) - \beta(x)| \le M \cdot \int_x^y |d\alpha(t)| \to 0 \text{, кога } y \to x$$

т.е. β е непрекината во x. ♦

Лема Б. Нека $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$. Ако x е точка на прекин на α и $f(x) \neq 0$, тогаш неопределениот интеграл (1) има прекин во x.

Доказ. Имаме

$$\beta(x \pm 0) = \int_a^{x\pm 0} f(t)d\alpha(t),$$

па затоа

$$\beta(x^+) - \beta(x^-) = \int_{x^-}^{x^+} f(t)d\alpha(t) = f(x)[\alpha(x^+) - \alpha(x^-)],$$

од што следува тврдењето на лемата. ♦

9.3. Теорема. Ако $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$, тогаш $\beta \in \mathbf{BV}([a,b])$ и

$$V(\beta,[a,b]) = \int_a^b |f(t)| \cdot |d\alpha(t)|. \tag{2}$$

Доказ. Нека $\pi_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ е поделба на $[a,b]$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, при што меѓу точките x_i ги опфаќаме точките на прекин на функцијата α. Ставаме

$$V_n(\beta) = \sum_{i=1}^n |\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})|$$

и

$$V_n(f,\alpha) = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \cdot |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})|.$$

Од

$$V_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)d\alpha(t) \right| = \sum_{i=1}^n \left| f(\xi_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - f(\xi_i)]d\alpha(t) \right|$$

и бидејќи последниот збир се наоѓа меѓу

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \bullet |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| - \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - f(\xi_i)]d\alpha(t) \right|$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|\bullet|\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(t)-f(\xi_i)]d\alpha(t)|$$

добиваме дека

$$|V_n(\beta)-V_n(f,\alpha)|\le\sum_{i=1}^{n}|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(t)-f(\xi_i)]d\alpha(t)|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)-f(\xi_i)|\cdot|d\alpha(t)|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}|d\alpha(t)|\le\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\cdot[A(x_i)-A(x_{i-1})]$$

$$=U(|f|,A;\pi_n)-L(|f|,A;\pi_n),$$

каде

$$M_i=\sup_{t\in[x_{i-1},x_i]}|f(t)|,\ m_i=\inf_{t\in[x_{i-1},x_i]}|f(t)|\ \text{ и }\ A(x)=\int_a^x|d\alpha(t)|.$$

Функцијата $A(x)$ е функција со ограничена варијација на $[a,b]$ и има исти точки на прекин како и функцијата $\alpha(x)$, па затоа од $f\in\mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ следува $f\in\mathbf{RS}(A,[a,b])$, што значи $|f|\in\mathbf{RS}(A,[a,b])$. Според тоа, за секој $\varepsilon>0$ постои поделба π_n на $[a,b]$ таква што

$$|V_n(\beta)-V_n(f,\alpha)|\le U(|f|,A;\pi_n)-L(|f|,A;\pi_n)<\varepsilon,$$

па затоа

$$\lim_{d(\pi)\to0}V_n(\beta)=\lim_{d(\pi)\to0}V_n(f,\alpha)$$

односно важи (2) и притоа

$$V(\beta,[a,b])=\int_a^b|f(t)|\cdot|d\alpha(t)|\le M\cdot V(\alpha,[a,b])$$

каде $M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$. ♦

9.4. Теорема. Ако $f,F\in\mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$, тогаш од (1) следува

$$\int_a^b F(t)d\beta(t)|=\int_a^b F(t)f(t)d\alpha(t)|. \tag{3}$$

Доказ. Нека $\pi_n=\{x_i\}_{i=0}^n$ е поделба на $[a,b]$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ и

$$V_n(F,\beta)=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)[\beta(x_i)-\beta(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)d\alpha(t).$$

Ако на овој израз му го додадеме и одземеме збирот

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) f(\xi_i) \cdot [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

добиваме

$$V_n(F,\beta) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) f(\xi_i) \cdot [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - f(\xi_i)] d\alpha(t). \quad (4)$$

Вториот член на десната страна на (4) по апсолутна вредност е помал или еднаков на

$$\sup_{x\in[a,b]} |F(x)| \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} |d\alpha(t)| = \sup_{x\in[a,b]} |F(x)| \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)[A(x_i) - A(x_{i-1})]$$
$$= U(f,A;\pi_n) - L(f,A;\pi_n),$$

каде

$$M_i = \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} |f(t)|, m_i = \inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} |f(t)| \text{ и } A(x) = \int_a^x |d\alpha(t)|.$$

Понатаму, од $f \in \mathbf{RS}(\alpha,[a,b])$ следува $f \in \mathbf{RS}(A,[a,b])$, па затоа за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π_n на $[a,b]$ таква, што $U(f,A;\pi_n) - L(f,A;\pi_n) < \varepsilon$ што значи дека

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - f(\xi_i)] d\alpha(t) \to 0 \text{ кога } d(\pi) \to 0.$$

Според тоа,

$$V_n(F,\beta) \to \int_a^b F(t) f(t) d\alpha(t) \text{ кога } d(\pi) \to 0,$$

т.е. точно е равенството (3). ♦

9.5. Последица. Ако $f(x) \neq 0$, за секој $x \in [a,b]$, тогаш од (1) следува

$$\int_a^x \frac{d\beta(t)}{f(t)} = \alpha(x) - \alpha(a).$$

Доказ. Во (3) ставаме $F(t) = \frac{1}{f(t)}$ и добиваме

$$\int_a^x \frac{d\beta(t)}{f(t)} = \int_a^x \frac{1}{f(t)} f(t) d\alpha(t) = \int_a^x d\alpha(t) = \alpha(x) - \alpha(a). ♦$$

9.6. Последица. Ако $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и $g \in \mathbf{BV}([a,b]) \cap \mathbf{C}([a,b])$, тогаш од

$$f(x) = \alpha(x) + \int_a^x \alpha(t) dg(t), \quad x \in [a,b] \quad (5)$$

следува

$$e^{g(x)}\alpha(x)=e^{g(a)}\alpha(a)+\int_a^x e^{g(t)}df(t)=e^{g(a)}f(a)+\int_a^x e^{g(t)}df(t)\,. \qquad (6)$$

Доказ. Од равенството (5) следува

$$\begin{aligned}\int_a^x e^{g(t)}df(t)&=\int_a^x e^{g(t)}d[\alpha(t)+\int_a^t \alpha(z)dg(z)]\\&=\int_a^x e^{g(t)}d\alpha(t)+\int_a^x e^{g(t)}\alpha(t)dg(t)\\&=\int_a^x e^{g(t)}[d\alpha(t)+\alpha(t)dg(t)]=\int_a^x d[e^{g(t)}\alpha(t)]\\&=e^{g(x)}\alpha(x)-e^{g(a)}\alpha(a),\end{aligned}$$

од што следува равенството (6), бидејќи според (5) имаме $f(a)=\alpha(a)$. ♦

10. ЗАДАЧИ

1. Докажете, дека ако f е непрекината на $[a,b]$, тогаш функциите

$$m(x)=\inf\{f(t)\mid t\in[a,x]\} \text{ и } M(x)=\sup\{f(t)\mid t\in[a,x]\}$$

се непрекинати и монотони на $[a,b]$.

2. Дадена е функцијата

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[0,\pi]\\ \sin x, & x\in[\pi,2\pi].\end{cases}$$

a) Најдете ја функцијата $v(x)=V(f,[0,x])$, $x\in[0,2\pi]$.

b) Разложете ја функцијата f како разлика на две монотоно неопаѓачки функции.

3. Нека $f\in\mathbf{C}([a,b])$. Докажете, дека ако $|f|\in\mathbf{BV}([a,b])$, тогаш $f\in\mathbf{BV}([a,b])$.

4. Нека функцијата f има извод f' на $[a,b]$, при што $f'\in\mathbf{R}([a,b])$. Докажете, дека $f\in\mathbf{BV}([a,b])$ и

$$V(f,[a,b])=\int_a^b |f'(x)|\,dx\,.$$

5. Нека $\varphi\in\mathbf{R}([a,b])$ и

$$f(x)=\int_a^x \varphi(t)dt\,,\ x\in[a,b]\,.$$

Докажете, дека

$$V(f,[a,b]) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt\,.$$

6. Пресметајте ја варијацијата на функцијата

а) $f(x) = \sin 2x,\ \ x \in [0, 2\pi]$,

б) $f(x) = |\sin x|,\ \ x \in [0,10\pi]$

7. Нека $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Докажете, дека $V(f,[0,1]) < +\infty$, ако $\alpha > \beta$ и $V(f,[0,1]) = +\infty$, ако $\alpha \le \beta$.

8. Нека $f : [a,+\infty) \to \mathbf{R}$ и за секој $b > a$ важи $f \in \mathbf{BV}([a,b])$. Дефинираме

$$V(f,[a,+\infty)) = \lim_{b\to+\infty} V(f,[a,b])\,.$$

Докажете, дека од неравенството $V(f,[a,+\infty)) < +\infty$ следува дека границата $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ е конечна.

9. Нека $f \in \mathbf{C}^1([a,b])$. Докажете, дека

$$\tfrac{d}{dx} V(f',[a,x]) = |f'(x)|\,,\ \ x \in [a,b]\,.$$

10. Претставете ги како разлика на две монотоно неопаѓачки функции следните функции:

а) $f(x) = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$; **б)** $f(x) = \sin^2 x,\ x \in [0, 2\pi]$;

в) $f(x) = x - [x],\ x \in [0,3]$; **г)** $f(x) = \sin x - x\cos x,\ x \in [0, 4\pi]$.

11. Нека $f, g \in \mathbf{BV}([a,b])$ и $h(x) = \max\limits_{x\in[a,b]} \{f(x), g(x)\}$. Докажете, дека $h \in \mathbf{BV}([a,b])$.

12. Нека $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и

$$g(a) = f(a)\,,\ \ g(x) = \tfrac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt\,,\ \ x \in (a,b]\,.$$

Докажете, дека $g \in \mathbf{BV}([a,b])$.

13. Нека $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и нека функцијата φ на множеството $\mathbf{R}$ го задоволува условот на Липшиц. Докажете, дека $\varphi \circ f \in \mathbf{BV}([a,b])$.

14. Докажете, дека $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ ако и само ако постои монотоно неопаѓачка функција g на $[a,b]$ таква што

$$|f(y) - f(x)| \le g(y) - g(x)\,,\ \text{за}\ \ a \le x < y \le b\,.$$

15. Нека $f \in \mathbf{BV}([0,1])$. Докажете, дека
$$F(x) = f(ax+b) \in \mathbf{BV}([-\tfrac{b}{a}, \tfrac{1-b}{a}]),\ a > 0 \text{ и } V(f,[0,1]) = V(F,[-\tfrac{b}{a}, \tfrac{1-b}{a}]).$$

16. За функцијата на Дирихле f на $[0,1]$ и за секоја функција α таква, што $\alpha(1) - \alpha(0) > 0$, за секоја поделба пресметајте ги сумите на Дарбу-Стилтејс и горниот и долниот Риман-Стилтејсов интеграл.

17. Испитајте ја конвергентноста на редот:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} V(f,[0,n\pi])$, $f(x) = x\sin^2 x$, $x \ge 0$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (V(f,[n,n+1]))^3$, $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \ge 0$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (V(f,[0,n]))^{-1}$, $f(x) = \sin^2 x$, $x \ge 0$.

18. Испитајте ја апсолутната конвергентност на редот
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (V(\sin x,[0,\pi n]))^{-1}.$$

19. Нека
$$\int_0^{\pi} \sin x d\alpha(x) = \alpha(\pi) - \alpha(0).$$
Докажете, дека функцијата α е константна, со исклучок во точката $\frac{\pi}{2}$ во која важи
$$\alpha(\tfrac{\pi}{2}^{+}) - \alpha(\tfrac{\pi}{2}^{-}) = \alpha(\pi) - \alpha(0).$$

20. Докажете, ако интегралот $\int_a^b f(x)df(x)$ постои, тогаш
$$\int_a^b f(x)df(x) = \tfrac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a)).$$

21. Нека за секоја функција $f \in \mathbf{C}([0,1])$ важи
$$\int_0^1 f(x)d\alpha(x) = f(\tfrac{1}{2}).$$
Докажете, дека функцијата α е константна, освен во точката $\frac{1}{2}$ во која важи
$$\alpha(\tfrac{1}{2}^{+}) - \alpha(\tfrac{1}{2}^{-}) = 1.$$

22. Докажете, дека
$$|\int_a^b f(x)d\alpha(x)| \le \int_a^b |f(x)|\,dv(x) \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \bullet V(\alpha,[a,b]),$$

каде $v(x)=V(\alpha,[a,x])$, $x\in[a,b]$.

23. За функцијата $f\in\mathbf{C}([a,b])$ и секоја монотона неопаѓачка функција α на $[a,b]$ важи

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\alpha(b)-\alpha(a)\,.$$

Докажете, дека $f(x)=1$, за секој $x\in[a,b]$.

24. Пресметајте го интегралот

$$\int_0^{\pi} x^2 d(\sin x)\,.$$

25. Пресметајте го интегралот

$$\int_0^2 2^x d(x\,\mathrm{sign}\cos\pi x)\,.$$

26. Пресметајте го интегралот:

а) $\int_0^1 xd(\mathrm{sign}\sin 4\pi x)$, б) $\int_0^1 xd(x^2\,\mathrm{sign}\sin 4\pi x)$

27. Нека

$$\alpha(x)=\begin{cases} x+4, & x\in[-1,0]\\ 1, & x\in(0,1)\\ \frac{1}{3}, & x=1\\ -x^2-1, & x\in(1,2].\end{cases}$$

Пресметајте ги интегралите:

а) $\int_{-1}^{2} xd\alpha(x)$; б) $\int_{-1}^{2} (x^2+1)d\alpha(x)$; в) $\int_{-1}^{2} |x|\,d\alpha(x)$.

28. Нека

$$g(x)=\begin{cases} 0, & x<1\\ x^2, & x\geq 1.\end{cases}$$

Пресметајте ги интегралите:

а) $\int_0^2 x^3dg(x)$; б) $\int_0^2 g(x+t)dg(x),\quad t\in\mathbf{R}$.

29. Пресметајте го интегралот $\int_0^a x^2d[x],\ a>0$.

30. Нека $g(x)=[x]$ и $\varepsilon\in(0,1)$. Пресметајте ги интегралите:

а) $\int\limits_0^n g(x+\varepsilon)dg(x)$; б) $\int\limits_0^n g(x)dg(x+\varepsilon)$.

31. Нека $g \in \mathbf{BV}([0,1])$. Пресметајте:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n dg(x).$$

32. Докажете ја егзистенцијата на интегралот

$$\int\limits_1^n x^{x-[x]}d[x+\tfrac{1}{2}],\quad n=2,3,4,\ldots,$$

а потоа истиот пресметајте го.

33. Нека $t \in (0,1)$. Пресметајте го интегралот

$$\int\limits_t^1 x^a d[\tfrac{1}{x}].$$

За кои вредности на параметарот a тој постои кога $t \to 0^+$?

34. Пресметајте го интегралот

$$\int\limits_0^2 (x^2+1)dg(x),$$

каде

$$g(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1) \\ [x]+1, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

35. Пресметајте го интегралот

$$\int\limits_0^2 f(x)dg(x),$$

каде $f(x)=[x-\tfrac{1}{2}]$ и $g(x)=[x^2]$.

36. Ако

$$I_a(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ 1, & x\ge a \end{cases} \quad \text{и} \quad b(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} I_{\frac{k}{n}}(x),$$

пресметајте го интегралот $\int\limits_0^1 x^2 db(x)$.

37. Ако $\alpha \in \mathbf{BV}([0,1])$ и $f \in \mathbf{C}([0,2])$, тогаш фунцијата

$$F(x)=\int\limits_0^1 f(x+t)d\alpha(t)$$

е непрекината на $[0,1]$. Докажете!

38. Пресметајте

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\sin x dg_n(x),$$

каде

$$g_n(x)=\begin{cases}\frac{x}{n}, & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \frac{\pi}{2}+\frac{x^3}{n}, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi]\\ \pi+\frac{x}{n}, & x\in(\pi,2\pi].\end{cases}$$

39. Нека

$$g_n(x)=\begin{cases}(\frac{i-1}{n})^2, & x\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}),\ i=1,2,\dots,n\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

Пресметајте ги границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^x dg_n(x)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^2 dg_n(x)$.

40. Определете $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 f(x)dg_n(x)$, ако $f\in\mathbf{C}([0,2])$, а

$$g_n(x)=\begin{cases}\frac{n^2x^2}{1+n^3x}, & x\in[0,1]\\ 1+\frac{x}{n}, & x\in(1,2].\end{cases}$$

41. Нека

$$g_n(x)=\begin{cases}|x|^n, & |x|\le 1\\ (|x|-2)^n, & 1<|x|\le 2.\end{cases}$$

а) Пресметајте ја функцијата $v_n(x)=V(g_n,[-2,2])$.

b) Пресметајте $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-2}^2 f(x)dg_n(x)$, ако $f\in\mathbf{C}([-2,2])$.

42. Нека $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2 dt$. Докажете, дека $|f(t)|<\frac{2}{3}$.

43. Нека $f,g\in\mathbf{C}([a,b])$, а α е монотоно неопаѓачка функција на $[a,b]$. Докажете го *неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц*

$$\left|\int_a^b fgd\alpha\right|^2\le\int_a^b f^2d\alpha\cdot\int_a^b g^2d\alpha.$$

44. Нека $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални функции на интервалот $[0,1]$. Докажете:

a) ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ конвергира на $[0,1]$, тогаш

$$V(\sum_{n=1}^{\infty} g_n,[0,1]) \le \sum_{n=1}^{\infty} V(g_n,[0,1]) \text{ и}$$

b) ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} V(g_n,[0,1])$ и $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(0)$ конвергираат, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ конвергира на $[0,1]$ и притоа за секоја непрекината функција f на $[0,1]$ важи

$$\int_0^1 f(x)d\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f(x)dg_n(x) .$$

IX ГЛАВА

МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

1. ПОИМ ЗА МЕТРИЧКИ ПРОСТОР. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

1.1. Дефиниција. Нека X е непразно множество. Функцијата $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$ која ги задоволува условите

i) $\rho(x,y) \geq 0$, за секои $x,y \in X$ и $\rho(x,y)=0$ ако и само ако $x=y$,

ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, за секои $x,y \in X$, и

iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$, за секои $x,y,z \in X$.

ја нарекуваме *метрика* (*растојание*) во X. Подредениот пар (X,ρ) го нарекуваме *метрички простор*, а елементите на множеството X негови *точки*.

Условите *i*), *ii*) и *iii*) се аксиоми за метрика и истите ги именуваме како *аксиома за позитивна дефинитност*, *аксиома за симетричност* и *аксиома* (*неравенство*) *на триаголник*, соодветно.

1.2. Лема. Ако (X,ρ) е метрички простор, тогаш

$$|\rho(x,z)-\rho(z,y)| \leq \rho(x,y), \text{ за секои } x,y,z \in X.$$

Доказ. Од аксиомите *ii*) и *iii*) во дефиниција 1.1 имаме

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)=\rho(x,y)+\rho(z,y)$$

па затоа

$$\rho(x,z)-\rho(z,y) \leq \rho(x,y). \tag{1}$$

Аналогно

$$\rho(z,y)-\rho(x,z) \leq \rho(x,y). \tag{2}$$

Сега тврдењето следува од неравенствата (1) и (2). ♦

1.3. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Тогаш за секој природен број $n \geq 3$ и за секои точки $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ важи

$$\rho(x_1,x_n) \leq \rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3)+...+\rho(x_{n-1},x_n). \tag{3}$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на точките n. Ако $n=3$, тогаш тврдењето непосредно следува од аксиомата за триаголник при $x_1=x$, $x_2=y$ и $x_3=z$.

Нека претпоставиме дека неравенството е исполнето за $n = k \geq 3$, т.е. дека за произволни точки $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ е исполнето *неравенството на многуаголник*

$$\rho(x_1, x_k) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + ... + \rho(x_{k-1}, x_k) . \tag{4}$$

Нека $n = k + 1$ и $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1} \in X$. Тогаш од аксиомата за триаголник, ако ставиме $x_1 = x,\ x_k = y,\ x_{k+1} = z$, и од неравенството (4) добиваме

$$\begin{aligned}\rho(x_1, x_{k+1}) &\leq \rho(x_1, x_k) + \rho(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + ... + \rho(x_{k-1}, x_k) + \rho(x_k, x_{k+1}),\end{aligned}$$

т.е. неравенството (3) е исполнето и за $n = k + 1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека неравенството важи за секој природен број $n \geq 3$. ♦

1.4. Лема. Ако (X, ρ) е метрички простор, тогаш за секои точки $x, y, u, v \in X$ е исполнето неравенството

$$| \rho(x, u) - \rho(y, v) | \leq \rho(x, y) + \rho(u, v) . \tag{5}$$

Доказ. Од неравенството на многуаголник (лема 1.3) и од аксиомата *ii*) во дефиниција 1.1 имаме

$$\rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(y, v) + \rho(v, u) = \rho(x, y) + \rho(y, v) + \rho(u, v)$$

па затоа

$$\rho(x, u) - \rho(y, v) \leq \rho(x, y) + \rho(u, v) . \tag{6}$$

Аналогно

$$\rho(y, v) - \rho(x, u) \leq \rho(x, y) + \rho(u, v) . \tag{7}$$

Сега тврдењето следува од неравенствата (6) и (7). ♦

1.5. Лема. Ако (X, ρ) е метрички простор, тогаш функцијата $d : X \times X \to \mathbf{R}$ определена со

$$d(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\ \ x, y \in X \tag{8}$$

е метрика на X.

Доказ. За секои $x, y \in X$ важи

$$d(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \geq 0 \ \text{ и } \ d(x, y) = 0$$

ако и само ако $\rho(x, y) = 0$, т.е. ако и само ако $x = y$, што значи дека точна е аксиомата *i*) од дефиниција 1.1.

Понатаму, за секои $x, y \in X$ имаме

$$d(x, y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = d(y, x) ,$$

што значи дека точна е аксиомата *ii*) од дефиниција 1.1.

Да ја разгледаме функцијата $f(t)=\frac{t}{1+t}, t\geq 0$. Од $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$ следува дека оваа функција монотоно расте за $t\geq 0$, па затоа од

$$\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$$

добиваме

$$\begin{aligned} d(x,z)&=\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}\leq \frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}\\ &=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}\\ &\leq \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}=d(x,y)+d(y,z),\end{aligned}$$

што значи дека точна е аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1. ♦

2. ПРИМЕРИ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

2.1. Пример. Дискретен метрички простор. Нека X е непразно множество. Лесно се проверува дека со

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

за секои $x,y\in X$ е дефинирана метрика на множеството X. Оваа метрика ја нарекуваме *дискретна*, а подредениот пар (X,ρ) го нарекуваме *дискретен метрички простор*. ♦

2.2. Пример. Просторот $(\mathbf{R}^n,\rho_1)$. Нека $n\in\mathbf{N}$ и

$$X=\mathbf{R}^n=\{(x_1,...,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}, i=1,...,n\}.$$

За $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ и $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n)$ во $\mathbf{R}^n$ нека

$$\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|.$$

Јасно, функцијата $\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ е добро дефинирана. Лесно се проверува дека аксиомите *i*) и *ii*) од дефиницијата 1.1 се исполнети. Понатаму, нека $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n)$, $\mathbf{z}=(z_1,...,z_n)\in\mathbf{R}^n$. Од својствата на апсолутна вредност имаме

$$|x_i-z_i|\leq|x_i-y_i|+|y_i-z_i|, \text{ за } i=1,2,...,n \tag{1}$$

и ако ги собереме неравенствата (1) го добиваме неравенството

$$\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{z})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|=\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})+\rho_1(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

што значи дека е исполнета и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1. Според тоа $(\mathbf{R}^n,\rho_1)$ е метрички простор. ♦

2.3. Пример. Просторот $(\mathbf{R}^n,\rho_\infty)$. Нека $n\in\mathbf{N}$, $X=\mathbf{R}^n$, и за секои $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n)\in\mathbf{R}^n$ да ставиме

$$\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})=\max_{j=1,2,...,n}|x_j-y_j|.$$

Јасно, функцијата $\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})$ е добро дефинирана. Лесно се проверува дека аксиомите *i*) и *ii*) од дефиницијата 1.1 се исполнети. Понатаму, нека $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,...,y_n)$, $\mathbf{z}=(z_1,...,z_n)\in\mathbf{R}^n$. Сега, од неравенствата (1) и од својствата на максимумот добиваме дека за $i=1,2,...,n$ важи

$$|x_i-z_i|\le\max_{i=1,2,...,n}\{|x_i-y_i|+|y_i-z_i|\}\le\max_{i=1,2,...,n}|x_i-y_i|+\max_{i=1,2,...,n}|z_i-y_i|\},$$

па затоа

$$\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{z})=\max_{i=1,2,...,n}|x_i-z_i|\le\max_{i=1,2,...,n}|x_i-y_i|+\max_{i=1,2,...,n}|z_i-y_i|\}=\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})+\rho_\infty(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

што значи дека е исполнета и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1. Според тоа $(\mathbf{R}^n,\rho_\infty)$ е метрички простор. ♦

2.4. Пример. Просторите $(\mathbf{R}^n,\rho_p)$, $1<p<\infty$. За секој $p, 1<p<\infty$ и $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ ставаме

$$\rho_p(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^p)^{1/p}. \tag{2}$$

Јасно, функцијата $\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})$ е добро дефинирана. Ќе докажеме дека со (2) е дефинирана метрика на $\mathbf{R}^n$. Очигледно својствата *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1 се исполнети. Понатаму, од неравенството на Минковски, при $a_j=|x_j-z_j|$ и $b_j=|z_j-y_j|, j=1,2,...,n$ следува

$$\begin{aligned}\rho_p(\mathbf{x},\mathbf{y})&=(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^p)^{1/p}\le(\sum_{j=1}^{n}(|x_j-z_j|+|z_j-y_j|)^p)^{1/p}\\&\le(\sum_{j=1}^{n}|x_j-z_j|^p)^{1/p}+(\sum_{j=1}^{n}|z_j-y_j|^p)^{1/p}=\rho_p(\mathbf{x},\mathbf{z})+\rho_p(\mathbf{z},\mathbf{y}),\end{aligned}$$

што значи дека е исполнета и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1. Според тоа, $(\mathbf{R}^n,\rho_p)$, $1<p<\infty$ е метрички простор.

Природно е да се запрашаме каков е односот меѓу метриките ρ_∞ и ρ_p, ако землеме $p \to \infty$. Од очигледните неравенства

$$(\max_{j=1,2,\dots,n} |x_j - y_j|)^p \le \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \le n \bullet (\max_{j=1,2,\dots,n} |x_j - y_j|)^p$$

следува

$$\max_{j=1,2,\dots,n} |x_j - y_j| \le (\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p)^{1/p} \le \sqrt[p]{n} \bullet \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j - y_j|,$$

т.е.

$$\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \rho_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \sqrt[p]{n}\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Понатаму, земаме $p \to \infty$ и имајќи предвид дека $\lim\limits_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} = 1$ од претходните неравенства добиваме

$$\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \lim_{p\to\infty} \rho_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n}\rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

т.е. $\lim\limits_{p\to\infty} \rho_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \rho_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y})$. ♦

2.5. Пример. Просторите $(l^p, \rho_p), 1 \le p < \infty$. Да го разгледаме множеството од сите низи $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ во $\mathbf{R}$ такви, што редот $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ конвергира:

$$l^p = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid \quad x_j \in \mathbf{R} \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$$

Ќе докажеме дека со

$$\rho_p(x,y) = (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p)^{1/p}. \tag{3}$$

е определена метрика на l^p.

Прво ќе докажеме дека редот кој се наоѓа на десната страна на (3) конвергира, т.е. дека $\rho_p(x,y)$ има смисол за секои $x, y \in l^p$. Навистина, од својствата на конвергентните бројни редови, неравенството за апсолутна вредност при $p = 1$ и од неравенството на Минковски при $p > 1$, за секој $n = 1, 2, \dots$ имаме

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p)^{1/p} \le (\sum_{j=1}^{n} (|x_j| + |y_j|)^p)^{1/p} \le (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p} + (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p)^{1/p}$$

$$\le (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p)^{1/p} + (\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p)^{1/p} < \infty.$$

Ако во последното неравенството земеме $n \to \infty$ добиваме

$$\rho_p(x,y)=(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j-y_j|^p)^{1/p}<\infty ,$$

што значи дека редот на десната страна на (3) конвергира, т.е. функцијата $\rho_p(x,y)$ е добро дефинирана за секои $x,y\in l^p$.

Јасно, својствата *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1 се исполнети. Понатаму, од неравенството за апсолутна вредност при $p=1$ и неравенството на Минковски при $p>1$, за секој $n=1,2,...$ имаме

$$(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^p)^{1/p}\leq(\sum_{j=1}^{n}|x_j-z_j|^p)^{1/p}+(\sum_{j=1}^{n}|z_j-y_j|^p)^{1/p}\leq\rho_p(x,z)+\rho_p(z,y)$$

и ако во последното неравенство земеме $n\to\infty$ добиваме

$$\rho_p(x,y)\leq\rho_p(x,z)+\rho_p(z,y)\text{, за секои } x,y,z\in l^p ,$$

што значи дека е исполнета и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1, т.е. $(l^p,\rho_p), 1\leq p<\infty$ е метрички простор. ♦

2.6. Пример. Просторот $(l^{\infty},\rho_{\infty})$. Да го разгледаме множеството од сите ограничени низи $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ во $\mathbf{R}$:

$$l^{\infty}=\{x=(x_1,x_2,...)\mid \quad x_j\in\mathbf{R} \text{ и } \sup_{j=1,2,...}|x_j|<\infty\}$$

Ќе докажеме дека со

$$\rho_{\infty}(x,y)=\sup_{j=1,2,...}|x_j-y_j| . \tag{4}$$

е воведена метрика во l^{∞} .

Прво ќе докажеме дека редот кој се наоѓа на десната страна на (4) конвергира, т.е. дека $\rho_{\infty}(x,y)$ има смисол за секои $x,y\in l^{\infty}$. Навистина, од неравенството за апсолутна и од својства на супремумот имаме

$$|x_j-y_j|\leq|x_j|+|y_j|\leq\sup_{j=1,2,...}(|x_j|+|y_j|)\leq\sup_{j=1,2,...}|x_j|+\sup_{j=1,2,...}|y_j|<\infty ,$$

и ако во последното неравенството на левата страна земеме супремум по $j=1,2,...$ добиваме

$$\rho_{\infty}(x,y)=\sup_{j=1,2,...}|x_j-y_j|<\infty ,$$

т.е. функцијата $\rho_{\infty}(x,y)$ е добро дефинирана за секои $x,y\in l^{\infty}$.

Јасно, својствата *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1 се исполнети. Нека $x,y,z\in l^{\infty}$. Од неравенството за апсолутна вредност и од својствата на супремумот, за секој $j=1,2,...$ имаме

$$| x_j - y_j | \leq | x_j - z_j | + | z_j - y_j | \leq \sup_{i=1,2,...} (| x_i - z_i | + | z_i - y_i |)$$

$$\leq \sup_{i=1,2,...} | x_i - z_i | + \sup_{i=1,2,...} | z_i - y_i | = \rho_\infty(x,z) + \rho_\infty(z,y)$$

и ако во последното неравенството на левата страна землеме супремум по $j = 1,2,...$ добиваме

$$\rho_\infty(x,y) = \sup_{i=1,2,...} | x_j - y_j | \leq \rho_\infty(x,z) + \rho_\infty(z,y) \,,$$

за секои $x,y,z \in l^\infty$, што значи дека е исполнета и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1. т.е. (l^∞, ρ_∞) е метрички простор. ♦

2.7. Пример. Просторот c**.** Точки на метричкиот простор c се конвергентните низи $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ во $\mathbf{R}$, а растојанието е воведено со

$$\rho(x,y) = \sup_{j=1,2,...} | x_j - y_j | \,.$$

Навистина, секоја конвергентна низа е ограничена, па точноста на тврдењето непосредно следува од пример 2.6. ♦

2.8. Пример. Просторот c_0**.** Точки на метричкиот простор c_0 се низите $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ во $\mathbf{R}$ кои конвергираат кон 0, а растојанието е воведено со

$$\rho(x,y) = \sup_{j=1,2,...} | x_j - y_j | \,.$$

Навистина, секоја низа конвергентна кон 0 е конвергентна, па точноста на тврдењето нопосредно следува од пример 2.7. ♦

2.9. Пример. Просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$**.** Нека $X = \mathbf{C}([a,b])$. Ќе докажеме дека со

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{t \in [a,b]} | x(t) - y(t) | ,\; x,y \in \mathbf{C}([a,b])$$

е определена метрика на $\mathbf{C}([a,b])$.

Јасно, својствата *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1 се исполнети. Понатаму, од својствата на апсолутната вредност и својствата на максимумот следува

$$| x(t) - y(t) | \leq | x(t) - z(t) | + | y(t) - z(t) | \leq \max_{t \in [a,b]} (| x(t) - z(t) | + | y(t) - z(t) |)$$

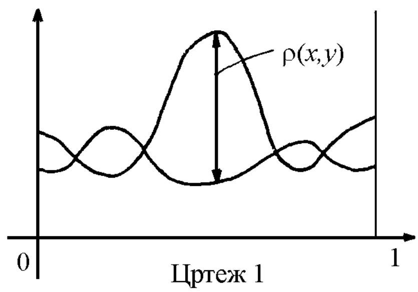
$$\leq \max_{t \in [a,b]} | x(t) - z(t) | + \max_{t \in [a,b]} | z(t) - y(t) | = \rho(x,z) + \rho(y,z),$$

за секои $x,y \in \mathbf{C}([a,b])$ и за секој $t \in [a,b]$. Во последното неравенство на левата страна земаме максимум кога $t \in [a,b]$ добиваме

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| \\ \leq \rho_\infty(x,z)+\rho_\infty(y,z).$$

Според тоа, $(X,\rho)=(\mathbf{C}([a,b]),\rho_\infty)$ е метрички простор.

Забележуваме дека во случајов под растојание $\rho_\infty(x,y)$ меѓу функциите (точките) $x,y\in\mathbf{C}([0,1])$ ја подразбираме најголемата ордината меѓу графиците на функциите $x(t)$ и $y(t)$, $t\in[0,1]$, цртеж 1. ♦



Цртеж 1

2.10. Пример. Просторот $(B(T),\rho_\infty)$ **.** Нека T е произволно множество и со $B(T)$ да го означиме множеството од сите ограничени функции од T во $\mathbf{R}$, т.е. нека

$$B(T)=\{x:T\to\mathbf{R} \mid \sup_{t\in T}|x(t)|<\infty\}.$$

Ќе докажеме дека со

$$\rho_\infty(x,y)=\sup_{t\in T}|x(t)-y(t)|$$

е определена метрика на $B(T)$, која ја нарекуваме *метрика на рамномерна конвергенција*.

Прво ќе докажеме дека за секои $x,y\in B(T)$ важи $\rho_\infty(x,y)<\infty$. Навистина, нека

$$\sup_{t\in T}|x(t)|=\alpha<\infty \text{ и } \sup_{t\in T}|y(t)|=\beta<\infty.$$

Од својствата на апсолутната вредност и својствата на супремумот следува

$$|x(t)-y(t)|<|x(t)|+|y(t)|\leq \sup_{t\in T}|x(t)|+\sup_{t\in T}|y(t)|=\alpha+\beta<\infty$$

за секои $x,y\in B(T)$ и за секој $t\in T$ и ако во последното неравенство земеме супремум по $t\in T$ добиваме

$$\rho_\infty(x,y)=\sup_{t\in T}|x(t)-y(t)|\leq\alpha+\beta<\infty.$$

Јасно, аксиомите *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1 се исполнети. Понатаму,

$$|x(t)-y(t)|\leq|x(t)-z(t)|+|y(t)-z(t)|\leq \sup_{t\in T}(|x(t)-z(t)|+|y(t)-z(t)|) \\ \leq \sup_{t\in T}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in T}|z(t)-y(t)|=\rho_\infty(x,z)+\rho_\infty(y,z),$$

за секои $x,y\in B(T)$ и за секој $t\in T$, па затоа

$$\rho_\infty(x,y)=\sup_{t\in T}|x(t)-y(t)|\leq\rho_\infty(x,z)+\rho_\infty(y,z),$$

т.е. исполнета е и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1. Според тоа, $(B(T),\rho_\infty)$ е метрички простор.

Да забележиме, дека ако земеме $T=\mathbf{N}$, тогаш $B(T)$ е просторот l^∞.

2.11. Пример. Просторот $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_p)$**.** Нека $X=\mathbf{C}([a,b])$ и $p\ge 1$. Ќе докажеме дека со

$$\rho_p(x,y)=(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt)^{1/p},\ x,y\in\mathbf{C}([a,b]) \tag{5}$$

е определена метрика на $\mathbf{C}([a,b])$.

Нека $p=1$. Од теорема V 14.8 и својствата на апсолутната вредност следува дека аксиомите *i*), *ii*) и *iii*) од дефиниција 1.1 се исполнети, т.е. со (4) е дефинирана метрика на $\mathbf{C}([a,b])$.

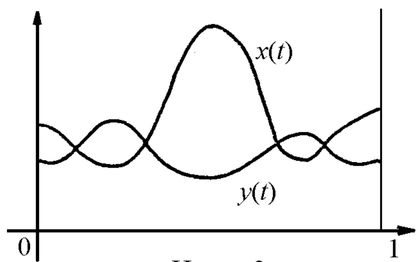
Нека $p>1$. Од теорема V 14.8 и својствата на апсолутната вредност следува дека својствата *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1 се исполнети. Нека $x,y,z\in \mathbf{C}([a,b])$. Од неравенството на Минковски (пример V 14.13) следува

$$\begin{aligned}\rho_p(x,y)&=(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt)^{1/p}=(\int_a^b |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|^p\,dt)^{1/p}\\&\le(\int_a^b |x(t)-z(t)|^p\,dt)^{1/p}+(\int_a^b |z(t)-y(t)|^p\,dt)^{1/p}=\rho_p(x,z)+\rho_p(z,y),\end{aligned}$$

т.е. исполнета е и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1, што значи дека со (4) е дефинирана метрика на $\mathbf{C}([a,b])$.

Добиениот метрички простор ќе го означуваме со $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_p)$.

Забележуваме дека во случајов под растојание $\rho_1(x,y)$ меѓу функциите (точките) $x,y\in\mathbf{C}([0,1])$ ја подразбираме плоштината на делот од рамнината ограничен со графиците на функциите $x(t)$ и $y(t)$, $t\in[0,1]$, цртеж 2. ♦



Цртеж 2

2.12. Лема. Нека $X=\mathbf{C}([a,b])$, $p>1$ и функцијата $\rho_p(x,y)$, $x,y\in \mathbf{C}([a,b])$ е дефинирана со (3). Тогаш со

$$\rho^*(x,y)=\lim_{p\to\infty}\rho_p(x,y) \tag{5}$$

е дефинирана метрика на $\mathbf{C}([a,b])$.

Доказ. Нека $r>1$ и да ставиме

$$M_r(|x-y|)=[\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^r}{b-a}dt]^{1/r}\ ,\ x,y\in \mathbf{C}([a,b])\ .$$

Ќе докажеме дека од $1<r<s$ следува $M_r(|x-y|)<M_s(|x-y|)$. Земаме $p=\frac{s}{r}>1$ и наоѓаме q таков, да $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Од неравенството на Холдер (V 14.13) следува

$$\begin{aligned}M_r(|x-y|)&=(\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^r}{b-a}dt)^{1/r}=(\int_a^b (\frac{|x(t)-y(t)|^s}{b-a})^{1/p}\bullet(\frac{1}{b-a})^{1/q}dt)^{1/r}\\ &\le [(\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^s}{b-a}dt)^{1/p}\bullet(\int_a^b \frac{1}{b-a}dt)^{1/q}]^{1/r}=(\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^s}{b-a}dt)^{1/pr}\\ &=(\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^s}{b-a}dt)^{1/s}=M_s(|x-y|),\end{aligned}$$

т.е. функцијата $r\mapsto M_r(|x-y|)$ монотоно расте на интервалот $(1,+\infty)$. Ако $x(t)=y(t)$, $t\in[a,b]$, тогаш

$$\rho_\infty(x,y)=\lim_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=0\ .$$

Нека претпоставиме дека $x(t)\neq y(t)$ и нека K е таков, да

$$0<K<\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|\ .$$

Тогаш, од лема III 2.7 следува дека постои интервал $[c,d]\subseteq[a,b]$ таков, да $|x(t)-y(t)|\ge K$, за секој $t\in[c,d]$. Според тоа,

$$[\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^r}{b-a}dt]^{1/r}\ge[\int_c^d \frac{|x(t)-y(t)|^r}{b-a}dt]^{1/r}\ge[\int_c^d \frac{K^r}{b-a}dt]^{1/r}=K(\frac{d-c}{b-a})^{1/r}\ .$$

Но, функцијата $r\mapsto M_r(|x-y|)$ монотоно расте на интервалот $(1,+\infty)$ и како $\lim_{r\to\infty}(\frac{d-c}{b-a})^{1/r}=1$ добиваме дека

$$\lim_{r\to\infty}M_r(|x-y|)\ge K\ ,$$

т.е.

$$\begin{aligned}K\le\lim_{r\to\infty}M_r(|x-y|)&=\lim_{r\to\infty}[\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^r}{b-a}dt]^{1/r}\\ &=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{(b-a)^{1/r}}\bullet[\int_a^b|x(t)-y(t)|^r\ dt]^{1/r}\\ &=\lim_{r\to\infty}[\int_a^b|x(t)-y(t)|^r\ dt]^{1/r}\end{aligned}$$

и од произволноста на K следува

$$\max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| \le \lim_{r\to\infty} [\int_a^b |x(t)-y(t)|^r \, dt]^{1/r} . \qquad (6)$$

Од друга страна

$$\frac{|x(t)-y(t)|}{\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|} \le 1 \text{, за секој } t\in[a,b] ,$$

па затоа

$$\begin{aligned}[\int_a^b |x(t)-y(t)|^r \, dt]^{1/r} &= \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| \bullet [\int_a^b (\frac{|x(t)-y(t)|}{\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|})^r \, dt]^{1/r} \\ &\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| (\int_a^b dt)^{1/r} \\ &= (b-a)^{1/r} \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| \end{aligned}$$

од што следува

$$\lim_{r\to\infty} [\int_a^b |x(t)-y(t)|^r \, dt]^{1/r} \le \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| \bullet \lim_{r\to\infty} (b-a)^{1/r} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| . \qquad (7)$$

Од неравенствата (6) и (7) следува

$$\lim_{r\to\infty} [\int_a^b |x(t)-y(t)|^r \, dt]^{1/r} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)| .$$

Конечно, од примерот под а) следува дека со (5) е зададена метрика во $\mathbf{C}([a,b])$ и притоа важи $\rho^*(x,y)=\rho_\infty(x,y)$, за секои $x,y\in\mathbf{C}([a,b])$. ♦

2.13. Пример. Просторот s. Да го разгледаме множеството од сите низи $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ во $\mathbf{R}$:

$$s=\{x=(x_1,x_2,x_3,...) \mid \quad x_j\in\mathbf{R}\}$$

Ќе докажеме дека со

$$\rho_s(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|} \quad , \ x,y\in s \qquad (8)$$

е дефинирана метрика во s .

Од $\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}<1$ следува дека редот на десната страна во (8) конвергира за секои $x,y\in s$ (зошто?), што значи дека функцијата ρ_s со (8) е добро дефинирана. Јасно, аксиомите *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1 се исполнети. Понатаму, аналогно на доказот во лема 1.5 од неравенството $|a+b|\le|a|+|b|$ следува:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} . \qquad (9)$$

Ако во неравенството (9) последователно ставиме

$$a = x_i - z_i,\, b = z_i - y_i \text{, за } i = 1, 2, \ldots ,$$

помножиме со 2^{-i} и ги собереме добиените неравенства добиваме

$$\rho_s(x, y) \le \rho_s(x, z) + \rho_s(z, y) .$$

за секои $x, y, z \in s$, т.е. исполнета е и аксиомата и *iii*) од дефиниција 1.1 Значи, (s, ρ_s) е метрички простор. ♦

3. НИЗИ ВО МЕТРИЧКИ ПРОСТОР

3.1. Дефиниција. Нека (X, ρ) е метрички простор. Секое пресликување $x : \mathbf{N} \to X$ ќе го нарекуваме *низа во метричкиот простор* X. Притоа, ќе ја користиме ознаката $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X. За низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека *конвергира во* (X, ρ), ако постои x таков, што $\rho(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$. Притоа елементот x го нарекуваме *граница на низата* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во (X, ρ) и пишуваме $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to x$, $n \to \infty$.

3.2. Пример. Во $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ да ја разгледаме низата $\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^{\infty}$ дефинирана со

$$\mathbf{x}_m = \left(\tfrac{2m+1}{m}, \tfrac{(m+1)^2}{m^2}\right), \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

Ќе докажеме дека оваа низа конвергира кон точката $\mathbf{x} = (2,1)$.

Навистина, бидејќи

$$\lim_{m\to\infty} \rho(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{5m^2+4m+1}}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{5}{m^2} + \frac{4}{m^3} + \frac{1}{m^4}} = 0 ,$$

согласно со дефиниција 3.1 имаме $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$. ♦

3.3. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X. Тогаш $x_n \to x$, $n \to \infty$ ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, кога $n > n_0$.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $\varepsilon > 0$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон точката $x \in X$. Но, тогаш од дефиниција 3.1 следува дека $\rho(x_n, x) \to 0$, кога $n \to \infty$, па затоа постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_n, x) = |\rho(x_n, x) - 0| < \varepsilon$, кога $n > n_0$.

$\Leftarrow$. Обратно, нека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, кога $n > n_0$. Но, тоа значи дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$| \rho(x_n, x) - 0 | = \rho(x_n, x) < \varepsilon \text{, кога } n > n_0 \text{, т.е. } \rho(x_n, x) \to 0 \text{, кога } n \to \infty .$$

Конечно, од дефиниција 3.1 имаме дека $x_n \to x$, $n \to \infty$. ♦

3.4. Теорема. Ако $x_n \to x$, $n \to \infty$ во (X, ρ) и $x_n \to y$, $n \to \infty$ во (X, ρ), тогаш $x = y$.

Доказ. Согласно аксиомите за ненегативност и за триаголник, имаме

$$0 \le \rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y),$$

за секој $n \ge 1$. Од $\rho(x_n, x) \to 0$ и $\rho(x_n, y) \to 0$, $n \to \infty$ и од претходните неравенства следува $\rho(x, y) = 0$, што значи $x = y$. ♦

3.5. Теорема. Нека $x_n \to x$, $n \to \infty$ во (X, ρ) и $y_n \to y$, $n \to \infty$ во (X, ρ). Тогаш $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$, $n \to \infty$.

Доказ. Од лема 1.4 и фактот дека $\rho(x_n, x) \to 0$, $\rho(y_n, y) \to 0$ кога $n \to \infty$ следува

$$| \rho(x_n, y_n) - \rho(x, y) | \le \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0, \ n \to \infty$$

што значи $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$, $n \to \infty$. ♦

3.6. Последица. Ако $x_n \to x$, $n \to \infty$ во (X, ρ), тогаш за секој $y \in X$ важи

$$\rho(x_n, y) \to \rho(x, y), \ n \to \infty .$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 3.5, за $y_n = y, n = 1, 2, \ldots$. ♦

3.7. Последица. Ако $x_n \to x$, $n \to \infty$ во (X, ρ), тогаш множеството $\{\rho(x_n, y) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ е ограничено за секој $y \in X$.

Доказ. Нека y е произволна точка од X. Според последица 3.6 реалната низа $\{\rho(x_n, y)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон $\rho(x, y)$, па затоа таа е ограничена, што значи дека множеството $\{\rho(x_n, y) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ е ограничено. ♦

3.8. Пример. Нека $\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^k$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})$. Во просторот $(\mathbf{R}^k, \rho_p)$, $p \ge 1$ низата $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ако и само ако

$$\lim_{n \to \infty} x_{jn} = x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k . \tag{1}$$

Навистина, ако $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $n \to \infty$ во $(\mathbf{R}^k, \rho_p)$, тогаш

$$| x_{jn} - x_j | \leq \rho_p(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}),\ j = 1, 2, ..., k,$$

па затоа се исполнети равенствата (1).

Нека се исполнети равенствата (1). Тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за $n > n_0$ важи

$$| x_{jn} - x_j | \leq \tfrac{\varepsilon}{\sqrt[p]{k}},\ \text{за}\ j = 1, 2, ..., k.$$

Според тоа, за $n > n_0$ важи

$$\rho_p(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = (\sum_{j=1}^{k} | x_{jn} - x_j |^p)^{1/p} < \varepsilon,$$

т.е. $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $n \to \infty$ во $(\mathbf{R}^k, \rho_p)$. ♦

3.9. Пример. Како што видовме, во просторот $(\mathbf{R}^k, \rho_p)$, $p \geq 1$ конвергенцијата по метрика е еквивалентна со конвергенцијата по координати. Меѓутоа, во просторот $l^p, 1 \leq p < \infty$ од конвергенцијата по метрика следува конвергенција по координати, но обратното не важи. Навистина, ако $\rho_p(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$, тогаш од

$$| x_{jn} - x_j | \leq \rho_p(x_n, x) \to 0, n \to \infty,\ \text{за}\ j = 1, 2, 3, 4, ...$$

следува $\lim\limits_{n \to \infty} x_{jn} = x_j$, за $j = 1, 2, 3, 4, ...$.

Дека обратното тврдење не важи доволно е да ја разгледаме низата

$$e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in l^p,\ n = 1, 2, ...,$$

каде 1 се наоѓа на $n-$то место. Јасно, $e_{jn} \to 0, n \to \infty$, за секој $j = 1, 2, ...$, но $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира во l^p, бидејќи ако $e_n \to x$, $n \to \infty$ во l^p, тогаш $x_j = 0$, за секој $j = 1, 2, ...$, па така $x = 0$, но $\rho_p(e_n, 0) = 1$, за секој $n = 1, 2, ...$, што противречи на $\rho_p(e_n, 0) \to 0$, кога $n \to \infty$. ♦

3.10. Пример. Да ја разгледаме конвергентноста во просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во $\mathbf{C}([a,b])$ и $x_n \to x$, $n \to \infty$ во $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$. Тоа значи дека

$$\max_{t \in [a,b]} | x_n(t) - x(t) | \to 0,\ n \to \infty,$$

т.е. за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков, што

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t)-x(t)|<\varepsilon \text{, кога } n>n_0$$

и според тоа

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon \text{, кога } n>n_0 \text{, за секој } t\in[a,b].$$

Последното значи дека низата функции $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $x(t)$.

Лесно се покажува дека важи и обратното тврдење, т.е. ако низата функции $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $x(t)$, тогаш $\rho(x_n,x)\to 0$, кога $n\to\infty$.

Конечно, рамномерната конвергентност на интервалот $[a,b]$ е еквивалентна со конвергентноста во просторот $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_\infty)$. ♦

3.11. Пример. Да ја разгледаме конвергентноста во просторот l^∞.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во просторот l^∞ и $x_n\to x$, $n\to\infty$ во l^∞. Значи, за секој $\varepsilon>0$ постои n_0 таков што

$$\rho(x_n,x)=\sup_{i=1,2,\dots} |x_{in}-x_i|<\varepsilon \text{, кога } n>n_0.$$

Според тоа,

$$|x_{in}-x_i|<\varepsilon \text{, кога } n>n_0 \text{, за секој } i=1,2,\dots,$$

што значи дека од конвергентноста по метрика следува конвергентноста по координати.

Обратно, нека за секој $\varepsilon>0$ постои n_0 таков што

$$|x_{in}-x_i|<\varepsilon \text{, кога } n>n_0 \text{, за секој } i=1,2,\dots.$$

Тогаш

$$\sup_{i=1,2,\dots} |x_{in}-x_i|\le\varepsilon<2\varepsilon \text{, кога } n>n_0,$$

т.е. $\rho(x_n,x)<2\varepsilon$, кога $n>n_0$, што според дефиниција 3.1 значи дека $x_n\to x$, $n\to\infty$ во l^∞.

Да забележиме дека аналогните размислувања важат и за просторите c и c_0. Имено, за овие простори важи $c_0\subset c\subset l^\infty$. ♦

3.12. Пример. Да го разгледаме просторот $(B(T),\rho_\infty)$. Ќе докажеме дека $x_n\to x$, $n\to\infty$ во $(B(T),\rho_\infty)$ ако и само ако за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon \text{, за секој } t\in T \text{, кога } n>n_0. \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што е исполнет условот (1). Тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$|x_n(t) - x(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ за секој } t \in T, \text{ кога } n > n_0.$$

Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\rho_\infty(x_n, x) = \sup_{t\in T} |x_n(t) - x(t)| \le \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ кога } n > n_0,$$

што според дефиниција 3.1 значи дека $x_n \to x$, $n \to \infty$ во $(B(T), \rho_\infty)$.

Обратно, нека претпоставиме дека $x_n \to x$, $n \to \infty$ во $(B(T), \rho_\infty)$. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho_\infty(x_n, x) = \sup\limits_{t\in T} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, кога $n > n_0$. Но, тогаш за секој $n > n_0$ и за секој $t \in T$ важи $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, што значи дека е исполнет условот (1). ♦

3.13. Пример. Да ја разгледаме конвергентноста во просторот s. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во s, $x \in s$ и $x_n \to x$, $n \to \infty$ во s. Тоа значи, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in} - x_i|}{1 + |x_{in} - x_i|} < \varepsilon,$$

кога $n > n_0$. Но, тогаш и за секој фиксиран i имаме $\frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in} - x_i|}{1 + |x_{in} - x_i|} < \varepsilon$, кога $n > n_0$, односно

$$|x_{in} - x_i| < \frac{2^i}{1 - 2^i \varepsilon} \varepsilon$$

кога $n > n_0$ и како i е фиксиран, од произволноста на ε следува $x_{in} \to x_i$, кога $n \to \infty$.

Обратно, нека $x_{in} \to x_i$, кога $n \to \infty$, за секој $i = 1, 2, \ldots$ и нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Наоѓаме m таков што

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in} - x_i|}{1 + |x_{in} - x_i|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in} - x_i|}{1 + |x_{in} - x_i|} \\ &< \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in} - x_i|}{1 + |x_{in} - x_i|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in} - x_i|}{1 + |x_{in} - x_i|} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Бидејќи бројот на собирците во збирот на десната страна на последното неравенство е конечен и фиксиран, а $x_{in} \to x_i$, кога $n \to \infty$, за секој $i = 1, 2, \ldots, m$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in}-x_i|}{1+|x_{in}-x_i|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

кога $n > n_0$. Конечно, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\rho(x_n, x) < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_{in}-x_i|}{1+|x_{in}-x_i|} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

кога $n > n_0$, што значи $x_n \to x$, $n \to \infty$ во s.

Од претходно изнесеното следува дека конвергентноста во смисол на метриката во s е еквивалентна со конвергентноста по координати. ♦

3.14. Пример. Да ја разгледаме конвергентноста во просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_p)$, $p \geq 1$.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во $\mathbf{C}([a,b])$ и $x_n \to x$, $n \to \infty$ во $\mathbf{C}([a,b])$. Тоа значи дека

$$0 = \lim_{n\to\infty} \rho_p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

Геометриската смисла на последното равенство е дека плоштината на површината која графикот на функцијата $|x_n(t) - x(t)|^p$, над интервалот $[a,b]$, ја зафаќа со апсцисната оска тежи кон 0, кога $n \to \infty$. Меѓутоа, од тука не следува дека на интервалот $[a,b]$ низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира по точки кон функцијата x.

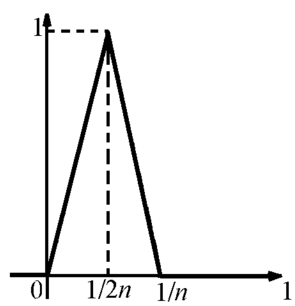
Навистина, во просторот $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_p)$, $p \geq 1$, да ја разгледаме низата $x_n(t) = t^n$, $n \geq 1$. Нека $x(t) = 0$, за секој $t \in [0,1]$. Од

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \rho_p(x_n, x) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |t^n - 0|^p \, dt\right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{np+1}\right)^{1/p} = 0,\end{aligned}$$

следува $x_n \to 0$, $n \to \infty$. Но, за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $x_n(1) = 1$, па затоа во точката $t = 1$ низата $x_n(t) = t^n$ не конвергира по точки кон функцијата $x(t) = 0$.

Нека $p = 1$ и да ја разгледаме функционалната низа

$$x_n(t) = \begin{cases} 4n^2 t, & t \in [0, \frac{1}{2n}) \\ -4n^2(t - \frac{1}{n}), & t \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \qquad (2)$$



Цртеж 3

Од $x_n(0)=0$, за секој $n\geq 1$ и како за секој $t>0$ важи $x_n(t)=0$, за $n\geq \frac{1}{x}$ заклучуваме дека

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=0=x(t),$$

за секој $t\in[0,1]$, т.е. низата (2) конвергира по точки кон функцијата $x(t)=0, t\in[0,1]$. Понатаму, лесно се докажува дека

$$\lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|\,dt=1,$$

што значи дека во просторот $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_1)$ низата (2) не конвергира кон функцијата $x(t)=0, t\in[0,1]$. Со аналогни размислувања се докажува, дека при $p>1$ од конвергенцијата по точки не следува конвергенцијата во просторот $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_p)$.

Од досега изнесеното заклучуваме дека конвергенцијата по точки и конвергенцијата во просторот $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_p)$, $p\geq 1$ се неспоредливи. ♦

3.15. Пример. Во претходниот пример ја разгледавме низата функции $x_n(t)=t^n$, $n\geq 1$ која во просторот $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_1)$ конвергира кон функцијата $x(t)=0$ и за која важи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(1)=1\neq x(1)$, т.е. во $t=1$ немаме конвергенција по точки. Овде ќе разгледаме низа функции $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и функција x во $C([0,1])$ такви, што

$$\lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n,x)=0,$$

и за секоја точка $t_0\in[0,1]$ реалната низа $\{x_n(t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е дивергентна, т.е. во секоја точка $t_0\in[0,1]$ немаме конвергенција по точки.

Нека n е произволен природен број и k е најголемиот цел број таков, да $2^k\leq n$. Според тоа, $n=2^k+m$, каде $m\in\{0,1,2,...,2^k-2,2^k-1\}$. Понатаму, дефинираме функција

$$z_n(t)=\begin{cases} 0, & t\in(-\infty,(m-1)\bullet 2^{-k}) \\ 2^k t-(m-1), & t\in[(m-1)\bullet 2^{-k}, m\bullet 2^{-k}) \\ 1, & t\in[m\bullet 2^{-k},(m+1)\bullet 2^{-k}) \\ -2^k t+(m+2), & t\in[(m+1)\bullet 2^{-k},(m+2)\bullet 2^{-k}) \\ 0, & t\in[(m+2)\bullet 2^{-k},+\infty) \end{cases}$$

и нека $x_n(t)$ е рестрикцијата на $z_n(t)$ на интервалот $[0,1]$. Бидејќи $|x_n(t)|\leq 1$, за секој $t\in[0,1]$ и $x_n(t)\neq 0$ само на интервалот $[(m-1)\bullet 2^{-k},(m+2)\bullet 2^{-k}]$ добиваме

$$\rho_1(x_n,0)=\int_0^1 |\,x_n(t)-0\,|\,dt=\int_{(m-1)\bullet 2^{-k}}^{(m+2)\bullet 2^{-k}} x_n(t)dt$$

$$\leq \int_{(m-1)\bullet 2^{-k}}^{(m+2)\bullet 2^{-k}} dt=3\bullet 2^{-k}.$$

Понатаму, ако $n\to\infty$, тогаш $k\to\infty$ па од последното неравенство следува

$$0\leq \lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,0)\leq \lim_{k\to\infty}3\bullet 2^{-k}=0,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,0)=0,$$

што значи дека низата функции $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во просторот $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_1)$ конвергира кон функцијата $x(t)=0$.

Од друга страна, за секој $t\in[0,1]$ реалната низа $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ е дивергентна. Навистина, лесно се гледа дека за секој $n\geq 1$ постојат природни броеви $i,j>n$ такви, што $x_i(t)=0$ и $x_j(t)=1$. ♦

3.16. Дефиниција. Нека $x:\mathbf{N}\to X$ е низа во метричкиот простор (X,ρ) и $n:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е строго монотоно растечка функција. Композицијата $x\circ n:\mathbf{N}\to X$ ја нарекуваме *подниза на низата* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Во натамошните разгледувања за означување на подниза на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе ја користиме ознаката $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

3.17. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X. Ако $x_n\to x$, $n\to\infty$, тогаш за секоја подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ важи $x_{n_k}\to x$, $k\to\infty$ во (X,ρ).

Доказ. Нека $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подниза од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\varepsilon>0$ е дадено. Од $x_n\to x$, $n\to\infty$ и од лема 3.3 следува дека постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што $\rho(x_n,x)<\varepsilon$, кога $n>n_0$. Но, функцијата $n:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ од дефиниција 3.16 строго монотоно расте, па затоа постои $k_0\in\mathbf{N}$ таков што $n_{k_0}\geq n_0$. Понатаму, повторно од строгата монотоност на функцијата $n:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ следува дека за секој $k>k_0$ важи $n_k>n_{k_0}\geq n_0$, што значи $\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon$, кога $k>k_0$, т.е. $x_{n_k}\to x$, $k\to\infty$ во (X,ρ). ♦

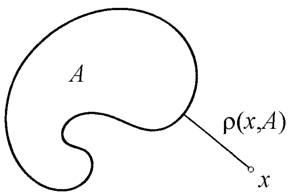
4. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ МНОЖЕСТВА

4.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. *Растојание* меѓу точката $x \in X$ и непразното подмножество A од X, цртеж 4, го нарекуваме реалниот број $\rho(x,A)$ определен со

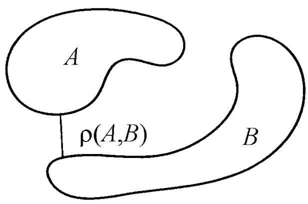
$$\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in A\}.$$

Растојание меѓу непразните подмножества A и B од X, цртеж 5, го нарекуваме реалниот број $\rho(A,B)$ определен со

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) \mid x \in A,\, y \in B\}.$$



Цртеж 4



Цртеж 5

4.2. Забелешка. Од дефиниција 4.1 и од својствата на инфимумот непосредно следува дека за секоја точка $x \in X$ и за секои непразни подмножества A и B од метричкиот простор (X,ρ) важи

$$\rho(x,A) < +\infty \text{ и } \rho(A,B) < +\infty.$$

4.3. Пример. а) Нека (X,ρ) е дискретен метрички простор. За секој $p \in X$ и непразни множества $A,B \subset X$ важи

$$\rho(p,A) = \begin{cases} 1, & \text{ако } p \notin A \\ 0, & \text{ако } p \in A, \end{cases} \text{ и } \rho(A,B) = \begin{cases} 1, & \text{ако } A \cap B = \varnothing \\ 0, & \text{ако } A \cap B \neq \varnothing. \end{cases}$$

б) Да ги разгледаме следниве интервали на реалната права $A = [-1,0)$ и $B = (0,2]$. При обичната метрика ρ_1 имаме

$$\rho_1(A,B) = \inf\{\rho_1(x,y) = |x-y|,\; x \in A,\, y \in B\} = 0,$$

а додека при дискретна метрика ρ од $A \cap B = \varnothing$ следува $\rho(A,B) = 1$. ♦

4.4. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и A е непразно подмножество од X. Реалниот број

$$\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x,y) \mid x,y \in A\}$$

го нарекуваме *дијаметар* на множеството A, во ознака $d(A) = \operatorname{diam} A$.

Ако дијаметарот на множеството A е конечен, т.е. $d(A) < +\infty$, тогаш ќе велиме дека множеството A е *ограничено*. Ако $d(A) = +\infty$, тогаш ќе велиме дека множеството A е *неограничено*.

4.5. Коментар. Нека (X,ρ) е метрички простор. Според лема 1.5 функцијата $\rho_1 : X \times X \to \mathbf{R}$ определена со

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \ \ x,y \in X$$

е метрика во X. Јасно, за оваа метрика важи $\rho_1(x,y) < 1$, за секои $x,y \in X$. Според тоа, во метричкиот простор (X,ρ_1) секое множество е ограничено.

4.6. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор, A и B се непразни подмножества од X и $p \in X$. Тогаш

i) $\rho(p,A)$, $\rho(A,B)$ и $d(A)$ се ненегативни реални броеви.

ii) Ако $p \in A$, тогаш $\rho(p,A) = 0$.

iii) Ако $A \cap B \neq \varnothing$, тогаш $d(A,B) = 0$.

iv) Ако A е конечно подмножество од X, тогаш $d(A) < +\infty$, т.е. множеството A е ограничено.

v) Ако $A \subseteq B$, тогаш $d(A) \leq d(B)$.

Доказ. Непосредно следува од дефинициите 4.1 и 4.3. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4.7. Забелешка. а) Обратните тврдења на *ii*), *iii*) и *iv*) не се точни. Навистина, за $p = 0$ и $A = [-1,0)$ важи $\rho(p,A) = 0$, меѓутоа $0 \notin A$, што значи дека обратното тврдење на тврдењето под *ii*) не е точно. Слично, за $A = [-1,0)$ и $B = (0,2]$ важи $\rho(A,B) = 0$, но $A \cap B = \varnothing$, што значи дека обратното тврдење на тврдењето под *iii*) не е точно. Конечно, за множеството $A = [-1,0)$ важи $d(A) = 1 < +\infty$, но A не е конечно множество, што значи дека обратното тврдење на тврдењето под *iv*) не е точно.

б) Ако множеството A во дефинициите 4.1 и 4.3 е празно множество, тогаш по договор земаме

$$\rho(p,\varnothing) = +\infty, \ \rho(\varnothing,B) = \rho(B,\varnothing) = +\infty \ \text{ и } \ d(\varnothing) = -\infty .$$

4.8. Лема. а) Нека (X,ρ) е метрички простор и $A,B \subseteq X$. Тогаш

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(A,y) \mid y \in B\} = \inf\{\rho(x,B) \mid x \in A\} .$$

б) Нека (X,ρ) е метрички простор и A и B се ограничени подмножества од X. Тогаш

$$d(A \cup B) \leq d(A) + \rho(A,B) + d(B) .$$

Доказ. а) За произволни точки $x \in A,\ y \in B$ важи

$$\rho(x,y) \geq \inf\{\rho(x,y) \mid x \in A\} = \rho(A,y) \geq \inf\{\rho(A,y) \mid y \in B\} ,$$

па затоа

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}\geq \inf\{\rho(A,y)\mid y\in B\}\ . \tag{1}$$

Од друга страна,

$$\rho(x,y)\geq \inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}=\rho(A,B)\ ,$$

па затоа

$$\rho(A,y)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A\}\geq \rho(A,B)\ ,$$

од што следува

$$\inf\{\rho(A,y)\mid y\in B\}\geq \rho(A,B)\ . \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) следува $\rho(A,B)=\inf\{\rho(A,y)\mid y\in B\}$.

Аналогно се докажува равенството $\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,B)\mid x\in A\}$.

б) Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Од дефиниција 4.1 следува дека постојат точки $a_\varepsilon\in A$ и $b_\varepsilon\in B$ такви, што $\rho(a_\varepsilon,b_\varepsilon)\leq\rho(A,B)+\varepsilon$. За секои точки $a\in A, b\in B$ важи

$$\rho(a,b)\leq\rho(a,a_\varepsilon)+\rho(a_\varepsilon,b_\varepsilon)+\rho(b_\varepsilon,b)\leq d(A)+\rho(A,B)+\varepsilon+d(B)$$

и од произволноста на ε следува дека за секои точки $a\in A, b\in B$ важи

$$\rho(a,b)\leq d(A)+\rho(A,B)+d(B)\ .$$

Понатаму, за секои $a,x\in A$ важи

$$\rho(a,x)\leq d(A)\leq d(A)+\rho(A,B)+d(B)$$

и за секои $b,y\in B$ важи

$$\rho(b,y)\leq d(B)\leq d(A)+\rho(A,B)+d(B)\ .$$

Конечно, од последните три неравенства следува дека

$$d(A\cup B)\leq d(A)+\rho(A,B)+d(B)\ . \ ♦$$

4.9. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A_i,\ i=1,2,...,k$ се непразни ограничени подмножества на X . Тогаш множеството $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ е ограничено.

Доказ. Непосредно следува од забелешка 4.2, лема 4.8 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4.10. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и A е непразно подмножество од X . Тогаш за секои $x,y\in X$ важи

$$|\ \rho(x,A)-\rho(y,A)\ |\leq\rho(x,y)\ . \tag{3}$$

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од дефиниција 4.1 следува дека постои $z \in A$ таков што $\rho(y,z) \le \rho(y,A) + \varepsilon$, т.е. $-\rho(y,A) \le -\rho(y,z) + \varepsilon$. Сега од лема 1.4 следува дека за секој $v \in A$ важи

$$\rho(x,v) - \rho(y,A) \le \rho(x,v) - \rho(y,z) + \varepsilon \le \rho(x,y) + \rho(v,z) + \varepsilon . \tag{4}$$

Да ги разгледаме множествата

$$M = \{\rho(x,v) - \rho(y,A) \mid v \in A\} \text{ и } N = \{\rho(x,y) + \rho(v,z) + \varepsilon \mid v \in A\} .$$

Од неравенствата (4) следува дека

$$\inf M \le \inf N . \tag{5}$$

Земаме $v = z$ и добиваме дека $\rho(x,y) + \varepsilon \in N$, па од неравенствата (5) следува дека

$$\inf M \le \inf N \le \rho(x,y) + \varepsilon .$$

Но,

$$\inf M = \rho(x,A) - \rho(y,A) ,$$

па од последното неравенство и од произволноста на $\varepsilon > 0$ добиваме

$$\rho(x,A) - \rho(y,A) \le \rho(x,y) .$$

Понатаму, претходните разгледувања се наполно симетрични по однос на точките x и y, па затоа $\rho(y,A) - \rho(x,A) \le \rho(x,y)$. Конечно, од последните неравенства следува неравенството (3). ♦

5. ОТВОРЕНИ ТОПКИ

5.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор, $x_0 \in X$ и $r > 0$.

а) *Затворена топка* $\overline{B}(x_0;r)$ со центар во точката x_0 и радиус r го нарекуваме множеството

$$\overline{B}(x_0;r) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) \le r\} .$$

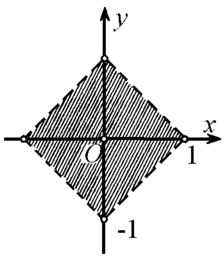
б) *Отворена топка* $B(x_0;r)$ со центар во точката x_0 и радиус r го нарекуваме множеството

$$B(x_0;r) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) < r\} .$$

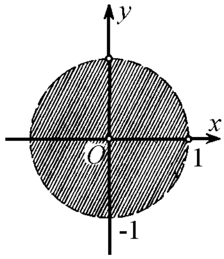
б) *Сфера* $S(x_0;r)$ со центар во точката x_0 и радиус r го нарекуваме множеството

$$S(x_0;r) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) = r\} .$$

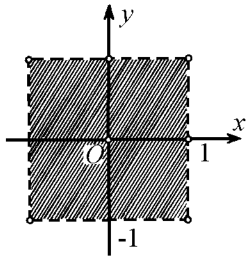
5.2. Пример. а) Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ при $\mathbf{x} = (0,0)$ и $r = 1$ отворената топка $B(\mathbf{x};r)$ е отворениот единечен диск и истиот е прикажан на цртеж 7.



Цртеж 6



Цртеж 7



Цртеж 8

б) Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2, \rho_1)$ при $\mathbf{x} = (0,0)$ и $r = 1$ отворената топка $B(\mathbf{x}; r)$ е множеството прикажано на цртеж 6.

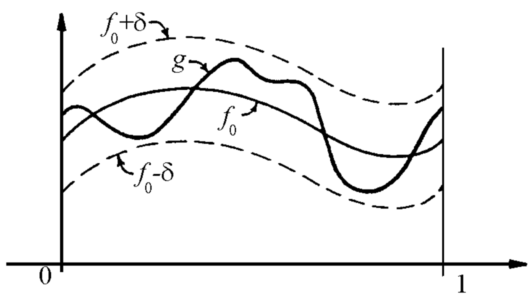
в) Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2, \rho_\infty)$ при $\mathbf{x} = (0,0)$ и $r = 1$ отворената топка $B(\mathbf{x}; r)$ е множеството прикажано на цртеж 8. ♦

5.3. Пример. а) Нека (X, ρ) е дискретен метрички простор и нека $x_0 \in X$. Лесно се гледа дека во случајов имаме

$$B(x_0; r) = \begin{cases} X, & \text{ако } r > 1, \\ \{x_0\}, & \text{ако } r \le 1, \end{cases}$$

$$\overline{B}(x_0; r) = \begin{cases} X, & \text{ако } r \ge 1, \\ \{x_0\}, & \text{ако } r < 1, \end{cases}$$

$$S(x_0; r) = \begin{cases} X \setminus \{x_0\}, & \text{ако } r = 1, \\ \varnothing, & \text{ако } r \ne 1. \end{cases}$$



Цртеж 9

б) Во метричкиот простор $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ при $f_0 \in \mathbf{C}([0,1])$ и $\delta > 0$ отворената топка $B(f_0; \delta)$ е составена од сите непрекинати функции g чиј график се наоѓа меѓу графиците на функциите $f_0 - \delta$ и $f_0 + \delta$, цртеж 9. ♦

5.4. Лема. Множеството A е ограничено ако и само ако тоа се содржи во некоја затворена топка.

Доказ. Нека A е ограничено множество со дијаметар $d(A)$ и $x_0 \in A$. Тогаш, за секој $y \in A$ важи $\rho(x_0, y) \le d(A)$, што значи $A \subseteq \overline{B}(x_0; d(A))$.

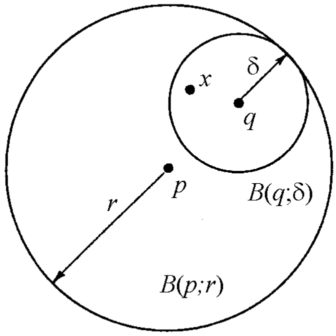
Обратно, нека постои топка $\overline{B}(x_0; r)$ таква, што $A \subseteq \overline{B}(x_0; r)$. Тогаш, од неравенството на триаголник добиваме

$$\rho(x, y) \le \rho(x_0, x) + \rho(x_0, y) \le r + r = 2r ,$$

за секои $x, y \in A$. Според тоа, за секои $x, y \in A$ важи

$$d(A) = \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\} \leq 2r < +\infty,$$

т.е. множеството A е ограничено. ♦



Цртеж 10

5.5. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор и $B(p;r) \subseteq X$. Тогаш за секоја точка $q \in B(p;r)$ постои отворена топка $B(q;\delta)$ таква што $B(q;\delta) \subseteq B(p;r)$.

Доказ. Од $q \in B(p;r)$ следува дека $\rho(p,q) < r$. Да ставиме $\delta = r - \rho(p,q)$. Ќе докажеме дека $B(q;\delta) \subseteq B(p;r)$. Нека $x \in B(q;\delta)$. Тогаш $\rho(q,x) < \delta$ и од неравенството на триаголник следува

$$\rho(p,x) \leq \rho(p,q) + \rho(q,x) < \rho(p,q) + \delta = \rho(p,q) + r - \rho(p,q) = r,$$

што значи $x \in B(p;r)$, цртеж 10. Конечно, од произволноста на точката $x \in B(q;\delta)$ следува $B(q;\delta) \subseteq B(p;r)$. ♦

5.6. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор.

а) Ако за реалните броеви r_1 и r_2 важи $0 < r_1 \leq r_2$, тогаш за секој $x_0 \in X$ важи $B(x_0;r_1) \subseteq B(x_0;r_2)$.

б) За секои отворени топки $B(x_0;r_1)$ и $B(x_0;r_2)$ важи $B(x_0;r_1) \subseteq B(x_0;r_2)$ или $B(x_0;r_2) \subseteq B(x_0;r_1)$.

в) Нека $B(x_0;r)$, $B(y_0;r')$ и $z \in B(x_0;r) \cap B(y_0;r')$. Тогаш постои $\delta > 0$ таков што $B(z;\delta) \subseteq B(x_0;r) \cap B(y_0;r')$.

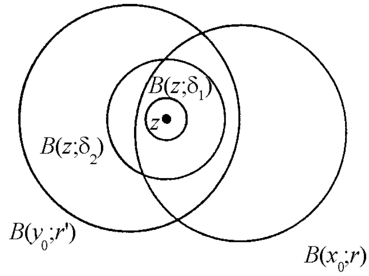
Доказ. а) Нека $x \in B(x_0;r_1)$. Тогаш $\rho(x, x_0) < r_1 \leq r_2$, што значи $x \in B(x_0;r_2)$. Сега од произволноста на x следува $B(x_0;r_1) \subseteq B(x_0;r_2)$.

б) Имаме $0 < r_1 \leq r_2$ или $0 < r_2 \leq r_1$, па од тврдењето под а) следува дека

$$B(x_0;r_1) \subseteq B(x_0;r_2)$$

или

$$B(x_0;r_2) \subseteq B(x_0;r_1).$$



Цртеж 11

в) Од $z \in B(x_0;r)$ и од лема 5.5 следува дека постои δ_1 таков што $B(z;\delta_1) \subseteq B(x_0;r)$. Слично, постои δ_2 таков што $B(z;\delta_2) \subseteq B(y_0;r')$. Сега, од тврдењето под б) следува дека

$$B(z;\delta_1) \subseteq B(z;\delta_2)$$

или

$$B(z;\delta_2) \subseteq B(z;\delta_1) .$$

Конечно,

- ако $B(z;\delta_1) \subseteq B(z;\delta_2)$, тогаш $B(z;\delta_1) \subseteq B(y_0;r')$ и како $B(z;\delta_1) \subseteq B(x_0;r)$ добиваме $B(z;\delta_1) \subseteq B(x_0;r) \cap B(y_0;r')$, црт. 11,

- ако $B(z;\delta_2) \subseteq B(z;\delta_1)$, тогаш $B(z;\delta_2) \subseteq B(x_0;r)$ и како $B(z;\delta_2) \subseteq B(y_0;r')$ добиваме $B(z;\delta_2) \subseteq B(x_0;r) \cap B(y_0;r')$. ♦

5.7. Лема. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во метричкиот простор (X,ρ) . Тогаш $x_n \to x$, $n \to \infty$ ако и само ако за секој $r > 0$, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\} \subseteq B(x;r) .$$

Доказ. Непосредно следува од лема 3.3 и дефиниција 5.1 б). Деталите ги оставаме за читателот за вежба. ♦

6. ТОЧКИ НА НАТРУПУВАЊЕ. ИЗВОДНО МНОЖЕСТВО

6.1. Дефиниција. Нека $A \subseteq X$ и $x_0 \in X$. За точката x_0 ќе велиме дека е *точка на натрупување* за множеството A , ако за секој $r > 0$ постои $x \in A, x \neq x_0$ таков што $x \in B(x_0;r)$.

6.2. Пример. а) За множеството $A = [0,1) \cup (2,3)$ секоја точка од множеството $[0,1] \cup [2,3]$ е негова точка на натрупување (зошто?).

б) Во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ за множеството $A = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{I}\}$ множеството точки на натрупување е целиот простор $\mathbf{R}^2$.

в) Во просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ да го разгледаме множеството A од сите полиноми со реални коефициенти. Од теоремата на Ваерштрас следува дека множеството точки на натрупување за A е целиот простор $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$. ♦

6.3. Пример. Нека S е непребројливо подмножество на $\mathbf{R}^m$. Докажете дека S има барем една точка на натрупување.

Решение. Нека претпоставиме дека S нема точки на натрупување. Тогаш за секој $\mathbf{x} \in S$, постои $\delta_{\mathbf{x}}$ таков што $B(\mathbf{x};\delta_{\mathbf{x}}) \cap S = \{\mathbf{x}\}$. Јасно, за секои $\mathbf{x},\mathbf{y} \in S$ такви што $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ важи $B(\mathbf{x},\delta_{\mathbf{x}}) \cap B(\mathbf{y},\delta_{\mathbf{y}}) = \varnothing$. Понатаму, во секоја отворена топка

$B(\mathbf{x},\delta_{\mathbf{x}})$ избираме точка со рационални координати $\mathbf{r}_{\mathbf{x}}$. Но, множеството точки со рационални кординати во $\mathbf{R}^m$ е пребројливо, а множеството S е непребројливо, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека множеството S има барем една точка на натрупување. ♦

6.4. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Точката x_0 е точка на натрупување за множеството $A\subseteq X$ ако и само ако постои низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква, што

i) $x_n\in A, x_n\neq x_0$, за секој $n\geq 1$,

ii) $x_n\to x_0, n\to\infty$ во (X,ρ).

Доказ. $\Rightarrow$. Нека x_0 е точка на натрупување за множеството A. Од дефиниција 6.1 следува дека за топката $B(x_0;1)$ постои точка $x_1\in A$, $x_1\neq x_0$ таква, што $x_1\in B(x_0;1)$, т.е. $\rho(x_1,x_0)<1$. Да ставиме $r=\frac{1}{2}\rho(x_1,x_0)$. Повторно од дефиниција 6.1 следува дека за топката $B(x_0;r)$ постои точка $x_2\in A$, $x_2\neq x_0$ таква, што $x_2\in B(x_0;r)$, т.е. $\rho(x_2,x_0)<r$. Продолжувајќи ја постапката наоѓаме низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ која ги задоволува условите *i*) и *ii*).

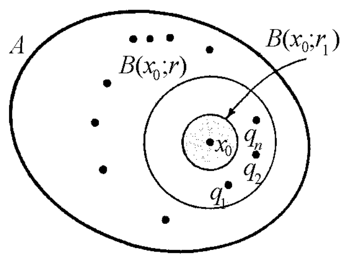
$\Leftarrow$. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа која ги задоволува условите *i*) и *ii*). Бидејќи $\rho(x_n,x_0)\to 0$, $n\to\infty$ добиваме, дека за секој $r>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што $\rho(x_n,x_0)<r$ кога $n>n_0$, т.е. $x_n\in B(x_0;r)$. Од *i*) имаме дека $x_n\in A, x_n\neq x_0$, што значи дека x_0 е точка на натрупување за множеството A. ♦

6.5. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако x_0 е точка на натрупување за множеството $A\subseteq X$, тогаш во секоја отворена топка $B(x_0;r)$, $r>0$ се содржат бесконечно многу точки од множеството A.

Доказ. Нека претпоставиме дека постои отворена топка $B(x_0;r)$, $r>0$ која содржи само конечно многу точки од A, различни од x_0, и нека тоа се точките $q_1,q_2,...,q_n$, цртеж 12. Земаме

$$r_1=\tfrac{1}{2}\min\{\rho(q_i,x_0),\ i=1,2,...,n\}.$$

Од $q_i\neq x_0$, за $i=1,2,...,n$ следува $\rho(q_i,x_0)>0$, за $i=1,2,...,n$, па затоа $r_1>0$.



Цртеж 12

Од изборот на r_1 следува дека отворената топка $B(x_0;r_1)$ не содржи точка $q\in A$ различна од x_0, што противречи на фактот дека x_0 е точка на натрупување за множеството A. Конечно, од добиената противречност следува дека секоја отворена топка $B(x_0;r)$, $r>0$ на x_0 содржи бесконечно многу точки од A. ♦

6.6. Последица. Конечно подмножество на метричкиот простор (X,ρ) нема точки на натрупување.

Доказ. Непосредно следува од теорема 6.5. ♦

6.7. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. Множеството од сите точки на натрупување на множеството A го нарекуваме *изводно множество* на A и го означуваме со A'.

6.8. Пример. а) Лесно се докажува дека во просторот $(\mathbf{R}^n, \rho_2)$ за множеството

$$\mathbf{Q}^n = \{(q_1,...,q_n) \mid \ q_i \in \mathbf{Q}, \text{ за } i = 1,2,...,n\}$$

изводното множество е $\mathbf{R}^n$.

б) Нека

$$X = \{(\tfrac{1}{k},...,\tfrac{1}{k}): \ k = 1,2,...\}, \ X \subset \mathbf{R}^n.$$

Лесно се докажува дека $X' = \{(0,...,0)\}$ и $X'' = (X')' = \varnothing$. Обидете се самостојно да го докажете ова тврдење. Според тоа, во општ случај $X'' \neq X'$. ♦

6.9. Теорема. *i*) Ако $A \subseteq B$, тогаш $A' \subseteq B'$.

ii) За секои множества A и B важи $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

iii) За секои множества A и B важи $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Доказ. *i)* Нека $r > 0$. Од $x_0 \in A'$ следува дека постои $x \in A, x \neq x_0$ таков што $x \in B(x_0;r)$. Но, $A \subseteq B$, па од претходно изнесеното следува дека постои $x \in B, \ x \neq x_0$ таков што $x \in B(x_0;r)$, што според дефиниција 6.1 значи дека $x_0 \in B'$. Конечно, од произволноста на x_0 следува $A' \subseteq B'$.

ii) Нека $r > 0$. Ако $x_0 \in A' \cup B'$, тогаш $x_0 \in A'$ или $x_0 \in B'$. Според тоа, постои $x \in A, x \neq x_0$ таков што $x \in B(x_0;r)$ или постои $x \in B, x \neq x_0$ таков што $x \in B(x_0;r)$. Значи, постои $x \in A \cup B, x \neq x_0$ таков што $x \in B(x_0;r)$, што според дефиниција 6.1 значи дека $x_0 \in (A \cup B)'$. Сега од произволноста на x_0 следува дека $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

Обратно, нека $x_0 \notin A' \cup B'$. Тогаш $x_0 \notin A'$ и $x_0 \notin B'$, т.е. постојат $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ такви што $B(x_0;r_1)$ не содржи точка од A различна од x_0 и $B(x_0;r_2)$ не содржи точка од B различна од x_0. Земаме $r = \min\{r_1, r_2\}$ и добиваме дека $B(x_0;r)$ не содржи точка од $A \cup B$ различна од x_0. Според тоа, $x_0 \notin (A \cup B)'$. Сега од произволноста на x_0 следува дека $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$

iii) Нека $x_0 \notin A' \cap B'$. Тогаш $x_0 \notin A'$ или $x_0 \notin B'$, т.е. постои $r_1 > 0$ таков што $B(x_0;r_1)$ не содржи точка од A различна од x_0 или постои $r_2 > 0$ таков што $B(x_0;r_2)$ не содржи точка од B различна од x_0. Земаме $r = \min\{r_1, r_2\}$ и добиваме дека $B(x_0;r)$ не содржи точка од $A\cap B$ различна од x_0. Според тоа, $x_0 \notin (A\cap B)'$. Сега од произволноста на x_0 следува дека $(A\cap B)' \subseteq A'\cap B'$. ♦

6.10. Пример. Да ги разгледаме множествата

$$A=\{0,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},...,\tfrac{1}{n},...\} \text{ и } B=\{0,-1,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3},...,-\tfrac{1}{n},...\}.$$

Имаме, $A'=\{0\}=B'$, т.е. $A'\cap B'=\{0\}$. Од друга страна $A\cap B=\{0\}$, па затоа $(A\cap B)'=\varnothing$, што значи дека обратната инклузија од теорема 4.9 *iii)* не важи. ♦

7. ОТВОРЕНИ МНОЖЕСТВА. ВНАТРЕШНОСТ НА МНОЖЕСТВО

7.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A\subseteq X$. За точката $x_0\in A$ ќе велиме дека е *внатрешна точка за множеството* A, ако постои $r>0$ таков, што $B(x_0;r)\subseteq A$.

7.2. Пример. а) За множеството $A=[0,1)\cup(2,3)$ во $(\mathbf{R},\rho)$ множеството внатрешни точки е $(0,1)\cup(2,3)$.

б) За множеството $A=\{(x,y)\,|\,x,y\in \mathbf{I}\}$ во $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ множеството внатрешни точки е празното множество, т.е. тоа нема внатрешни точки. ♦

7.3. Дефиниција. Множеството $U\subseteq X$ го нарекуваме *отворено* во метричкиот простор (X,ρ), ако секоја точка од U е внатрешна за U.

По дефиниција земаме дека празното множество е отворено.

7.4. Пример. Нека (X,ρ) е дискретен метрички простор и $U\subseteq X$. Ако $x\in A$, тогаш $B(x;\tfrac{1}{2})=\{x\}\subseteq U$, т.е. x е внатрешна точка за U, што според дефиниција 7.3 значи дека множеството U е отворено. ♦

7.5. Теорема. Секоја отворена топка е отворено множество во (X,ρ).

Доказ. Непосредно следува од лема 5.5 и дефинициите 7.3 и 7.1. ♦

7.6. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Множеството U е отворено ако и само ако U е унија на отворени топки во X.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека U е отворено множество во X и $x\in U$. Според дефиниција 7.3 точката x е внатрешна за множеството U, а од дефиниција 7.1 добиваме дека постои $r_x>0$ таков што $B(x;r_x)\subseteq U$. Но, тоа значи дека

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x; r_x),$$

т.е. U е унија на отворени топки во X.

$\Leftarrow$. Нека U е унија на отворени топки во X, т.е. $U = \bigcup_{i \in I} B(x_i; r_i)$ и $y \in U$. Тогаш постои $i_0 \in I$ таков што $y \in B(x_{i_0}; r_{i_0}) \subseteq U$. Но, тогаш од лема 5.5 следува дека постои отворена топка $B(y; r)$ таква што $B(y; r) \subseteq B(x_{i_0}; r_{i_0}) \subseteq U$, што според дефиниција 7.1 значи дека точката y е внатрешна за множеството U. Но, точката $y \in U$ е произволна, па од дефиниција 7.3 следува дека множеството U е отворено. ♦

7.7. Во претходната теорема докажавме дека во произволен метрички простор (X, ρ) множеството U е отворено ако и само ако U е унија на отворени топки во X. Логично е да се запрашаме колку елементи најмалку мора да содржи фамилијата отворени топки во просторот X, т.е. каква е структурата на отворените множества во конкретен метрички простор X? Одговорот на ова прашање не е едноставен, но за некои метрички простори не е проблем попрецизно да се определи структурата на отворените множества. За нашите разгледувања од посебен интерес е да ја определиме структурата на отворените множества во метричкиот простор $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ и тоа ќе го направиме во следниов пример.

Пример. Ќе докажеме дека секое непразно отворено множество во $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ е унија на најмногу пребројлива фамилија отворени топки.

Нека

$$P = \{B(\mathbf{z}; r) \mid \mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_m), z_i \in \mathbf{Q}, 1 \le i \le m, r \in \mathbf{Q}\}.$$

Јасно, P е пребројлива фамилија отворени топки во $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$. Нека A е отворено множество во $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ и $\mathbf{x} \in A$, т.е. постои $r > 0$ таков, што $B(\mathbf{x}; r) \subseteq A$. Ќе докажеме, дека постои топка $B(\mathbf{z}; r_{\mathbf{x}}) \subseteq A$.

Имаме, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ и да ги разгледаме интервалите

$$(x_i, x_i + \tfrac{r}{3\sqrt{m}}),\ i = 1, 2, ..., m.$$

Од својствата на реалните броеви следува дека постојат $z_i \in \mathbf{Q}$, $i = 1, 2, ..., m$ такви, што $z_i \in (x_i, x_i + \frac{r}{3\sqrt{m}})$, $i = 1, 2, ..., m$ и дека постои $r_{\mathbf{x}} \in \mathbf{Q}$ таков, што $\frac{r}{3} < r_{\mathbf{x}} < \frac{2r}{3}$.

Да ја разгледаме топката $B(\mathbf{z}; r_{\mathbf{x}})$. Имаме,

$$\rho(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^{m} (x_i - z_i)^2)^{1/2} < (\sum_{i=1}^{m} \tfrac{r^2}{9m})^{1/2} = \tfrac{r}{3} < r_{\mathbf{x}}$$

што значи $\mathbf{x} \in B(\mathbf{z}; r_{\mathbf{x}}) \in P$. Од друга страна, за секој $\mathbf{y} \in B(\mathbf{z}; r_{\mathbf{x}})$ важи

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z},\mathbf{y}) < \tfrac{r}{3} + r_{\mathbf{x}} < \tfrac{r}{3} + \tfrac{2r}{3} = r$$

т.е. $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x};r) \subseteq A$, што значи $B(\mathbf{z};r_{\mathbf{x}}) \subseteq A$. ♦

7.8. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Точни се следниве тврдења:

i) $\varnothing$ и X се отворени множества,

ii) пресек на конечно многу отворени множества е отворено множество, и

iii) унија на произволно многу отворени множества е отворено множество.

Доказ. *i)* Јасно, празното множество $\varnothing$ е отворено по дефиниција, а множеството X е отворено, бидејќи за секој $x \in X$ важи $B(x;1) \subseteq X$.

ii) Нека $V_1,...,V_n$ се отворени множества од . Ако $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = \varnothing$, тогаш тврдењето следува од *i)*. Нека претпоставиме дека $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Бидејќи секое од множествата $V_1,...,V_n$ е отворено, добиваме дека за секој $i = 1,...,n$ постои $r_i > 0$ таков што $B(x;r_i) \subseteq V_i$. Земаме $r = \min\{r_1,...,r_n\}$. Притоа $r > 0$ и $B(x;r) \subseteq B(x;r_i) \subseteq V_i$, за секој $i = 1,...,n$, од што следува дека $B(x;r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Од произволноста на точката x следува дека $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ е отворено множество.

iii) Нека $V_\alpha, \alpha \in A$ е произволна фамилија отворени множества од X и нека $x \in \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Тогаш, постои $\alpha_0 \in A$ таков, што $x \in V_{\alpha_0}$. Но, V_{α_0} е отворено, па затоа постои $r > 0$ таков, што $B(x;r) \subseteq V_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Од произволноста на точката x следува дека множеството $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ е отворено. ♦

7.9. Коментар. Точноста на тврдењето *iii)* од теорема 7.8 непосредно следува и од теорема 7.6. Имено, според теорема 7.6 секое од множествата $V_\alpha, \alpha \in A$ е унија од отворени топки во просторот X, па затоа и унијата на множествата $V_\alpha, \alpha \in A$ е унија на отворени топки во просторот X, што според теорема 7.6 значи дека е отворено множество.

7.10. Во теорема 7.8 докажавме дека пресек на конечна фамилија отворени множества е отворено множество. Меѓутоа, пресек на произволна фамилија отворени множества не мора да е отворено множество, што може да се види од следниов пример.

Пример. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ да ја разгледаме пребројливата фамилија отворени топки $B_i((0,0);\frac{1}{i}),\ i = 1,2,3,\ldots$. Имаме

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i((0,0);\tfrac{1}{i}) = \{(0,0)\},$$

и множеството $\{(0,0)\}$ не е отворено (зошто?). ♦

7.11. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. Множеството внатрешни точки на множеството A го нарекуваме *внатрешност* на A и го означуваме со A^0 или $\operatorname{int} A$.

7.12. Пример. а) Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ внатрешност на затворената топка

$$\overline{B}((0,0);1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

е отворената топка

$$B((0,0);1) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

б) Во метричкиот простор $(\mathbf{R}, \rho_1)$ внатрешност на затворениот интервал $[a,b]$ е отворениот интервал (a,b). Меѓутоа, ако на $\mathbf{R}$ е зададена дискретната метрика, тогаш внатрешноста на затворениот интервал $[a,b]$ е самиот интервал $[a,b]$, (зошто?). ♦

7.13. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. Тогаш внатрешноста A^0 е отворено множество.

Доказ. Нека $x \in A^0$, т.е. x е внатрешна точка за A. Значи, постои $r > 0$ таков што $B(x;r) \subseteq A$. Нека $y \in B(x;r)$ и да земеме

$$r_1 = \min\{\rho(x,y), r - \rho(x,y)\}.$$

Тогаш, $B(y;r_1) \subseteq B(x;r) \subseteq A$ што значи дека секоја точка од $B(x;r)$ е внатрешна за A, односно $B(x;r) \subseteq A^0$. Конечно, за секој $x \in A^0$ постои околина $B(x;r)$ таква што $B(x;r) \subseteq A^0$, т.е. x е внатрешна точка за A^0, па затоа A^0 е отворено множество. ♦

7.14. Теорема. *i*) Внатрешноста A^0 на произволно множество A е еднаква на унијата од сите отворени множества кои се содржат во множеството A.

ii) Ако G е отворено подмножество од A, тогаш $G \subseteq A^0 \subseteq A$.

iii) Множеството A е отворено ако и само ако $A = A^0$.

iv) Ако $A \subseteq B$, тогаш $A^0 \subseteq B^0$.

v) За секои множества A и B важи $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

vi) За секои множества A и B важи $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$.

vii) За секое множество A важи $(A^0)^0 = A^0$.

Доказ. *i*) Нека $U_\beta, \beta \in B$ е фамилијата од сите отворени множества такви, што $U_\beta \subseteq A$, за секој $\beta \in B$. Според теорема 7.13 множеството A^0 е отворено, па затоа постои $\beta_0 \in B$ таков, што $U_{\beta_0} = A^0$. Значи

$$A^0 = U_{\beta_0} \subseteq (\bigcup_{\beta \in B,\, \beta \neq \beta_0} U_\beta) \bigcup U_{\beta_0} = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta .$$

Обратно, нека $x \in \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$. Постои $\beta_1 \in B$ таков што $x \in U_{\beta_1} \subseteq A$ и бидејќи множествата $U_\beta \subseteq A$, $\beta \in B$ се отворени, следува дека x е внатрешна точка за множеството U_{β_1}. Според тоа, постои $r > 0$ таков што $B(x;r) \subseteq U_{\beta_1} \subseteq A$, т.е. x е внатрешна точка за A. Значи, $x \in A^0$, односно $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \subseteq A^0$.

Конечно, од $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \subseteq A^0$ и $A^0 \subseteq \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$ добиваме $A^0 = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$.

ii) Ако G е отворено подмножество од A, тогаш G се содржи во фамилијата $U_\beta, \beta \in B$ од сите отворени подмножества кои се содржат во множеството A. Сега од тврдењето под *i*) следува

$$G \subseteq \bigcup_{\beta \in B} U_\beta = A^0 \subseteq A .$$

iii) Ако A е отворено множество, тогаш од *ii*) следува $A \subseteq A^0 \subseteq A$, т.е. $A = A^0$. Обратно, ако $A = A^0$, тогаш според теорема 7.13 множеството A е отворено.

iv) Ако $x \in A^0$, тогаш постои $r > 0$ таков што $B(x;r) \subseteq A$. Но, $A \subseteq B$ па затоа постои $r > 0$ таков што $B(x;r) \subseteq B$, т.е. $x \in B^0$, што значи $A^0 \subseteq B^0$.

v) Од $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$, според *ii)* добиваме $(A \cap B)^0 \subseteq A^0$ и $(A \cap B)^0 \subseteq B^0$, па затоа $(A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0$.

Понатаму, според теоремите 7.13 и 7.8 *ii*) пресекот $A^0 \cap B^0$ е отворено множество и $A^0 \cap B^0 \subseteq A \cap B$, па од *i*) следува $A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0$.

vi) Непосредно следува од $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ и од *iii*).

vii) Непосредно следува од теорема 7.13 и тврдењето под *iii*). ♦

7.15. Забелешка. Во делот *vi*) од последната теорема обратната инклузија не е исполнета, што може да се види на примерот на множествата $A=[0,1]$ и $B=[1,2]$. Имаме, $A\cup B=[0,2]$, $A^0=(0,1)$, $B^0=(1,2)$ од каде што следува

$$(A\cup B)^0=(0,2)\supset(0,1)\cup(1,2)=A^0\cup B^0 \text{ . } ♦$$

7.16. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A\subset X$. Тогаш

$$A^0=\{x\mid \rho(x,X\setminus A)>0\}\text{ .}$$

Доказ. Нека $a\in A^0$. Според теорема 7.13 внатрешноста A^0 е отворено множество, па затоа постои $r>0$ таков што $B(a;r)\subseteq A^0\subseteq A$. Но, тоа значи дека

$$\rho(a,X\setminus A)=\inf\{\rho(a,y)\mid y\in X\setminus A\}\geq r>0\text{ ,}$$

па од произволноста на точката a следува $A^0\subseteq\{x\mid \rho(x,X\setminus A)>0\}$.

Нека $a\in\{x\mid \rho(x,X\setminus A)>0\}$, т.е. $\rho(a,X\setminus A)=r>0$. Да ги разгледаме множествата $X\setminus A$ и $B(a;\frac{r}{2})$. Ако $z\in X\setminus A\cap B(a;\frac{r}{2})$, тогаш

$$\tfrac{r}{2}>\rho(z,a)\geq\inf\{\rho(a,x)\mid x\in X\setminus A\}=\rho(a,X\setminus A)=r\text{ ,}$$

што е противречност. Според тоа, $X\setminus A\cap B(a;\frac{r}{2})=\varnothing$, па затоа $B(a;\frac{r}{2})\subseteq A$, што значи дека $a\in A^0$ и од произволноста на точката a следува

$$\{x\mid \rho(x,X\setminus A)>0\}\subseteq A^0\text{ . } ♦$$

8. ЗАТВОРЕНИ МНОЖЕСТВА

8.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A\subseteq X$. За множеството A ќе велиме дека е *затворено* во (X,ρ) ако ${}^cA=X\setminus A$ е отворено множество во (X,ρ).

8.2. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Точни се следниве тврдења:

i) $\varnothing$ и X се затворени множества,

ii) пресек на произволно многу затворени множества е затворено множество, и

iii) унија на конечно многу затворени множества е затворено множество.

Доказ. *i)* Непосредно следува од теорема 7.8 *i*) и равенствата ${}^cX=\varnothing$ и ${}^c\varnothing=X$.

ii) Нека $F_\alpha, \alpha\in A$ е произволна фамилија затворени множества. Тогаш множествата $U_\alpha={}^cF_\alpha, \alpha\in A$ се отворени, па од теорема 7.8 *iii*) следува дека множеството

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}{}^cF_\alpha={}^c(\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha)$$

е отворено. Според тоа, множеството $\bigcap\limits_{\alpha\in A}F_\alpha$ е затворено.

iii) Нека $F_k, k=1,2,...,n$ се затворени множества. Тогаш, множествата $U_k={}^cF_k, k=1,2,...,n$ се отворени, па од теорема 7.8 *ii*) следува дека множеството

$$\bigcap_{k=1}^n U_k=\bigcap_{k=1}^n{}^cF_k={}^c(\bigcup_{k=1}^n F_k)$$

е отворено. Според тоа, множеството $\bigcup\limits_{k=1}^n F_k$ е затворено. ♦

8.3. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор.

а) Множеството A е затворено во X ако и само ако ги содржи сите свои точки на натрупување.

б) Множеството A е затворено во X ако и само ако ги содржи границите на сите свои низи конвергентни во X.

Доказ. а) $\Rightarrow$. Нека A е затворено множество. Ако $p\notin A$, тогаш $p\in{}^cA$ и како ${}^cA$ е отворено множество секоја негова точка е внатрешна. Значи, постои $r>0$ таков што $B(p;r)\subseteq{}^cA$, т.е. постои $r>0$ таков што $B(p;r)\cap A=\varnothing$. Според тоа, p не е точка на натрупување за множеството A. Значи, ако A е затворено, тогаш ги содржи сите свои точки на натрупување.

$\Leftarrow$. Обратно, нека A ги содржи сите свои точки на натрупување. Ако $x\in{}^cA$, тогаш x не е точка на натрупување на A, па затоа постои $r>0$ таков што $B(x;r)\cap A=\varnothing$. Од последното равенство следува дека $B(x;r)\subseteq{}^cA$, т.е. точката x е внатрешна за множеството ${}^cA$. Значи, ${}^cA$ е отворено множество, т.е. A е затворено множество.

б) Непосредно следува од тврдењето под а) и теорема 6.4. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

8.4. Лема. а) Секоја затворена топка е затворено множество во (X,ρ).

б) Нека (X,ρ) е метрички простор. Тогаш за секој $x\in X$ множеството $\{x\}$ е затворено подмножество од X.

в) Нека (X,ρ) е метрички простор, U е отворено и F е затворено подмножество од X. Тогаш $U\setminus F$ е отворено и $F\setminus U$ е затворено подмножество од X.

Доказ. а) Нека $\overline{B}(x;r)$ е произволна затворена топка во X. Ќе докажеме дека множеството $X\setminus\overline{B}(x;r)$ е отворено во X. Нека $y\in X\setminus\overline{B}(x;r)$, т.е. $\rho(x,y)>r$ и да земеме $\delta=\rho(x,y)-r$. Ако $z\in B(y;\delta)$, тогаш

$$r=\rho(x,y)-(\rho(x,y)-r)=\rho(x,y)-\delta<\rho(x,y)-\rho(z,y)\le\rho(x,z),$$

т.е. $z\in X\setminus\overline{B}(x;r)$. Според тоа, $B(y;\delta)\subseteq X\setminus\overline{B}(x;r)$, т.е. $X\setminus\overline{B}(x;r)$ е отворено множество во X, па според дефиниција 8.1 затворената топка е затворено множество во X.

б) Нека $U=X\setminus\{x\}$. Доволно е да докажеме дека множеството U е отворено во (X,ρ).

Нека a е произволна точка од U. Јасно, $a\neq x$, па затоа $\delta_a=\rho(x,a)>0$. Но, тоа значи дека $B(a;\frac{\delta_a}{2})\subset U$, па затоа $U=\bigcup\limits_{a\in U}B(a;\frac{\delta_a}{2})$, што според теорема 7.6 значи дека множеството U е отворено.

в) Множеството $X\setminus U$ е затворено во X, па затоа и множеството $F\setminus U=F\cap(X\setminus U)$ е затворено множество во X. Множеството $X\setminus F$ е отворено во X, па затоа и множеството $U\setminus F=U\cap(X\setminus F)$ е отворено множество во X. ♦

8.5. Во теорема 8.2 докажавме дека унија на конечна фамилија затворени множества е затворено множество. Меѓутоа, унија на произволна фамилија затворени множества не мора да е затворено множество, што може да се види од следниов пример.

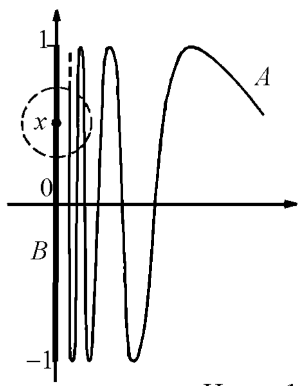
Пример А. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ да ја разгледаме пребројливата фамилија затворени топки

$$\overline{B}_i((0,0);\tfrac{i}{i+1}),\ i=1,2,3,\dots,$$

кои според лема 8.4 а) се затворени множества. Имаме

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{B}_i((0,0);\tfrac{i}{i+1})=B((0,0);1),$$

што значи дека нивната унија не е затворено множество.



Цртеж 13

Пример Б. Во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ да го разгледаме множеството

$$A = \{(t, y) \mid y = \sin\tfrac{1}{t}, t > 0\}, \text{ цртеж 13.}$$

Нека $r > 0$ е дадено. Постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $t_0 = \frac{1}{2k\pi + \pi/6} < r$ и притоа важи

$$\sin\tfrac{1}{t_0} = \sin(2k\pi + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}.$$

Отворената топка $B(\mathbf{x}; r)$ со центар во точката $\mathbf{x} = (0, \frac{1}{2})$ и радиус r ја содржи точката $\mathbf{y} = (t_0, \sin\frac{1}{t_0}) \in A$, бидејќи

$$\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(0 - t_0)^2 + (\tfrac{1}{2} - \sin\tfrac{1}{t_0})^2} = t_0 < r,$$

и како $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, од произволноста на $r > 0$ следува дека $\mathbf{x}$ е точка на натрупување за множеството A. Но, $\mathbf{x} \notin A$, па од теорема 8.3 а) следува дека множеството A не е затворено.

Аналогно се докажува, дека секоја точка од множеството

$$B = \{(t, y) \mid t = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

е точка на натрупување за множеството A. ♦

8.6. Теорема. Изводното множество на секое множество е затворено.

Доказ. Според теорема 8.3 а) доволно е да докажеме дека A' ги содржи сите свои точки на натрупување.

Ако x_0 е точка на натрупување за множеството A', тогаш во секоја отворена топка $B(x_0; r)$, $r > 0$ се содржат бесконечно многу точки од множеството A'. Избираме произволна точка од нив, на пример $y \in B(x_0; r)$, $y \in A'$. Да земеме

$$\delta = \min\{\rho(y, x_0), r - \rho(y, x_0)\}$$

и да ја разгледаме отворената топка $B(y; \delta)$. Јасно, $B(y; \delta) \subseteq B(x_0; r)$. Но, $y \in A'$, па затоа $B(y; \delta)$ содржи бесконечно многу точки од A, па од $B(y; \delta) \subseteq B(x_0; r)$ следува дека $B(x_0; r)$ содржи бесконечно многу точки од A. Значи, x_0 е точка на натрупување за A, т.е. $x_0 \in A'$. ♦

8.7. Забелешка. Изводното множество A' на множеството A е затворено, па затоа ги содржи сите свои точки на натрупување. Ако со A'' го означиме изводното множество на множеството A', тогаш $A'' \subseteq A'$. Аналогно се докажува дека $A''' \subseteq A''$ итн. Според тоа точни се инклузиите

$$A' \supseteq A'' \supseteq \ldots \supseteq A^{(n)} \supseteq \ldots,$$

каде што со $A^{(n)}$ е означено $n-$то изводно множество. Во пример 6.8 покажавме дека во горните инклузии не мора да важи знак за равенство.

9. АТХЕРЕНТНИ ТОЧКИ. ЗАТВОРАЧ НА МНОЖЕСТВО

9.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За точката x ќе велиме дека е *атхерентна точка* на множеството A, $A\subseteq X$ ако секоја отворена топка $B(x;r)$ содржи точка од A.

Множеството атхерентни точки на множеството A го нарекуваме *затворач* (*атхеренција*) на A и го означуваме со $\overline{A}$.

9.2. Теорема. Точката x е атхерентна за множеството A ако и само ако постои низа точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во A таква што $x_n\to x, n\to\infty$.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека постои низа точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во A таква што $x_n\to x$, $n\to\infty$ и нека $B(x;r)$ е произволна отворена топка. Тогаш од лема 5.7 следува дека во $B(x;r)$ се содржи точка од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, што значи од множеството A, што според дефиниција 9.1 значи дека x е атхерентна за множеството A.

$\Rightarrow$. Обратно, нека x е атхерентна за множеството A. Тогаш, секоја топка $B(x;\frac{1}{n}), n=1,2,3,...$ содржи барем една точка $x_n, n=1,2,3,...$ од A. Јасно, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е во A и таа конвергира кон x. ♦

9.3. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. За секое множество A, $A\subseteq X$ важи $\overline{A}=A\cup A'$.

Доказ. Нека $a\notin\overline{A}$. Тогаш, постои отворена топка $B(a;r)$ која не содржи точки од A. Според тоа, $a\notin A$ и $a\notin A'$, т.е. $a\notin A\cup A'$.

Обратно, ако $a\notin A\cup A'$, тогаш $a\notin A$ и $a\notin A'$. Според тоа, постои отворена топка $B(a;r)$ која не содржи точки од A, па затоа $a\notin\overline{A}$. ♦

9.4. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор. Множеството $A\subseteq X$ е затворено ако и само ако $A=\overline{A}$.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека A е затворено множество. Од теорема 8.3 следува $A'\subseteq A$, што според теорема 9.3 значи $\overline{A}=A\cup A'=A$.

$\Leftarrow$. Обратно, ако $A=\overline{A}$, тогаш од теорема 9.3 следува $A\cup A'=A$, па затоа $A'\subseteq A$. Конечно, од теорема 8.3 следува дека множеството A е затворено. ♦

9.5. Последица. Нека F е затворено подмножество од метричкиот простор (X,ρ) и нека $A\subset F$. Тогаш $A'\subset F$.

Доказ. Според теорема 6.9 *i*) од $A \subset F$ следува $A' \subset F'$. Но, множеството F е затворено па од теорема 8.3 следува $F' \subset F$. Конечно, од последните две инклузии следува $A' \subset F$. ♦

9.6. Пример. Определете го затворачот на множеството

а) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$,

b) $A = \{\frac{p^2}{q^2} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$.

Решение. а) Од $A' = \{0\}$ добиваме $\overline{A} = A \cup A' = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

б) Нека $a \in \{x \mid x \geq 0 \text{ и } x \in \mathbf{R}\}$ и $r > 0$ е произволен. За реалните броеви $\sqrt{a}$ и $\sqrt{a+r}$ постои рационален број $\frac{p}{q} > 0$ таков што $\sqrt{a} < \frac{p}{q} < \sqrt{a+r}$. Со квадрирање на овие неравенства добиваме $a < \frac{p^2}{q^2} < a + r$. Според тоа, за секој $a \in \{x \mid x \geq 0 \text{ и } x \in \mathbf{R}\}$ постои елемент $\frac{p^2}{q^2} \in A$ таков, што $\frac{p^2}{q^2} \neq a$ и $\frac{p^2}{q^2} \in B(a; r)$, што значи $a \in A'$. За $x \in \mathbf{R}, x < 0$ постои $r = -x > 0$ таков, што $B(a; r) \cap A = \varnothing$ од каде што следува дека $x \notin A'$. Значи, $A' = \{x \mid x \geq 0 \text{ и } x \in \mathbf{R}\}$ од што следува:

$$\overline{A} = A \cup \{x \mid x \geq 0 \text{ и } x \in \mathbf{R}\} = \{x \mid x \geq 0 \text{ и } x \in \mathbf{R}\}. ♦$$

9.7. Теорема. *i*) Затворачот $\overline{A}$ на произволно множество A е затворено множество.

ii) Ако $A \subseteq B$, тогаш $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

iii) За секои множества A и B важи $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доказ. *i*) Според теорема 8.3 а) доволно е да докажеме дека затворачот $\overline{A}$ на множеството A ги содржи сите свои точки на натрупување, т.е. $(\overline{A})' \subseteq \overline{A}$.

Навистина, од забелешка 8.7, теоремите 6.9 и 9.3 следува

$$(\overline{A})' = (A \cup A')' = A' \cup A'' = A' \subseteq A' \cup A = \overline{A}.$$

Тврдењата *ii*) и *iii*) непосредно следуваат теоремите 6.9 и 9.3. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

9.8. Последица. а) За секое множество A важи $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

б) Ако множеството A е ограничено, тогаш и неговиот затворач $\overline{A}$ е ограничено множество.

Доказ. а) Според теорема 9.7 *i*) множеството $\overline{A}$ е затворено, па затоа од последица 9.4 следува равенството $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

б) Множеството A е ограничено, па од лема 5.4 следува дека тоа се содржи во некоја затворена топка $\overline{B}(x_0;r)$, т.е. $A \subseteq \overline{B}(x_0;r)$. Сега од тврдењето под а) следува дека $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{B}}(x_0;r) = \overline{B}(x_0;r)$, што според лема 5.4 значи дека множеството $\overline{A}$ е ограничено. ♦

9.9. Коментар. а) Во лема 8.4 а) докажавме, дека секоја затворена топка е затворено множество, а според теорема 9.7 *i*) затворачот на секоја отворена топка е затворено множество. Понатаму, бидејќи $B(x;r) \subseteq \overline{B}(x;r)$ од претодно изнесеното следува $\overline{B(x;r)} \subseteq \overline{B}(x;r)$. Логично е да се запрашаме, дали во општ случај важи $\overline{B(x;r)} = \overline{B}(x;r)$. Одговорот на поставено прашање е негативен. Имено, ако (X,ρ) е дискретен простор, тогаш $B(x;1) = \{x\}$ и $\overline{B(x;1)} = \{x\}$. Меѓутоа, $\overline{B}(x;1) = X$, што значи дека во општ случај множествата $\overline{B(x;r)}$ и $\overline{B}(x;r)$ не се еднакви.

9.10. Пример. Нека A е бесконечно затворено подмножество од $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$. Докажете, дека постои пребројливо множество чиј затворач е A.

Решение. За $k = 1,2,3,...$ со B_k да ја означиме фамилијата отворени топки во $\mathbf{R}^m$ чии центри се со рационални координати и имаат радиуси еднакви на $\frac{1}{k}$. Јасно, за секој $k = 1,2,...$ фамилијата B_k е пребројлива. Нека $k \in \mathbf{N}$. За секоја топка $B \in B_k$ таква што $B \cap A \neq \varnothing$, избираме точка од $B \cap A$ и со A_k да го означиме множеството од вака избраните точки. Јасно, за $k = 1,2,...$ множеството A_k е пребројливо, па така множеството $A_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ е пребројливо подмножество од A. Множеството A е затворено, па од теорема 9.7 и последица 9.4 следува $\overline{A_\infty} \subseteq \overline{A} = A$.

Нека $\mathbf{a} \in A$. Нека $k \in \mathbf{N}$. Од конструкцијата на фамилијата B_k следува дека постои $B \in B_k$ таков што $\mathbf{a} \in B$. Јасно, топката B содржи точка $\mathbf{b}$ од A_k, па според тоа таа содржи точка $\mathbf{b} \in A_\infty$. Значи, за точката $\mathbf{a} \in A$ постои точка $\mathbf{b} \in A_\infty$ таква што $\rho_2(\mathbf{a},\mathbf{b}) < \frac{2}{k}$. Сега од произволноста на k следува $\mathbf{a} \in \overline{A_\infty}$, што значи $A \subseteq \overline{A_\infty}$. ♦

9.11. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор.

а) Затворачот $\overline{A}$ на произволно множество $A \subseteq X$ е еднаков на пресекот на сите затворени множества кои го содржат множеството A.

б) Ако $A \subseteq X$, тогаш $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^0$.

Доказ. а) Нека A е произволно множество и B_β, $\beta \in \mathcal{B}$ е фамилијата од сите затворени множества кои го содржат A. Од $A \subseteq B_\beta$, за секој $\beta \in \mathcal{B}$ следува $A' \subseteq B'_\beta \subseteq B_\beta$, за секој $\beta \in \mathcal{B}$. Значи, $A \cup A' \subseteq B_\beta$, за секој $\beta \in \mathcal{B}$, т.е.

$$\overline{A} = A \cup A' \subseteq \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta .$$

Според теорема 9.7 *i*) затворачот $\overline{A}$ е затворено множество кое го содржи множеството A, т.е. $\overline{A} = B_{\beta_0}$, за некој $\beta_0 \in \mathcal{B}$, па затоа

$$\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta = \Big(\bigcap_{\beta \in \mathcal{B},\, \beta \neq \beta_0} B_\beta \Big) \cap B_{\beta_0} = \Big(\bigcap_{\beta \in \mathcal{B},\, \beta \neq \beta_0} B_\beta \Big) \cap \overline{A} \subseteq \overline{A} .$$

Конечно, од $\overline{A} \subseteq \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta$ и $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta \subseteq \overline{A}$ следува $\overline{A} = \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta$.

б) Според теорема 7.13 множеството $(X \setminus A)^0$ е отворено и $(X \setminus A)^0 \subseteq X \setminus A$. Понатаму, од лема 8.4 б) следува дека множеството $X \setminus (X \setminus A)^0$ е затворено. Но, $A \subseteq X \setminus (X \setminus A)^0$, па од последица 9.4 и теорема 9.7 *ii*) следува дека $\overline{A} \subseteq X \setminus (X \setminus A)^0$. Обратно, множество $\overline{A}$ е затворено и $A \subseteq \overline{A}$, па од 8.4 б) следува дека множеството $X \setminus \overline{A}$ е отворено и $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$. Сега од теорема 7.14 следува $X \setminus \overline{A} \subseteq (X \setminus A)^0$, па затоа $X \setminus (X \setminus A)^0 \subseteq \overline{A}$. ♦

9.12. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор.

i) Ако $A \subseteq X$, тогаш $\overline{A} = \{x \mid \rho(x, A) = 0\}$.

ii) Множеството $F \subseteq X$ е затворено ако и само ако $\{x \mid \rho(x, F) = 0\} = F$.

iii) Ако F е затворено подмножество од X и $p \notin F$, тогаш $\rho(p, F) \neq 0$.

Доказ А. *i*) Нека $p \in \{x \mid \rho(x, A) = 0\}$, т.е. нека $\rho(p, A) = 0$. Од дефиниција 4.1 следува дека секоја отворена топка $B(p; r)$ содржи точка од A, па согласно со дефиниција 9.1 p е атхерентна точка на множеството A, т.е. $p \in \overline{A}$. Од произволноста на точката p следува

$$\{x \mid \rho(x, A) = 0\} \subseteq \overline{A} .$$

Обратно, нека $p \notin \{x \mid \rho(x, A) = 0\}$, т.е. нека $\rho(p, A) = r > 0$. Да ја разгледаме отворената топка $B(p; \frac{r}{2})$. Ќе докажеме дека $B(p; \frac{r}{2}) \cap A = \varnothing$. Навистина, ако постои точка $z \in B(p; \frac{r}{2}) \cap A$, тогаш $z \in A$ и притоа важи

$$0 < r = \rho(p, A) = \inf\{\rho(p, x) \mid x \in A\} \leq \rho(p, z) < \tfrac{r}{2} ,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $B(p;\frac{r}{2})\cap A=\varnothing$, што според дефиниција 9.1 значи дека $p\notin\overline{A}$. Конечно, од произволноста на точката p следува
$\overline{A}\subseteq\{x\mid\rho(x,A)=0\}$.

ii) Доказот непосредно следува од тврдењето под *i*) и последица 9.4.

iii) Нека F е затворено подмножество од X и $p\notin F$. Ако $\rho(p,F)=0$, тогаш од тврдењето под *i*) и од последица 9.4 следува $p\in\overline{F}=F$, што е противречност.

Доказ Б. *i*) Според теорема 9.11 б) $x\in\overline{A}$ ако и само ако $x\in X\setminus(X\setminus A)^0$, т.е. ако и само ако $x\notin(X\setminus A)^0$. Понатаму, според теорема 7.16 имаме

$$(X\setminus A)^0=\{x\mid\rho(x,X\setminus(X\setminus A))>0\}=\{x\mid\rho(x,A)>0\},$$

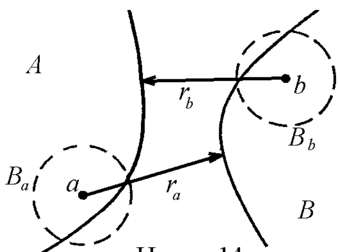
па затоа $x\notin(X\setminus A)^0$ ако и само ако $\rho(x,A)=0$. Конечно, $x\in\overline{A}$ ако и само ако $x\in\{x\mid\rho(x,A)=0\}$, што значи $\overline{A}=\{x\mid\rho(x,A)=0\}$. ♦

9.13. Теорема (за раздвојување). Нека (X,ρ) е метрички простор и A и B се дисјунктни затворени подмножества од X. Тогаш постојат дисјунктни отворени множества G и H такви што $A\subseteq G$ и $B\subseteq H$.

Доказ. Ако некое од множествата A или B е празно множество, на пример $A=\varnothing$, тогаш $\varnothing$ и X се дисјунктни отворени множества такви што $A\subseteq\varnothing$ и $B\subseteq X$.

Нека претпоставиме дека $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ и $a\in A$. Од $A\cap B=\varnothing$, следува $a\notin B$. Множеството B е затворено, па од лема 9.12 *iii*) следува дека $\rho(a,B)=r_a>0$, цртеж 14. Слично, ако $b\in B$, тогаш $\rho(a,B)\ =r_b>0$, цртеж 14. Да ги разгледаме фамилиите отворени топки

$$B_a=B(a;\tfrac{1}{3}r_a),\ a\in A \text{ и } B_b=B(b;\tfrac{1}{3}r_b),\ b\in B.$$



Цртеж 14

Ќе докажеме дека множествата

$$G=\bigcup_{a\in A}B_a \text{ и } H=\bigcup_{b\in B}B_b \tag{1}$$

ги задоволуваат условите на теоремата. Јасно, G и H се отворени множества, како унии од отворени топки (теорема 7.6). Освен тоа, од равенствата (1) следуваат инклузиите $A\subseteq G$ и $B\subseteq H$. Останува да докажеме дека $G\cap H=\varnothing$.

Нека претпоставиме дека $G\cap H\neq\varnothing$ и нека $p\in G\cap H$. Тогаш, постојат $a_0\in A$ и $b_0\in B$ такви што $p\in B_{a_0}$ и $p\in B_{b_0}$. Нека $\rho(a_0,b_0)=r>0$. Тогаш

$$\rho(a_0, B) = r_{a_0} < r \text{ и } \rho(b_0, A) = r_{b_0} < r .$$

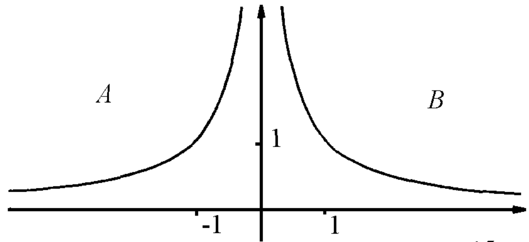
Но, $p \in B_{a_0}$ и $p \in B_{b_0}$, па затоа

$$\rho(a_0, p) < \tfrac{1}{3} r_{a_0} \text{ и } \rho(b_0, p) < \tfrac{1}{3} r_{b_0} .$$

Сега од неравенството на триаголник следува

$$r = \rho(a_0, b_0) \le \rho(a_0, p) + \rho(p, b_0)$$
$$< \tfrac{1}{3} r_{a_0} + \tfrac{1}{3} r_{b_0} < \tfrac{1}{3} r + \tfrac{1}{3} r = \tfrac{2}{3} r,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $G \cap H = \varnothing$. ♦



Цртеж 15

9.14. Пример. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ множествата

$$A = \{(x, y) \mid xy \le -1, x < 0\} \text{ и } B = \{(x, y) \mid xy \ge 1, x > 0\}$$

се затворени и дисјунктни (цртеж 15). Меѓутоа, $\rho(A, B) = 0$. ♦

9.15. Пример. Со помош на контрапример ќе покажеме дека функција f за која важи $f(A) = A^0$, за секое множество A не може да комутира со функција g за која важи $g(A) = \overline{A}$, за секое множество A.

Навистина, нека постојат такви функции f и g и во просторот $(\mathbf{R}^n, \rho_2)$ да го разгледаме множеството

$$\mathbf{Q}^n = \{(q_1, ..., q_n) \mid \ q_i \in \mathbf{Q}, \text{ за } i = 1, 2, ..., n\} .$$

Лесно се покажува дека $(\mathbf{Q}^n)^0 = \varnothing$, а според пример 6.8 а) имаме $(\mathbf{Q}^n)' = \mathbf{R}^n$, што значи дека

$$\overline{\mathbf{Q}^n} = \mathbf{Q}^n \cup (\mathbf{Q}^n)' = \mathbf{Q}^n \cup \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n .$$

Понатаму, празното множество е затворено, па од последица 9.4 следува $\overline{\varnothing} = \varnothing$, а множеството $\mathbf{R}^n$ е отворено, па од теорема 7.14 *iii*) следува $\mathbf{R}^n = (\mathbf{R}^n)^0$. Конечно, од досега изнесеното добиваме

$$(g \circ f)(\mathbf{Q}^n) = g(f(\mathbf{Q}^n)) = g((\mathbf{Q}^n)^0) = g(\varnothing) = \overline{\varnothing} = \varnothing \text{ и}$$

$$(f \circ g)(\mathbf{Q}^n) = f(g(\mathbf{Q}^n)) = f(\overline{\mathbf{Q}^n}) = f(\mathbf{R}^n) = (\mathbf{R}^n)^0 = \mathbf{R}^n ,$$

што значи $g \circ f \ne f \circ g$, т.е. функциите f и g не комутираат. ♦

10. ТОЧКИ НА НАТРУПУВАЊЕ НА НИЗА

10.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X. За точката $x_0 \in X$ ќе велиме дека е *точка на натрупување на низата* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ако за секој $\varepsilon > 0$ и за секој $n_0 \in \mathbf{N}$ постои барем еден $n' > n_0$ таков што $\rho(x_{n'}, x_0) < \varepsilon$.

10.2. Лема. Ако x_0 е точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогаш за секој $r > 0$ во отворената топка $B(x_0;r)$ се содржат бесконечно многу точки од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказ. Нека претпоставиме дека постои r' таков што во отворената топка $B(x_0;r')$ се содржат конечно многу точки: $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_m}$ од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и нека $n_0 = \max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$. Тогаш од дефиниција 10.1 следува дека постои $n' > n_0$ таков што $x_{n'} \in B(x_0;r)$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека во отворената топка $B(x_0;r')$ се содржат бесконечно многу точки од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. ♦

10.3. Коментар. а) Нека $\{x_n \mid n = 1,2,...\}$ е множеството вредности на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Од дефиниција 10.1 е јасно дека точката на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ припаѓаат на затворачот на множеството $\{x_n \mid n = 1,2,...\}$, меѓутоа таа не мора да биде точка на натрупување на ова множество. На пример, во просторот $(\mathbf{R},\rho)$ за низата $x_n = (-1)^n$, $n = 1,2,3,...$ точките -1 и 1 се точки на натрупување, но множеството $\{x_n \mid n = 1,2,...\}$ е конечно и според последица 6.6 тоа нема точки на натрупување.

б) Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X и $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е нејзина подниза. Нека x_0 е точка на натрупување за поднизата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и нека $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ се дадени. Тогаш за $k = n_0$ постои $k' > k$ таков што $\rho(x_{n_{k'}}, x_0) < \varepsilon$. Но, низата $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотоно расте, па затоа за $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ постои $n' = n_{k'} \ge k' > k = n_0$ таков што $\rho(x_{n'}, x_0) < \varepsilon$, што значи дека x_0 е точка на натрупување за низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

10.4. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Точката $x_0 \in X$ е точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ако и само ако постои подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 .$$

Доказ. $\Rightarrow$. Нека x_0 е точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Со индукција ќе конструираме подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ која конвергира кон x. Избираме кој било природен број n_1 таков што $\rho(x_0, x_{n_1}) < 1$. Нека претпоставиме дека броевите $n_1 < n_2 < ... < n_k$ се избрани и дека притоа важи

$$\rho(x_0, x_{n_i}) < \tfrac{1}{i}, \text{ за } i = 1, 2, ..., k.$$

Но, x_0 е точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, па од дефиниција 10.1 следува дека за $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ и $n_0 = n_k$ постои природен број $n' = n_{k+1} > n_k$ таков што $\rho(x_0, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{k+1}$. Продолжувајќи ја постапката конструираме подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ за која важи

$$\rho(x_0, x_{n_k}) < \tfrac{1}{k} \to 0, \text{ кога } k \to \infty,$$

што значи дека $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.

$\Leftarrow$. Нека $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подниза на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ и нека $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ се дадени. Тогаш постои $k_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_0, x_{n_k}) < \varepsilon$, за секој $k > k_0$. Избираме $k \in \mathbf{N}$ таков што $k > k_0$ и $k > n_0$. Тогаш $n' = n_k \geq k > n_0$ и $n' > k_0$, па затоа $\rho(x_0, x_{n'}) < \varepsilon$, што според дефиниција 10.1 значи дека x_0 е точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. ♦

10.5. Последица. Нека (X, ρ) е метрички простор. Ако низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогаш x_0 е единствена точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказ. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е подниза на самата себе и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, па од теорема 10.4 следува дека x_0 е точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека претпоставиме дека $x_1 \neq x_0$ е точка на натрупување за низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогаш од теорема 10.4 следува дека постои подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_1$. Последното противречи на лема 3.17 и од добиената противречност следува дека x_0 е единствена точка на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. ♦

10.6. Теорема. Нека (X, ρ) е метрички простор. Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X, тогаш множеството точки на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е затворено подмножество од X.

Доказ. Со A да го означиме множеството точки на натрупување на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Согласно со последица 9.4 доволно е да докажеме дека $\overline{A} \subseteq A$, (зошто?). Нека $y_0 \in \overline{A}$, и нека $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ се дадени. Од дефиниција 9.1 следува дека постои $x_0 \in A$ таква што $\rho(x_0, y_0) < \varepsilon$. Земаме

$$\delta = \min\{\rho(x_0, y_0), \varepsilon - \rho(x_0, y_0)\}$$

и како $x_0 \in A$ добиваме дека постои $n' > n_0$ таков што $\rho(x_{n'}, x_0) < \delta$. Значи, за $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ добиваме дека постои $n' > n_0$ таков што

$$\begin{aligned}\rho(x_{n'}, y_0) &\leq \rho(x_{n'}, x_0) + \rho(x_0, y_0) < \delta + \rho(x_0, y_0)\\ &\leq \varepsilon - \rho(x_0, y_0) + \rho(x_0, y_0) = \varepsilon,\end{aligned}$$

и од произволноста на ε и n_0 следува дека $y_0 \in A$, што значи $\overline{A} \subseteq A$. ♦

11. ГРАНИЧНИ ТОЧКИ. ГРАНИЦА НА МНОЖЕСТВО

11.1. Дефиниција. Нека (X, ρ) е метрички простор. Точката a ја нарекуваме *гранична точка* за множеството A, ако секоја отворена топка $B(a;r)$ содржи точки и од A и од ${}^cA$.

Множеството гранични точки за множеството A го нарекуваме *граница* на A и го означуваме со ∂A.

11.2. Теорема. Ако a е точка на натрупување за множеството A и $a \notin A$, тогаш $a \in \partial A$.

Доказ. Бидејќи a е точка на натрупување за множеството A добиваме дека $B(a;r) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \varnothing$, за секој $r > 0$. Но, $a \notin A$ па затоа $B(a;r) \cap {}^cA \neq \varnothing$, (во пресекот сигурно е точката a). Според тоа, секоја отворена топка $B(a;r)$ содржи точки и од A и од ${}^cA$, па затоа $a \in \partial A$. ♦

11.3. Теорема. Границата на унијата на конечен број множества е подмножество од унијата на границите на тие множества.

Доказ. Најпрво тврдењето ќе го докажеме во случај на две множества, т.е. ќе докажеме дека $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

Нека $x \in \partial(A \cup B)$ и $B(x;r)$ е произволна отворена топка на x. Од дефиницијата на граница следува дека

$$B(x;r) \cap (A \cup B) \neq \varnothing \text{ и } B(x;r) \cap {}^c(A \cup B) \neq \varnothing .$$

Според тоа,

$$(B(x;r) \cap A) \cup (B(x;r) \cap B) \neq \varnothing \text{ и } B(x;r) \cap {}^cA \cap {}^cB \neq \varnothing ,$$

односно

$$B(x;r)\cap A\neq\varnothing \text{ или } B(x;r)\cap B\neq\varnothing\,;$$

и

$$B(x;r)\cap {}^{c}A\neq\varnothing \text{ и } B(x;r)\cap {}^{c}B\neq\varnothing\,.$$

Значи,

$$B(x;r)\cap A\neq\varnothing \text{ и } B(x;r)\cap {}^{c}A\neq\varnothing$$

или

$$B(x;r)\cap B\neq\varnothing \text{ и } B(x;r)\cap {}^{c}B\neq\varnothing\,,$$

па затоа $x\in\partial A$ или $x\in\partial B$. Конечно, $x\in\partial A\cup\partial B$, т.е.

$$\partial(A\cup B)\subseteq\partial A\cup\partial B\,.$$

Сега тврдењето на теоремата следува претходно изнесеното и принципот на математичка индукција. ♦

11.4. Забелешка. Претходната теорема не важи во случај на пребројлива фамилија множества. Имено, за множествата

$$A_i=(-1+\tfrac{1}{i+1},1-\tfrac{1}{i+1})\,,\ i=1,2,3,...$$

имаме $\partial A_i=\{\frac{-i}{i+1},\frac{i}{i+1}\}$, $i=1,2,3,...$, односно

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\partial A_i=\{\tfrac{-i}{i+1}\,|\,i\in\mathbf{N}\}\cup\{\tfrac{i}{i+1}\,|\,i\in\mathbf{N}\}\,.$$

Од друга страна

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=(-1,1) \text{ и } \partial(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\{-1,1\}\,.$$

Јасно, $\partial(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\not\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\partial A_i$. ♦

11.5. Теорема. Ако (X,ρ) е метрички простор и $A\subset X$, тогаш $\overline{A}=A^0\cup\partial A$.

Доказ. Нека $x\notin\overline{A}$. Тогаш $x\notin A$ и како $A^0\subseteq A$ добиваме дека $x\notin A^0$. Понатаму, бидејќи $x\notin\overline{A}$ од дефиниција 9.1 следува дека постои отворена топка $B(x;r)$ која не содржи точки од A, што според дефиниција 11.1 значи дека $x\notin\partial A$. Според тоа, $x\notin A^0$ и $x\notin\partial A$, па затоа $x\notin A^0\cup\partial A$. Конечно, од произволноста на точката x следува дека $A^0\cup\partial A\subseteq\overline{A}$.

Нека $x\notin A^0\cup\partial A$. Тоа значи дека $x\notin A^0$ и $x\notin\partial A$. Од $x\notin\partial A$ и од дефиниција 11.1 следува дека постои отворена топка $B(x;r_1)$ која истовремено не содржи точки и од A и од ${}^{c}A$. Според тоа или $B(x;r_1)\subseteq A$ или $B(x;r_1)\subseteq {}^{c}A$. Ако

$B(x;r_1) \subseteq A$, тогаш од дефиниција 7.1 следува дека x е внатрешна точка за множеството A, што противречи на фактот дека $x \notin A^0$. Значи, $B(x;r_1) \subseteq {}^cA$, т.е. $B(x;r_1) \cap A = \varnothing$, па од дефиниција 9.1 следува дека $x \notin \overline{A}$. Конечно, од произволноста на точката x следува дека $\overline{A} \subseteq A^0 \cup \partial A$. ♦

11.6. Теорема. Ако (X,ρ) е метрички простор и $A \subset X$, тогаш $A^0 \cap \partial A = \varnothing$.

Доказ. Нека $x \in A^0$. Тогаш постои $r > 0$ таков, што $B(x;r) \subseteq A$. Според тоа, постои отворена топка $B(x;r)$ која не содржи точки од ${}^cA$, па затоа од дефиниција 11.1 следува дека $x \notin \partial A$. Конечно, $A^0 \cap \partial A = \varnothing$. ♦

11.7. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A \subset X$. Тогаш границата ∂A е затворено множество.

Доказ А. Според теорема 11.5 имаме $\overline{A} = A^0 \cup \partial A$, а според теорема 11.6 важи $A^0 \cap \partial A = \varnothing$, па затоа $\partial A = \overline{A} \setminus A^0$. Но, множеството $\overline{A}$ е затворено, а множеството A^0 е отворено, па од последното равенство и од лема 8.4 в) следува дека ∂A е затворено множество.

Доказ Б. Нека $p \notin \partial A$, т.е. постои отворена топка $B(p;r_1)$ за која важи или $B(p;r_1) \subseteq A$ или $B(p;r_1) \subseteq {}^cA$. За $B(p;r_1)$ важи $B(p;r_1) \cap \partial A = \varnothing$. Навистина, ако $q \in B(p;r_1) \cap \partial A$, тогаш при $r = \min\{\rho(p,q), r_1 - \rho(p,q)\}$ имаме $B(q;r) \subset B(p;r_1)$ и $B(q;r)$ содржи точки и од A и од ${}^cA$, што противречи фактот дека или $B(p;r_1) \subseteq A$ или $B(p;r_1) \subseteq {}^cA$. За $B(p;r_1)$.

Значи, $B(p;r_1) \subseteq {}^c(\partial A)$, т.е. p е внатрешна точка за ${}^c(\partial A)$. Според тоа, ${}^c(\partial A)$ е отворено множество, па затоа ∂A е затворено. ♦

11.8. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор, U е отворено и F е затворено подмножествот од X. Тогаш

$$\partial F = F \setminus F^0, \tag{1}$$

$$\partial U = \overline{U} \setminus U. \tag{2}$$

Доказ. Множеството F е затворено, па од последица 9.4 следува $F = \overline{F}$. Сега равенството (1) следува од доказот А на последица 11.7.

Множеството U е отворено, па теорема 7.14 *iii*) следува $U = U^0$. Сега равенството (2) следува од доказот А на последица 11.7. ♦

12. ПОТПРОСТОР НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОР

12.1. Нека (X,ρ) е метрички простор и A е непразно подмножество од X. Лесно се покажува дека функцијата $\rho_A : A\times A \to \mathbf{R}$ определена со $\rho_A(x,y)=\rho(x,y)$, за секои $x,y\in A$, е метрика на A за која ќе велиме дека е *индуцирана од метриката* ρ на X. Притоа, подредениот пар (A,ρ_A) го нарекуваме *потпростор* на метричкиот простор X. Во натамошните разгледувања за метриката во A ќе ја користиме истата ознака како и за метриката во X, т.е. наместо (A,ρ_A) понекогаш ќе пишуваме и (A,ρ). Исто така, често пати, без посебно да нагласуваме, под терминот подмножество од X ќе подразбираме потпростор од X и обратно.

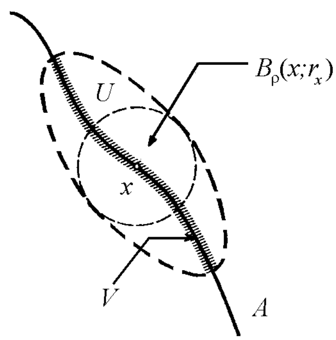
12.2. Пример. За просторите l^∞, c и c_0 од примерите 2.6, 2.7 и 2.8 кои метриките се дефинирани со

$$\rho_\infty(x,y)=\sup_{j=1,2,\dots} |x_j-y_j|$$

важи $c_0\subset c\subset l^\infty$, па затоа c_0 е потпростор од c, а овој е потпростор од l^∞. ♦

12.3. Нека (X,ρ) е метрички простор и (A,ρ_A) е потпростор на (X,ρ). Да претпоставиме дека ни се познати отворените множества на просторот (X,ρ). Природно е да се запрашаме, дали постои едноставен начин да ги определиме отворените множества на потпросторот (A,ρ_A). Одговорот на ова прашање е позитивен и истиот го дава следнава теорема.

Теорема. Нека (A,ρ_A) е потпростор на метричкиот простор (X,ρ). Множеството $V\subseteq A$ е отворено во потпросторот (A,ρ_A) ако и само ако постои множество $U\subseteq X$ отворено во просторот (X,ρ) такво што $V=U\cap A$.



Цртеж 16

Доказ. $\Rightarrow$. Нека множеството $V\subseteq A$ е отворено во потпросторот (A,ρ_A). Тогаш, за секоја точка $x\in V$ постои позитивен реален број r_x таков што $B_{\rho_A}(x;r_x)\subseteq A$. Понатаму, $B_{\rho_A}(x;r_x)=B_\rho(x;r_x)\cap A$ и множеството $U=\bigcup_{x\in V} B_\rho(x;r_x)$ е отворено во просторот (X,ρ), како унија на отворени топки. Конечно,

$$U\cap A=[\bigcup_{x\in V} B_\rho(x;r_x)]\bigcap A=\bigcup_{x\in V}[B_\rho(x;r_x)\bigcap A]=\bigcup_{x\in V} B_{\rho_A}(x;r_x)=V\,.$$

$\Leftarrow$. Обратно, нека V е подмножество на потпросторот (A, ρ_A) за кое постои отворено подмножество U во просторот (X, ρ) такво, што $V = U \cap A$. За да докажеме дека множеството V е отворено во просторот (A, ρ_A), доволно е да докажеме дека за секоја точка $x \in V$ постои позитивен реален број r таков, што $B_{\rho_A}(x;r) \subseteq V$. Меѓутоа, бидејќи $V \subseteq U$ и U е отворено во (X, ρ), за секоја точка $x \in V$ постои позитивен реален број r таков, што $B_\rho(x;r) \subseteq U$, цртеж 16. Според тоа, за секоја точка $x \in V$ постои позитивен реален број r таков, што

$$B_{\rho_A}(x;r) = B_\rho(x;r) \cap A \subseteq U \cap A = V\ . \ \blacklozenge$$

12.4. Нека (X, ρ) е метрички простор и (A, ρ_A) е потпростор на (X, ρ). Во претходната теорема дадовме едноставен начин за наоѓање на отворените множества на потпросторот (A, ρ_A), кога ни се познати отворените множества на просторот (X, ρ). Овде ќе го докажеме аналогното тврдење за затворените множества.

Теорема. Нека (A, ρ_A) е потпростор на метричкиот простор (X, ρ). Множеството $F \subseteq A$ е затворено во потпросторот (A, ρ_A) ако и само ако постои множество $H \subseteq X$ затворено во просторот (X, ρ) такво што $F = H \cap A$.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека F е затворено множеството во потпросторот A. Тогаш множеството $V = A \setminus F$ е отворено во A, па од теорема 12.3 следува дека постои множество $U \subseteq X$ отворено во просторот X такво што $V = U \cap A$. Но, тогаш множеството $H = X \setminus U$ е затворено во X и притоа важи

$$H \cap A = (X \setminus U) \cap A = A \setminus (U \cap A) = A \setminus V = F\ .$$

$\Leftarrow$. Нека $F \subseteq A$ и постои множество $H \subseteq X$ затворено во просторот X такво што $F = H \cap A$. Множеството $U = X \setminus H$ е отворено во X, па от теорема 12.3 следува дека множеството $V = U \cap A$ е отворено во A. Според тоа, множеството

$$A \setminus V = A \setminus (U \cap A) = (X \setminus U) \cap A = H \cap A = F$$

е затворено во A. $\blacklozenge$

12.5. Теорема. Нека (A, ρ_A) е потпростор на метричкиот простор (X, ρ). Ако U' и V' се непразни дисјунктни отворени множества во потпросторот (A, ρ_A) такви што $A = U' \cup V'$, тогаш во просторот (X, ρ) постојат дисјунктни отворени множества U и V такви што $U' = U \cap A$ и $V' = V \cap A$.

Доказ. Множеството U' е отворено во потпросторот (A, ρ_A), па затоа за секој $u \in U'$ постои $r_u > 0$ таков што од $x \in A$ и $\rho(u,x) = \rho_A(u,x) < r_u$ следува $x \in U'$. Понатаму, множествата U' и V' се дисјунктни, па затоа

$$\rho(u,v) = \rho_A(u,v) \geq r_u, \text{ за секој } v \in V'. \qquad (1)$$

Аналогно, множеството V' е отворено во потпросторот (A, ρ_A), па затоа за секој $v \in V'$ постои r_v таков што од $y \in A$ и $\rho(v, y) = \rho_A(v, y) < r_v$ следува $y \in V'$. Понатаму, множествата U' и V' се дисјунктни, па затоа

$$\rho(u, v) = \rho_A(u, v) \geq r_v, \text{ за секој } u \in U'. \tag{2}$$

Ако ги собереме неравенствата (1) и (2) го добиваме неравенството

$$2\rho(u, v) \geq r_u + r_v,$$

за секои $u \in U'$ и $v \in V'$, кое е еквивалентно со неравенството

$$\rho(u, v) \geq \tfrac{1}{2}(r_u + r_v), \text{ за секои } u \in U' \text{ и } v \in V'. \tag{3}$$

Во просторот (X, ρ) да ги разгледаме отворените топки $B(u; \frac{1}{2} r_u), u \in U'$ и $B(v; \frac{1}{2} r_v), v \in V'$. Ќе докажеме дека за секои $u \in U'$ и $v \in V'$ важи

$$B(u; \tfrac{1}{2} r_u) \cap B(v; \tfrac{1}{2} r_v) = \varnothing.$$

Навистина, ако $x \in B(u; \frac{1}{2} r_u) \cap B(v; \frac{1}{2} r_v)$, тогаш од дефиниција 1.1 *iii*) следува

$$\rho(u, v) \leq \rho(u, x) + \rho(x, v) < \tfrac{1}{2}(r_u + r_v),$$

што противречи на неравенството (3).

Да ги разгледаме множествата

$$U = \bigcup_{u \in U'} B(u; \tfrac{1}{2} r_u) \text{ и } V = \bigcup_{v \in V'} B(v; \tfrac{1}{2} r_v).$$

Јасно, множествата U и V се отворени во метричкиот простор (X, ρ) и притоа важи:

$$U \cap A = (\bigcup_{u \in U'} B(u; \tfrac{1}{2} r_u)) \cap A = \bigcup_{u \in U'} (B(u; \tfrac{1}{2} r_u) \cap A) = U',$$

$$V \cap A = (\bigcup_{v \in V'} B(v; \tfrac{1}{2} r_v)) \cap A = \bigcup_{v \in V'} (B(v; \tfrac{1}{2} r_v) \cap A) = V' \text{ и}$$

$$U \cap V = (\bigcup_{u \in U'} B(u; \tfrac{1}{2} r_u)) \cap (\bigcup_{v \in V'} B(v; \tfrac{1}{2} r_v)) = \bigcup_{u \in U'} (B(u; \tfrac{1}{2} r_u) \cap (\bigcup_{v \in V'} B(v; \tfrac{1}{2} r_v)) = \varnothing,$$

што и требаше да се докаже. ♦

12.6. Дефиниција. Нека (X, ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. За точката $x \in A$ ќе велиме дека е *изолирана точка* во A ако постои $r > 0$ таков, што $B(x; r) \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing$.

12.7. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор. Точката x е изолирана точка на множеството $A \subseteq X$ ако и само ако $\{x\}$ е отворено подмножество во метричкиот простор (A, ρ).

Доказ. Од дефиниција 12.6 имаме дека точката $x \in A$ е изолирана точка на множеството A ако и само ако постои $r > 0$ таков, што во просторот X важи $B(x;r) \cap A = \{x\}$. Но, тогаш во потпросторот A важи $B(x;r) \cap A = \{x\}$, т.е. во потпросторот A важи $B(x;r) = \{x\}$, односно $B(x;r) \subseteq \{x\}$. Според тоа, точката $x \in A$ е изолирана точка на множеството A ако и само ако во просторот A важи $B(x;r) \subseteq \{x\}$, т.е. ако и само ако во потпросторот A множеството $\{x\}$ е отворено. ♦

12.8. Согласно со дефинициите 6.1 и 12.6 секоја точка на множеството A е или точка на натрупување или изолирана точка. Според теорема 6.3 а) множеството A е затворено ако и само ако ги содржи сите свои точки на натрупување. Од досега изнесеното следува точноста на следново тврдење.

Последица. Секое затворено множество е дисјунктна унија на своите изолирани точки и своите точки на натрупување. ♦

13. БАЗА НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОР

13.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За фамилијата $\mathcal{B}$ отворени подмножества $B_i, i \in I$ од X ќе велиме дека е *база* на просторот (X,ρ) ако секое непразно отворено подмножество од X може да се запише како унија од елементи на $B_i, i \in I$.

13.2. Лема. Нека $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$ е база за метричкиот простор (X,ρ) и нека $\mathcal{B}_1$ е фамилија отворени множества во X таква што $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$. Тогаш $\mathcal{B}_1$ е база за X.

Доказ. Нека G е отворено множество во X. Од дефиниција 13.1 следува дека $G = \bigcup_k B_k$, каде $B_k \in \mathcal{B}$. Но, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$, па затоа секој елемент $B_k \in \mathcal{B}$ припаѓа и на $\mathcal{B}_1$. Според тоа, G е унија на елементи од $\mathcal{B}_1$, што според дефинција 13.1 значи дека $\mathcal{B}_1$ е база на X. ♦

13.3. Пример. а) Според теорема 7.6 во секој метрички простор (X,ρ) фамилијата отворени топки е база на X.

б) Според пример 7.7. за метричкиот простор $(\mathbf{R}^m,\rho_2)$ пребројливата фамилија отворени топки

$$\mathcal{B} = \{B(\mathbf{z};r) \mid \mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_m),\ z_i \in \mathbf{Q}, 1 \le i \le m,\ r \in \mathbf{Q}\}$$

е негова база.

в) Да го разгледаме дискретниот метрички простор (X,ρ). Тогаш фамилијата $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ од сите едноелементни подмножества на X е база за

X. Имено, според пример 7.4 во дискретен простор секое едноелементно подмножество $\{x\}$, $x \in X$ е отворено и секое подмножество $A \subseteq X$ може да се запише како унија од едноелементни подмножества.

Ќе докажеме, дека секоја друга фамилија $\mathcal{B}_1$ отворени подмножества на X е база за X ако и само ако $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$. Навистина, бидејќи $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$, од лема 13.2 следува дека $\mathcal{B}_1$ е база на X. Обратно, нека претпоставиме дека $\mathcal{B}_1$ е база на X. Бидејќи во дискретен простор секое едноелементно множество $\{p\}$ е отворено и $\mathcal{B}_1$ е база на X, од дефиниција 13.1 следува дека $\{p\}$ мора да се запише како унија на елементи на $\mathcal{B}_1$. Но едноелементното множество $\{p\}$ може да се запише како унија само на самото себе или на самото себе и празното множество. Затоа $\{p\}$ мора да биде елемент на $\mathcal{B}_1$. Конечно, од произволноста на p следува дека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$. ♦

13.4. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Фамилијата $\mathcal{B}$ отворени подмножества $B_i, i \in I$ е база на X ако и само ако за секое отворено множество U и секоја точка $x \in U$ постои $B_{i_0} \in \mathcal{B}$ такво што $x \in B_{i_0} \subseteq U$.

Доказ. $\Leftarrow$. Ако за секоја точка $x \in U$ постои $B_x \in \mathcal{B}$ такво што $x \in B_x \subseteq U$, тогаш

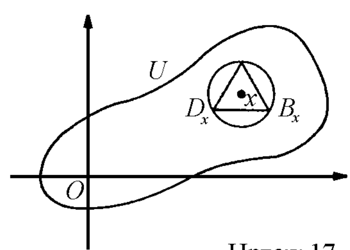
$$U = \bigcup\{B_x \mid x \in U\},$$

што значи U е унија од елементи на $B_i, i \in I$, па затоа $\mathcal{B}$ е база на X.

$\Rightarrow$. Обратно, нека $\mathcal{B}$ е база на X и U е произволно отворено множество во X. Од дефиниција 13.1 следува дека $U = \bigcup\limits_k B_k$, каде $B_k \in \mathcal{B}$. Но, $x \in U = \bigcup\limits_k B_k$, па затоа постои i_0 таков што

$$x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_k B_k = U. \ ♦$$

13.5. Пример. а) Во просторот $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ да ја разгледаме фамилијата отворени рамнострани триаголници. Нека U е отворено подмножество од $\mathbf{R}^2$ и нека $x \in U$. Тогаш постои отворена топка B_x со центар во x таква што $B_x \subseteq U$. Нека D_x е некој отворен рамностран триаголник впишан во отворената топка B_x (цртеж 17). Тогаш $D_x \subseteq B_x$, па затоа $x \in D_x \subseteq B_x \subseteq G$ и од лема 13.4 следува дека фамилијата отворени рамнострани триаголници е база за метричкиот простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$.



Цртеж 17

б) Во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ фамилијата отворени паралелограми со страни паралелни со координатните оски е база за метричкиот простор $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

13.6. Последица. Нека (X, ρ) е метрички простор и $\mathcal{B}$ е база на X. Тогаш за секои $U, V \in \mathcal{B}$ и за секој $x \in U \cap V$ постои $W \in \mathcal{B}$ таков што $x \in W \subseteq U \cap V$.

Доказ. Од $U, V \in \mathcal{B}$ следува дека множествата U и V се отворени. Сега од теорема 7.8 *ii*) следува дека множеството $U \cap V$ е отворено. Но, $\mathcal{B}$ е база на X, па затоа од лема 13.4 следува дека за секој $x \in U \cap V$ постои $W \in \mathcal{B}$ таков што $x \in W \subseteq U \cap V$. ♦

13.7. Забелешка. Согласно со теорема 7.6 и дефиниција 13.1 за произволен метрички простор фамилијата од сите отворени топки во X формира база на X. Понатаму, фамилијата од сите отворени топки со рационални радиуси, која е потфамилија од фамилијата од сите отворени топки исто така формира база на X. Навистина, нека U е произволно непразно отворено множество во X. Тогаш, за секој $x \in U$ постои топка $B(x;r) \subseteq U$, па затоа $U = \bigcup_{x \in U} B(x;r)$. Јасно, r може да се избере да биде рационален број. Логично е да се запрашаме дали во секој метрички простор може да се избере база со најмал број елементи.

Во пример 13.3 б) видовме дека метричкиот простор $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ има пребројлива база. Од друга страна, ако множеството X е непребројливо, тогаш според пример 13.3 в) секоја база на дискретниот простор (X, ρ) е непребројлива. Според тоа, имаме пример на метрички простор со пребројлива база и пример на метрички простор со непребројлива база, па затоа постои и соодветна поделба на метричките простори, која на извесен начин дава одговор и на проблемот на наоѓање база со најмал број елементи.

Претходната дискусија е непосреден повод за следнава дефиниција.

13.8. Дефиниција. За метричкиот простор (X, ρ) ќе велиме дека има *најмногу пребројлива база* или дека ја задоволува *втората аксиома за пребројливост* ако истиот има база со најмногу пребројливо многу елементи.

13.9. Лема. Нека метричкиот простор (X, ρ) има најмногу пребројлива база и (Y, ρ_Y) е потпростор на (X, ρ). Тогаш (Y, ρ_Y) има најмногу пребројлива база.

Доказ. Нека $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ е најмногу пребројлива база за X и нека V е отворено множество во потпросторот (Y, ρ_Y). Според теорема 12.3 постои множество $U \subseteq X$ отворено во просторот (X, ρ) такво, што $V = U \cap Y$. Но, $\mathcal{B}$ е база на X, па затоа $U = \bigcup_i B_{n_i}$. Според тоа,

$$V = U \cap Y = (\bigcup_i B_{n_i}) \bigcap Y = \bigcup_i (B_{n_i} \bigcap Y),$$

и како множествата $B_n \cap Y,\ n \in \mathbf{N}$ се отворени во потпросторот (Y, ρ_Y), теорема 12.3, добиваме дека фамилијата

$$\mathcal{B}_Y = \{B_n \cap Y \mid n \in \mathbf{N}\}$$

е најмногу пребројлива база за потпросторот (Y, ρ_Y). ♦

14. ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

14.1. Декартов производ на метрички простори. Нека (X, ρ) и (Y, d) се произволни метрички простори. На Декартовиот производ $Z = X \times Y$ на множествата X и Y сакаме да дефинираме метрика за која ќе можеме да кажеме дека е индуцирана од метриките ρ и d, т.е. дека поеднакво зависи од двете метрики. Последното може да се направи на бесконечно многу начини, меѓутоа наједноствно е ако за секој $p \geq 1$ и $z_1 = (x_1, y_1) \in Z$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$ ставиме

$$\rho_p(z_1, z_2) = (\rho^p(x_1, x_2) + d^p(y_1, y_2))^{1/p}, \tag{1}$$

а за $p = \infty$ да ставиме

$$\rho_\infty(z_1, z_2) = \max\{\rho(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}. \tag{2}$$

14.2. Теорема. Нека (X, ρ) и (Y, d) се произволни метрички простори. Тогаш со (1) и (2) се дефинирани метрики на Декартовиот производ $Z = X \times Y$.

Доказ. Јасно, функците на Декартовиот производ, определени со (1) и (2) се добро дефинирани. Понатаму, очигледно функциите (1) и (2) ги задоволуваат аксиомите *i*) и *ii*) од дефиниција 1.1. Ќе докажеме дека овие функции ја задоволуватт и аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1.

Нека $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ и $z_3 = (x_3, y_3)$ се три точки од Декартовиот производ $Z = X \times Y$.

а) Нека $p = 1$. Од неравенството на триаголник за метриките ρ и d следува

$$\begin{aligned}
\rho_1(z_1, z_3) &= \rho(x_1, x_3) + d(y_1, y_3) \\
&\leq [\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)] + [d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3)] \\
&= [\rho(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)] + [\rho(x_2, x_3) + d(y_2, y_3)] \\
&= \rho_1(z_1, z_2) + \rho_1(z_2, z_3),
\end{aligned}$$

т.е. исполнета е аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1, што значи дека за $p = 1$ со (1) навистина е дефинирана метрика на Декартовиот производ $Z = X \times Y$.

б) Нека $p>1$. Од неравенството на триаголник за метриките ρ и d и неравенството на Минковски следува

$$\begin{aligned}\rho_p(z_1,z_3) &= (\rho^p(x_1,x_3)+d^p(y_1,y_3))^{1/p} \\ &\le [(\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3))^p+(d(y_1,y_2)+d(y_2,y_3))^p]^{1/p} \\ &\le [\rho^p(x_1,x_2)+d^p(y_1,y_2)]^{1/p}+[\rho^p(x_2,x_3))+d^p(y_2,y_3)]^{1/p} \\ &= \rho_p(z_1,z_2)+\rho_p(z_2,z_3),\end{aligned}$$

т.е. исполнета е аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1, што значи дека за $p>1$ со (1) навистина е дефинирана метрика на Декартовиот производ $Z=X\times Y$.

в) Нека $p=\infty$. Од неравенството на триаголник за метриките ρ и d и својствата на максимумот следува

$$\begin{aligned}\rho_\infty(z_1,z_3) &= \max\{\rho(x_1,x_3),d(y_1,y_3)\} \\ &\le \max\{\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3),d(y_1,y_2)+d(y_2,y_3)\} \\ &\le \max\{\rho(x_1,x_2),d(y_1,y_3)\}+\max\{\rho(x_2,x_3),d(y_2,y_3)\} \\ &= \rho_\infty(z_1,z_2)+\rho_\infty(z_2,z_3),\end{aligned}$$

т.е. исполнета е аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1, што значи дека за $p=\infty$ со (2) навистина е дефинирана метрика на Декартовиот производ $Z=X\times Y$. ♦

14.3. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се произволни метрички простори. Тогаш за метриките (1) и (2) на Декартовиот производ $Z=X\times Y$ се исполнети неравенствата:

$$\rho_\infty(z_1,z_2)\le\rho_p(z_1,z_2)\le\sqrt[p]{2}\rho_\infty(z_1,z_2), \tag{3}$$

$$\rho_\infty(z_1,z_2)\le\rho_1(z_1,z_2)\le 2\rho_\infty(z_1,z_2), \tag{4}$$

$$\rho_p(z_1,z_2)\le\rho_1(z_1,z_2)\le\sqrt[p]{2^{p-1}}\rho_p(z_1,z_2). \tag{5}$$

Доказ. Нека $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ се произволни две точки од Декартовиот производ $Z=X\times Y$. Имаме,

$$\rho_\infty(z_1,z_2)=\max\{\rho(x_1,x_2),d(y_1,y_2)\}\le(\rho^p(x_1,x_2)+d^p(y_1,y_2))^{1/p}=\rho_p(z_1,z_2),$$

т.е. точно е левото неравенство во (3). Од друга страна

$$2[\rho_\infty(z_1,z_2)]^p=2[\max\{\rho(x_1,x_2),d(y_1,y_2)\}]^p\ge\rho^p(x_1,x_2)+d^p(y_1,y_2)=[\rho_p(z_1,z_2)]^p,$$

и ако во последното неравенство извадиме $p-$ти корен го добиваме десното неравенство во (3).

Понатаму,

$$\rho_\infty(z_1,z_2)=\max\{\rho(x_1,x_2),d(y_1,y_2)\}\le\rho(x_1,x_2)+d(y_1,y_2)=\rho_1(z_1,z_2),$$

т.е. точно е левото неравенство во (4). Од друга страна

$$2\rho_\infty(z_1,z_2)=2\max\{\rho(x_1,x_2),d(y_1,y_2)\}\ge\rho(x_1,x_2)+d(y_1,y_2)=\rho_1(z_1,z_2),$$

што значи дека е исполнето и левото неравенство во (4).

Пред да преминеме на доказот на неравенството (5), да забележиме дека без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$\rho(x_1,x_2)\ge d(y_1,y_2).$$

Сега од неравенството на Бернули следува

$$\begin{aligned}[\rho_1(z_1,z_2)]^p &=[\rho(x_1,x_2)+d(y_1,y_2)]^p=\rho^p(x_1,x_2)[1+\tfrac{d(y_1,y_2)}{\rho(x_1,x_2)}]^p\\ &\ge\rho^p(x_1,x_2)(1+p\tfrac{d(y_1,y_2)}{\rho(x_1,x_2)})\ge\rho^p(x_1,x_2)(1+\tfrac{d(y_1,y_2)}{\rho(x_1,x_2)})\\ &=\rho^p(x_1,x_2)+\rho^{p-1}(x_1,x_2)d(y_1,y_2)\\ &\ge\rho^p(x_1,x_2)+d^p(y_1,y_2)=[\rho_p(z_1,z_2)]^p\end{aligned}$$

и ако во последното неравенство извадиме $p-$ти корен го добиваме левото неравенство во (5). Од друга страна, за $p>1$ функцијата $f(t)=t^p$, $t>0$ е конвексна, па од неравенството на Јенсен го добиваме неравенството

$$[\tfrac{1}{2}\rho_1(z_1,z_2)]^p=[\tfrac{\rho(x_1,x_2)+d(y_1,y_2)}{2}]^p\le\tfrac{\rho^p(x_1,x_2)+d^p(y_1,y_2)}{2}=\tfrac{1}{2}[\rho_p(z_1,z_2)]^p,$$

кое е еквивалентно со десното неравенство во (5). ♦

14.4. Забелешка. а) Аналогно како во дефиниција 14.1 се дефинира Декартов производ на конечен број метрички простори. Имено, ако се дадени метричките простори $(X_i,\rho_i), i=1,2,...,n$, тогаш наполно аналогно како во доказот на теорема 14.2 може да се докаже дека функциите d_∞ и d_p, $p\ge1$ определени со

$$d_p(x,y)=[(\rho_1(x_1,y_1))^p+(\rho_2(x_2,y_2))^p+...+(\rho_n(x_n,y_n))^p]^{1/p}, \qquad (6)$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2),...,\rho_n(x_n,y_n)\}, \qquad (7)$$

за секои $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in X=X_1\times X_2\times...\times X_n$ се метрики на Декартовиот производ $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$. Доказот на ова тврдење го оставаме на читателот за вежба.

б) Аналогно како во доказот на теорема 14.3 може да се докаже дека за метриките (6) и (7) дефинирани на Декартовиот производ $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$ на метричките простори $(X_i,\rho_i), i=1,2,...,n$ се исполнети неравенствата

$$d_\infty(x,y)\le d_p(x,y)\le\sqrt[p]{n}d_\infty(x,y), \qquad (8)$$

$$d_\infty(x,y)\le d_1(x,y)\le nd_\infty(x,y), \qquad (9)$$

$$d_p(x,y)\le d_1(x,y)\le\sqrt[p]{n^{p-1}}d_p(x,y), \qquad (10)$$

за секои $x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)\in X=X_1\times X_2\times...\times X_n$. Доказите на неравенствата (8), (9) и (10) ги оставаме на читателот за вежба.

в) Тргнувајќи од метричкиот простор $(\mathbf{R},\rho)$, $\rho(x,y)=|x-y|$, со помош на метриките (6) и (7) дефинирани на Декартовиот производ $\mathbf{R}^n$ можеме да ги добиеме метричките простори $(\mathbf{R}^n,\rho_p)$, $1\le p\le\infty$, кои ги разгледавме во примерите 2.2, 2.3 и 2.4.

14.5. Теорема. Нека (Z,ρ_p) е Декартовиот производ на метричките простори (X,ρ) и (Y,d), каде метриката ρ_p е дадена со формулите (1) или (2). Тогаш $z_n=(x_n,y_n)\to(x,y)=z$, $n\to\infty$ во (Z,ρ_p) ако и само ако $x_n\to x$, $n\to\infty$ во (X,ρ) и $y_n\to y$, $n\to\infty$ во (Y,d).

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $p\ge 1$. Ако за низата $z_n=(x_n,y_n)$, $n=1,2,3,...$ во (Z,ρ_p) е исполнето $z_n\to z=(x,y)$, кога $n\to\infty$, тогаш според со дефиниција 3.1 важи $\rho_p(z_n,z)\to 0,\ n\to\infty$, па затоа

$$\rho(x_n,x)\le(\rho^p(x_n,x)+d^p(y_n,y))^{1/p}=\rho_p(z_n,z)\to 0, n\to\infty$$

и

$$d(y_n,y)\le(\rho^p(x_n,x)+d^p(y_n,y))^{1/p}=\rho_p(z_n,z)\to 0, n\to\infty,$$

што повторно според дефиниција 3.1 значи дека $x_n\to x$, $n\to\infty$ во (X,ρ) и $y_n\to y$, $n\to\infty$ во (Y,d).

$\Leftarrow$. Обратно, нека $x_n\to x$, $n\to\infty$ во (X,ρ) и $y_n\to y$, $n\to\infty$ во (Y,d), што според дефиниција 3.1 значи дека $\rho(x_n,x)\to 0, n\to\infty$ и $d(y_n,y)\to 0, n\to\infty$. Но, тогаш

$$\rho_p(z_n,z)=(\rho^p(x_n,x)+d^p(y_n,y))^{1/p}\to 0, n\to\infty,$$

па повторно од дефиниција 3.1 следува дека $z_n\to z=(x,y)$, $n\to\infty$ во (Z,ρ_p).

$\Rightarrow$. Нека $p=\infty$. Ако за низата а $z_n=(x_n,y_n)$, $n=1,2,3,...$ во (Z,ρ_∞) е исполнето $z_n\to z=(x,y)$, кога $n\to\infty$, тогаш според со дефиниција 3.1 важи $\rho_\infty(z_n,z)\to 0, n\to\infty$, па затоа

$$\rho(x_n,x)\le\max\{\rho(x_n,x),d(y_n,y)\}=\rho_\infty(z_n,z)\to 0, n\to\infty$$

и

$$d(y_n,y)\le\max\{\rho(x_n,x),d(y_n,y)\}=\rho_\infty(z_n,z)\to 0, n\to\infty,$$

што повторно според дефиниција 3.1 значи дека $x_n\to x$, $n\to\infty$ во (X,ρ) и $y_n\to y$, $n\to\infty$ во (Y,d).

$\Leftarrow$. Обратно, нека $x_n\to x$, $n\to\infty$ во (X,ρ) и $y_n\to y$, $n\to\infty$ во (Y,d), што според дефиниција 3.1 значи дека

$$\rho(x_n, x) \to 0, n \to \infty \text{ и } d(y_n, y) \to 0, n \to \infty .$$

Но, тогаш

$$\rho_p(z_1, z_2) = \max\{\rho(x_n, x), d(y_n, y)\} \to 0, n \to \infty ,$$

па повторно од дефиниција 3.1 следува дека $z_n \to z = (x, y)$, $n \to \infty$ во (Z, ρ_∞) . ♦

14.6. Последица. Нека $(X_i, \rho_i), i = 1, 2, ..., n$ се метрички простори. Во просторот (Z, d_p) , каде $Z = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ и

$$d_p(x, y) = [(\rho_1(x_1, y_1))^p + (\rho_2(x_2, y_2))^p + ... + (\rho_n(x_n, y_n))^p]^{1/p}, \ p \geq 1 \tag{3}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2), ..., \rho_n(x_n, y_n)\}, \ p = \infty . \tag{4}$$

Низата $\{(x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk})\}_{k=1}^{\infty}$ е конвергентна во просторот (Z, d_p) ако и само ако координатната низа $\{x_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, ..., n$ е конвергентна во просторот (X_i, ρ_i), $i = 1, ..., n$, соодветно.

Доказ. Непосредно следува од теорема 14.5 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

14.7. Забелешка. Од претходната последица и од забелешка 14.4 а) непосредно следуваат резултатите за конвергенција на низи во просторите $(\mathbf{R}^k, \rho_p)$, $p \geq 1$, кои ги разгледавме во примерот 3.8, како и резултатот за конвергенција на низи во просторот $(\mathbf{R}^k, \rho_\infty)$.

15. ЗАДАЧИ

1. а) Нека $X = \mathbf{R}$ и функцијата $d: X \times X \to \mathbf{R}$ е определена со $d(x, y) = | x^3 - y^3 |$ за секои $x, y \in \mathbf{R}$. Дали (X, d) е метрички простор?

   б) Нека $X = \mathbf{R}$ и функцијата $d: X \times X \to \mathbf{R}$ е определена со $d(x, y) = | x^2 - y^2 |$ за секои $x, y \in \mathbf{R}$. Дали (X, d) е метрички простор?

   в) Нека $X = \{x = (\cos\varphi, \sin\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ и функцијата $\rho: X \times X \to \mathbf{R}$ е определена со
   $$\rho(x, y) = |\varphi - \theta|, \text{ за } x = (\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ и } y = (\cos\theta, \sin\theta) .$$
   Дали (X, ρ) е метрички простор?

2. Нека $\mathbf{N}$ е множеството природни броеви. Дали ($\mathbf{N}, \rho$) е метрички простор, ако за секои $k, m \in \mathbf{N}$ функцијата ρ е определена со:

   а) $\rho(k, m) = | k - m |$; б) $\rho(k, m) = | k^2 - m^2 |$;

в) $\rho(k,m)=\begin{cases}0, & \text{ако } k=m\\ \frac{1}{1+\min\{k,m\}}, & \text{ако } k\neq m\end{cases}$ г) $\rho(k,m)=|k-m|^2$.

3. Нека X е произволно множество и за функцијата $\rho: X\times X\to \mathbf{R}$ важи
   а) $\rho(x,y)=0$ ако и само ако $x=y$, и
   б) $\rho(x,z)\le\rho(y,x)+\rho(y,z)$ за секои $x,y,z\in X$.
   Докажете, дека (X,ρ) е метрички простор.

4. Нека $X=l^2$ и функцијата $d: X\times X\to\mathbf{R}$ е определена со
$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{i},\ \text{за } x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\in l^2$$
   Докажете, дека (X,ρ) е метрички простор.

5. Докажете, дека потпросторот c од сите конвергентни низи и просторот c_0 од низите кои конвергираат кон 0 се затворени множества во просторот l^∞ .

6. Нека X е произволно множество и со $X^{\mathbf{N}}$ да го означиме множеството од сите низи точки во X. Дефинираме функција $\rho_B: X^{\mathbf{N}}\times X^{\mathbf{N}}\to\mathbf{R}$ пределена со
$$\rho_B(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{k}, & x\neq y\\ 0, & x=y,\end{cases}$$
   каде $k=\min\{i\mid x_i\neq y_i\}$, за $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty},\ y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\in X^{\mathbf{N}}$.

   a) Докажете, дека ρ_B е метрика на $X^{\mathbf{N}}$, која ја нарекуваме *метрика на Бер*.
   b) Докажете, дека секоја точка на произволна отворена или затворена топка е центар на таа топка, што значи дека секои две топки се или дисјунктни или едната се содржи во другата.
   c) Колку топки има просторот $X^{\mathbf{N}}$, ако множеството X е конечно, а колку ако тоа е пребројливо.
   d) Докажете, дека секоја отворена и секоја затворена топка во $(X^{\mathbf{N}},\rho_B)$ истовремено е и отворено и затворено множество, но не секогаш $B(x;r)=\overline{B}(x;r)$.

7. Нека $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ е множеството од сите низи реални броеви и ρ_B е метриката на Бер. Кои од следниве множества во $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\rho_B)$ се отворени, а кои се затворени:

   1) $l^p, 1\le p\le\infty$,
   2) множеството монотоно нерастечки низи,
   3) множеството монотоно неопаѓачки низи,
   4) множеството строго монотоно растечки низи,
   5) множеството конвергентни низи,

6) множеството константни низи,
7) множеството низи со позитивни членови,
8) множеството низи со негативни членови.

8. Нека $X = \mathbf{C}((-\infty,+\infty))$ и функцијата $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$ е определена со

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{|x|\le n}|f(x)-g(x)|}{1+\max\limits_{|x|\le n}|f(x)-g(x)|} \quad f,g \in X .$$

Докажете, дека (X,ρ) е метрички простор.

9. Нека d е метрика на множеството X. Испитајте кои услови треба да ги задоволуваат константите $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, за да функцијата

$$(x,y) \mapsto d'(x,y) = \alpha d(x,y) + \beta \ , \ x,y \in X$$

е метрика на X.

10. Докажете, дека со формулата $d(x,y) = \operatorname{arctg} |x-y|,\ x,y \in \mathbf{R}$ е определена метрика на $\mathbf{R}$, во која $\mathbf{R}$ е ограничен простор.

11. Нека е дадена *карактеристичната функција* $\chi_{\mathbf{Q}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ на множеството $\mathbf{Q}$ определена со

$$\chi_{\mathbf{Q}}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbf{Q} \\ 1, & x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Дефинираме функција $\rho : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ со

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |y-x|, & \text{ако } \chi_{\mathbf{Q}}(x) = \chi_{\mathbf{Q}}(y) \\ |y-x|+1, & \text{ако } \chi_{\mathbf{Q}}(x) \ne \chi_{\mathbf{Q}}(y). \end{cases}$$

Докажете, дека ρ е метрика во $\mathbf{R}$.

12. Нека p е произволен прост број. Во множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$ дефинираме функција $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ таква, што $f(0) = 0$; секој $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ го запишуваме во видот $x = \frac{m}{n} p^k$, каде k е цел број, а m и n се цели броеви заемно прости со p и ставаме $f(x) = \frac{1}{p^k}$. Понатаму, дефинираме функција $\rho : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ таква, што $\rho(x,y) = f(x-y)$, за секои $x,y \in \mathbf{Q}$. Докажете, дека $(\mathbf{Q},\rho)$ е метрички простор.

13. Нека (X,ρ) е метрички простор и Y е отворено подмножество од X. Докажете, дека множеството V е отворено во потпросторот (Y,ρ_Y) ако и само ако е отворено во просторот X.

14. Нека (X,ρ) е метрички простор и Y е затворено подмножество од X. Докажете, дека множеството F е затворено во потпросторот (Y,ρ_Y) ако и само ако е затворено во просторот X.

15. Нека (X,ρ) е метрички простор, (Y,ρ_Y) е потпростор на X и $A\subseteq Y$. Докажете, дека
    1) за затворачот $\overline{A}_Y$ на множеството A во однос на просторот Y важи равенството $\overline{A}_Y = \overline{A}\cap Y$,
    2) за внатрешноста A_Y^0 на множеството A во однос на просторот Y важи равенството $A_Y^0 = Y\cap(A\cup(X\setminus Y))^0$.

16. Нека (X,ρ) е метрички простор. *Хауздорфово растојание* (*метрика)* меѓу непразните ограничени множествата $A,B\subseteq X$ го нарекуваме бројот
$$d_{Ha}(A,B)=\max\{\sup_{x\in A}\{\rho(x,B),\sup_{y\in B}\rho(y,A)\}=\sup_{x\in A,y\in B}\{\rho(x,B),\rho(y,A)\}.$$
Со $\mathcal{F}(X)$ да ја означиме фамилијата од сите непразни затворени подмножества на просторот X, а со $\mathcal{F}_B(X)$ фамилијата од сите ограничени множества од $\mathcal{F}(X)$.
    3) Докажете, дека $(\mathcal{F}_B(X),d_{Ha})$ е метрички простор. Зошто мора да се ограничиме на затворените подмножества?
    4) Нека просторот X е ограничен. Дали може точката $X\in\mathcal{F}(X)=\mathcal{F}_B(X)$ да е изолирана во $\mathcal{F}(X)$.

17. Нека (X,d) е ограничен метрички простор и $Y=\mathbf{B}(X)$ е просторот ограничени реални функции $x:X\to\mathbf{R}$ со метрика
$$d_\infty(y,y')=\sup\{|y(x)-y'(x)|\mid x,x'\in X\}.$$
Нека $f:X\to Y$ е функција која на секоја точка $x\in X$ и придружува функција $y_x:X\to\mathbf{R}$ определена со формулата $y_x(t)=d(x,t)$, $t\in X$. Докажете, дека функцијата $f:X\to Y$ го запазува растојанието, т.е. дека $d_\infty(y_x,y_{x'})=d(x,x')$, за секои $x,x'\in X$.

18. Нека C^* е множеството од сите непрекинати функции $f(x)$ на $(-\infty,+\infty)$, кои се идентички еднакви на нула надвор од некој конечен интервал и функцијата $d:C^*\times C^*\to\mathbf{R}$ е определена со
$$d(f,g)=\max_{x\in(-\infty,\infty)}|f(x)-g(x)|.$$
Докажете, дека (C^*,d) е метрички простор.

19. Нека $X=\mathbf{C}^{(k)}([a,b])$ и функцијата $d:X\times X\to\mathbf{R}$ е определена со
$$d(f,g)=\sum_{i=0}^{k}\max_{x\in[a,b]}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|.$$
Докажете, дека (X,d) е метрички простор.

20. Во просторот $(\mathbf{R}^{m+1},\rho_2)$ да ја разгледаме единичната свера
$$S(\mathbf{o};1)=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{m+1}\mid\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{o})=1\}.$$

Точката $-\mathbf{x}=(-x_1,-x_2,...,-x_{m+1})\in\mathbf{R}^{m+1}$ ја нарекуваме *дијаметрално спротивна точка* на точката $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_{m+1})\in\mathbf{R}^{m+1}$. Со P^m да го означиме множеството од сите парови дијаметрално спротивни точки $[\mathbf{x}]=\{\mathbf{x},-\mathbf{x}\}$, $\mathbf{x}\in S$. Докажете, дека функцијата $d:P^m\times P^m\to\mathbf{R}$ определена со

$$d([\mathbf{x}],[\mathbf{y}])=\min\{\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \rho_2(\mathbf{x},-\mathbf{y})\}$$

е метрика на множеството P^m. Метричкиот простор (P^m,d) го нарекуваме *проективен $m-$димензионален простор.*

21. Нека X е непразно множество. Функцијата $d:X\times X\to\mathbf{R}$ кое ги задоволува условите:

    i) $d(x,y)\geq 0$, за секои $x,y\in X$,

    ii) ако $x=y$, тогаш $d(x,y)=0$,

    iii) $d(x,y)=d(y,x),$ за секои $x,y\in X$, и

    iv) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z),$ за секои $x,y,z\in X$.

    го нарекуваме *псевдометрика* во X. Подредениот пар (X,ρ) го нарекуваме *псевдометрички простор*, а елементите на множеството X негови *точки*.
    Нека на множеството X е дадена функција $f:X\to\mathbf{R}$ таква, што $f(x)\geq 0$ за секој $x\in X$ и нека функцијата $d:X\times X\to\mathbf{R}$ е определена со формулата

    $$d(x,y)=\begin{cases}\max\{f(x),f(y)\}, & x\neq y\\ 0 & x=y.\end{cases}$$

    Докажете:

    1) d е псевдометрика на X и
    2) ако за функцијата f важи: од $f(x)=f(y)=0$ следува $x=y$, тогаш d е метрика на X.

22. Да го разгледаме множеството $\mathbf{R}([0,1])$ од функции интеграбилни по Риман на интервалот $[0,1]$. Докажете дека функцијата

    $$\rho(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\,dt,$$

    за секои $f,g\in\mathbf{R}([0,1])$ е псевдометрика на $\mathbf{R}([0,1])$. Дадете пример од кој ќе се види дека ρ не е метрика.

23. Нека (X',d') и (X'',d'') се метрички простори и $X=X'\times X''$. Докажете, дека со формулата $d((x',x''),(y',y''))=d'(x',y')$ е дефинирана псевдометрика на X.

24. Нека (X,d) е псевдометрички простор и $\sim$ е бинарна реалација на X определена со $x\sim x'$ ако и само ако $d(x,x')=0$. Докажете, дека:

    а) $\sim$ е релација за еквиваленција на X, б) Ако $x \sim x'$ и $y \sim y'$, тогаш $d(x,y) = d(x',y')$, што значи дека на множеството $\tilde{X}$ од сите класи на еквиваленција $\tilde{x}$, $x \in \tilde{x}$ со формулата $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = d(x,y)$ може да се дефинира функција $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbf{R}$.

в) $\tilde{d}$ е метрика на X.

25. Нека (X,ρ) е метрички простор, $A \subset X, x \in X$. Докажете, дека

$$\rho(x_n, A) \to \rho(x, A), n \to \infty$$

за секоја низа $x_n \to x, \ n \to \infty$ во (X,ρ).

26. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ се низи во метричкиот простор (X,ρ) и нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Докажете, дека $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ ако и само ако $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

27. Нека во метричкиот простор (X,ρ) е дадена низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажете, дека ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = x_0$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

28. Нека во метричкиот простор (X,ρ) е дадена низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажете, дека ако поднизите $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергираат, тогаш и низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира.

29. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во метричкиот простор (X,ρ). Докажете, дека ако низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира кон точката x_0, тогаш постои подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што ниту една нејзина подниза не конвергира кон точката x_0.

30. Нека X е непразно множество и ρ_B е метриката на Бер за $X^{\mathbf{N}}$. Најдете услов за конвергенција на низа во просторот $(X^{\mathbf{N}}, \rho_B)$.

31. Нека (X,ρ) е метрички простор, A и B се непразни подмножества од X и $p \in X$. Докажете ги следниве тврдења:

i) $\rho(p,A)$, $\rho(A,B)$ и $d(A)$ се ненегативни реални броеви.
ii) Ако $p \in A$, тогаш $\rho(p,A) = 0$.
iii) Ако $A \cap B \neq \varnothing$, тогаш $d(A,B) = 0$.
iv) Ако A е конечно подмножество од X, тогаш $d(A) < +\infty$, т.е. множеството A е ограничено.
v) Ако $A \subseteq B$, тогаш $d(A) \leq d(B)$.
vi) Ако просторот X е ограничен, тогаш и секој потпростор од X е ограничен.

32. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A,B,C \subseteq X$. Докажете, дека

$$\rho(A \cup B, C) = \min\{\rho(A,C), \rho(B,C)\} .$$

33. Во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ множествата

$$A = \{(x, \tfrac{1}{x}) \mid x \in \mathbf{R}, x > 0\} \text{ и } B = \{(0,y) \mid y \in \mathbf{R}\}$$

се затворени дисјунктни множества за кои важи $d(A,B) = 0$. Докажете!

34. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A,B \subset X$. Докажете, дека

a) $\rho(A,B) = \rho(\overline{A},\overline{B}) = \rho(\overline{A},B) = \rho(A,\overline{B})$.

b) $d(A) = d(\overline{A})$.

35. Нека (X,ρ) е метрички простор и подмножествата A и B од X се такви, што $A \cap \overline{B} = \varnothing$ и $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Докажете, дека постојат отворени множества U и V во X такви, што $A \subseteq U, B \subseteq V$ и $U \cap V = \varnothing$.

36. Нека (X,ρ) е метрички простор, $A \subset X, x \in X$. Докажете, дека за секој $\varepsilon > 0$ множеството

$$M = \{x \mid \rho(x,A) < \varepsilon\}$$

е отворено, а множеството

$$N = \{x \mid \rho(x,A) \le \varepsilon\}$$

е затворено.

37. За множеството $A \subset \mathbf{R}^m$ ќе велиме дека е *локално затворено* во метричкиот простор $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ ако за секој $\mathbf{x} \in A$ постои $r > 0$ таков што множеството $A \cap \overline{B}(\mathbf{x};r)$ е затворено во $\mathbf{R}^m$.

1) Докажете, дека множеството A е локално затворено подмножество од $\mathbf{R}^m$ ако и само ако постојат отворено множество U и затворено множество F во $\mathbf{R}^m$ такви што $A = U \cap F$.

2) Најдете множество $B \subset \mathbf{R}^m$ кое не е локално затворено во $\mathbf{R}^m$.

38. За просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ и функцијата $f_0(x) \equiv 0, x \in [a,b]$ опишете ги топките $B(f_0;1)$ и $\overline{B}(f_0;1)$.

39. Во просторот $(\mathbf{C}([a.b]), \rho_\infty)$ со A да го означиме множеството функции кои го задоволуваат Липшицовиот услов (забелешка III 8.7). Дали множеството A е отворено (затворено) во просторот $(\mathbf{C}([a.b]), \rho_\infty)$?

40. Нека (X,ρ) е метрички простор. Докажете, дека

a) Секое затворено множество F во X е пребројлив пресек на отворени множества во X .

b) Секое отворено множество O во X е пребројлива унија на затворени множества во X .

41. Докажете, дека *Хилбертовиот квадар*, т.е. множеството

$$I^{\infty} = \{x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l^2 \mid |x_i| \le \tfrac{1}{i}, i = 1, 2, 3, ...\}$$

е ограничено и затворено множество во метричкиот простор l^2 .

42. Нека $1 \le p < q \le \infty$. Докажете дека $l^p \subseteq l^q$, т.е. дека (l^p, ρ_q) е потпростор од (l^q, ρ_q) . Дали множеството l^p е затворено во просторот (l^q, ρ_q) ?

43. Нека $1 \le p \le \infty$ и со A да го означиме множеството од сите елементи $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ во (l^p, ρ_p) за кои еден член на низата $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ е еднаков на 1. Најдете го затворањето на множеството A во просторот (l^p, ρ_p) .

44. Нека (X, ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. Докажете, дека $\overline{A} = A \cup \partial A$,

45. Нека (X, ρ) е метрички простор и F е затворено множество во X . Докажете, дека
а) $\partial F = F \cap \overline{X \setminus F}$,
б) $\partial(\partial F) = \partial F$.

46. Нека (X, ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. Докажете, дека $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

47. Нека $\mathbf{P}([a,b])$ е множеството од сите полиноми, разгледувани на интервалот $[a,b]$. Најдете ги множествата внатрешни и гранични точки на множеството $\mathbf{P}([a,b])$ во просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_{\infty})$.

48. Нека $A, B \subset \mathbf{R}^2$ и $A + B = \{(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \mid (x_1, x_2) \in A, (y_1, y_2) \in B\}$. Докажете дека
а) $A + B$ е отворено ако A или B е отворено,
б) $A + B$ е затворено ако A и B се затворени.

49. Во просторот $(\mathbf{C}([1,2]), \rho_{\infty})$ најдете го затворањето на множеството од сите функции од видот

$$f(x) = a_0 + a_1 x^{\frac{1}{2}} + a_2 x^{\frac{3}{2}} + ... + a_n x^{\frac{2n-1}{2}}, \ x \in [1,2].$$

50. Кои од следниве подмножества на метричкиот простор $(C([0,1]), \rho_{\infty})$ се отворени, односно затворени:
а) $\{f \mid f(0) = 0\}$,
б) $\{f \mid \max\limits_{x \in [0,1]} f(x) > 1\}$,
в) $\{f \mid \int\limits_0^1 f^2(t)dt \le 1\}$,
г) $\{f \mid$ за секој $t \in [0,1], f(t) > t\}$.

51. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ се затворени множества. Докажете, дека во Декартовиот производ $Z = X \times Y$ е исполнето равенството

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B). \tag{1}$$

Земете $X = Y = [0,1]$ со обичната метрика, $A = B = [0,1)$ и докажете дека во (1) не мора да важи знак за равенство ако множествата A и B не се затворени подмножества од X и Y, соодветно.

52. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $(Z,\rho_p) = (X \times Y, \rho_p), 1 \le p \le \infty$. За произволни непразни множества $A, A' \subseteq X$ и $B, B' \subseteq Y$ изрази го растојанието $\rho_p(A \times B, A' \times B')$ со помош на растојанијата $\rho(A, A')$ и $d(B, B')$.

53. Нека (X,ρ) е метрички простор. За множеството $A \subseteq X$ ќе велиме дека е G_δ*-множество* ако A може да се запише како пресек на преброjливо многу отворени множества. За множеството A ќе велиме дека е F_σ*-множество* ако може да се запише како унија на преброjливо многу затворени множества. Докажете, дека:
   1) ако множеството F е затворено во просторот X, тогаш F е G_δ-множество.
   2) Ако множеството U е отворено во просторот X, тогаш U е F_σ-множество.

X ГЛАВА

ФУНКЦИИ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

1. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА

1.1. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори, $A \subseteq X$ и x_0 е точка на натрупување за множеството A. Во овој дел ќе ги разгледаме функциите од видот $f: A \to Y$. Најважни случаи на функции од овој вид се:

1) $X = Y = \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$, реална функција од една променлива;

2) $X = \mathbf{R}^m, Y = \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$, реална функција од m променливи;

3) $X = \mathbf{R}^m, Y = \mathbf{R}^n$, $f: A \to \mathbf{R}^n$, векторска функција од m променливи;

4) (X,ρ) е метрички простор, $Y = \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$, реална функција зададена на подмножество A од метричкиот простор X; и

5) (X,ρ) и (Y,d) се произволни метрички простори и $f: X \to Y$.

Во главите III-V ги проучивме функциите 1). Во нашите натамошни разгледувања ќе се осврнеме на останатите функции на метрички простори.

1.2. Дефиниција. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори, $A \subseteq X$, x_0 е точка на натрупување за множеството A и $f: A \to Y$. За точката $p \in Y$ ќе велиме дека е *граница на функцијата* f *во точката* x_0, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што за секој $x \in A \setminus \{x_0\}$ од $\rho(x,x_0) < \delta$ следува $d(f(x),p) < \varepsilon$.

Притоа пишуваме $f(x) \to p, x \to x_0$ или $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

1.3. Теорема. Точката p е граница на функцијата f во точката x_0 ако и само ако за секоја низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква, што

i) $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, за секој $n \ge 1$ и

ii) $x_n \to x_0, n \to \infty$ во (X,ρ)

важи $f(x_n) \to p, n \to \infty$ во (Y,d).

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа која ги задоволува условите *i*) и *ii*). Ќе докажеме дека $f(x_n) \to p, n \to \infty$ во (Y,d). Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од дефиниција 1.2 следува дека

$$\exists \delta > 0 \text{ таков, што } \forall x \in A \setminus \{x_0\} \text{ од } \rho(x,x_0) < \delta \text{ следува } d(f(x),p) < \varepsilon. \tag{1}$$

Од дефиницијата на граница на низа следува дека за бројот $\delta > 0$

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ таков, што } \forall n > n_0 \text{ важи } \rho(x_n, x_0) < \delta . \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) имаме дека за секој $n > n_0$ важи $d(f(x_n), p) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$. Обратно, нека за секоја низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за која се исполнети условите *i*) и *ii*) важи $f(x_n) \to p, n \to \infty$ во (Y, d) и да претпоставиме дека p не е граница на функцијата f во точката x_0 . Тогаш,

$$\exists \varepsilon^* > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in A \setminus \{x_0\} \text{ таков, што } \rho(x_\delta, x_0) < \delta \text{, но } d(f(x_\delta), p) \geq \varepsilon^* . \tag{3}$$

Нека сега $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $x_n = x_{\delta_n}$, за $n \geq 1$. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги задоволува условите *i*) и *ii*), па затоа

$$f(x_n) \to p, n \to \infty \text{ во } (Y, d) ,$$

што противречи на (3). Конечно, тврдењето следува од добиената противречност. ♦

1.4. Пример. а) Нека $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0\}$ и да ја разгледаме функција $f : A \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x, y) = \frac{\sin(x-y+1)}{x-y+1} , \ (x, y) \in A .$$

Ќе докажеме дека

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = 1 . \tag{4}$$

Нека $(x_m, y_m), m = 1, 2, \ldots$ е произволна низа во A која конвергира кон $(0,1)$. Тогаш, $x_m \to 0, \ \ y_m \to 1,$ кога $m \to \infty$ и соодветните вредности на функцијата во точките $(x_m, y_m), m = 1, 2, \ldots$ ќе бидат

$$f(x_m, y_m) = \frac{\sin(x_m - y_m + 1)}{x_m - y_m + 1} .$$

Ако ставиме $\alpha_m = x_m - y_m + 1,$ тогаш, очигледно, $\alpha_m \to 0$ и затоа

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sin(x_m - y_m + 1)}{x_m - y_m + 1} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sin \alpha_m}{\alpha_m} = 1 .$$

Конечно, од произволноста на низата $(x_m, y_m), m = 1, 2, \ldots$ следува равенството (4).

б) Нека $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и да ја разгледаме функција $f : A \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} , \ (x, y) \in A .$$

Ќе докажеме дека границата $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ не постои. Да ги разгледаме низите

$$(x_m, y_m) \equiv (\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{m}), \quad m = 1,2,... \text{ и } (x_m^*, y_m^*) \equiv (\tfrac{1}{m}, -\tfrac{1}{m}), \quad m = 1,2,...$$

кои конвергираат кон точката $(0,0)$. Притоа,

$$f(x_m, y_m) = \frac{\frac{1}{m^4}}{\frac{1}{m^4}} \to 1 \text{ и } f(x_m^*, y_m^*) = \frac{\frac{1}{m^4}}{\frac{1}{m^4} + \frac{4}{m^2}} \to 0, \text{ кога } m \to \infty,$$

од што следува дека $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не постои. ♦

1.5. Теорема. Ако (X, ρ) е метрички простор, $Y = \mathbf{R}$, $f : X \to \mathbf{R}$ и $f(x_n) \to p,\ n \to \infty$ и $f(x_n) \to q, n \to \infty$ во (Y, d), тогаш $p = q$.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 1.3 и IX 3.4. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

1.6. Теорема (за запазување на знакот). Нека (X, ρ) е метрички простор, $Y = \mathbf{R}$, $f : X \to \mathbf{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a \notin \{0, \infty\}$, тогаш постои отворена топка $B(x_0;\delta)$ таква што за секој $x \in B(x_0;\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ важи

$$|f(x)| > \tfrac{|a|}{2}. \tag{5}$$

Притоа, во точките $x \in B(x_0;\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ функцијата f го запазува знакот на a.

Доказ. Нека $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in A \setminus \{x_0\}$ од $\rho(x, x_0) < \delta$ следува $d(f(x), a) < \varepsilon$, што значи за секој $x \in B(x_0;\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ важи

$$|f(x) - a| < \tfrac{|a|}{2}. \tag{6}$$

Затоа за секој $x \in B(x_0;\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ важи

$$\tfrac{|a|}{2} > |a - f(x)| > |a| - |f(x)|,$$

т.е. важи неравенството (5).

Од неравенството (6) следува дека за $x \in B(x_0;\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ имаме

$$a - \tfrac{|a|}{2} < f(x) < a + \tfrac{|a|}{2},$$

па оттука $f(x) > \frac{a}{2}$ кога $a > 0$ и $f(x) < \frac{a}{2}$ кога $a < 0$, што значи дека во точките $x \in B(x_0;\delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ функцијата f го запазува знакот на a. ♦

1.7. Теорема (својства на граници на реални функции). Нека (X, ρ) е метрички простор, $A \subseteq X$, x_0 е точка на натрупување за A, $Y = \mathbf{R}$ и $d(x, y) = |x - y|$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$ и $f : A \to \mathbf{R}$, $g : A \to \mathbf{R}$ се две реални функции. Ако

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = p \in \mathbf{R} \text{ и } \lim_{x\to x_0} g(x) = q \in \mathbf{R},$$

тогаш

i) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$, за секој $c \in \mathbf{R}$,

ii) $\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,

iii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$ и

iv) ако дополнително важи $q \neq 0$, тогаш $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 1.3 и својствата на граница на реална низа. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

1.8. Последователни граници. Нека (X,ρ) и (Y,d) метрички простори, на Декартовиот производ $X\times Y$ е дефинирана метрика со равенствата (1) или (2) од IX 14, $f: X\times Y\setminus\{(x_0,y_0)\}\to \mathbf{R}$ и $(x_0,y_0)\in X\times Y$. Границата

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = p \text{ во } (X\times Y, \rho_p)$$

ја нарекуваме *двојна граница*. За двојната граница, исто така ја користиме и ознаката

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Фиксираме точка $x\neq x_0$ и ја разгледуваме функцијата $f(x,\cdot): Y\to \mathbf{R}$ како функција од $y\in Y$. Претпоставуваме дека постои границата

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = g(x), \text{ во } (Y,d).$$

Ако постои границата

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = q, \text{ во } (X,\rho),$$

тогаш q го нарекуваме *последователна граница* на функцијата f во точката (x_0,y_0) и го означуваме со

$$q = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Аналогно се дефинира другата последователна граница

$$p = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Да забележиме дека двојната граница и последователните граници во општ случај се различни, што може да се види од следниов пример.

1.9. Пример. Нека $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\neq 0 \text{ и } y\neq 0\}$ и да ја разгледаме функција $f:A\to\mathbf{R}$ определена $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$. Ќе докажеме дека последователните граници

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \text{ и } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y),$$

не постојат, но двојната граница $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ постои.

Јасно, ако

$$y\neq\frac{1}{n\pi},\quad n=\pm 1,\pm 2,\ldots,$$

тогаш $y\sin\frac{1}{y}\neq 0$. Очигледно, низите

$$x_n=\frac{1}{n\pi},\quad x_n'=\frac{2}{(4n+1)\pi},\quad n=1,2,\ldots$$

конвергираат кон нула кога $n\to\infty$. Притоа, соодветните низи од вредностите на функцијата се

$$\{f(x_n',y)\}_{n=1}^{\infty}\equiv\{y\sin\tfrac{1}{y}\},\quad \{f(x_n,y)\}_{n=1}^{\infty}\equiv\{0\},$$

и тие кога $n\to\infty$ конвергираат кон различни граници. Според тоа, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ не постои. Аналогно се докажува дека границата $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не постои. Од досега изнесеното следува дека двете последователни граници не постојат.

Од друга страна, ако го искористиме неравенството

$$0\leq\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leq|x+y|\leq|x|+|y|,$$

кое важи за секои $x\neq 0,\quad y\neq 0$, следува дека $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. ♦

1.10. Забелешка. Во претходниот пример видовме дека од постоењето на граница на функција во дадена точка не следува постоењето на последователните граници. Исто така, од постоењето на последователните граници на функцијата, не следува постоењето на границата на функцијата во дадена точка. Навистина, во пример 1.4 б) покажавме дека за функцијата

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

границата $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не постои, меѓутоа, последователните граници постојат и притоа важи

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0 \text{ и } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

2. НЕПРЕКИНАТИ И РАМНОМЕРНО НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ

2.1. Дефиниција. Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори, $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ и $x_0 \in A$ е точка за A. За функцијата $f : A \to Y$ ќе велиме дека е *непрекината во точката* x_0, ако $f(x) \to f(x_0)$, кога $x \to x_0$, т.е. ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in A$ за кој $\rho(x,x_0) < \delta$ важи $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ако функцијата $f : A \to Y$ не е непрекината во точката x_0, тогаш ќе велиме дека таа е *прекината* во x_0 и точката x_0 ќе ја нарекуваме *точка на прекин на функцијата* f.

По дефиниција земаме дека секоја функција $f : A \to Y$ е непрекината во секоја изолирана точка $x_0 \in A$.

2.2. Дефиниција. Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори и $A \subseteq X$. За функцијата $f : A \to Y$ ќе велиме дека е *непрекината на множеството* A, ако f е непрекината во секоја точка од A.

2.3. Пример. а) Нека $b \in Y$ е фиксиран елемент и за секој $x \in X$ да ставиме $f(x) = b$. Јасно,

$$d(f(x), f(t)) = d(b,b) = 0 \text{, за секои } x,t \in X \text{,}$$

што значи дека функцијата f е непрекината на X.

б) Ако (X,ρ) е метрички простор, тогаш идентичната функција $\mathrm{id}_X : X \to X$ определена со $\mathrm{id}_X(x) = x$, за секој $x \in X$ е непрекината. Проверете!

в) Нека (X,ρ) е метрички простор, $Y = \mathbf{R}$, $a \in X$ е фиксиран елемент и $f(x) = \rho(x,a)$, $x \in X$. Од неравенството

$$|\rho(x,a) - \rho(t,a)| \leq \rho(x,t)$$

при $\delta = \varepsilon$ следува дека f е непрекината на X.

г) Нека $(X,\rho) = (C([a,b]), \rho_1)$ и $Y = \mathbf{R}$. Дефинираме функција $f : X \to Y$ таква што

$$f(x) = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \text{, за секој } x \in C([a,b]).$$

Ќе докажеме дека вака дефинираната функција не е непрекината на $C([a,b])$. За таа цел доволно е да докажеме дека таа не е непрекината во точката $0 \in C([a,b])$.

Имено, функцијата е непрекината во точката $0 \in C([a,b])$ ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што од

$$\int_a^b | x(t) | dt = \rho_1(x,0) < \delta \text{ следува } \max_{t\in[a,b]} | x(t) | = | f(x) - f(0) | < \varepsilon . \qquad (1)$$

Меѓутоа, за $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и за секој $0 < \delta < b - a$ за функцијата

$$x(t) = \begin{cases} \frac{a+\delta-t}{\delta}, & t \in [a, a+\delta] \\ 0, & t \in (a+\delta, b] \end{cases}$$

важи

$$\rho_1(x,0) = \int_a^{a+\delta} \frac{a+\delta-t}{\delta} dt = \frac{\delta}{2} < \delta$$

и

$$| f(x) - f(0) | = \max_{t\in[a,b]} | x(t) | = \max_{t\in[a,a+\delta]} \frac{a+\delta-t}{\delta} = 1 > \varepsilon ,$$

т.е. не важи импликацијата (1), што значи дека функцијата f не е непрекината во точката $0 \in C([a,b])$. ♦

2.4. Забелешка. а) Нека x_0 е внатрешна точка за множеството A. Тогаш дефиницијата за непрекинатост на функцијата $f : A \to Y$ во точката x_0 може да се искаже во следнава еквивалентна форма:

за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што $f(B(x_0;\delta)) \subseteq B(f(x_0);\varepsilon)$.

б) Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори, $A \subseteq X$ и $f : A \to Y$. Од дефиниција 2.1 и теорема 1.3 непосредно следува дека следниве тврдења се еквивалентни:

1) функцијата f е непрекината во точката $x_0 \in A$,

2) ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во A која конвергира кон x_0, тогаш низата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон $f(x_0)$.

2.5. Теорема. Нека (X,ρ) е произволен метрички простор, $Y = \mathbf{R}$, $d(x,y) = | x - y |$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$ и $f : X \to \mathbf{R}, g : X \to \mathbf{R}$ се функции непрекинати во точката $x_0 \in X$. Тогаш,

i) за секој $c \in \mathbf{R}$ функцијата cf е непрекината во точката x_0;

ii) функцијата $f + g$ е непрекината во точката x_0;

iii) функцијата fg е непрекината во точката x_0; и

iv) ако дополнително $g(x_0) \neq 0$, тогаш функцијата $\frac{f}{g}$ е непрекината во точката x_0.

Доказ. Непосредно следува од дефиницијата за непрекинатост и теорема 1.7. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2.6. Дефиниција. Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори и $A \subseteq X$. За функцијата $f: A \to Y$ ќе велиме дека е *рамномерно непрекината на множеството* A, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што за секои $x, y \in A$ за кои $\rho(x,y) < \delta$ важи $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

2.7. Лема. Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори и $f: X \to Y$. Ако f е рамномерно непрекината на X, тогаш таа е непрекината на X.

Доказ. Непосредно следува од дефинициите 2.2 и 2.6. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2.8. Пример. а) Нека (X,ρ) е метрички простор, $Y = \mathbf{R}$ и нека $a \in X$. Од доказот во пример 2.3 а) непосредно следува дека функцијата $f: X \to Y$ определена со $f(x) = \rho(x,a)$, $x \in X$ е рамномерно непрекината на X (зошто?).

б) Нека $(X,\rho) = (\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ и $Y = \mathbf{R}$. Дефинираме функцијата $f: X \to Y$ со која на секоја непрекината функција $x \in \mathbf{C}([a,b])$ и ја придружуваме вредноста на интегралот $\int_a^b x(t)dt$, т.е. $f(x) = \int_a^b x(t)dt$. Ќе докажеме дека функцијата f е рамномерно непрекината на $\mathbf{C}([a,b])$.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Земаме $\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$ и ако $\rho(x,y) < \delta$, т.е. ако

$$\max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| < \delta$$

тогаш

$$|f(x) - f(t)| = \left|\int_a^b x(t)dt - \int_a^b y(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt \le \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|\, dt$$

$$= \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \int_a^b dt < \delta(b-a) = \varepsilon,$$

што значи функцијата f е рамномерно непрекината на $\mathbf{C}([a,b])$. ♦

2.9. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор, A е фиксирано непразно подмножество од X. Функцијата $f: X \to \mathbf{R}$ определена со $f(x) = \rho(x, A)$, $x \in X$ е рамномерно непрекината на X.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Земаме $\delta = \varepsilon$ и нека $x, y \in X$ се такви што $\rho(x,y) < \delta$. За секоја точка $a \in A$ важи $\rho(x,A) \le \rho(x,a) \le \rho(x,y) + \rho(y,a)$, односно

$$\rho(x,A)-\rho(x,y)\le\rho(y,a),$$

па затоа

$$\rho(x,A)-\rho(x,y)\le\inf_{a\in A}\rho(y,a)=\rho(y,A).$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$f(x)-f(y)=\rho(x,A)-\rho(y,A)\le\rho(x,y). \tag{2}$$

Ако ги замениме местата на x и y добиваме

$$f(y)-f(x)\le\rho(x,y). \tag{3}$$

Конечно, од (2) и (3) следува

$$|f(x)-f(y)|\le\rho(x,y)<\delta=\varepsilon,$$

што значи дека f е рамномерно непрекината на X. ♦

2.10. Теорема (непрекинатост и рамномерна непрекинатост на сложена функција). Нека (X,ρ_1), (Y,ρ_2) и (Z,ρ_3) се метрички простори, $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ и $h:X\to Z$ се такви, што $h(x)=g(f(x))$, за секој $x\in X$, т.е. функцијата $h=g\circ f$ е композиција на функциите f и g.

а) Ако функцијата f е непрекината во точката x_0 и функцијата g е непрекината во точката $y_0=f(x_0)$, тогаш функцијата h е непрекината во точката x_0.

б) Ако функцијата f е рамномерно непрекината на X и функцијата g е рамномерно непрекината на Y, тогаш функцијата h е рамномерно непрекината на X.

Доказ. а) Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X, $x_n\ne x_0$ и $x_n\to x_0$, $n\to\infty$ во (X,ρ_1). Бидејќи f е непрекината во x_0, од забелешка 2.4 б) следува дека $f(x_n)\to f(x_0)$, $n\to\infty$ во (Y,ρ_2). Земаме $y_n=f(x_n)$, за $n\ge 1$ и $y_0=f(x_0)$. Тогаш $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во Y таква што $y_n\to y_0$, $n\to\infty$ во (Y,ρ_2). Од непрекинатоста на g во $y_0=f(x_0)$ и од забелешка 2.4 б) следува дека $g(y_n)\to g(y_0)$, $n\to\infty$ во (Z,ρ_3), што значи $g(f(x_n))\to g(f(x_0))$, $n\to\infty$ во (Z,ρ_3). Конечно, за секоја низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во X низата $\{(g\circ f)(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон $(g\circ f)(x_0)$, па од забелешка 2.4 б) следува дека функција $h=g\circ f$ е непрекината во точката x_0.

б) Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Функцијата g е рамномерно непрекината на Y, па затоа постои $\delta_1>0$ таков, што за секои $y,y_1\in Y$ за кои $\rho_2(y,y_1)<\delta_1$ важи $\rho_3(g(y),g(y_1))<\varepsilon$. Понатаму, функцијата f е рамномерно непрекината на X, па затоа за $\delta_1 > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што за секои $x, x_1 \in X$ за кои $\rho_1(x, x_1) < \delta$ важи $\rho_2(f(x), f(x_1)) < \delta_1$.

Според тоа, за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што за секои $x, x_1 \in X$ за кои $\rho_1(x, x_1) < \delta$ важи

$$\rho_3(h(x), h(x_1)) = \rho_3(g(f(x)), g(f(x_1))) = \rho_3(g(y), g(y_1)) < \varepsilon,$$

што значи функцијата h е рамномерно непрекината на X. ♦

2.11. На крајот од овој параграф ќе докажеме две теореми за сликите на непрекинатите функции.

Теорема. Нека (X, ρ) и (Y, d) се метрички простори и $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : X \to Y$ се непрекинати функции. Тогаш, множеството

$$F = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$$

е затворено во X.

Доказ. Ќе докажеме дека множеството $G = X \setminus F$ е отворено во X. Ако $x \in G$, тогаш $x \notin F$, па затоа $f_1(x) \neq f_2(x)$, односно $d(f_1(x), f_2(x)) = 2\varepsilon > 0$. Функцијата f_1 е непрекината во точката x, па затоа постои $\delta_1 > 0$ таков, што за секој $y \in X$ за кој $\rho(x, y) < \delta_1$ важи $d(f_1(x), f_1(y)) < \varepsilon$. Аналогно постои $\delta_2 > 0$ таков, што за секој $y \in X$ за кој $\rho(x, y) < \delta_2$ важи $d(f_2(x), f_2(y)) < \varepsilon$. Земаме $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и добиваме дека за секој $y \in X$ таков што $\rho(x, y) < \delta$ важи $d(f_1(x), f_1(y)) < \varepsilon$ и $d(f_2(x), f_2(y)) < \varepsilon$.

Нека претпоставиме дека постои $y \in X$ таков, што $\rho(x, y) < \delta$ и $f_1(y) = f_2(y)$. Тогаш,

$$2\varepsilon = d(f_1(x), f_2(x)) \leq d(f_1(x), f_1(y)) + d(f_2(y), f_2(x)) < 2\varepsilon,$$

што е противречност, па затоа за секој $y \in X$ таков што $\rho(x, y) < \delta$ важи $f_1(y) \neq f_2(y)$. Според тоа, $B(x; \delta) \subseteq G$, т.е. множеството $G = X \setminus F$ е отворено. ♦

2.12. Теорема. Нека (X, ρ) е метрички простори и $f_1 : X \to \mathbf{R}$ и $f_2 : X \to \mathbf{R}$ се непрекинати функции. Тогаш, множествата

$$F = \{x \in X \mid f_1(x) \leq f_2(x)\} \text{ и } E = \{x \in X \mid f_1(x) \geq f_2(x)\}$$

се затворени во X.

Доказ. Ќе докажеме дека множеството $G = X \setminus F$ е отворено во X. Ако $x \in G$, тогаш $f_1(x) > f_2(x)$, т.е. $f_1(x) - f_2(x) = a > 0$. Функцијата $f_1 - f_2$ е непрекината во точката x, па од доказот на теорема 1.6 следува дека постои $\delta > 0$ таков што за секој $y \in X$ за кој $\rho(x, y) < \delta$ важи $f_1(y) - f_2(y) > \frac{a}{2}$. Значи, $B(x; \delta) \subseteq G$, т.е. множеството $G = X \setminus F$ е отворено, па затоа множеството F е затворено.

Аналогно се докажува дека множеството E е затворено. ♦

3. КАРАКТЕРИЗАЦИЈА НА НЕПРЕКИНАТИТЕ ФУНКЦИИ

3.1. Дефиниција. Нека $(X,\rho),(Y,d)$ се метрички простори и $f:X\to Y$. Ако $A\subseteq X$, тогаш множеството $f(A)=\{y\in Y \mid \exists x\in A,\, f(x)=y\}$ го нарекуваме *слика на множеството* A при функцијата F. Ако $B\subseteq Y$, тогаш множеството

$$f^{-1}(B)=\{x\in X \mid \exists y\in B,\, f(x)=y\}$$

го нарекуваме *праслика на множеството* B при функцијата f.

3.2. Теорема. Нека $(X,\rho),(Y,d)$ се метрички простори $f:X\to Y$. Тогаш f е непрекината на X ако и само ако за секое множество G отворено во (Y,d) множеството $f^{-1}(G)$ е отворено во (X,ρ).

Доказ. $\Rightarrow$. Нека f е непрекината на X и $G\subseteq Y, G\neq\emptyset$ е отворено множество. Да земеме произволна фиксирана точка $x_0\in f^{-1}(G)$ и да ставиме $y_0=f(x_0)\in G$. Множеството G е отворено, па затоа постои $\varepsilon>0$ таков, што $B(y_0;\varepsilon)\subseteq G$. Понатаму, од непрекинатоста на функцијата f во точката x_0 следува дека постои $\delta>0$ таков, што за секој $x\in B(x_0;\delta)$ важи $f(x)\in B(y_0;\varepsilon)$. Според тоа,

$$B(x_0;\delta)\subseteq f^{-1}(B(y_0;\varepsilon))\subseteq f^{-1}(G).$$

Ако $G=\emptyset$, тогаш $f^{-1}(G)=\emptyset$. Значи, и во двата случаи $f^{-1}(G)$ е отворено во (X,ρ).

$\Leftarrow$. Нека $x_0\in X$ и $\varepsilon>0$ е дадено. Множеството $B(y_0;\varepsilon)=G$, $y_0=f(x_0)$ е отворено во (Y,d). Затоа, од условот следува дека

$$f^{-1}(B(y_0;\varepsilon))=f^{-1}(G)$$

е отворено во (X,ρ). Сега за $x_0\in f^{-1}(B(y_0;\varepsilon))$ постои $\delta>0$ таков, што

$$B(x_0;\delta)\subseteq f^{-1}(B(y_0;\varepsilon)),$$

што значи

$$f(B(x_0;\delta))\subseteq B(y_0;\varepsilon),$$

т.е. функцијата f е непрекината во x_0. Конечно, тврдењето следува од произволноста на точката $x_0\in X$. ♦

3.3. Последица. Нека $(X,\rho),(Y,d)$ се метрички простори, $f:X\to Y$ и $\mathcal{B}=\{B_i, i\in I\}$ е база за просторот (Y,d). Функцијата f е непрекината ако и само ако прасликата на секој елемент од базата $\mathcal{B}$ е отворено множество во X.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека функцијата f е непрекината и $B\in\mathcal{B}$. Но, множеството B е отворено, па од теорема 3.2 следува дека множеството $f^{-1}(B)$ е отворено.

$\Leftarrow$. Обратно, нека $\mathcal{B}=\{B_i, i\in I\}$ е база за просторот (Y,d) и прасликата на секој елемент од $\mathcal{B}$ е отворено множество во X. Нека G е отворено множество во Y. Тогаш $G=\bigcup\limits_i B_i$ е унија на елементи од базата $\mathcal{B}$. Според тоа,

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(\bigcup_i B_i)=\bigcup_i f^{-1}(B_i)$$

и како множествата $f^{-1}(B_i)$ се отворени, од теорема IX 7.8 *iii*) следува дека множеството $f^{-1}(G)$ е отворено во X, што според теорема 3.2 значи дека функцијата f е непрекината. ♦

3.4. Последица. Нека функцијата $f:X\to Y$ е непрекината на X, $A\subseteq X$ и f_A е рестрикцијата на f над A. Тогаш f_A е непрекината функција.

Доказ. Нека G отворено во (Y,d). Функцијата f е непрекината, па од теорема 3.2 следува дека множеството $f^{-1}(G)$ е отворено во (X,ρ). Но, тоа значи дека множеството $A\cap f^{-1}(G)$ е отворено во A. Конечно, од претходно изнесеното и од $A\cap f^{-1}(G)=f_A^{-1}(G)$ следува дека множеството $f_A^{-1}(G)$ е отворено во (A,ρ_A), па од теорема 3.2 следува дека рестрикцијата f_A е непрекината функција. ♦

3.5. Последица. Функцијата $f:X\to Y$ е непрекината на X ако и само ако за секое множество F затворено во (Y,d) множеството $f^{-1}(F)$ е затворено во (X,ρ).

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $f:X\to Y$ е непрекината и нека множеството F е затворено во (Y,d). Тогаш множеството ${}^cF$ е отворено во (Y,d), па од теорема 3.2 следува дека множеството $f^{-1}({}^cF)$ е отворено во (X,ρ). Но,

$$f^{-1}({}^cF)={}^c(f^{-1}(F))$$

и значи множеството ${}^c(f^{-1}(F))$ е отворено во (X,ρ), па затоа множеството $f^{-1}(F)$ е затворено (X,ρ).

$\Leftarrow$. Обратно, нека претпоставиме дека за секое множество F затворено во (Y,d) множеството $f^{-1}(F)$ е затворено во (X,ρ). Нека множеството G отворено во (Y,d). Тогаш множеството ${}^cG$ е затворено во (Y,d), па од претпоставката следува дека множеството $f^{-1}({}^cG)$ е затворено во (X,ρ). Но,

$$f^{-1}({}^cG) = {}^c(f^{-1}(G))$$

и значи множеството ${}^c(f^{-1}(G))$ е затворено во (X,ρ), па затоа множеството $f^{-1}(G)$ е отворено во (X,ρ). Конечно, од теорема 3.2 следува дека функцијата $f: X \to Y$ е непрекината на X. ♦

3.6. Во теорема 3.2 видовме дека за непрекината функција инверзната слика на отворено множество е отворено множество. Логично е да се запрашаме дали при непрекината функција сликата на отворено множество е отворено множество? Одговорот на поставеното прашање е негативен, што може да се види од следниов пример.

Пример. Нека $(X,\rho)=(Y,\rho)=(\mathbf{R},\rho)$. Функцијата $f: X \to Y$ определена со $f(x)=x^2$, за секој $x\in\mathbf{R}$ е непрекината. Понатаму, множеството $A=(-1,1)$ е отворено во (X,ρ), но неговата слика $f(A)=[0,1)$ не е отворено во (Y,ρ). ♦

3.7. Во последица 3.5 видовме дека за непрекината функција инверзната слика на затворено множество е затворено множество. Логично е да се запрашаме дали при непрекината функција сликата на затворено множество е затворено множество? Одговорот на поставеното прашање е негативен, што може да се види од следниов пример.

Пример. Нека $(X,\rho)=(Y,\rho)=(\mathbf{R},\rho)$. Функцијата $f: X \to Y$ определена со $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, за секој $x\in\mathbf{R}$ е непрекината. Понатаму, множеството $A=[0,+\infty)$ е затворено во (X,ρ), но неговата слика $f(A)=(0,1]$ не е затворено во (Y,ρ). ♦

3.8. Последица. Функцијата $f: X \to Y$ е непрекината на X ако и само ако за секое множество $A\subseteq X$ важи $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека функцијата $f: X \to Y$ е непрекината. Имаме $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$, па затоа

$$A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Но, множеството $\overline{f(A)}$ е затворено, па од последица 3.5 следува дека множеството $f^{-1}(\overline{f(A)})$ е затворено и затоа

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)}),$$

од што следува

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = f(f^{-1}(\overline{f(A)})).$$

$\Leftarrow$. Обратно, нека претпоставиме дека $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, за секое множество $A \subseteq X$ и нека множеството F затворено во (Y,d). Да го разгледаме множеството $A = f^{-1}(F)$. Од претпоставката следува дека

$$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F,$$

па затоа

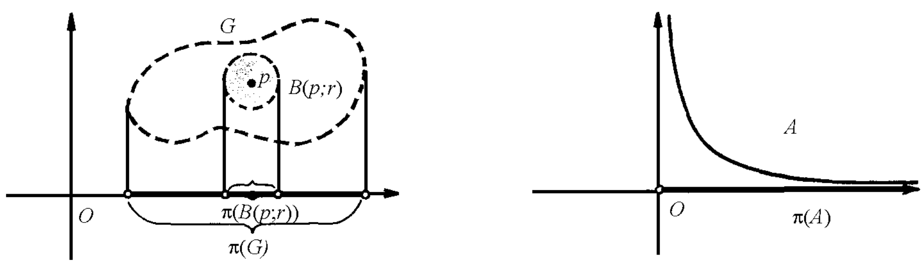
$$\overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(F) = A,$$

и како $A \subseteq \overline{A}$ добиваме $A = \overline{A}$, што значи дека множеството $A = f^{-1}(F)$ е затворено. Конечно, од последица 3.5 следува дека функцијата $f : X \to Y$ е непрекината. ♦

4. ОТВОРЕНИ И ЗАТВОРЕНИ ФУНКЦИИ. ХОМЕОМОРФИЗМИ

4.1. Дефиниција. Нека $(X,\rho),(Y,d)$ се метрички простори и $f : X \to Y$. За функцијата f ќе велиме дека е *отворена* ако сликата $f(G)$ на секое отворено множество G во X е отворено множество во Y.

За функцијата $g : X \to Y$ ќе велиме дека е *затворена* ако сликата $g(F)$ на секое затворено множество F во X е затворено множество во Y.



Цртеж 1

4.2. Пример. а) Да ја разгледаме функцијата $\pi : (\mathbf{R}^2, \rho_2) \to (\mathbf{R}, \rho)$ определена со $\pi((x,y)) = x$, за секој $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

Прво да забележиме дека сликата $\pi(B(p;r))$ на секоја отворена топка $B(p;r)$ е отворен интервал (цртеж 1). Затоа сликата $\pi(G)$ на секое отворено множество G во $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ содржи некој отворен интервал $\pi(B(p;r))$, што значи дека множеството $\pi(G)$ е отворено во $(\mathbf{R},\rho)$, т.е. функцијата π е отворена.

Од друга страна функцијата π не е затворена. Навистина, множеството $A=\{(x,y)\,|\,xy\geq 1,\,x>0\}$ е затворено, но сликата $\pi(A)=(0,+\infty)$ не е затворено.

б) Функцијата $g:(\mathbf{R},\rho)\to(\mathbf{R},\rho)$ определена со $g(x)=1$, за секој $x\in\mathbf{R}$ е затворена. Навистина, за секое множество $A\subseteq X$ множеството $g(A)=\{1\}$ е затворено, што значи дека функцијата g е затворена. Јасно, g не е отворена функција. ♦

4.3. Теорема. Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори, $f:X\to Y$ и $\mathcal{B}$ е база за X. Функцијата f е отворена ако множеството $f(B)$ е отворено за секој $B\in\mathcal{B}$.

Доказ. Нека G е отворено множество во X. Од дефиниција IX 13.1 следува дека $G=\bigcup_i B_i$, каде $B_i\in\mathcal{B}$. Според тоа, $f(G)=f(\bigcup_i B_i)=\bigcup_i f(B_i)$ и како за секој i множеството $f(B_i)$ е отворено добиваме дека $f(G)$ е унија на отворени множества во Y, па од теорема IX 7.8 *iii*) следува дека $f(G)$ е отворено множество, што значи дека функцијата f е отворена. ♦

4.4. Теорема. Нека $(X,\rho),(Y,d)$ се метрички простори, $f:X\to Y$ е инјекција и е отворена функција, $A\subseteq X$ и $f(A)=B$. Тогаш функцијата $f_A:A\to B$ е инјекција и е отворена.

Доказ. Јасно, f_A е инјекција. Нека $H\subseteq A$ е отворено подмножество во потпросторот (A,ρ_A). Според теорема IX 12.3 постои отворено подмножество G од X такво што $H=G\cap A$. Бидејќи f е инјекција добиваме

$$f_A(H)=f(G\cap A)=f(G)\cap f(A)=f(G)\cap B\,.$$

Но, функцијата f е отворена, па затоа множеството $f(G)$ е отворено во Y, што повторно според теорема IX 12.3 значи дека множеството $f_A(H)$ е отворено во потпросторот (B,d_B), т.е. функцијата $f_A:A\to B$ е отворена. ♦

4.5. Во натамошните разгледувања ќе ги користиме следните ознаки:

$\mathbf{C}(X,Y)=\{f:X\to Y\,|\,f$ е непрекината на $X\}$ и $\mathbf{C}(X)=\mathbf{C}(X,\mathbf{R})$.

Дефиниција. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори. За функцијата $f:X\to Y$ ќе велиме дека е *хомеоморфизам* ако *i*) f е биекција,

ii) $f \in \mathbf{C}(X,Y)$, и

iii) $f^{-1} \in \mathbf{C}(Y,X)$.

Притоа ќе велиме дека просторите (X,ρ) и (Y,d) се *хомеоморфни*.

4.6. Пример. а) Нека (X,ρ) и (Y,d) се дискретни метрички простори. Тогаш секоја функција $f: X \to Y$ е непрекината. Навистина, ако A е отворено множество во Y, тогаш од пример IX 7.4 следува дека множеството $f^{-1}(A)$ е отворено во X.

Според тоа, секоја функција од еден на друг дискретен метрички простор е непрекината, па затоа ако $f: X \to Y$, тогаш $f \in \mathbf{C}(X,Y)$ и $f^{-1} \in \mathbf{C}(Y,X)$. Конечно, за да дискретниот метрички простор (X,ρ) е хомеоморфен со дискретниот метрички простор (Y,d) потребно и доволно е функцијата f да е биекција.

б) Нека $a,b \in \mathbf{R}, a < b$. Метричките простори $([a,b],\rho)$ и $([0,1],\rho)$ се хомеоморфни. Навистина функцијата $f:[0,1] \to [a,b]$ определена со

$$f(x) = (b-a)x + a\ ,\ x \in [0,1]$$

е биекција и е непрекината. Јасно, инверзната функција $f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$ исто така е непрекината, па затоа f е хомеоморфизам.

в) Нека $X = [0,1)$ и $Y = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Дефинираме функција $f: X \to Y$ со

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), t \in [0,1)\,. \qquad (1)$$

Очигледно, функцијата f е биекција и е непрекината, (проверете!). Меѓутоа, инверзната функција f^{-1} не е непрекината бидејќи блиски точки на кружницата Y, на пример точките (1,0) и $(\cos 2\pi(1-\frac{1}{100}), \sin 2\pi(1-\frac{1}{100}))$ ги пресликува во оддалечени точки 0 и $1-\frac{1}{100}$ на сегментот X, (проверете!). Според тоа, непрекинатата биекција $f: X \to Y$ определена со (1) не е хомеоморфизам. ♦

4.7. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f: X \to Y$ е биекција. Следниве тврдења се еквивалентни:

i) f е хомеоморфизам,

ii) множеството U е отворено во (X,ρ) ако и само ако множеството $f(U)$ е отворено во (Y,d).

Доказ. $i) \Rightarrow ii)$. Нека f е хомеоморфизам и U е отворено множество во (X,ρ). Од $f^{-1} \in \mathbf{C}(Y,X)$ следува дека $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ е отворено множество во (Y,d). Понатаму, ако $f(U)$ е отворено множество во (Y,d), тогаш од $f \in \mathbf{C}(X,Y)$ следува дека U е отворено множество во (X,ρ).

$ii) \Rightarrow i)$. Обратно, нека f е биекција таква што множеството U е отворено во (X,ρ) ако и само ако множеството $f(U)$ е отворено во (Y,d). Нека V е произволно отворено множество во (Y,d). Тогаш $V = f(U)$, $U \subseteq X$, па затоа $U = f^{-1}(V)$ е отворено во (X,ρ), т.е. $f \in \mathbf{C}(X,Y)$. Ако U е произволно отворено множество во (X,ρ), тогаш $U = f^{-1}(V)$, $V \subseteq Y$, па затоа $V = f(U)$ е отворено множество во (Y,d), т.е. $f^{-1} \in \mathbf{C}(Y,X)$. Конечно, f е биекција, $f \in \mathbf{C}(X,Y)$ и $f^{-1} \in \mathbf{C}(Y,X)$, што значи дека f е хомеоморфизам. ♦

4.8. Коментар. Според теорема 4.7 хомеоморфизмот $f: X \to Y$ ги пресликува отворените множества од просторот X на отворени множества на просторот Y, и обратно. Затоа f не е само биекција меѓу просторите X и Y како множества точки, туку е биекција и меѓу отворените множества во овие простори.

4.9. Теорема. Нека (X,ρ), (Y,ρ') и (Z,ρ'') се метрички простор. Точни се следниве тврдења.

а) Идентичната функцијата $\mathrm{id}_X : X \to X$ е хомеоморфизам.

б) Ако $f: X \to Y$ е хомеоморфизам,, тогаш $f^{-1}: Y \to X$ е хомеоморфизам.

в) Ако $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ се хомеоморфизми, тогаш и композицијата $g \circ f$ е хомеоморфизам.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 4.7 и 2.10. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4.10. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор и нека

$$H(X) = \{f \mid f \text{ е хомеоморфизам од } X \text{ во } X\}.$$

Тогаш, $(H(X),\circ)$ е група, која ја нарекуваме *група хомеоморфизми на просторот* X.

Доказ. Од теорема 4.9 в) следува дека $(H(X),\circ)$ е групоид. Понатаму, за композицијата на функции важи асоцијативниот закон, па затоа $(H(X),\circ)$ е полугрупа со единица $I_X = \mathrm{id}_X$. Конечно, ако $f \in H(X)$, тогаш според теорема 4.9 б)

$f^{-1} \in H(X)$, што значи во полугрупата секој елемент е инверзибилен, односно $(H(X),\circ)$ е група. ♦

4.11. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори, $f: X \to Y$ е хомеоморфизам, (A,ρ_A) е потпростор од X и $f(A)=B$. Тогаш $f_A : A \to B$, каде f_A е рестрикцијата на f е хомеоморфизам од (A,ρ_A) во (B,d_B).

Доказ. Од $f(A)=B$ следува дека функцијата $f_A : A \to B$, каде f_A е рестрикцијата на f е биекција. Понатаму, според последица 3.4 функцијата f_A е непрекината. Нека G е отворено подмножество од A. Според теорема 4.4 функцијата f_A е отворена, па затоа множеството $f_A(G)=(f_A^{-1})^{-1}(G)$ е отворено, што значи дека функцијата f_A^{-1} е непрекината. Конечно, f_A е биекција, $f_A \in \mathbf{C}(A,B)$ и $f_A^{-1} \in \mathbf{C}(B,A)$, т.е. f_A е хомеоморфизам од (A,ρ_A) во (B,d_B). ♦

5. ИЗОМЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

5.1. Дефиниција. За два метрички простори (X,ρ) и (Y,d) ќе велиме дека се *изометрички*, ако постои биекција $f: X \to Y$ таква, што

$$d(f(x),f(t))=\rho(x,t), \text{ за секои } x,t \in X. \tag{1}$$

Притоа, за биекцијата f ќе велиме дека е *изометрија* од X на Y.

5.2. Пример. Нека (X,ρ) е дискретен метрички простор и нека (Y,d) е метричкиот простор во кој метриката е дефинирана со

$$d(x,y)=\begin{cases} 2, & \text{ако } x \neq y, \\ 0, & \text{ако } x = y, \end{cases}$$

и нека постои биекција $f: X \to Y$. Просторите (X,ρ) и (Y,d) не се изометрички бидејќи за секои $x,y \in X$, $x \neq y$ важи

$$d(f(x),f(y)) = 2 \neq 1 = \rho(x,y). \ ♦$$

5.3. Лема. Ако (X,ρ), (Y,d) се метрички простори и $f: X \to Y$ е изометрија, тогаш f е рамномерно непрекината на X.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Земаме $\delta = \varepsilon$ и добиваме дека за секои $x,y \in X$ за кои $\rho(x,y) < \delta$ важи

$$d(f(x),f(y)) = \rho(x,y) < \delta = \varepsilon,$$

што значи дека f е рамномерно непрекината на X. ♦

5.4. Теорема. а) Ако просторите (X,ρ) и (Y,d) се изометрички и просторите (Y,d) и (Z,ρ^*) се изометрички, тогаш просторите (X,ρ) и (Z,ρ^*) се изометрички.

б) Нека (X,ρ) е метрички простор и нека $\Im(X)$ е множеството изометрии од X на X. Тогаш, $(\Im(X),\circ)$ е некомутативна група, која ја нарекуваме *група изометрии* на X.

Доказ. а) Нека $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ се изометрии. Тогаш, функцијата $g\circ f:X\to Z$ е биекција и притоа важи

$$\begin{aligned}\rho^*((g\circ f)(x),(g\circ f)(y)) &= \rho^*(g(f(x)),g(f(y)))\\ &= d(f(x),f(y)) = \rho(x,y),\end{aligned}$$

т.е. просторите (X,ρ) и (Z,ρ^*) се изометрички.

б) Од а) следува дека $(\Im(X),\circ)$ е групоид. Понатаму, за композицијата на функции важи асоцијативниот закон, па затоа $(\Im(X),\circ)$ е полугрупа со единица $I_X=\mathrm{id}_X$. Конечно, ако $f\in\Im(X)$, тогаш f е биекција па затоа постои f^{-1}. Ако $f^{-1}(z)=x$ и $f^{-1}(y)=t$, тогаш, $z=f(x)$ и $y=f(t)$, па затоа

$$\rho(f^{-1}(z),f^{-1}(y))=\rho(x,t)=\rho(f(x),f(t))=\rho(z,y)\ ,$$

$f^{-1}\in\Im(X)$, што значи $(\Im(X),\circ)$ е група.

Ќе докажеме дека во општ случај групата $(\Im(X),\circ)$ не е комутативна. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ нека f е ротација околу координатниот почеток за агол од 90° и g е симетрија во однос на $x-$оската. Јасно, f и g се изометрии и притоа важи $f\circ g\neq g\circ f$ бидејќи

$$(f\circ g)(1,0)=f(g(1,0))=f(-1,0)=(0,-1) \text{ и}$$

$$(g\circ f)(1,0)=g(f(1,0))=g(0,1)=(0,1)\ .\ \blacklozenge$$

5.5. Забелешка. Од лема 5.3 и теорема 5.4 непосредно следува дека секоја изометрија е хомеоморфизам, што значи дека $\Im(X)\subseteq H(X)$, т.е. групата $(\Im(X),\circ)$ е подгрупа од групата $(H(X),\circ)$.

5.6. Теорема. Нека X е непразно множество, (Y,d) е метрички простор и $f:X\to Y$ е инјекција. Тогаш, со

$$\rho(x,y)=d(f(x),f(y))\text{, за секои } x,y\in X$$

е дефинирана метрика на X, т.е. (X,ρ) е метрички простор.

Доказ. Непосредно следува од тоа што d е метрика и f е инјекција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

5.7. Пример. Користејќи ја претходната теорема можеме да конструираме нови метрики на множеството $\mathbf{R}$. На пример, функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbf{R}$ е инјекција, па затоа согласно со претходната теорема со

$$\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$$

е определена метрика на $\mathbf{R}$.

Слично, функцијата $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со $g(x)=e^x$, $x\in\mathbf{R}$ е инјекција, па затоа со

$$\rho^*(x,y)=|e^x-e^y|$$

е определена метрика на $\mathbf{R}$. ♦

5.8. Лема. Нека (X,ρ) и (Y,d) и $f:X\to Y$ е изометрија. Тогаш за секој $a\in X$ и за секој $r>0$ множествата $B(a;r),\overline{B}(a;r)$ и $S(a;r)$ со f се пресликуваат во множествата $B(f(a);r),\overline{B}(f(a);r)$ и $S(f(a);r)$, соодветно.

Доказ. Ќе докажеме дека $a\in X$ и за секој $r>0$ важи

$$f(B(a;r))=B(f(a);r).$$

Нека $y\in f(B(a;r))$. Тогаш, постои $x\in B(a;r)$ таков што $y=f(x)$. Но, f е изометрија, па затоа

$$d(f(a),y)=d(f(a),f(x))=\rho(a,x)<r$$

т.е. $y\in B(f(a);r)$ и од произволноста на y следува $f(B(a;r))\subseteq B(f(a);r)$.

Нека $z\in B(f(a);r))$. Но, f е изометрија, што значи дека е биекција, па затоа постои $x\in X$ таков што $z=f(x)$ и притоа важи

$$\rho(a,x)=d(f(a),f(x))=d(f(a),z)<r,$$

т.е. $x\in B(a;r)$, па затоа $z=f(x)\in f(B(a;r))$. Од произволноста на z следува дека $B(f(a);r)\subseteq f(B(a;r))$ и како $f(B(a;r))\subseteq B(f(a);r)$ имаме

$$f(B(a;r))=B(f(a);r).$$

Равенствата $f(\overline{B}(a;r))=\overline{B}(f(a);r)$ и $f(S(a;r))=S(f(a);r)$ се докажуваат аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

5.9. Пример. а) Користејќи ја претходната лема ќе докажеме дека метричките простори $(\mathbf{R}^2,\rho_\infty)$ и $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ не се изометрички.

За точките $\mathbf{a}=(0,0)$ и $\mathbf{b}=(2,0)$ важи $\rho_\infty(\mathbf{a},\mathbf{b})=2$. Понатаму, во $(\mathbf{R}^2,\rho_\infty)$ важи

$$S_\infty(\mathbf{a};1)\cap S_\infty(\mathbf{b};1)=\{(1,t)\mid t\in[-1,1]\}.$$

Според тоа, ако постои изометрија f од $(\mathbf{R}^2, \rho_\infty)$ во $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$, тогаш треба да важи $\rho_2(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) = 2$ и сверите $S_\infty(f(\mathbf{a});1)$ и $S_\infty(f(\mathbf{b});1)$ да се сечат во непребројливо многу точки, што не е можно. Значи, метричките простори $(\mathbf{R}^2, \rho_\infty)$ и $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ не се изометрички.

б) Ќе докажеме дека просторите $(\mathbf{R}^2, \rho_\infty)$ и $(\mathbf{R}^2, \rho_1)$ се изометрички. Ќе докажеме дека функцијата $f : (\mathbf{R}^2, \rho_\infty) \to (\mathbf{R}^2, \rho_1)$ определена со

$$f(x, y) = (\tfrac{x+y}{2}, \tfrac{x-y}{2}), \text{ за секој } (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

е изометрија. Навистина, ако го искористиме равенството

$$\tfrac{1}{2}(|a+b| + |a-b|) = \max\{|a|, |b|\},$$

тогаш за секои $(x, y); (z, t) \in \mathbf{R}^2$ добиваме

$$\begin{aligned}\rho_1(f(x, y); f(z, t)) &= \rho_1((\tfrac{x+y}{2}, \tfrac{x-y}{2}); (\tfrac{z+t}{2}, \tfrac{z-t}{2}))\\ &= \tfrac{1}{2}(|x-z+y-t| + |x-z-(y-t)|)\\ &= \max\{|x-z|, |y-t|\} = \rho_\infty((x, y); (z, t)),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

6. ПРИРОДНИ ПРОЕКЦИИ

6.1. Дефиниција. Нека X и Y се произволни множества. Функциите $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ и $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ определени со равенствата

$$\mathrm{pr}_X(x, y) = x \text{ и } \mathrm{pr}_Y(x, y) = y, \tag{1}$$

ги нарекуваме *природни проекции* од $X \times Y$ на X и од $X \times Y$ на Y, соодветно.

6.2. Теорема. Нека (X, ρ), (Y, d) се метрички простори и нека на Декартовиот производ $X \times Y$ метриката ρ_p е определена со

$$\rho_p(z_1, z_2) = (\rho^p(x_1, x_2) + d^p(y_1, y_2))^{1/p}, \text{ за } p \geq 1 \tag{2}$$

или

$$\rho_\infty(z_1, z_2) = \max\{\rho(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}, \text{ за } p = \infty. \tag{3}$$

Тогаш природните проекции (1) се рамномерно непрекинати функции.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Ставаме $\delta = \varepsilon$ и добиваме дека за секои (x, y); $(x', y') \in X \times Y$ такви што $\rho_p((x, y); (x', y')) < \delta$, при $p \geq 1$ важи

$$\rho(\mathrm{pr}_X(x,y),\mathrm{pr}_X(x',y')) = \rho(x,x') \le \sqrt[p]{\rho^p(x,x') + d^p(y,y')}$$
$$= \rho_p((x,x');(y,y')) < \delta = \varepsilon,$$

а при $p=\infty$ важи

$$\rho(\mathrm{pr}_X(x,y),\mathrm{pr}_X(x',y')) = \rho(x,x') \le \max\{\rho(x,x'),d(y,y')\}$$
$$= \rho_\infty((x,x'),(y,y')\} < \delta = \varepsilon.$$

Според тоа, природната проекција $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ е рамномерна непрекината функција.

Аналогно се докажува дека и природната проекција $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ е рамномерна непрекината функција. ♦

6.3. Забелешка. Нека $(X_i,\rho_i),\, i=1,2,...,k$ се метрички простори. Според забелешка IX 14.4 со

$$\rho_p((x_1,...,x_k);(y_1,...,y_k)) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k} \rho_i^p(x_i,y_i)}\,,\ p \ge 1 \tag{4}$$

и

$$\rho_\infty((x_1,...,x_k);(y_1,...,y_k)) = \max\{\rho_i(x_i,y_i) \mid i=1,2,...,k\} \tag{5}$$

се дефинирани метрики на Декартовиот производ $X = X_1 \times ... \times X_k$. Понатаму, аналогно како во дефиниција 6.1. се дефинираат природните проекции

$$\mathrm{pr}_{X_i} : X_1 \times ... \times X_k \to X_i\,,\ i=1,2,...,k\,,$$

кои се рамномерно непрекинати функции. Доказот на последното тврдење е наполно аналоген на доказот на теорема 6.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

6.4. Пример. Нека $X=\mathbf{R}^m, Y=\mathbf{R}$ се метричките простори со обичните растојанија.

а) Непрекинатост по координати. Ако во забелешка 6.3 ставиме $X_k=\mathbf{R}$ $1 \le k \le m$, добиваме дека функцијата $\pi_k : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ дефинирана со

$$\pi_k(\mathbf{x}) = \pi_k(x_1,....,x_m) = x_k\,,$$

за $\mathbf{x}=(x_1,....,x_m) \in \mathbf{R}^m$ е рамномерно непрекината, што значи таа е непрекината.

б) Непрекинатост на полиноми. *Полином од* m *реални променливи* $x_1,....,x_m$ ја нарекуваме функцијата $P:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ определена со подредена $m-$ торка $(n_1,...,n_m)$ природни броеви и множество реални броеви

$$\{a_{i_1 i_2 ... i_m} \mid 0 \le i_j \le n_j\,,\ j=1,2,...,m\}$$

на следниов начин

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{\substack{0 \le i_j \le n_j \\ j=1,2,...,m}} a_{i_1 i_2 ... i_m} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_m^{i_m}$$

за $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m$. Од примерот под а) и теорема 2.5 следува дека функцијата $P : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ е непрекината.

в) Рационална функција од m **променливи.** Нека P и Q се два полиноми од m променливи и $A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid Q(\mathbf{x}) \ne 0\}$. Функцијата $S : A \to \mathbf{R}$ дефинирана со $S(\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})}$, $\mathbf{x} \in A$ ја нарековме *рационална функција од* m *реални променливи*. Од теорема 2.5 и пример под б) следува дека секоја рационална функција е непрекината во секоја точка од својата дефинициона област.

г) Нека $X = \mathbf{R}^2, Y = \mathbf{R}$ со обичните растојанија и да ја разгледаме функцијата $f : A \to \mathbf{R}$, $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbf{R}^2$ определена со

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}.$$

Според примерот в) и теорема 2.10 оваа функција е непрекината на A. Ќе докажеме дека на множеството A функцијата f не е рамномерно непрекината. Навистина, нека $0 \le \varphi < 2\pi$. Да ги разгледаме низите

$$\mathbf{x}_n = (x_n, y_n) = (\sqrt{1 - \tfrac{1}{2n}} \sin \varphi, \sqrt{1 - \tfrac{1}{2n}} \cos \varphi),\ n = 1,2,\dots \text{ и}$$

$$\mathbf{y}_n = (x_n', y_n') = (\sqrt{1 - \tfrac{2}{4n+1}} \sin \varphi, \sqrt{1 - \tfrac{2}{4n+1}} \cos \varphi),\ n = 1,2,\dots,$$

кои припаѓаат на множеството A. Бидејќи

$$\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = \left| \sqrt{1 - \tfrac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \tfrac{2}{4n+1}} \right| \to 0, \text{ кога } n \to \infty,$$

а

$$\left| f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n) \right| = \left| \sin 2n\pi - \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi) \right| = 1, \text{ за секој } n \in \mathbf{N}$$

добиваме дека за секој $\varepsilon \in (0,1)$ не постои $\delta > 0$ таков, што се исполнети условите од дефиниција за рамномерна непрекинатост. Според тоа, разгледуваната функција не е рамномерно непрекината.

д) Нека $X = \mathbf{R}^2, Y = \mathbf{R}$ со обичните растојанија и да ја разгледаме функцијата $f : A \to \mathbf{R}$, $A = \{(x, y) \mid |y| \le |x|, x \ne 0\} \subset \mathbf{R}^2$ определена со

$$f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}.$$

Според примерот в) и теорема 2.10 оваа функција е непрекината. Меѓутоа, функција не е рамномерно непрекината на A, бидејќи за низите

$$\mathbf{x}_n = (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}), \quad \mathbf{y}_n = (\tfrac{1}{n}, -\tfrac{1}{n}), \quad n = 1,2,3,...$$

важи

$$\rho_2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = \tfrac{2}{n} \to 0, \text{ кога } n \to \infty$$

и

$$\left| f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n) \right| = | \arcsin 1 - \arcsin(-1) | = \pi \text{, за секој } n \in \mathbf{N} .$$

Според тоа, за секој $\varepsilon \in (0, \pi)$ не постои $\delta > 0$ таков што се исполнети условите од дефиницијата за рамномерна непрекинатост, па затоа разгледуваната функција не е рамномерно непрекината. ♦

6.5. Лема. Нека X, Y и Z се произволни множества. За секоја функција $F : X \to Y \times Z$, постојат функции $f : X \to Y$ и $g : X \to Z$ такви, што

$$F(x) = (f(x), g(x)) \text{, за секој } x \in X . \tag{6}$$

Доказ. Нека $F : X \to Y \times Z$ е произволна функција. Функциите $f : X \to Y$ и $g : X \to Z$ определени со

$$f(x) = (\mathrm{pr}_Y \circ F)(x) \text{ и } g(x) = (\mathrm{pr}_Z \circ F)(x) \text{, } x \in X \text{ ,}$$

соодветно се добро дефинирани. Ќе докажеме дека важи (6).

Нека $x \in X$. Тогаш, постојат $y \in Y$ и $z \in Z$ такви што $F(x) = (y, z) \in Y \times Z$ и притоа важи

$$y = \mathrm{pr}_Y(y, z) = \mathrm{pr}_Y(F(x)) = (\mathrm{pr}_Y \circ F)(x) = f(x) \text{ и}$$

$$z = \mathrm{pr}_Z(y, z) = \mathrm{pr}_Z(F(x)) = (\mathrm{pr}_Z \circ F)(x) = g(x) .$$

Според тоа $F(x) = (y, z) = (f(x), g(x))$, за секој $x \in X$, т.е. важи (6). ♦

6.6. Лема. Нека (X, ρ_1), (Y, ρ_2) и (Z, ρ_3) се метрички простори и $F : X \to Y \times Z$, каде метриката на $Y \times Z$ е дефинирана со равенството (2) или со равенството (3).

а) Функцијата F е непрекината ако и само ако функциите f и g од лема 6.5 се непрекинати.

б) Функцијата F е рамномерно непрекината ако и само ако функциите f и g од лема 6.5 се рамномерно непрекинати.

Доказ. б) $\Rightarrow$. Нека F е рамномерно непрекината. Според теорема 6.2 природните проекции $\mathrm{pr}_Y : Y \times Z \to Y$ и $\mathrm{pr}_Z : Y \times Z \to Z$ се рамномерно непрекинати. Сега тврдењето следува од теорема 2.10.

$\Leftarrow$. Тврдењето ќе го докажеме во случајот кога метриката на $Y \times Z$ е дефинирана со равенството (3). Нека функциите f и g од лема 6.5 се рамномерно непрекинати и нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од рамномерната непрекинатост на f следува дека постои $\delta_1 > 0$ таков што за секои $x', x'' \in X$, за кои $\rho_1(x', x'') < \delta_1$

важи $\rho_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$, а од рамномерната непрекинатост на g следува дека постои $\delta_2 > 0$ таков, што за секои $x', x'' \in X$, за кои $\rho_1(x', x'') < \delta_2$ важи $\rho_3(g(x'), g(x'')) < \varepsilon$. Земаме $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и ако го искористиме равенството (4) добиваме дека за секои $x', x'' \in X$, за кои $\rho_1(x', x'') < \delta$ важи

$$\begin{aligned}\rho_\infty(F(x'), F(x'')) &= \rho_\infty((f(x'), g(x')), (f(x''), g(x''))) \\ &= \max\{\rho_2(f(x'), f(x'')), \rho_3(g(x'), g(x''))\} < \varepsilon,\end{aligned}$$

т.е. F е рамномерно непрекината функција.

а) Постапете аналогно како во доказот под б). ♦

6.7. Забелешка. Аналогно на лема 6.5 може да се докаже дека за произволни множества $X, X_1, ..., X_k$ и произволна функција $F : X \to X_1 \times ... \times X_k$ постојат функции $f_i : X \to X_i$, $i = 1, 2, ..., k$ такви, што

$$F(x) = (f_1(x), ..., f_k(x)) \text{, за секој } x \in X .$$

Притоа

$$f_i = \mathrm{pr}_{X_i} \circ F \text{ , } i = 1, 2, ..., k . \tag{7}$$

Понатаму, ако $(X_i, \rho_i), i = 1, 2, ..., k$ се метрички простори и со (4) или (5) е дефинирана метрика на $X_1 \times ... \times X_k$, тогаш според забелешка 6.3 природните проекции

$$\mathrm{pr}_{X_i} : X_1 \times ... \times X_k \to X_i \text{ , } i = 1, 2, ..., k$$

се рамномерно непрекинати функции. Сега, аналогно на лема 6.6 може да се докаже дека за произволни метрички простори (X, ρ), (X_i, ρ_i), $i = 1, 2, ..., k$ функцијата $F : X \to X_1 \times ... X_k$ е непрекината (рамномерно непрекината) ако и само ако функциите (7) се непрекинати (рамномерно непрекинати).

6.8. Теорема. Нека (X, ρ) е метрички простор и $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$, $1 \le p \le \infty$. Ако $A \subseteq X$, x_0 е точка на натрупување за A и $f : A \to \mathbf{R}^m$, тогаш постојат функции $f_i : A \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., m$ такви, што $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, за секој $x \in A$ и

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \to (p_1, p_2, ..., p_m) = \mathbf{p} \text{ , } x \to x_0 \text{ во } (\mathbf{R}^m, d)$$

ако и само ако $f_i(x) \to p_i$, $x \to x_0$ за секој $i = 1, 2, ..., m$. Функциите f_i, $i = 1, 2, ..., m$ ги нарекуваме *координатни функции* за функцијата f.

Доказ. Непосредно следува од забелешка 6.7, теорема 1.3 и пример IX 3.8. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

6.9. Последица. За метричките простори (X, ρ) и $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$, $1 \le p \le \infty$ функцијата $F : X \to \mathbf{R}^m$ е непрекината (рамномерно непрекината) ако и само ако функциите $f_i : X \to \mathbf{R}, i = 1, 2, ..., k$ од теорема 6.8 се непрекинати (рамномерно непрекинати).

Доказ. Непосредно следува од забелешка 6.7. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

7. ЕКВИВАЛЕНТНИ МЕТРИКИ

7.1. Дефиниција. Нека ρ и d се две метрики над исто множество X. Ќе велиме дека метриките ρ и d се *еквивалентни* ако за секој $x_0 \in X$ секоја отворена топка $B_\rho(x_0; r_1)$ во однос на метриката ρ содржи некоја отворена топка $B_d(x_0; r_2)$ во однос на метриката d и обратно, т.е. ако се исполнети условите

$$\forall x_0 \in X,\ \forall r_1 > 0,\ \exists r_2 > 0 \text{ таков што } B_d(x_0; r_2) \subseteq B_\rho(x_0; r_1), \text{ и} \tag{1}$$

$$\forall x_0 \in X,\ \forall r_2 > 0,\ \exists r_1 > 0 \text{ таков што } B_\rho(x_0; r_1) \subseteq B_d(x_0; r_2). \tag{2}$$

7.2. Лема. Ако метриките ρ_1 и ρ_2 еквивалентни и метриките ρ_2 и ρ_3 се еквивалентни, тогаш и метриките ρ_1 и ρ_3 се еквивалентни.

Доказ. Нека $x_0 \in X$ и $r_1 > 0$ се дадени. Метриките ρ_1 и ρ_2 се еквивалентни, па затоа постои $r_2 > 0$ таков што $B_{\rho_2}(x_0; r_2) \subseteq B_{\rho_1}(x_0; r_1)$. Понатаму, метриките ρ_2 и ρ_3 се еквивалентни, па од дефиниција 7.1 следува дека за $x_0 \in X$ и $r_2 > 0$ постои $r_3 > 0$ таков што $B_{\rho_3}(x_0; r_3) \subseteq B_{\rho_2}(x_0; r_2)$. Според тоа, за дадените $x_0 \in X$ и $r_1 > 0$ најдовме $r_3 > 0$ таков што $B_{\rho_3}(x_0; r_3) \subseteq B_{\rho_1}(x_0; r_1)$. Конечно, од произволноста на $x_0 \in X$ и $r_1 > 0$ следува дека за метриките ρ_1 и ρ_3 е исполнет условот (1) од дефиниција 7.1.

Аналогно се покажува дека за метриките ρ_1 и ρ_3 е исполнет и условот (2) од дефиниција 7.1, што значи дека метриките ρ_1 и ρ_3 се еквивалентни. ♦

7.3. Теорема. Нека (X, ρ) и (X, d) се метрички простори. Метриките ρ и d се еквивалентни ако и само ако функцијата $\mathrm{id}_X : (X, \rho) \to (X, d)$ определена со $\mathrm{id}_X(x) = x$, за секој $x \in X$ е хомеоморфизам.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека функција id_X е хомеоморфизам. Тоа значи, дека функцијата id_X е непрекината, па затоа од забелешка 2.4 следува дека за секој $x_0 \in X$ и за секој $r_2 > 0$ постои $r_1 > 0$ таков што

$$B_\rho(x_0; r_1) = \mathrm{id}_X(B_\rho(x_0; r_1)) \subseteq B_d(\mathrm{id}_X(x_0); r_2) = B_d(x_0; r_2),$$

т.е. исполнет е условот (2) од дефиниција 7.1. Понатаму, инверзната функција id_X^{-1} е непрекината, па затоа од забелешка 2.4 следува дека за секој $x_0 \in X$ и за секој $r_1 > 0$ постои $r_2 > 0$ таков што

$$B_d(x_0;r_2)=\mathrm{id}_X^{-1}(B_d(x_0;r_2))\subseteq B_\rho(\mathrm{id}_X^{-1}(x_0);r_1)=B_\rho(x_0;r_1),$$

т.е. исполнет е и условот (1) од дефиниција 7.1, што значи дека метриките ρ и d се еквивалентни.

$\Rightarrow$. Нека метриките ρ и d се еквивалентни. Да ја разгледаме идентичната функција $\mathrm{id}_X:(X,\rho)\to(X,d)$ определена со $\mathrm{id}_X(x)=x$. Нека $x_0\in X$ и $\varepsilon>0$ е дадено. Од условот (2) во дефиниција 7.1 следува дека постои $\delta>0$ таков што

$$\mathrm{id}_X(B_\rho(x_0;\delta))=B_\rho(x_0;\delta)\subseteq B_d(x_0;\varepsilon)=B_d(\mathrm{id}_X(x_0);\varepsilon),$$

што според забелешка 2.4 значи дека функцијата id_X е непрекината. Понатаму, од условот (1) во дефиниција 7.1 следува дека постои $\delta>0$ таков што

$$\mathrm{id}_X^{-1}(B_d(x_0;\delta))=B_d(x_0;\delta)\subseteq B_\rho(x_0;\varepsilon)=B_\rho(\mathrm{id}_X^{-1}(x_0);\varepsilon),$$

што според забелешка 2.4 значи дека функцијата id_X^{-1} е непрекината. Но, id_X е биекција, па според тоа id_X е хомеоморфизам. ♦

7.4. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f:X\to Y$ е биекција и нека ρ' е метриката на X, определена со

$$\rho'(x,y)=d(f(x),f(y)),\ \text{за секои}\ x,y\in X.$$

Метриката ρ' е еквивалентна со почетната метрика ρ на X ако и само ако f е хомеоморфизам.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека метриките ρ' и ρ се еквивалетни. Според теорема 7.3 функцијата $\mathrm{id}_X:(X,\rho)\to(X,\rho')$, определена со $\mathrm{id}_X(x)=x$, за секој $x\in X$ е хомеоморфизам. Значи, функцијата $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ е композиција на непрекинатата функција $\mathrm{id}_X:(X,\rho)\to(X,\rho')$ и изометријата $f:(X,\rho')\to(Y,d)$, па затоа е непрекината. Понатаму, функцијата $f^{-1}:(Y,d)\to(X,\rho)$ е композиција на изометријата $f^{-1}:(Y,d)\to(X,\rho')$ и непрекинатата функција $\mathrm{id}_X^{-1}:(X,\rho')\to(X,\rho)$, па затоа е непрекината и како f е биекција добиваме дека f е хомеоморфизам.

$\Leftarrow$. Нека f е хомеоморфизам, т.е. $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ и $f^{-1}:(Y,d)\to(X,\rho)$ се непрекинати. Функцијата $\mathrm{id}_X:(X,\rho)\to(X,\rho')$ е композиција на непрекинатата функција $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ и изометријата $f^{-1}:(Y,d)\to(X,\rho')$, па затоа е непрекината. Понатаму, функцијата $\mathrm{id}_X^{-1}:(X,\rho')\to(X,\rho)$ е композиција на изометријата $f:(X,\rho')\to(Y,d)$ и непрекинатата функција $f^{-1}:(Y,d)\to(X,\rho)$, па затоа е непрекината, што значи id_X е хомеоморфизам. Конечно, од теорема 7.3 следува дека метриките ρ' и ρ се еквивалетни. ♦

7.5. Пример. а) Метриките ρ и ρ^*, конструирани во пример 5.7 се еквивалентни на обичната метрика $d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbf{R}$. Навистина, пресликувањето $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbf{R}$ е биекција од $\mathbf{R}$ во $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, а пресликувањето $g(x)=e^x$, $x\in\mathbf{R}$ е биекција од $\mathbf{R}$ во $(0,\infty)$ и како овие пресликувања се хомеоморфизми, од теорема 7.4 следува дека ρ и ρ^* се еквивалентни со d. Конечно, од лема 7.2 следува дека метриките ρ и ρ^* се еквивалентни.

б) Во множеството $\mathbf{C}([0,1])$ да ги разгледаме метриките ρ_∞ и ρ_1 дефинирани во примерите IX 2.9 и IX 2.11, соодветно.

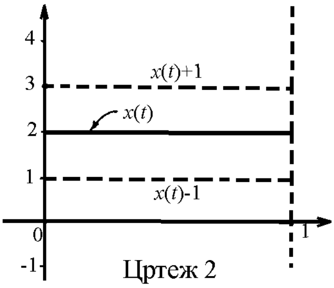
Нека $x\in\mathbf{C}([0,1])$ и $\delta>0$. Земаме $\varepsilon=\delta$. Ако $y\in B_{\rho_\infty}(x;\delta)$, тогаш

$$\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=\rho_\infty(x,y)<\delta,$$

и од својствата на супремумот и на Римановиот интеграл следува

$$\rho_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\,dt\le\int_0^1\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|\,dt<\int_0^1\delta dt=\delta=\varepsilon,$$

т.е. $y\in B_{\rho_1}(x;\varepsilon)$. Според тоа, за дадените $x\in\mathbf{C}([0,1])$ и $\delta>0$ најдовме $\varepsilon=\delta$ таков што $B_{\rho_\infty}(x;\delta)\subseteq B_{\rho_1}(x;\varepsilon)$, т.е. исполент е условот 1) од дефиниција 7.1.



Цртеж 2

Нека $x(t)=2$, $t\in[0,1]$ и $\varepsilon=1$, цртеж 2. Нека $\delta>0$ и да ја разгледаме функцијата

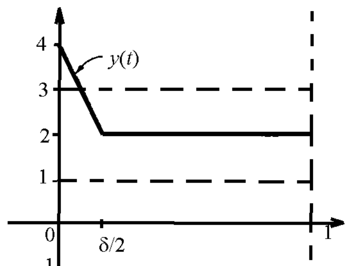
$$y(t)=\begin{cases}-\frac{4t}{\delta}+4, & 0\le t\le\frac{\delta}{2},\\ 2, & \frac{\delta}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

цртеж 3. Имаме,

$$\rho_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\,dt=\int_0^{\frac{\delta}{2}}(2-\tfrac{4t}{\delta})dt=\frac{\delta}{2}<\delta,$$

т.е. $y\in B_{\rho_1}(x;\delta)$. Но,

$$\begin{aligned}\rho_\infty(x,y)&=\sup\{|x(t)-y(t)|,t\in[0,1]\}\\&=\sup\{|2-\tfrac{4t}{\delta}|,t\in[0,\tfrac{\delta}{2}]\}=2>1,\end{aligned}$$



Цртеж 3

т.е. $y\notin B_{\rho_\infty}(x;\varepsilon)$. Според тоа, во $\mathbf{C}([0,1])$ постојат функција $x(t)=2, t\in[0,1]$ и реален број $\varepsilon=1$ таков што за секој $\delta>0$ важи $B_{\rho_1}(x;\delta)\not\subseteq B_{\rho_\infty}(x;\varepsilon)$, т.е. не е исполнет условот (2) од дефиниција 7.1, што значи дека метриките ρ_∞ и ρ_1 не се еквивалентни. ♦

7.6. Лема. Ако метриките ρ и ρ' се еквивалентни на множеството X и метриките d и d' се еквивалентни на множеството Y, тогаш

$$\mathbf{C}((X,\rho),(Y,d)) = \mathbf{C}((X,\rho'),(Y,d')) . \tag{6}$$

Доказ. Нека $f \in \mathbf{C}((X,\rho),(Y,d))$, т.е. функцијата $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ е непрекината. Според теорема 7.3 функцијата $f:(X,\rho')\to(Y,d')$ е композиција на непрекинати функции

$$(X,\rho') \xrightarrow{\mathrm{id}_X} (X,\rho) \xrightarrow{f} (Y,d) \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} (Y,d') ,$$

па од теорема 2.10 следува дека таа е непрекината, т.е. $f \in \mathbf{C}((X,\rho'),(Y,d'))$, односно

$$\mathbf{C}((X,\rho),(Y,d)) \subseteq \mathbf{C}((X,\rho'),(Y,d')) .$$

Обратната инклузија се докажува аналогно, што значи важи (6). ♦

7.7. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако множеството X е ограничено во метриката ρ, т.е. ако $d(X) < \infty$, тогаш ќе велиме дека метриката ρ е *ограничена*.

7.8. Лема. За секоја метрика ρ на множеството X со

$$d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\; x,y \in X \tag{3}$$

е определена метрика на X, која е ограничена и е еквивалентна на ρ.

Доказ. Според лема IX 1.5 со (3) е определена метрика d на X. Очигледно, $d(x,y) < 1$, за секои $x,y \in X$, т.е. метриката d е ограничена.

Нека $x_0 \in X$ и $r_1 > 0$ се дадени и да ставиме $r_2 = \frac{r_1}{1+r_1}$. Ако $x \in B_d(x_0;r_2)$, тогаш $d(x,x_0) < r_2$, па затоа

$$\frac{\rho(x,x_0)}{1+\rho(x,x_0)} < \frac{r_1}{1+r_1},\text{ т.е. } \rho(x,x_0) < r_1 .$$

Значи, $x \in B_\rho(x_0;r_1)$ и од произволноста на x следува $B_d(x_0;r_2) \subseteq B_\rho(x_0;r_1)$, т.е. важи условот (1) од дефиниција 7.1.

Нека $x_0 \in X$ и $r_2 \in (0,1)$ се дадени и да ставиме $r_1 = \frac{r_2}{1-r_2}$. Ако $x \in B_\rho(x_0;r_1)$, тогаш $\rho(x,x_0) < r_1 = \frac{r_2}{1-r_2}$, па затоа

$$\frac{\rho(x,x_0)}{1+\rho(x,x_0)} < r_2,\text{ т.е. } d(x,x_0) < r_2 .$$

Значи, $x \in B_d(x_0;r_2)$ и од произволноста на x следува $B_\rho(x_0;r_1) \subseteq B_d(x_0;r_2)$, т.е важи и условот (2) од дефиниција 7.1, па затоа метриките ρ и d се еквивалентни. ♦

7.9. Теорема. Нека ρ и d се еквивалентни метрики на множеството X. Точни се следниве тврдења.

а) Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во (X,ρ) ако и само ако таа конвергира во (X,d).

б) Точката x е точка на натрупување за множеството A во (X,ρ) ако и само ако таа е точка на натрупување за A во (X,d).

в) Множеството O е отворено во (X,ρ) ако и само ако тоа е отворено во (X,d).

г) Множеството F е затворено во (X,ρ) ако и само ако тоа е затворено во (X,d).

д) Множеството $\overline{A}$ е затворач на множеството A во (X,ρ) ако и само ако тоа е затворач на A во (X,d).

Доказ. а) $\Rightarrow$. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ во (X,ρ) и $\varepsilon > 0$ е дадено. Според теорема 7.3 функцијата $\mathrm{id}_X : (X,\rho) \to (X,d)$ е хомеоморфизам, па затоа постои $\delta > 0$ таков што за секој $y \in X$ таков, што $\rho(x,y) < \delta$ важи

$$d(x,y) = d(\mathrm{id}_X(x), \mathrm{id}_X(y)) < \varepsilon\,.$$

Но, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ во (X,ρ), па за δ постои природен број n_x таков, што кога $n > n_x$ важи $\rho(x,x_n) < \delta$, т.е. важи $d(x,x_n) < \varepsilon$. Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ во (X,d).

$\Leftarrow$. Аналогно се докажува дека од $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ во (X,d) следува $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ во (X,ρ).

б) Непосредно следува од теорема IX 6.4 и тврдењето под а).

в) Непосредно следува од теоремите 7.3 и 3.2.

г) Непосредно следува од теорема 7.3 и последица 3.5.

д) Непосредно следува од теорема IX 9.3 и тврдењето под б). ♦

8. РАМНОМЕРНО ЕКВИВАЛЕНТНИ МЕТРИКИ

8.1. Дефиниција. Нека ρ_1 и ρ_2 се две метрики над исто множество X. Ќе велиме дека метриките ρ_1 и ρ_2 се *рамномерно еквивалентни* ако постојат реални броеви $\lambda,\ \mu > 0$ такви што

$$\rho_1(x,y) \le \lambda \rho_2(x,y)\,, \text{ за секои } x,y \in X\,, \tag{1}$$

$$\rho_2(x,y) \le \mu\rho_1(x,y)\text{, за секои } x,y \in X\ . \tag{2}$$

8.2. Теорема. Ако метриките ρ_1 и ρ_2 рамномерно еквивалентни и метриките ρ_2 и ρ_3 се рамномерно еквивалентни, тогаш и метриките ρ_1 и ρ_3 се рамномерно еквивалентни.

Доказ. Метриките ρ_1 и ρ_2 рамномерно еквивалентни, па затоа постојат реални броеви $\lambda,\ \mu > 0$ такви, што се исполнети условите (1) и (2) од дефиниција 8.1. Понатаму, метриките ρ_2 и ρ_3 се рамномерно еквивалентни, па затоа постојат реални броеви $\alpha, \beta > 0$ такви што

$$\rho_2(x,y) \le \alpha\rho_3(x,y)\text{, за секои } x,y \in X\ , \tag{3}$$

$$\rho_3(x,y) \le \beta\rho_2(x,y)\text{, за секои } x,y \in X\ . \tag{4}$$

Конечно, ако ги искористиме условите (1) – (4) добиваме дека за броевите $\alpha\lambda,\ \beta\mu > 0$ важи

$$\rho_1(x,y) \le \lambda\rho_2(x,y) \le \lambda(\alpha\rho_3(x,y)) = (\lambda\alpha)\rho_3(x,y)\text{, за секои } x,y \in X\ ,$$

$$\rho_3(x,y) \le \beta\rho_2(x,y) \le \beta(\mu\rho_1(x,y)) = (\beta\mu)\rho_1(x,y)\text{, за секои } x,y \in X\ ,$$

што според дефиниција 8.1 значи, дека метриките ρ_1 и ρ_3 се рамномерно еквивалентни. ♦

8.3. Теорема. Нека ρ_1 и ρ_2 се две метрики над исто множество X. Ако метриките ρ_1 и ρ_2 се рамномерно еквивалентни, тогаш идентичните функции $\mathrm{id}_X : (X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ и $\mathrm{id}_X^{-1} : (X,\rho_2) \to (X,\rho_1)$ се рамномерно непрекинати.

Доказ. Нека реалните броеви $\lambda, \mu > 0$ се такви што се исполнети условите (1) и (2) од дефиниција 8.1. Ќе докажеме дека функцијата $\mathrm{id}_X : (X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ е рамномерно непрекинато. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено и да земеме $\delta = \frac{\varepsilon}{\mu}$. Тогаш, за секои $x,y \in X$ такви, што $\rho_1(x,y) < \delta$ важи

$$\rho_2(x,y) \le \mu\rho_1(x,y) < \mu\delta = \varepsilon\ ,$$

т.е. функцијата $\mathrm{id}_X : (X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ е рамномерно непрекината.

Аналогно се докажува дека функцијата $\mathrm{id}_X^{-1} : (X,\rho_2) \to (X,\rho_1)$ е рамномерно непрекината. ♦

8.4. Теорема. Ако метриките ρ_1 и ρ_2 над множеството X се рамномерно еквивалентни, тогаш тие се еквивалентни.

Доказ. Нека метриките ρ_1 и ρ_2 се рамномерно еквивалентни. Од теорема 8.3 следува дека идентичните функции $\mathrm{id}_X : (X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ и $\mathrm{id}_X^{-1} : (X,\rho_2) \to (X,\rho_1)$ се рамномерно непрекинати. Понатаму, според лема 2.7

тие се непрекинати и како id_X е биекција добиваме дека id_X е хомеоморфизам. Конечно, од теорема 7.2 следува дека метриките ρ_1 и ρ_2 се еквивалентни. ♦

8.5. Последица. Ако метриките ρ и ρ' се рамномерно еквивалентни на множеството X и метриките d и d' се рамномерно еквивалентни на множеството Y, тогаш е исполнето равенството

$$\mathbf{C}((X,\rho),(Y,d)) = \mathbf{C}((X,\rho'),(Y,d')) .$$

Доказ. Од теорема 8.4 следува дека метриките ρ и ρ' се еквивалентни на множеството X и метриките d и d' се еквивалентни на множеството Y. Сега тврдењето следува од лема 7.4. ♦

8.6. Последица. За секоја ограничена метрика ρ на множеството X ограничената метрика d од лема 7.8 е рамномерно еквивалентна на ρ.

Доказ. Нека метриката ρ е ограничена, т.е. постои $K > 0$ таков што

$$\rho(x,y) \leq K \text{, за секои } x,y \in X . \tag{5}$$

Тогаш

$$d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \geq \frac{\rho(x,y)}{1+K} \text{, за секои } x,y \in X ,$$

односно

$$\rho(x,y) \leq (1+K)d(x,y) \text{, за секои } x,y \in X . \tag{6}$$

Од друга страна

$$d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leq \rho(x,y) \text{, за секои } x,y \in X . \tag{7}$$

Конечно, од неравенствата (6) и (7) следува дека метриките ρ и d се рамномерно еквивалентни. ♦

8.7. Во последица 8.6 докажавме дека секоја ограничена метрика е рамномерно еквивалентна на ограничената метрика од лема 7.8. Логично е да се запрашаме дали може ограничена и неограничена метрика да бидат рамномерно еквивалентни. Во следнава лема ќе докажеме дека одговорот на поставеното прашање е негативен.

Лема. Ако ρ_1 е ограничена, а ρ_2 е неограничена метрика над множеството X, тогаш тие не се рамномерно еквивалентни.

Доказ. Метриката ρ_1 е ограничена, па затоа постои реален број $K > 0$ таков што е исполнет условот (5). Од друга страна, метриката ρ_2 не е ограничена, па затоа за секој $M > 0$ постојат точки $x_M, y_M \in X$ такви што $\rho_2(x_M, y_M) > M$. Ако метриките ρ_1 и ρ_2 се рамномерно еквивалентни, тогаш постои реален број $\mu > 0$ таков што е исполнет условот (2). Нека $M = K\mu$. Тогаш за точките $x_M, y_M \in X$ истовремено треба да се исполнети неравенствата

$$\rho_2(x_M, y_M) > M \text{ и } \rho_2(x_M, y_M) \le \mu\rho_1(x_M, y_M) \le \mu K = M ,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека ограничена и неограничена метрика не може да бидат рамномерно еквивалентни. ♦

8.8. Коментар. а) Во теорема 8.4 докажавме дека рамномерно еквивалентните метрики ρ и d над множество X се еквивалентни. Меѓутоа обратното тврдење не важи. Навистина, според лема 7.8 метриката ρ над множеството реални броеви $\mathbf{R}$ определена со $\rho(x,y) = |x-y|$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$, и метриката d над множеството реални броеви $\mathbf{R}$ определена со $d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$ се еквивалентни. Јасно, метриката ρ е неограничена, а од лема 7.8 следува дека метриката d е ограничена. Конечно, од лема 8.7 следува дека метриките ρ и d не се рамномерно еквивалентни.

б) Според теорема 8.3 од рамномерната еквивалентност на метриките ρ и d следува рамномерната непрекинатост на функциите id_X и id_X^{-1}. Меѓутоа, обратното тврдење не важи. Имено, ако ρ е неограничена метрика, а d е ограничената метрика од лема 7.8, тогаш според задача 38 функциите id_X и id_X^{-1} се рамномерно непрекинати, но според лема 8.7 метриките ρ и d не се рамномерно еквивалентни.

8.9. Последица. За произволни метрички простори (X,ρ) и (Y,d) сите метрики ρ_p на $X \times Y$ определени со равенствата

$$\rho_p(z_1,z_2) = (\rho^p(x_1,x_2) + d^p(y_1,y_2))^{1/p} \text{, за } p \ge 1 \tag{8}$$

и

$$\rho_\infty(z_1,z_2) = \max\{\rho(x_1,x_2), d(y_1,y_2)\} \text{, за } p = \infty . \tag{9}$$

се меѓусебно рамномерно еквивалентни.

Доказ. Согласно со дефиниција 8.1имаме:

i) од неравенствата (3) во теорема IX 14.3 следува дека метриките ρ_∞ и ρ_p, за секој $p > 1$, се рамномерно еквивалентни,

ii) од неравенствата (4) во теорема IX 14.3 следува дека метриките ρ_∞ и ρ_1 се рамномерно еквивалентни,

iii) од неравенствата (5) во теорема IX 14.3 следува дека метриките ρ_1 и ρ_p за секој $p > 1$, се рамномерно еквивалентни, и

iv) ако $p_1, p_2 > 1$, $p_1 \ne p_2$, тогаш според *i*) ρ_∞ и ρ_{p_1} се рамномерно еквивалентни и ρ_{p_2} и ρ_∞ се рамномерно еквивалентни, па од лема 8.2 следува дека метриките ρ_{p_1} и ρ_{p_2} се рамномерно еквивалентни. ♦

8.10. Забелешка. Во забелешка IX 14.4 а) видовме дека за произволни метрички простори $(X_i, \rho_i), i = 1, 2, ..., n$ со равенствата (6) и (7) на Декартовиот производ $X = X_1 \times ... \times X_n$ се дефинирани метрики d_∞ и d_p, $p \geq 1$. Понатаму, како во доказот на последица 8.9, користејќи ги неравенствата (8), (9) и (10) од забелешка IX 14.4 б), се докажува дека овие метрики се рамномерно еквивалентни.

8.11. Коментар. Во последица 8.9 докажавме дека метриките ρ_p, $1 \leq p \leq \infty$, на $X \times Y$, определени со равенствата (8) и (9) се меѓусебно рамномерно еквивалентни. Според тоа, имајќи ја предвид последица 8.5, кога зборуваме за непрекинатост на функција од $X \times Y$ на $X \times Y$ не е неопходно да се наведува бројот p, т.е. доволно е да докажеме дека функцијата е непрекината за едно p, $1 \leq p \leq \infty$, па од последица 8.5 ќе следува дека тоа важи за секој p, $1 \leq p \leq \infty$. Аналогно тврдење важи и во случај на рамномерно непрекинати функции од $X \times Y$ на $X \times Y$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8.12. Лема. За секој метрички простор (X, ρ) функцијата $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$ е рамномерно непрекината.

Доказ. Согласно со коментар 8.11 доволно е тврдењето да го докажеме за метриката ρ_1 на $X \times X$. Нека $\varepsilon > 0$ и $x = (x', x")$ и $y = (y', y")$ се произволни точки од $X \times X$. Земаме $\delta = \varepsilon$, па затоа кога $\rho_1(x, y) < \delta$ од лема IX 1.4 добиваме

$$|\rho(x) - \rho(y)| = |\rho(x', x") - \rho(y', y")| \leq \rho(x', y') + \rho(x", y") = \rho_1(x, y) < \delta = \varepsilon,$$

т.е. ρ е рамномерно непрекината функција. ♦

9. ПРОДОЛЖУВАЊЕ НА НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА НА ТЕИТЗ

9.1. Лема (Урисон). Нека (X, ρ) е метрички простор и A и B се непразни затворени дисјунктни подмножества од X. Тогаш, постои непрекината функција $f : X \to [0,1]$ таква што $f(a) = 0$, за секој $a \in A$ и $f(b) = 1$, за секој $b \in B$.

Доказ. Множествата A и B се непразни подмножества од X, па од лема 2.9 следува дека функциите $g : x \to \rho(x, A)$ и $h : x \to \rho(x, B)$ се рамномерно непрекинати, што според лема 2.7 значи дека тие се непрекинати функции. Понатаму, за секој $x \in X$ важи $g(x) + h(x) \neq 0$. Навистина, ако постои $x \in X$ таков што $g(x) + h(x) = 0$, тогаш $g(x) = h(x) = 0$, т.е. $\rho(x, A) = \rho(x, B) = 0$. Но, множествата A и B се затворени, па од лема IX 9.12 *ii*) следува $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$, што е противречи на $A \cap B = \varnothing$. Според тоа, функцијата $f : X \to [0,1]$ определена со

$$f(x)=\frac{g(x)}{g(x)+f(x)}=\frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)},\ x\in X$$

е добро дефинирана. Од теорема 2.5 следува дека таа е непрекината на X и притоа важи $f(a)=0$, за секој $a\in A$ и $f(b)=1$, за секој $b\in B$. ♦

9.2. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор.

а) Ако A и B се непразни затворени дисјунктни подмножества од X и $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $\alpha<\beta$. Тогаш, постои непрекината функција $h:X\to[\alpha,\beta]$ таква што

$$h(a)=\alpha\text{, за секој } a\in A \text{ и } h(b)=\beta\text{, за секој } b\in B.$$

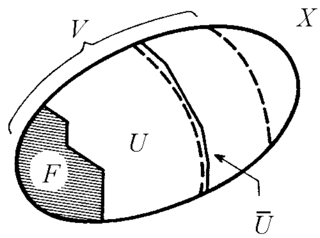
б) За секое затворено множество $F\subseteq X$ и секое отворено множество $V\subseteq X$, $F\subseteq V$, постои отворено множество $U\subseteq X$ такво што $F\subseteq U\subseteq\overline{U}\subseteq V$.

Доказ. а) Непосредно следува од теорема 2.10, лемата на Урисон и фактот дека функцијата $g:[0,1]\to[\alpha,\beta]$ определена со

$$g(t)=(\beta-\alpha)t+\alpha,\ t\in[0,1],$$

е непрекината и притоа важи

$$g(0)=\alpha \text{ и } g(1)=\beta.$$



Цртеж 4

б) Множеството $X\setminus V$ е затворено и како $F\subseteq V$ добиваме $F\cap X\setminus V=\varnothing$. Сега од лема 9.1 следува дека постои непрекината функција $f:X\to[0,1]$ таква што што $f(x)=0$, за секој $x\in F$ и $f(y)=1$, за секој $y\in X\setminus V$. Понатаму, според теорема 3.2 множеството $U=f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ е отворено, а според последица 3.5 множеството $f^{-1}([0,\frac{1}{2}])$ е затворено и притоа важи

$$U=f^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))\subseteq f^{-1}([0,\tfrac{1}{2}]).$$

Од последната инклузија имаме $\overline{U}\subseteq f^{-1}([0,\frac{1}{2}])$ и како

$$F\subseteq f^{-1}(\{0\})\subseteq f^{-1}([0,\tfrac{1}{2}))=U \text{ и } f^{-1}([0,\tfrac{1}{2}])\subseteq f^{-1}([0,1))\subseteq V$$

добиваме $F\subseteq U\subseteq\overline{U}\subseteq V$. ♦

9.3. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор, A е затворено подмножество од X, $c>0$ и $f:A\to[-c,c]$ непрекината реална функција. Тогаш, постои непрекината функција $f^*:X\to\mathbf{R}$ таква што

$$f^*(X)\subseteq[-\tfrac{c}{3},\tfrac{c}{3}], \tag{1}$$

$$|f(x)-f^*(x)|\leq\tfrac{2}{3}c,\ x\in A. \tag{2}$$

Доказ. Функцијата f е непрекината и множествата $[-c,-\frac{c}{3}]$ и $[\frac{c}{3},c]$ се затворени, па од последица 3.5. следува дека множествата

$$A_0 = f^{-1}([-c,-\tfrac{c}{3}]) \subseteq A,\ \ A_1 = f^{-1}([\tfrac{c}{3},c]) \subseteq A\,.$$

се затворени. Јасно, $A_0 \cap A_1 = \varnothing$.

Ако $A_0 \neq \varnothing$ и $A_1 \neq \varnothing$, тогаш од последица 9.2 следува дека постои непрекината функција $f^* : X \to [-\frac{c}{3},\frac{c}{3}]$ таква да $f^*(x) = -\frac{c}{3}$, за секој $x \in A_0$ и $f^*(x) = \frac{c}{3}$, за секој $x \in A_1$. Според тоа, функцијата f^* го задоволува условот (1). Понатаму, $f^*(x), f(x) \in [-c,-\frac{c}{3}]$, за секој $x \in A_0$, па затоа

$$|\, f(x) - f^*(x) \,| \leq \tfrac{2}{3}c \text{ , за секој } x \in A_0\,.$$

Аналогно се докажува дека (2) важи за секој $x \in A_1$. Конечно, ако $x \in A \setminus (A_0 \cup A_1)$, тогаш $f^*(x), f(x) \in [-\frac{c}{3},\frac{c}{3}]$, па затоа повторно важи (2).

Ако $A_0 = \varnothing$, тогаш лесно се гледа дека функцијата $f^* : X \to [-\frac{c}{3},\frac{c}{3}]$ таква да $f^*(x) = \frac{c}{3}$, $x \in X$ ги задоволува условите (1) и (2). Слично, ако $A_1 = \varnothing$, тогаш функцијата $f^* : X \to [-\frac{c}{3},\frac{c}{3}]$ таква да

$$f^*(x) = -\tfrac{c}{3},\ x \in X$$

ги задоволува условите (1) и (2). ♦

9.4. Теорема (Теитз). Нека (X,ρ) е метрички простор, A е затворено подмножество од X и $h : A \to [-1,1]$ е непрекината функција. Тогаш, постои непрекината функција $g : X \to [-1,1]$ таква што $g_{|A} = h$, т.е. g е продолжување на h на целиот простор X.

Доказ. Нека (X,ρ) е метрички простор, A е затворено подмножество од X и $h : A \to [-1,1]$ е непрекината функција. Ќе докажеме дека h може да се продолжи до непрекината функција $g : X \to [-1,1]$.

Со индукција по n ќе дефинираме функции $g_n : X \to \mathbf{R}$, $n = 0,1,2,...$ за кои важи

$$|\, g_n(x) \,| \leq \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n \text{ , за секој } x \in X \tag{3}$$

$$|\, h(a) - \sum_{i=0}^{n} g_i(a) \,| \leq (\tfrac{2}{3})^{n+1} \text{ , за секој } a \in A\,. \tag{4}$$

Ако во теорема 9.3 ставиме $f = h$ и $c = 1$, добиваме дека постои непрекината функција $f^* = g_0$ за која важат (3) и (4), т.е. таква што

$$|g_0(x)| \leq \tfrac{1}{3}, \text{ за секој } x \in X,$$

$$|h(a) - g_0(a)| \leq \tfrac{2}{3}, \text{ за секој } a \in A.$$

Нека претпоставиме дека сме конструирале функции $g_0, g_1, ..., g_{n-1}$ за кои се исполнети условите (3) и (4). Ако повторно ја примениме теорема 9.3, при што ставаме

$$f = h - \sum_{i=0}^{n-1} g_{i|A} : A \to \mathbf{R} \text{ и } c = (\tfrac{2}{3})^n$$

добиваме дека постои непрекината функција $f^* = g_n$ за која очигледно се исполнети условите (3) и (4).

Според тоа, постојат позитивни броеви

$$r_n = \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n, \ n = 0, 1, 2, ...$$

такви што

$$|g_n(x)| \leq \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n = r_n, \text{ за секој } x \in X$$

и како редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n$$

конвергира добиваме дека функционалниот ред $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ рамномерно конвергира на просторот X (види и теорема XV 3.5) и со формулата

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x), \ x \in X \tag{5}$$

е определена непрекината реална функција $g : X \to \mathbf{R}$. Притоа, за секој $x \in X$ важи

$$|g(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n = 1,$$

што значи $g : X \to [-1, 1]$. Конечно, ако во (4)земеме n да тежи кон бесконечност добиваме дека за секој $a \in A$ важи

$$|h(a) - g(a)| = \lim_{n \to \infty} |h(a) - \sum_{i=0}^{n} g_i(a)| \leq \lim_{n \to \infty} (\tfrac{2}{3})^{n+1} = 0$$

т.е. $g(a) = h(a)$, за секој $a \in A$. Значи, постои непрекината функција $g : X \to [-1, 1]$ таква што $g_{|A} = h$, т.е. g е продолжување на h на целиот простор X. ♦

9.5. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор, A е затворено подмножество од X и $h: A \to (-1,1)$ е непрекината функција. Тогаш, постои непрекината функција $g: X \to (-1,1)$ таква, што $g_{|A} = h$, т.е. g е продолжување на h на целиот простор X.

Доказ. Според теорема 9.4 постои непрекината функција $f: X \to [-1,1]$, која е продолжување на h на целиот простор, т.е. $f_{|A} = h$. Понатаму, според теорема 2.11 множеството $B = \{x \in X \mid |f(x)| = 1\}$ е затворено и како $h: A \to (-1,1)$ добиваме дека тоа е дисјунктно со A.

Јасно, ако $B = \varnothing$, тогаш $f(X) \subseteq (-1,1)$ и f е бараното продолжување g на h. Нека $B \neq \varnothing$. Множествата A и B се непразни затворени дисјунтни подмножества од X, па од лемата на Урисон следува дека постои непрекината функција $\varphi: X \to [0,1]$ таква што $\varphi(x) = 0$, за секој $x \in B$ и $\varphi(x) = 1$ за секој $x \in A$. Сега, од теорема 2.5 следува дека функцијата $g: X \to \mathbf{R}$ определена со формулата

$$g(x) = \varphi(x) f(x),\ x \in X, \tag{6}$$

е непрекината. Притоа, $g(X) \subseteq (-1,1)$. Навистина, според (6) имаме

$$|g(x)| = |\varphi(x)| \bullet |f(x)|$$

и ако $|f(x)| < 1$, тогаш од $|\varphi(x)| \leq 1$ следува $|g(x)| < 1$, а ако $|f(x)| = 1$, тогаш $x \in B$, т.е. $\varphi(x) = 0$ па затоа $|g(x)| = 0$. Конечно, ако $x \in A$, тогаш

$$g(x) = \varphi(x) f(x) = f(x) = h(x),$$

што значи $g_{|A} = h$, т.е. g е продолжување на h на целиот простор X. ♦

9.6. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор, A е затворено подмножество од X и $h: A \to \mathbf{R}$ е непрекината функција. Тогаш, постои непрекината функција $g: X \to \mathbf{R}$ таква што $g_{|A} = h$, т.е. g е продолжување на h на целиот простор X.

Доказ. Функцијата $\varphi: \mathbf{R} \to (-1,1)$ определена со формулата

$$\varphi(t) = \tfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbf{R},$$

е хомеоморфизам. Според последица 9.5 функцијата $\varphi \circ h: A \to (-1,1)$ има непрекинато продолжување $f: X \to (-1,1)$ такво што $f_{|A} = \varphi \circ h$. Но, како за секој $x \in A$ важи

$$g(x) = (\varphi^{-1} \circ f)(x) = (\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ h))(x) = ((\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ h)(x) = h(x).$$

добиваме дека функцијата $g = \varphi^{-1} \circ f: X \to \mathbf{R}$ е непрекинато продолжување на h ♦

9.7. На крајот од овој параграф во врска со продолжувањето на непрекинатите функции ќе ја докажеме следнава лема, која има поопшт карактер и која ни е потребна во натамошните разгледувања.

Лема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и A и B се затворени подмножества од X. Ако $f:A\to Y$ и $g:B\to Y$ се непрекинати функции такви што $f(x)=g(x)$, за секој $x\in A\cap B$, тогаш функцијата $h:A\cup B\to Y$ определена со

$$h(z)=\begin{cases} f(z), & z\in A,\\ g(z), & z\in B,\end{cases}$$

е непрекинато продолжување на функциите f и g.

Доказ. Нека F е затворено подмножество од Y. Функцијата f е непрекината, па од последица 3.5 следува дека множеството $f^{-1}(F)$ е затворено во потпросторот A. Според теорема 12.4 постои затворено множество F' во просторот X такво што $f^{-1}(F)=F'\cap A$. Но, множествата F' и A се затворени во X, па затоа $f^{-1}(F)$ е затворено во X. Аналогно се докажува дека множеството $g^{-1}(F)$ е затворено во X, па затоа множеството $h^{-1}(F)=f^{-1}(F)\cup g^{-1}(F)$ е затворено во X, што значи дека функцијата h е непрекината. ♦

10. ЗАДАЧИ

1. Докажете, дека за функцијата $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ важи

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1,$$

и дека $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не постои.

2. Дали постои границата $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$?

3. Пресметајте ги границите

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{x^2y^2}$;

в) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1-xy)}{xy}$; г) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{e^{xy-1}-1}{x^2y^2-1}$.

4. Определете кои од последователните граници постојат, а потоа пресметајте ги истите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$, $\quad\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{x+y^2}{x^2+y}$, $\quad\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+y^2}{x^2+y}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(x+y\sin\frac{1}{x})$, $\quad\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y\sin\frac{1}{x})$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$, $\quad\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$.

5. Пресметајте ги границите

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; $\quad$ б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$;

в) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$; $\quad$ г) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

6. Нека $(X,\rho_1),(Y,\rho_2)$ и (Z,ρ_3) се метрички простори, $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ и x_0 е точка на натрупување на X. Докажете, дека ако функцијата g е непрекината во точката $y_0=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, тогаш $g(y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))$

7. Нека функцијата $F:\mathbf{C}([0,2\pi])\to\mathbf{R}^2$ е определено со

$$F(x)=(\int_0^{2\pi}x(t)\cos t dt,\int_0^{2\pi}x(t)\sin t dt),\ x\in\mathbf{C}([0,2\pi]).$$

Најдете $F(\mathbf{C}([0,2\pi]))$.

8. Нека пресликувањето $F:\mathbf{C}([0,1])\to\mathbf{R}^3$ е определено со

$$F(x)=(\int_0^1 tx(t)dt,\int_0^1 t^2x(t)dt,\int_0^1 t^3x(t)dt),\ x\in\mathbf{C}([0,1]).$$

Најдете $F(\mathbf{C}([0,1]))$.

9. Нека D е затворено подмножество од $\mathbf{R}^m$, $f\in\mathbf{C}(D)$ и да претпоставиме дека за секоја низа $\{\mathbf{x}_n\mid n\ge 1\}\subseteq D$ таква што $\rho_2(\mathbf{x}_n,\mathbf{o})\to\infty$, кога $n\to\infty$ важи $f(\mathbf{x}_n)\to\infty$, кога $n\to\infty$. Докажете, дека постои $\mathbf{x}^*\in D$ таков, што за секој $\mathbf{x}\in D$ важи $f(\mathbf{x}^*)\le f(\mathbf{x})$.

10. Нека $f\in\mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{R})$ и постои $\lambda<1$ таков, што за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $|f'(x)|<\lambda$. Докажете, дека функцијата $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ определена со

$$g(x,y)=(x+f(y),y+f(x))$$

е биекција.

11. Нека функцијата $f : A \to \mathbf{R}$, каде $A \subset \mathbf{R}^2$ е околина на точката (0,0) и нека

$$f(tx, ty) = f(x, y), \text{ за } t \neq 0$$

(f е *хомогена функција од нулти ред*). Докажете дека:

a) За секоја точка $(x_0, y_0) \in A$ постои низа точки (x_n, y_n) која конвергира кон (0,0), таква што $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$.

b) Ако $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ постои, тогаш $f = \text{const}$.

12. Нека E е подмножество од метричкиот простор (X, ρ) и нека $\chi_E : X \to \mathbf{R}$ е *карактеристичната функција* на множеството E, т.е. функцијата определена со формулата

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E \\ 1, & x \in E. \end{cases}$$

Докажете, дека функцијата χ_E е непрекината ако и само ако множеството E е истовремено и отворено и затворено во X.

13. Нека (X, ρ) и (Y, d) се метрички простори. Докажете, дека функцијата $f : X \to Y$ е непрекината ако и само ако за секој $x \in X$ и за секое множество $B \subset X$ од $\rho(x, B) = 0$ следува $d(f(x), f(B)) = 0$.

14. Нека $X = ([0,1], \rho)$ и $Y = (\mathbf{C}([0,1]), \rho_p), 1 \leq p \leq \infty$. Функцијата $f : X \to Y$ е определена со: $f(t) = f_t$, за секој $t \in [0,1]$, каде $f_t(x) = x^t$, за секој $x \in [0,1]$. Дали за некој p функцијата f е непрекината? А дали е рамномерно непрекината?

15. Докажете дека за секој $i = 1,2,3,...$ проекцијата $p_i : l^2 \to \mathbf{R}$ определена со $p_i : (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto x_i$, $(x_1, x_2, x_3, ...) \in l^2$ е непрекината функција,.

16. Нека (X, ρ) е метрички простор. Докажете дека функцијата $f : X \to I^\infty \subset l^2$ е непрекината ако и само ако за секој $i \in \mathbf{N}$ функцијата $p_i \circ f : X \to \mathbf{R}$, каде p_i е проекцијата од претходната задача, е непрекината.

17. Нека (X, ρ) е метрички простор и $x_0 \in X$. Докажете, дека функциите

а) $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{[\rho(x_0, x)]^n}{n!}$ б) $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\rho(x, x_0)}{1+\rho(x, x_0)}$

се непрекинати.

18. Нека (X, ρ) е метрички простор и $x_i \in X, i = 1,2,...,n$. Докажете, дека функцијата $f : X \to \mathbf{R}$ определена со $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} [\rho(x, x_i)]^2$ е непрекината.

19. Нека $X=(\mathbf{C}([0,1]),\rho_\infty)$. Докажете, дека функцијата $F:\mathbf{C}([0,1])\to\mathbf{R}$ определена со

$$(Ff)(x)=\int_0^{1/2} f(x)dx-\int_{1/2}^{1} f(x)dx$$

е непрекината на X и $\sup\{|F(f)|, f\in M\}=1$ каде што

$$M=\{f\in\mathbf{C}([0,1])\mid \max_{x\in[0,1]}|f(x)|\le 1\},$$

но не постои $f_0\in M$ таков, што $F(f_0)=1$.

20. Нека $X=\mathbf{C}([0,1],\rho_\infty)$. Докажете, дека функцијата $F:X\to X$ определена со

$$(Ff)(x)=\int_0^1 \sin xyf(y)dy,\quad f\in\mathbf{C}([0,1]),\ x\in[0,1]$$

е рамномерно непрекината.

21. Нека $X=\mathbf{C}([0,1],\rho_\infty)$ и функцијата $F:\mathbf{C}([0,1])\to\mathbf{R}$ е определена со

$$(Ff)(x)=\min\{f(x)\mid x\in[0,1]\}.$$

Докажете, дека F е непрекината.

22. Докажете, дека функцијата $F:\mathbf{C}([0,1])\to l^2$ определена со

$$F(f)=\{\tfrac{f(1/n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$$

е непрекината.

23. Докажете, дека фунцијата $F:l^1\to l^2$ определена со

$$F(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\{\sqrt{|x_n|}\}_{n=1}^{\infty}$$

е непрекината.

24. За секоја непрекината функција $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ ставаме

$$F(f)=\int_0^1 x^2[f(x)]^2dx.$$

Дали вака дефинираната функција $F:(C([0,1]),\rho_2)\to\mathbf{R}$ е непрекината? А, дали е рамномерно непрекинато?

25. Нека $(\mathbf{C}([0,2]),\rho_p)$, $1\le p\le\infty$ и функцијата $A:\mathbf{C}([0,2])\to\mathbf{C}([0,2])$ е определена со $A(x(t))=t^2x(t)$, $t\in[0,2]$, за секој $x\in\mathbf{C}([0,2])$.

    1) Докажете, дека функцијата A е непрекината.
    2) Нека $X=A(\mathbf{C}([0,2]))$. Докажете дека множеството X не е затворено во просторот $(\mathbf{C}([0,2]),\rho_p)$. Најдете го затворањето на X во $(\mathbf{C}([0,2]),\rho_p)$.

26. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и нека $(X\times Y,\rho_p), 1\le p\le\infty$ е нивниот Декартов производ. Во множествата $\mathcal{F}_B(X)$, $\mathcal{F}_B(Y)$ и $\mathcal{F}_B(X\times Y)$ да ги разгледаме Хауздорфовите метрики (задача IX 17) и во производ $\mathcal{F}_B(X)\times\mathcal{F}_B(Y)$ соодветната $p-$ метрика.

   1) Докажете, дека функцијата $f:\mathcal{F}_B(X)\times\mathcal{F}_B(Y)\to\mathcal{F}_B(X\times Y)$ определена со $f(A,B)=A\times B$ е непрекината инјекција.
   2) Дали множеството $f(\mathcal{F}_B(X)\times\mathcal{F}_B(Y))$ е отворено (затворено) во просторот $\mathcal{F}_B(X\times Y)$.

27. Нека (X,ρ), (Y,d) и (Z,d') се метрички простори, $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ се функции и f е непрекината сурјекција. Докажете, ако $g\circ f$ е отворена функција, тогаш g е отворена функција.

28. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и функцијата $f:X\to Y$ е непрекината. Докажете, дека:

   1) За секој $\varepsilon>0$ постои позитивна непрекината функција $\delta:X\to\mathbf{R}$ таква што $f(B_\rho(x;\delta(x)))\subseteq B_d(f(x);\varepsilon)$, за секој $x\in X$.
   2) Постои таква позитивна непрекината функција $\delta:X\times(0,\infty)\to\mathbf{R}$ таква што $f(B_\rho(x;\delta(x;\varepsilon)))\subseteq B_d(f(x);\varepsilon)$, за секој $x\in X$ и секој $\varepsilon>0$.

29. Нека $\mathbf{Z}_n=\{0,1,2,...,n-1\}$, $n>1$ и множеството $\mathbf{Z}_n^{\mathbf{N}}$ да го снабдиме со метриката на Бер. Функцијата $f:\mathbf{Z}_n^{\mathbf{N}}\to\mathbf{R}$ е определена со

$$f(t_1,t_2,t_3,...)=\sum_{k=1}^{\infty}t_k n^{-k} \text{, за секој } (t_1,t_2,t_3,...)\in\mathbf{Z}_n^{\mathbf{N}}.$$

Докажете, дека функцијата f е непрекината, f е инјекција и $f(\mathbf{Z}_n^{\mathbf{N}})=[0,1]$.

30. Нека X е произволно непразно множество и множествата $X^{\mathbf{N}}$ и $(X\times X)^{\mathbf{N}}$ да ги снабдиме со соодветните метрики на Бер. Докажете, дека просторите $X^{\mathbf{N}}$ и $(X\times X)^{\mathbf{N}}$ се хомеоморфни.

31. Нека X и Y се произволни непразни множества и множествата $X^{\mathbf{N}}$, $Y^{\mathbf{N}}$ и $(X\times Y)^{\mathbf{N}}$ да ги снабдиме со соодветните метрики на Бер. Докажете, дека просторот $(X\times Y)^{\mathbf{N}}$ е изометричен со Декартовиот производ $(X^{\mathbf{N}}\times Y^{\mathbf{N}},\rho_\infty)$.

32. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\delta:X\to X\times X$ е таканаречената *дијагонална функција* определена со $\delta(x)=(x,x)$, за секој $x\in X$ и $\delta(X)=\Delta=\{(x,x)\,|\,x\in X\}$ е дијагоналата на множеството $X\times X$. Докажете, дека $\delta:X\to\Delta\subseteq X\times X$ е хомеоморфизам.

33. Нека функцијата $f: X \to \mathbf{R}$ е определена на множеството $X \subset \mathbf{R}^n$. Функцијата $\omega(\delta; f; X)$ определена со

$$\omega(\delta; f; X) = \sup_{\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \le \delta} [f(\mathbf{x}'') - f(\mathbf{x}')], \quad \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$$

ја нарекуваме *модул на непрекинатост* на функцијата f. За модулот на непрекинатост често пати се користи една од ознаките $\omega(\delta; f)$ или $\omega(\delta)$.

a) Докажете, дека $\omega(\delta; f; X) = \sup\limits_{\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \le \delta} |f(\mathbf{x}'') - f(\mathbf{x}')|, \quad \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$.

b) Докажете, дека од $0 < \delta_1 < \delta_2$ следува $\omega(\delta_1) \le \omega(\delta_2)$.

34. Докажете, дека функцијата f, определена на множеството $X \subset \mathbf{R}^n$, е рамномерно непрекината ако и само ако $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega(\delta; f; \mathbf{X}) = 0$.

35. Нека f е ограничена функција, определена на множеството $X \subset \mathbf{R}^n$ и нека $\mathbf{x}_0 \in X$, $\delta > 0$ и $V_\delta = B(\mathbf{x}_0; \delta)$. Ставаме $M_\delta = \sup\limits_{\mathbf{x} \in V_\delta \cap X} f(\mathbf{x})$, $m_\delta = \inf\limits_{\mathbf{x} \in V_\delta \cap X} f(\mathbf{x})$. Очигледно, дека M_δ е нерастечка, а m_δ е неопаѓачка функција од δ, па затоа разликата $M_\delta - m_\delta$ е нерастечка функција од δ (докажете!). Според тоа, границата $\lim\limits_{\delta \to 0^+} (M_\delta - m_\delta) = \omega(\mathbf{x}^{(0)})$ постои и истата ја нарекуваме *осцилација на функцијата f во точката* $\mathbf{x}_0$.

a) Докажете, дека функцијата f определена на затворено и ограничено множество $X \subset \mathbf{R}^n$ е непрекината во точката во точката $\mathbf{x}_0 \in X$ ако и само ако нејзината осцилација во точката $\mathbf{x}_0$ е еднаква на нула.

b) Нека $E \subset \mathbf{R}^n$ е затворено и ограничено множество и $\lambda > 0$. Тогаш, множеството $E_\lambda = \{\mathbf{x}: \ \mathbf{x} \in X, \ \omega(\mathbf{x}) \ge \lambda\}$ е затворено. Докажете!

36. Нека (X, ρ), (Y, d) и (Z, d') се метрички простори, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ се непрекинати функции и f е сурјекција. Докажете, $g \circ f$ е хомеоморфизам ако и само ако f и g се хомеоморфизми.

37. Нека $(\mathbf{C}([a,b), \rho_p)$, $1 \le p \le \infty$ и $c \in [a,b]$. Функцијата $f_c: \mathbf{C}([a,b]) \to \mathbf{R}$ е определена со $f_c(x) = x(c)$, за секој $x \in \mathbf{C}([a,b])$. Дали функцијата f_c е непрекината или рамномерно непрекината за некоја метрика $\rho_p, 1 \le p \le \infty$.

38. Нека (X, ρ) е метрички простор. Според лема 7.8 со $d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $x, y \in X$ е определена метрика на X. Докажете, дека функциите $\mathrm{id}_X: (X, \rho) \to (X, d)$ и $\mathrm{id}_X^{-1}: (X, d) \to (X, \rho)$ се рамномерно непрекинати.

39. Нека $(\mathbf{C}([a,b),\rho_p)$, $1\le p\le\infty$ и $\mathbf{P}([a,b])$ е потпросторот полиноми. Функцијата $f:\mathbf{P}([a,b])\to\mathbf{P}([a,b])$ е определена со $f(x(t))=x'(t)$, за секој $x\in\mathbf{P}([a,b])$. Докажете, дека функцијата f не е непрекината.

40. Нека $f\in\mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$ и за некој $a\in\mathbf{R}$ множеството $\{\mathbf{x}\mid f(\mathbf{x})\le a\}$ е непразно и ограничено. Докажете, дека функцијата f на $\mathbf{R}^m$ има минимум.

41. Нека $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\subset\mathbf{R}^2$ и $f:S\to\mathbf{R}$ е непрекината функција. Докажете, дека постои $(x_0,y_0)\in S$ таква, што $f(x_0,y_0)=f(-x_0,-y_0)$.

42. Докажете, дека функцијата $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x,y,z,t)=\cos(x^2+y^2+z^2+t^2)\text{, за секој }(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$$

не е рамномерно непрекината.

43. Докажете, дека ако функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ не е рамномерно непрекината, тогаш и функцијата $\varphi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ определена со $\varphi(x,y,z)=f(x+y+z)$ не е рамномерно непрекината.

44. Докажете, дека со формулата $d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ е дефинирана метрика на $\mathbf{R}$ која е еквивалентна на обичната метрика на $\mathbf{R}$.

45. Нека (X,ρ) е метрички простор. Докажете, дека со $d(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$, $x,y\in X$ е зададена метрика на X која е еквивалентна на метриката ρ.

46. Нека (X_i,d_i), $i=1,2,3,...$ е низа метрички простори такви што $d(X_i)\le 1$, за $i=1,2,3,...$ и $X=X_1\times X_2\times X_3\times...$. Докажете, дека со формулите

$$d_\infty(x,y)=\sup\{d_i(x_i,y_i)\mid i=1,2,3,...\},\ x=(x_1,x_2,x_3,...)\text{ и }y=(y_1,y_2,y_3,...)\text{ и}$$

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i},\ x=(x_1,x_2,x_3,...)\text{ и }y=(y_1,y_2,y_3,...)$$

се дефинирани метрика на X, кои во општ случај не се меѓусебно еквивалентни.

47. Нека (X,ρ) е метрички простор, $G\subseteq X$ е отворено множество и $x_0\in G$. Докажете, дека постои метрика d со следниве својства:
   1) метриките d и ρ се еквивалентни и
   2) единечната топка $B_d(x_0;1)$ во однос на метриката d е множеството G.

48. Нека d и d' се две метрики на множеството X со својство дека за секое множество $A\subseteq X$ и за секоја точка $x\in X$ условот $d(x,A)=0$ е еквивалентен на условот $d'(x,A)=0$. Докажете, дека метриките d и d' се еквивалентни.

49. Докажете, дека за секој $m \in \mathbf{N}$ постојат множество A кое не е локално затворено во $\mathbf{R}^m$, непрекината функција $f : A \to \mathbf{R}$ и точка $a \in A$ такви што за ниедно отворено множество U кое ја содржи точката a функцијата $f_{|U \cap X}$ не може да се продолжи до непрекината функција на множеството U. Дали може да се конструира таква функција f и да се најдете таква точка $a \in A$ за секое множество A, кое не е локално затворено во $\mathbf{R}^m$?

50. Докажете, дека метриките d и d' на множеството X се еквивалентни ако и само ако за секоја низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во X и точка $x \in X$ условот $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ е еквивалентен со условот $\lim_{n\to\infty} d'(x_n, x) = 0$.

51. Нека ρ и d се еквивалентни метрики на множеството X. Докажете, дека постои позитивна непрекината функција $\delta : X \times (0,\infty) \to \mathbf{R}$, во однос на ρ или d, таква што за секој $x \in X$ и за секој $\varepsilon > 0$ важи
$$B_\rho(x; \delta(x,\varepsilon)) \subseteq B_d(x;\varepsilon) \text{ и } B_d(x; \delta(x,\varepsilon)) \subseteq B_\rho(x;\varepsilon).$$

52. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A, B \subseteq X$ се непразни затворени дисјунктни множества. Докажете, дека постои непрекината функција $f : X \to [0,1]$ таква што $f^{-1}(\{0\}) = A$ и $f^{-1}(\{1\}) = B$.

53. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори, множеството $A \subseteq X$ е затворено и $f : A \to Y$ е непрекината функција. Докажете, дека постои непрекинато продолжување $g : X \to Y$, $g_{|A} = f$ ако е:

а) $Y = \mathbf{R}^m$, б) $Y = I^\infty$ е Хилбертовиот квадар,
в) $Y = Z^m$, $Z = [0,1]$.

XI ГЛАВА

СЕПАРАБИЛНОСТ

1. ГУСТИ МНОЖЕСТВА

1.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За множеството A ќе велиме дека е *секаде густо* во множеството B ако за секој $x \in B$ и за секој $\varepsilon > 0$ постои $y \in A$ таков, што $\rho(x,y) < \varepsilon$.

1.2. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори. Ако множеството A е секаде густо во X и множеството B е секаде густо во Y, тогаш, множеството $A \times B$ е секаде густо во метричкиот просторот (Z,ρ_p) каде $Z = X \times Y$ и

$$\rho_p(z_1,z_2) = \sqrt[p]{\rho^p(x_1,x_2) + d^p(y_1,y_2)}, \; p \ge 1, \tag{1}$$

$$\rho_\infty(z_1,z_2) = \max\{\rho(x_1,x_2), d(y_1,y_2)\}, \; p = \infty, \tag{2}$$

за секои $z_1 = (x_1,y_1) \in Z$ и $z_2 = (x_2,y_2) \in Z$.

Доказ. Нека, $z = (a,b)$ е произволна точка од $Z = X \times Y$ и $\varepsilon > 0$ е дадено.

а) Нека $p \ge 1$. Бидејќи A е секаде густо подмножество од (X,ρ) постои $u \in A$ таков што $\rho(a,u) < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2}}$, а како B е секаде густо подмножество од (Y,d) постои $v \in B$ таков, што $d(b,v) < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2}}$. Според тоа, постои $w = (u,v) \in A \times B$ таков, што

$$\rho_p(z,w) = \sqrt[p]{\rho^p(a,u) + d^p(b,v)} < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}} = \varepsilon,$$

што според дефиниција 1.1 значи дека множеството $A \times B$ е секаде густо во просторот (Z,ρ_p), $p \ge 1$.

б) Нека $p = \infty$. Множествата A и B се секаде густи во (X,ρ) и (Y,d) соодветно, па затоа постојат $u \in A$ и $v \in B$ такви што $\rho(a,u) < \varepsilon$ и $d(b,v) < \varepsilon$. Според тоа, постои $w = (u,v) \in A \times B$ таков, што

$$\rho_\infty(z,w) = \max\{\rho(a,u), d(b,v)\} < \varepsilon,$$

што според дефиниција 1.1 значи дека множеството $A \times B$ е секаде густо во просторот (Z,ρ_p), $p = \infty$. ♦

1.3. Последица. Нека $(X_i,\rho_i), i = 1,2,...,n$ се метрички простори. Ако множеството A_i е секаде густо во просторот X_i, $i = 1,2,...,n$, тогаш множеството

$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ е секаде густо во просторот (Z, d_p), каде $Z = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ и

$$d_p(x, y) = [(\rho_1(x_1, y_1))^p + (\rho_2(x_2, y_2))^p + ... + (\rho_n(x_n, y_n))^p]^{1/p}, \ p \geq 1 \tag{3}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2), ..., \rho_n(x_n, y_n)\}, \ p = \infty . \tag{4}$$

Доказ. Непосредно следува од теорема 1.2 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

1.4. Пример. а) Од последица 1.3 и фактот дека множествата $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{I}$ се секаде густи во метричкиот простор $(\mathbf{R}, \rho)$ непосредно следува дека множествата

$$\mathbf{Q}^m = \{(q_1, q_2, ..., q_m) \mid q_i \in \mathbf{Q}, i = 1, 2, ..., m\} \text{ и}$$

$$\mathbf{I}^m = \{(r_1, r_2, ..., r_m) \mid r_i \in \mathbf{I}, i = 1, 2, ..., m\}$$

се секаде густи во просторот $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$, $p \geq 1$ или $p = \infty$.

б) Множеството $\mathbf{Z}^m = \{(z_1, z_2, ..., z_m) \mid z_i \in \mathbf{Z}, i = 1, 2, ..., m\}$ не е секаде густо во $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$. Докажете! ♦

1.5. Пример. Нека (X, ρ) е дискретен метрички простор. Според претходната теорема множеството A е секаде густо во X ако и само ако $\overline{A} = X$. Понатаму, според пример IX 7.4 множеството $X \setminus A$ е отворено, што значи дека множеството A е затворено, па од последица IX 9.4 следува дека $A = \overline{A}$. Конечно, од досега изнесеното следува дека множеството A е секаде густо во X ако и само ако $X = \overline{A} = A$, што значи дека во дискретен простор (X, ρ) единствено секаде густо множество е X. ♦

1.6. Непосредно од дефиниција 1.1, својствата на низите и затворачот на дадено множество A следува точноста на следнава теорема. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Теорема. Нека (X, ρ) е метрички простор. Следниве тврдења се еквивалентни.

i) A е секаде густо во (X, ρ).

ii) A има непразен пресек со секоја отворена топка во (X, ρ).

iii) За секој $x \in X$ постои низа $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ во A таква, што $x_n \to x$ кога $n \to \infty$.

iv) $\overline{A} = X$. ♦

1.7. На крајот од овој параграф ќе докажеме дека својството множеството е густо е наследно кај еквивалентните метрики, т.е. ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Нека ρ и d се еквивалентни метрики на множеството X. Тогаш, множеството A е секаде густо во (X,ρ) ако и само ако тоа е секаде густо во (X,d).

Доказ. $\Rightarrow$. Нека A е секаде густо во (X,ρ). Според теорема 1.6 имаме $X=\overline{A}$ во (X,ρ), т.е. X е затворач на A во (X,ρ). Но, тогаш од теорема X 7.9 д) следува дека X е затворач на A во (X,d), што значи дека $X=\overline{A}$ во (X,d), т.е. A е секаде густо во (X,d).

$\Leftarrow$. Обратното тврдење се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2. СЕПАРАБИЛНИ МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

2.1. Множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$ е пребројливо, па затоа и множеството

$$\mathbf{Q}^m=\{(q_1,q_2,...,q_m)\,|\,q_i\in\mathbf{Q},\, i=1,2,...,m\}$$

е пребројливо. Според пример 1.4 а) ова множество е секаде густо во метричкиот простор $(\mathbf{R}^m,\rho_p)$, $p\ge 1$ или $p=\infty$.

Од друга страна, како што покасно ќе докажеме просторот l^∞ не содржи пребројливо секаде густо множество. Според тоа, метричките простори можеме да ги разгледуваме и од аспект дали тие содржат или не содржат пребројливо густо множество. Во таа насока ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *сепарабилен*, ако тој содржи конечно или пребројливо секаде густо множество.

2.2. Последица. Ако $(X_i,\rho_i), i=1,2,...,n$ се сепарабилни метрички простори, тогаш и (Z,d_p), каде $Z=X_1\times X_2\times ...\times X_n$ и

$$d_p(x,y)=[(\rho_1(x_1,y_1))^p+(\rho_2(x_2,y_2))^p+...+(\rho_n(x_n,y_n))^p]^{1/p},\ p\ge 1 \tag{1}$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2),...,\rho_n(x_n,y_n)\},\ p=\infty. \tag{2}$$

сепарабилен метрички простор.

Доказ. Точноста на тврдењето непосредно следува од последица 1.3 и фактот дека Декартовиот производ на конечно многу најмногу пребројливи множествата е најмногу пребројливо множество. ♦

2.3. Пример. а) Од пример 1.5 непосредно следува дека дискретниот метрички простор (X,ρ) е сепарабилен ако и само ако множеството X е најмногу пребројливо.

б) Од разгледувањата во 2.1 следува дека просторот $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$, $p \geq 1$ или $p = \infty$ или е сепарабилен.

в) Просторот $l^p, 1 \leq p < \infty$ е сепарабилен. Ќе докажеме дека множеството $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, каде

$$E_m = \{(q_1, ..., q_m, 0, 0, ...) \mid q_i \in \mathbf{Q}, i = 1, 2, ..., m\},$$

е секаде густо во $l^p, 1 \leq p < \infty$. Нека $x = (x_1, x_2, x_3, ..) \in l^p$ и $\varepsilon > 0$. Бидејќи редот $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ конвергира, постои природен број n таков, што

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \tfrac{\varepsilon^p}{2}.$$

За $i = 1, 2, ..., n$ наоѓаме рационални броеви q_i такви, што

$$|x_i - q_i| < \tfrac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n}}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Но, $q = (q_1, q_2, ..., q_n, 0, 0, ...) \in E$ и притоа важи

$$[\rho(x, q)]^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < n \cdot \tfrac{\varepsilon^p}{2n} + \tfrac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

т.е. $\rho(x, q) < \varepsilon$, што значи дека E е секаде густо во $l^p, 1 \leq p < \infty$ и како тоа е пребројливо (зошто?), заклучуваме дека $l^p, 1 \leq p < \infty$ е сепарабилен.

г) Просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ е сепарабилен. Од теоремата на Ваерштрас следува дека за секој $x \in \mathbf{C}([a,b])$ и за секој $\varepsilon > 0$ постои полином со реални коефициенти p_ε таков, што $\rho(x, p_\varepsilon) < \tfrac{\varepsilon}{2}$.

Меѓутоа, од оваа теорема сеуште не следува дека просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ е сепарабилен, бидејќи множеството полиноми со реални коефициенти не е пребројливо. Ќе докажеме дека множеството полиноми со рационални коефициенти, кое е пребројливо, е секаде густо во $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$.

Без ограничување на општоста можеме да го разгледуваме просторот $(\mathbf{C}([-1,1]), \rho_\infty)$ т.е. да земеме $a = -1, b = 1$. Нека

$$p_\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^{n-i}, \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, ..., n$$

е полиномот од теоремата на Ваерштрас, за кој важи

$$\rho(x, p_\varepsilon) < \tfrac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Наоѓаме рационални броеви $q_i, i = 0,1,2,..,n$ такви, што

$$|\alpha_i - q_i| < \tfrac{\varepsilon}{2(n+1)}, i = 0,1,2,...,n$$

и со $p(t)$ да го означиме полиномот чии коефициенти се $q_i, i = 0,1,2,..,n$. Тогаш

$$\rho(p, p_\varepsilon) = \max_{t\in[-1,1]} |\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - q_i)t^{n-i}| < \tfrac{\varepsilon}{2(n+1)}(n+1) = \tfrac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$\rho(x, p) \le \rho(x, p_\varepsilon) + \rho(p_\varepsilon, p) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

д) Просторот s е сепарабилен. Нека $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, каде

$$E_m = \{(q_1,...,q_m, 0, 0,...) \mid q_i \in \mathbf{Q}, i = 1,2,...,m\}$$

Јасно, множеството E е пребројливо. Ќе докажеме дека E е секаде густо во s , т.е. ќе докажеме дека за секој $x = (x_1, x_2,...) \in s$ во E може да се најде низа која конвергира кон x .

Нека $x = (x_1, x_2,...) \in s$. За секој x_n конструираме низа $\{q_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ таква што $q_n^{(k)} \to x_n, k \to \infty$. Да ја разгледаме низата $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементи од E , од видот

$$q_k = (q_1^{(k)}, q_2^{(k)},..., q_k^{(k)}, 0, 0,...), k = 1,2,... .$$

Лесно се докажува дека $q_k \to x, k \to \infty$. Имено, доволно е да докажеме дека $q_m^{(k)} \to x_m, k \to \infty$. Последното очигледно важи, бидејќи по конструкција за доволно големи $k > m$ имаме $|q_m^{(k)} - x_m| < \varepsilon$, каде ε е произволен позитивен реален број.

ѓ) Просторот l^∞ не е сепарабилен. Да го разгледаме множеството елементи

$$x = (x_1, x_2,...) \in l^\infty \text{, каде } x_i = 0 \text{ или } 1.$$

Ова множество е непребројливо и има кардинален број на континиум. Да земеме различни елементи $x = (x_1, x_2,...)$ и $y = (y_1, y_2,...)$ од ова множество. Тогаш

$$\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| = 1,$$

што значи дека имаме непребројливо многу елементи, кои еден од друг се наоѓаат на растојание еднакво на 1.

Нека претпоставиме дека l^∞ содржи пребројливо секаде густо множество E . Околу секој елемент од E да опишеме топка со радиус $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Тогаш, сите елементи на l^∞ се наоѓаат во овие топки. Множеството топки е пребројливо, па затоа во една од овие топки, да кажеме $B(x_0;\varepsilon)$, мора да се наоѓаат најмалку два елементи од претходно конструираното непребројливо множество. Нека тоа се елементите a и b. Тогаш

$$1 = \rho(a,b) \le \rho(a,x_0) + \rho(x_0,b) < \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$

што е противречност. Според тоа, просторот l^∞ не е сепарабилен.

Може да се докаже дека просторите c и c_0, кои се потпростори од просторот l^∞ се сепарабилни. Обидете се самостојно да ја докажете сепарабилноста на овие простори. ♦

2.4. Теорема. Метричкиот простор (X,ρ) има најмногу пребројлива база ако и само ако е сепарабилен.

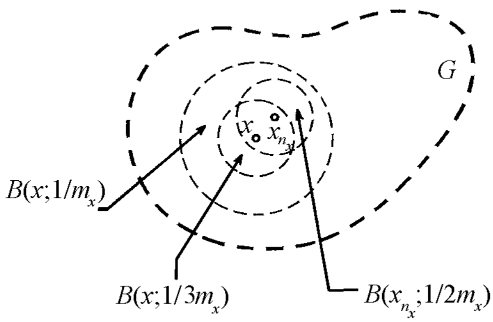
Доказ. $\Rightarrow$. Нека $\{B_i \mid i = 1,2,...\}$ е една најмногу пребројлива база на метричкиот простор (X,ρ). Од секое множество B_i да избереме по една точка и со A да го означиме пребројливото множество составено од овие точки. Бидејќи секое отворено множество во X е унија на елементи од $\{B_i \mid i = 1,2,...\}$, добиваме дека во секое отворено множество во X лежи барем една точка од A. Според тоа, во секоја околина на произволна точка лежи барем една точка од A, што значи дека множеството A е секаде густо во X, т.е. просторот X е сепарабилен.

$\Leftarrow$. Обратно, нека

$\{x_n \mid n = 1,2,...\}$

е најмногу пребројливо секаде густо множество во X. Да ја разгледаме пребројливата фамилија отворени топки $B(x_n;\frac{1}{m})$, $m,n = 1,2,3,...$. Нека G е произволно отворено подмножество од X и нека $x \in G$. Избираме природен број m_x таков што

$$B(x;\tfrac{1}{m_x}) \subseteq G,$$



Цртеж 1

цртеж 1. Бидејќи множеството $\{x_n \mid n = 1,2,...\}$ е секаде густо во X, во него постои точка x_{n_x} таква, што

$$\rho(x, x_{n_x}) < \frac{1}{3m_x}.$$

Тогаш, отворената топка $B(x_{n_x};\frac{1}{2m_x})$ ја содржи точката x и притоа за секој $y \in B(x_{n_x};\frac{1}{2m_x})$ важи

$$\rho(x,y) \le \rho(x,x_{n_x}) + \rho(x_{n_x},y) < \frac{1}{3m_x} + \frac{1}{2m_x} < \frac{1}{m_x},$$

т.е. $y \in B(x;\frac{1}{m_x}) \subseteq G$. Според тоа, $B(x_{n_x};\frac{1}{2m_x}) \subseteq G$. Значи $G = \bigcup_{x\in G} B(x_{n_x};\frac{1}{2m_x})$, односно $\{B(x_n;\frac{1}{m}) \mid m,n = 1,2,...\}$ е база во X со најмногу пребројливо многу елементи. ♦

2.5. Теорема. Секој потпростор на сепарабилен метрички простор е сепарабилен метрички простор.

Доказ. А. Нека (X,ρ) е сепарабилен метрички, $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ е пребројливо секаде густо подмножество на просторот X (случајот кога X е конечно множество е тривијален) и нека (Y,ρ) е произволен потпростор од (X,ρ). Ќе најдеме пребројливо секаде густо множество во Y.

За секој пар природни броеви i и j да ја разгледаме отворената топка $B_{ij} = B(a_i, \frac{1}{j}) \subseteq X$. Ако $B_{ij} \cap Y \ne \emptyset$, избираме произволна точка b_{ij} од $B_{ij} \cap Y$ и нека со B го означиме множеството од сите така избрани точки. Јасно, множеството B е најмногу пребројливо. Ќе докажеме дека B е секаде густо во Y.

Нека $x \in Y$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Избираме природен број j таков, што $j > \frac{2}{\varepsilon}$. Бидејќи множеството A е секаде густо во X, постои природен број i таков што $\rho(a_i, x) < \frac{1}{j}$, што значи $x \in B_{ij}$. Според тоа, $B_{ij} \cap Y \ne \emptyset$, па затоа постои точка таква што $b_{ij} \in B_{ij} \cap Y$ и $b_{ij} \in B$. Конечно, $x, b_{ij} \in B_{ij}$ што значи

$$\rho(b_{ij}, x) \le \rho(b_{ij}, a_i) + \rho(a_i, x) < \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j} < \varepsilon,$$

т.е. множеството B е секаде густо во Y, т.е потпросторот Y е сепарабилен.

Доказ Б. Нека (X,ρ) е сепарабилен метрички и (Y,ρ_Y) е потпростор од X. Од теорема 2.4 следува дека X има најмногу пребројлива база $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Понатаму, според лема IX 13.9 фамилијата $\mathcal{B}_Y = \{B_n \cap Y \mid n \in \mathbf{N}\}$ е најмногу пребројлива база за потпросторот Y, па повторно од теорема 2.4 следува дека потпросторот е сепарабилен. ♦

2.6. Забелешка. Во пример 2.3 ѓ) наведовме дека просторите c и c_0 се сепарабилни. Овде да забележиме дека бидејќи c_0 е потпростор од c согласно теорема 2.4 доволно е само да докажеме дека метричкиот простор c е сепарабилен.

2.7. Забелешка. Од теорема 2.4 и пример 2.3 непосредно следува дека просторите $\mathbf{R}^m, l^p, 1 \le p < \infty, \mathbf{C}([a,b]), s, c$ и c_0 ја задоволуваат втората аксиома за пребројливост, но дека тоа не е случај со просторот l^∞.

2.8. На крајот од овој параграф ќе докажеме дека сепарабилноста е наследна кај еквивалентните метрики, т.е. ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Нека ρ и d се еквивалентни метрики на множеството X. Просторот (X,ρ) е сепарабилен ако и само ако просторот (X,d) е сепарабилен.

Доказ. Просторот (X,ρ) е сепарабилен ако и само ако A е пребројливо густо множество во (X,ρ). Понатаму, според теорема 1.7 имаме дека A е пребројливо густо множество во (X,ρ) ако и само ако A е пребројливо густо множество во (X,d), односно ако и само ако просторот (X,d) е сепарабилен. ♦

3. ТЕОРЕМИ НА ЛИНДЕЛЕФ

3.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор, I е произволно непразно множество индекси и $A \subset X$.

Фамилијата множества $\mathcal{O} = \{O_i \mid O_i \subseteq X, i \in I\}$ ја нарекуваме *покривка* на множеството A, ако за секој $x \in A$, постои $i \in I$ таков, што $x \in O_i$.

Ако $I' \subset I$, тогаш за фамилијата $\mathcal{O}' = \{O_i \mid i \in I'\}$ ќе велиме дека е *потпо-кривка* од $\mathcal{O}$ ако $\mathcal{O}'$ е покривка на A.

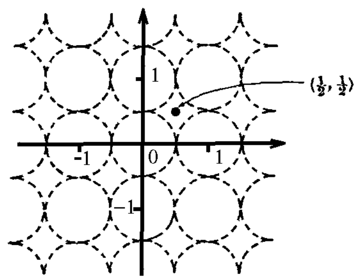
Ако множеството I е конечно, тогаш за покривката $\mathcal{O}$ ќе велиме дека е *конечна.*

За покривката $\mathcal{O} = \{O_i \mid i \in I\}$ ќе велиме дека е *отворена*, ако за секој $i \in I$ множеството O_i е отворено во (X,ρ).

3.2 Пример. а) Фамилијата $B(\mathbf{x};1), \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2$ е отворена покривка на метричкиот простор $(\mathbf{R}^2;\rho_2)$. Проверете!

б) Фамилијата $B(\mathbf{x};\frac{1}{2}), \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2$, цртеж 2, не е отворена покривка на метричкиот простор $(\mathbf{R}^2;\rho_2)$. Навистина, за точката $\mathbf{y} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ и за секоја точка $\mathbf{x} = (m,n) \in \mathbf{Z}^2$ важи

$$\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(m-\tfrac{1}{2})^2 + (n-\tfrac{1}{2})^2} \geq \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{1}{2},$$



Цртеж 2

што значи дека

$$\mathbf{y} \notin B(\mathbf{x};\tfrac{1}{2}), \text{ за секој } \mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2. \ ♦$$

3.3. Теорема (Линделеф). Нека A е подмножество на сепарабилниот метрички простор (X,ρ). Тогаш секоја отворена покривка $\mathcal{O}=\{O_i \mid i\in I\}$ на A содржи најмногу пребројлива потпокривка.

Доказ. Просторот X е сепарабилен, па од теорема 2.6 следува дека X има најмногу пребројлива база. Нека $\mathcal{B}=\{B_n \mid n=1,2,...\}$ е најмногу пребројлива база на просторот (X,ρ). Бидејќи $A\subseteq \cup\{O_i \mid i\in I\}$, за секој $p\in A$ постои $O_p\in\mathcal{O}$ таков што $p\in O_p$. Понатаму, бидејќи $\mathcal{B}$ е база на X за секој $p\in A$ постои $B_p\in\mathcal{B}$ таков што $p\in B_p\subseteq O_p$. Според тоа, $A\subseteq\cup\{B_p \mid p\in A\}$. Но, $\{B_p \mid p\in A\}\subseteq\mathcal{B}$ и како базата е најмногу пребројлива добиваме дека $\{B_p \mid p\in A\}=\{B_m \mid m\in M\}$, каде M е најмногу пребројливо множество индекси. Понатаму, за секој $m\in M$ постои множество $O_m\in\mathcal{O}$ такво што $B_m\subseteq O_m$, па затоа

$$A\subseteq\{B_p \mid p\in A\}=\{B_m \mid m\in M\}\subseteq\{O_m \mid m\in M\},$$

што значи дека $\{O_m \mid m\in M\}$ е најмногу пребројлива потпокривка од $\mathcal{O}$. ♦

3.4. Теорема (Линделеф). Нека $\mathcal{G}$ е база на сепарабилниот метрички простор (X,ρ). Тогаш $\mathcal{G}$ содржи најмногу пребројлива подбаза за X.

Доказ. Просторот X е сепарабилен, па од теорема 2.6 следува дека X има најмногу пребројлива база. Нека $\mathcal{B}=\{B_n \mid n=1,2,...\}$ е најмногу пребројлива база на просторот (X,ρ). Но, $\mathcal{G}$ исто така е база за X, па затоа за секој $n=1,2,3,...$ важи

$$B_n=\cup\{G \mid G\in\mathcal{G}_n\},\text{ каде } \mathcal{G}_n\subseteq\mathcal{G}.$$

Според тоа, $\mathcal{G}_n$ е отворена покривка за B_n и од теорема 3.2 следува дека $\mathcal{G}_n$ содржи најмногу пребројлива потпокривка $\mathcal{G}_n^*$ на B_n, т.е. за секој $n=1,2,3,...$ важи

$$B_n=\cup\{G \mid G\in\mathcal{G}_n^*\},$$

каде $\mathcal{G}_n^*\subseteq\mathcal{G}$ и фамилијата $\mathcal{G}_n^*$ е најмногу пребројлива. Според тоа, бидејќи $\mathcal{B}$ е база за X добиваме дека

$$\mathcal{G}^*=\{G \mid G\in\mathcal{G}_n^*, n=1,2,3,...\}$$

е база за X и притоа важи $\mathcal{G}^*\subseteq\mathcal{G}$ и фамилијата $\mathcal{G}^*$ е најмногу пребројлива. ♦

4. НЕПРЕКИНАТОСТ И СЕПАРАБИЛНОСТ

4.1. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метричките простори и $f:X\to Y$ е изометрија. Тогаш множеството A е секаде густо во X ако и само ако множеството $f(A)$ е секаде густо во Y.

Доказ. Нека множеството A е секаде густо во X и нека $\varepsilon > 0$ е дадено и $y \in Y$. Функцијата f е биекција, па затоа постои $x \in X$ таков, што $y = f(x)$. Но, A е секаде густо во X, па затоа постои $x_0 \in A$ таков, што $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. Понатаму, за точката $y_0 = f(x_0) \in f(A)$ важи

$$d(y, y_0) = d(f(x), f(x_0)) = \rho(x, x_0) < \varepsilon,$$

и од произволноста на ε и y следува дека $f(A)$ е секаде густо во Y.

Обратната импликација следува од претходно изнесеното и од теорема X 5.4 б). ♦

4.2. Лема. Нека (X, ρ) и (Y, d) се метрички простор, $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : X \to Y$ се непрекинати функции и A е секаде густо множество во X. Ако $f_1(x) = f_2(x)$, за секој $x \in A$, тогаш $f_1(x) = f_2(x)$, за секој $x \in X$.

Доказ. Според теорема X 2.13 множеството $F = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$ е затворено во X и притоа $A \subseteq F$. Од теоремите IX 9.4 и IX 9.7 *ii*) следува $\overline{A} \subseteq \overline{F} = F$. Но, A е густо во X, па затоа $X = \overline{A} \subseteq \overline{F} = F$, т.е. $X = F$. ♦

4.3. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор, $f_1 : X \to \mathbf{R}$ и $f_2 : X \to \mathbf{R}$ се непрекинати функции и A е секаде густо множество во X. Ако $f_1(x) \geq f_2(x)$, за секој $x \in A$, тогаш $f_1(x) \geq f_2(x)$, за секој $x \in X$.

Доказ. Доказот е аналоген на доказот на лема 4.2, при што се користи теорема X 2.14. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4.4. Последица. Нека метричките простори (X, ρ) и (Y, d) се изометрички. Просторот (X, ρ) е сепарабилен ако и само ако просторот (Y, d) е сепарабилен.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $f : X \to Y$ е изометрија од X во Y. Ако (X, ρ) е сепарабилен, тогаш постои конечно или пребројливо множество A кое е секаде густо во X. Но, f е биекција, па затоа множеството $f(A)$ е конечно или пребројливо и според теорема 4.1 тоа е секаде густо во Y, што значи просторот (Y, d) е сепарабилен.

$\Leftarrow$. Обратната импликација следува од претходно изнесеното и од теорема X 5.4 б). ♦

4.5. Со проблемот на продолжување на непрекината функција се сретнавме во параграф X 9, во кој ги разгледавме лемата на Урисон и теоремата на Теитз. Во лемата на Урисон и нејзината последица докажавме како реална функција која на непразни дисјунктни затворени подмножества A и B на метрички (X, ρ) прима различни константни вредности може да се продолжи до непрекината функција на целиот простор X. Значењето на лемата на Урисон може да се види од следнава теорема.

4.6. Теорема. Нека (X,ρ) е сепарабилен метрички простор. Тогаш постои пребројлива фамилија непрекинати функции $f_n : X \to [0,1]$, $n = 1,2,3,...$ која *ги разделува точките на* X, т.е. за секои точки $x,x' \in X$ фамилијата $\{f_n \mid n = 1,2,3,...\}$ содржи барем една функција f_n таква што $f_n(x) \neq f_n(x')$.

Доказ. Нека A е пребројливо секаде густо множество на X. За секоја точка $a \in A$ и броеви $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ такви што $0 < q_1 < q_2$ важи множеството $\overline{B}(a;q_1)$ е затворено и $\overline{B}(a;q_1) \subset B(a;q_2)$, па затоа $\overline{B}(a;q_1) \cap (X \setminus B(a;q_2)) = \varnothing$. Според тоа, множествата $\overline{B}(a;q_1)$ и $X \setminus B(a;q_2)$ се непразни затворени дисјунктни подмножества на X, па од лема X 2.13 (лема на Урисон) следува дека постои непрекината функција $f = f_{a,q_1,q_2} : X \to [0,1]$ таква, што

$$f_{|\overline{B}(a;q_1)} = 1 \text{ и } f_{|X \setminus B(a;q_2)} = 0 .$$

Множествата A и $\mathbf{Q}$ се пребројливи, па затоа и вака конструираната фамилија реални функции е пребројлива. Ќе докажеме дека оваа фамилија функции ги разделува точките на X. Навистина, ако $x,x' \in X$, $x \neq x'$, тогаш $\rho(x,x') = r > 0$. Постојат рационални броеви $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ такви, што

$$0 < q_1 < \tfrac{r}{4} < q_2 < \tfrac{r}{2} .$$

Понатаму, бидејќи множеството A е секаде густо во X, постои $a \in A$ таков, што $\rho(x,a) < q_1$. Очигледно, $x \in \overline{B}(a;q_1)$ и $x' \in X \setminus B(a;q_2)$, па затоа

$$f_{a,q_1,q_2}(x) = 1 \text{ и } f_{a,q_1,q_2}(x') = 0 ,$$

т.е. пребројливата фамилија реални функции f_{a,q_1,q_2}, $a \in A$, $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ ги разделува точките на X. ♦

4.7. Пример. Да го разгледаме Хилбертовиот квадар

$$I^\infty = \{x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l^2 \mid |x_i| \leq \tfrac{1}{i}, i = 1,2,3,...\} .$$

За секој $i = 1,2,...$ функцијата $p_i : I^\infty \to [0,\frac{1}{i}]$ определена со формулата

$$p_i(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = x_i \text{, } (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in I^\infty \text{,}$$

ја дава $i-$та проекција на Хилбертовиот квадар. Нека X е метрички простор и $f : X \to I^\infty$. Понатаму, според задача X 13 функцијата f е непрекината ако и само ако функцијата $f_i = p_i \circ f : X \to [0,\frac{1}{i}]$ е непрекината за секој $i = 1,2,...$. Сега, од теорема 4.6 непосредно следува дека за секој сепарабилен метрички простор (X,ρ) постои низа непрекинати функции $f_i : X \to [0,\frac{1}{i}]$, $i = 1,2,...$ која ги разделува точките на X. Тогаш, функциите f_i, $i = 1,2,...$ дефинираат непрекината инјекција $f : X \to I^\infty$, што значи дека сите сепарабилни метрички простори можеме да ги сметаме како делови од Хилбертовиот квадар.

На сличен начин може да се докаже дека за секој сепарабилен метрички простор (X,ρ) постои функција $f:X\to I^{\infty}$ таква, што $f:X\to f(X)\subseteq I^{\infty}$ е хомеоморфизам. ♦

5. ЗАДАЧИ

1. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A\subseteq X$. Докажете, дека следниве тврдења се еквивалентни:
   а) $A^0=\varnothing$,
   б) множеството $X\setminus A$ е густо во X.

2. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A\subseteq B\subseteq X$. Докажете, дека ако A е густо во B и B е густо во X, тогаш A е густо во X.

3. Нека $\varphi\in\mathbf{R}$ и $\frac{\varphi}{\pi}\in\mathbf{I}$. Докажете, дека множеството
   $$\{(\cos n\varphi,\sin n\varphi)\mid n\in\mathbf{N}\}\subseteq(\mathbf{R}^2,\rho_2)$$
   е секаде густо во единечната сфера $S(\mathbf{o};1)\subseteq(\mathbf{R}^2,\rho_2)$.

4. Кои од следниве подмножества на просторот $(C([a,b]),\rho)$ се секаде густи во него:
   а) $\mathbf{C}^{(2)}([a,b])$, б) $\{f\mid f(a)+f(b)=1\}$,
   в) $\{f\mid \int_a^b f(t)dt=0\}$, г) $\mathbf{BV}([a,b])\cap\mathbf{C}([a,b])$.

5. Нека (X_i,d_i), $i=1,2,3,...$ е низа метрички простори такви што $d(X_i)\le 1$, за $i=1,2,3,...$, $X=X_1\times X_2\times X_3\times...$ и d е метриката на X од задача X 37. Нека $o=(o_1,o_2,o_3,...)\in X$ е дадена точка и $Y\subseteq X$ е множеството од сите $x\in X$ со својство: множеството $\{n\in\mathbf{N}\mid x_n\ne o_n\}$ е конечно. Докажете, дека множеството Y е густо во просторот X.

6. Кои од множествата дадени ви задача IX 7 се густи во просторот $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\rho)$?

7. Дали множеството $f(\mathcal{F}_B(X)\times\mathcal{F}_B(Y))$ од задача X 23 е секаде густо во просторот $\mathcal{F}_B(X\times Y)$?

8. Во просторот $(\mathbf{C}([a.b]),\rho_{\infty})$ со A да го означиме множеството функции кои го задоволуваат Липшицовиот услов (забелешка III 8.7). Дали множеството A е секаде густо во просторот $(\mathbf{C}([a.b]),\rho_{\infty})$.

9. Нека $\mathcal{B}=\{B_i,i\in I\}$ е база на метричкиот простор (X,ρ). Докажете, дека
   1) $\mathcal{B}$ е отворена покривка на X.

2) $\mathcal{B}^* = \{\overline{B}_i, i \in I\}$ е покривка на просторот X.

10. Нека (X,ρ) е сепарабилен метрички простор. Докажете, дека секоја фамилија $U_i, i \in I$ непразни дисјунктни отворени подмножества е најмногу пребројлива.

11. За функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *сегментно линеарна* ако интервалот $[a,b]$ може да се подели на конечно многи затворени подинтервали I_k, $k = 1,2,...,n$ така да

$$f(t) = a_k t + b_k \text{, за секој } t \in I_k\text{, } k = 1,2,...,n\text{,}$$

т.е. рестрикциите $f_{|I_k}$, $k = 1,2,...,n$ се линеарни функции.

1) Докажете дека множеството $\mathbf{SC}([a,b])$ од сите сегментно линеарни функции на интервалот $[a,b]$ е секаде густо во метричкиот простор $(\mathbf{C}([a.b]),\rho_\infty)$.

2) Искористете го тврдењето под 1) за да ја докажете сепарабилноста на просторот $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_\infty)$.

12. Нека (X,ρ) е метрички простор, а X_n, $n \in \mathbf{N}$ се подмножества од X такви што $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} X_n = X$. Ако секое од множествата X_n, $n \in \mathbf{N}$ е сепарабилно, тогаш просторот X е сепарабилен. Докажете!

13. Во просторот $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ да ја разгледаме функцијата $d':\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определена со

$$d'(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}), & \text{ако точките } \mathbf{o}, \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \text{ лежат на иста права,} \\ \rho_2(\mathbf{x},\mathbf{o}) + \rho_2(\mathbf{o},\mathbf{y}), & \text{во спротивно.} \end{cases}$$

а) Докажете, дека $(\mathbf{R}^2,d')$ е метрички простор.

б) Најдете го обликот на отворените топки во $(\mathbf{R}^2,d')$.

в) Докажете дека просторот $(\mathbf{R}^2,d')$ не е сепарабилен.

14. Нека $(X^{\mathbf{N}},\rho_B)$ е метричкиот простор, ρ_B е метрика на Бер. Какво треба да биде множеството X за да просторот $X^{\mathbf{N}}$ е сепарабилен.

XII ГЛАВА

КОМПЛЕТНОСТ

1. КОШИЕВИ НИЗИ ВО МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

1.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во X ќе велиме дека е *Кошиева* (*фундаментална*) ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, за секои $m, n \geq n_0$.

1.2. Пример. Нека (X,ρ) е дискретен метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X. Нека $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Од дефиниција 1.1 следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_m, x_n) < \frac{1}{2}$, за секои $m, n \geq n_0$. Но, просторот (X,ρ) е дискретен, па од последното неравенство следува $\rho(x_m, x_n) = 0$, односно $x_n = x_m$, за секои $m, n \geq n_0$. Според тоа, во дискретен метрички простор секоја Кошиева низа е од видот

$$x_1, x_2, ..., x_{n_0}, p, p, p, ...,$$

т.е. почнувајќи од некое место таа е константна. ♦

1.3. Лема. Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна низа во метричкиот простор (X,ρ), тогаш таа е Кошиева.

Доказ. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна конвергентна низа во X и $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. За секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ кога $n \geq n_0$. Според тоа, за секои $m, n \geq n_0$ имаме

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_0) + \rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во X. ♦

1.4. Лема. Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (X,ρ), тогаш таа е ограничена.

Доказ. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во X и $\varepsilon > 0$. Тогаш, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, за секои $m, n \geq n_0$. Земаме $n = n_0$ и добиваме дека за секој $m \geq n_0$ важи $\rho(x_m, x_0) < \varepsilon$, што значи дека сите членови на низата, освен конечно многу, се наоѓаат во отворената топка $B(x_0; \varepsilon)$. Ако земеме

$$r = 1 + \max\{\varepsilon, \rho(x_1, x_{n_0}), \rho(x_2, x_{n_0}), ..., \rho(x_{n_0-1}, x_{n_0})\},$$

добиваме дека $x_n \in B(x_0;r)$, за секој $n \in \mathbf{N}$, што значи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. ♦

1.5. Лема. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (X,ρ). Ако $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подниза од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ која конвергира кон некоја точка $x_0 \in X$, тогаш $x_n \to x_0$, $n \to \infty$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, па затоа постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, за секои $m,n \ge n_0$. Но, поднизата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира кон $x_0 \in X$, па затоа постои $k_0 \in \mathbf{N}$ таков што $n_{k_0} > n_0$ и $\rho(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, за секој $n_k \ge n_{k_0}$. Според тоа, за секој $n \ge n_0$ важи

$$\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x_{n_{k_0}}) + \rho(x_{n_{k_0}}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што значи $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. ♦

1.6. Лема. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (X,ρ) и $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е подниза од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{k_n}) = 0$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, па затоа постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ за секои } m,n \ge n_0. \tag{2}$$

Но, $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е подниза од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, па затоа $k_n \ge n \ge n_0$ и од (2) следува

$$\rho(x_n, x_{k_n}) < \varepsilon, \text{ за секој } n \ge n_0,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{k_n}) = 0$. ♦

1.7. Лема. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во метричкиот простор (X,ρ) и нека

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...\},\ A_2 = \{x_2, x_3, x_4, ...\},\ A_3 = \{x_3, x_4, x_5, ...\},\ ....$$

Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева ако и само ако $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека претпоставиме дека $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$ и нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n \ge n_0$ важи $d(A_n) < \varepsilon$, што значи $d(A_{n_0}) < \varepsilon$. Но, тогаш за секои $m,n \ge n_0$ важи $x_m, x_n \in A_{n_0}$, па затоа

$$\rho(x_m, x_n) \le d(A_{n_0}) < \varepsilon,$$

т.е. низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

$\Rightarrow$. Обратно, нека претпоставиме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева и нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секои $m, n \geq n_0$ важи $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Но, тогаш за секој $n \geq n_0$, ако земеме $m \geq n$ добиваме

$$d(A_n) = \sup\{\rho(x_n, x_m) \mid m \geq n \geq n_0\} \leq \varepsilon ,$$

што значи $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. ♦

1.8. Лема. Нека (Z, ρ_p) е Декартовиот производ на метричките простори (X, ρ) и (Y, d), каде метриката ρ_p е дадена со формулите

$$\rho_p(z_1, z_2) = \sqrt[p]{\rho^p(x_1, x_2) + d^p(y_1, y_2)}, \ p \geq 1 \tag{3}$$

$$\rho_\infty(z_1, z_2) = \max\{\rho(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}, \ p = \infty , \tag{4}$$

за секои $z_1 = (x_1, y_1) \in Z$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$. Низата $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во (Z, ρ_p) ако и само ако ако низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви во (X, ρ) и (Y, d), соодветно.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $p \geq 1$ или $p = \infty$, $\{c_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (Z, ρ_p) и $\varepsilon > 0$ е дадено. Значи, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секои $m, n \geq n_0$ важи

$$\rho(a_m, a_n) \leq \rho_p(c_m, c_n) < \varepsilon \text{ и } d(b_m, b_n) \leq \rho_p(c_m, c_n) < \varepsilon$$

т.е. низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви во (X, ρ) и (Y, d), соодветно.

$\Leftarrow$. Нека $p \geq 1$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви во (X, ρ) и (Y, d), соодветно и $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, постојат $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ такви што

$$\rho(a_m, a_n) < \tfrac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2}}, \text{ за секои } m, n \geq n_1 \tag{5}$$

$$d(b_m, b_n) < \tfrac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2}}, \text{ за секои } m, n \geq n_2 . \tag{6}$$

Земаме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и од (5) и (6) добиваме дека за секои $m, n \geq n_0$ важи

$$\rho_p(c_m, c_n) = \sqrt[p]{\rho^p(a_m, a_n) + d^p(b_m, b_n)} < \sqrt[p]{\tfrac{\varepsilon^p}{2} + \tfrac{\varepsilon^p}{2}} = \varepsilon ,$$

што значи дека низата $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во (Z, ρ_p).

Нека $p = \infty$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се Кошиеви во (X, ρ) и (Y, d), соодветно и $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш, постојат $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ такви што

$$\rho(a_m, a_n) < \varepsilon \text{, за секои } m,n \geq n_1 \tag{7}$$

$$d(b_m, b_n) < \varepsilon \text{, за секои } m,n \geq n_2 . \tag{8}$$

Земаме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и од (7) и (8) добиваме дека за секои $m,n \geq n_0$ важи

$$\rho_p(c_m, c_n) = \max\{\rho(a_m, a_n), d(b_m, b_n)\} < \varepsilon ,$$

што значи дека низата $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во (Z, ρ_p). ♦

1.9. Последица. Нека $(X_i, \rho_i), i = 1,2,...,n$ се метрички простори. Во просторот (Z, d_p), каде $Z = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ и

$$d_p(x,y) = [(\rho_1(x_1,y_1))^p + (\rho_2(x_2,y_2))^p + ... + (\rho_n(x_n,y_n))^p]^{1/p}, \ p \geq 1 \tag{3'}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2), ..., \rho_n(x_n,y_n)\}, \ p = \infty . \tag{4'}$$

низата $\{(x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk})\}_{k=1}^{\infty}$ е Кошиева ако и само ако координатната низа $\{x_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1,2,...,n$ е Кошиева во просторот $(X_i, \rho_i), i = 1,2,...,n$, соодветно.

Доказ. Непосредно следува од лема 1.8 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

1.10. Пример. Од последица 1.9 непосредно следува дека низата $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ е Кошиева во просторот $(\mathbf{R}^n, \rho_p)$, $p \geq 1$ или $p = \infty$ ако и само ако за секој $i \in \{1,2,...,n\}$ кординатната низа $\{x_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$ е Кошиева низа реални броеви. ♦

2. КОМПЛЕТНИ МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

2.1. Пример. а) Ако X е множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$ со метрика $\rho(r_1, r_2) = | r_1 - r_2 |$, тогаш $(\mathbf{Q}, \rho)$ е метрички простор. Во овој метрички простор низата

$$r_n = \frac{1}{2^n}, n = 1,2,3,...$$

е Кошиева и нејзина граница е $r = 0$. Сега да ја разгледаме низата

$$q_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, n = 1,2,3,... .$$

Оваа низа е Кошиева, но како што знаеме таа нема граница во просторот X. Имено,

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n = e \notin \mathbf{Q} .$$

б) Нека X е просторот полиноми $P(t), t \in [0,1]$ со метрика

$$\rho_\infty(P,Q) = \max_{t\in[0,1]} |P(t)-Q(t)|$$

и $\{P_n(t)\}_{n=1}^\infty$ е низа полиноми, која рамномерно конвергира кон непрекината функција која не е полином. Очигледно, низата $\{P_n(t)\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева, но таа нема граница во (X,ρ_∞). ♦

2.2. Во претходниот пример се сретнавме со Кошиева низа во метрички простор X која конвергира кон некој елемент $x\in X$ и со Кошиева низа во метрички простор X која не конвергира кон некој елемент од X. Ваквите и слични примери се причина за воведување и детално проучување на следниов поим.

Дефиниција. За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *комплетен*, ако секоја Кошиева низа во (X,ρ) конвергира кон некој елемент од (X,ρ).

2.3. Пример. а) Нека (X,ρ) е дискретен метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева низа во X. Според пример 1.2 низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е од видот $x_1,...,x_{n_0}$, $p,p,...$ и јасно истата конвергира кон точката $p\in X$. Според тоа, дискретниот метрички простор (X,ρ) е комплетен.

б) Метричкиот простор $(\mathbf{R}^k,\rho_p)$, $p\ge 1$ е комплетен. Навистина, според пример 1.10 ако $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева низа во овој простор, тогаш и соодветните координатни низи $\{x_{jn}\}_{n=1}^\infty$, $j=1,2,...,k$ се Кошиеви низи реални броеви. Понатаму, Кошиева низа реални броеви е конвергентна, што значи низите $\{x_{jn}\}_{n=1}^\infty$, $j=1,2,...,k$ се конвергентни. Конечно, ако

$$\lim_{n\to\infty} x_{jn} = x_j\,,\ j=1,2,...,k\,,$$

тогаш од пример IX 3.8 следува дека низата $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ конвергира кон точката $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_k)$.

в) Просторот $l^p, 1\le p<\infty$ е комплетен. Нека $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева низа во $l^p, 1\le p<\infty$, т.е. за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што

$$\rho(x_m,x_n) = (\sum_{i=1}^\infty |x_{mi}-x_{ni}|^p)^{1/p} < \varepsilon\,, \tag{1}$$

за секои $m,n\ge n_0$. Од $|x_{mi}-x_{ni}|\le\rho(x_m,x_n)$ следува дека за секој $i=1,2,3,...$ низата реални броеви $\{x_{ni}\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева. Но, Кошиева низа реални броеви е конвергентна, па затоа постои $y_i\in\mathbf{R}$ таков што

$$x_{ni} \to y_i, \text{ кога } n \to \infty, \text{ за } i = 1,2,3,\dots .$$

Ќе докажеме дека редот $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$ конвергира, т.е дека $x = (y_1, y_2, \dots) \in l^p$. Навистина, бидејќи секоја Кошиева низа е ограничена, добиваме дека

$$\rho(x_n, 0) = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_{ni} - 0|^p)^{1/p} \le M ,$$

каде $0 = (0,0,0,\dots)$ што значи

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{ni}|^p \le M^p ,$$

за секој n и за секој k. Во последното неравенство земеме $n \to \infty$ и добиваме

$$\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p \le M^p$$

за секој k. Според тоа, низата парцијални суми на редот $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$, чии членови се ненегативни, е ограничена па затоа овој ред конвергира.

Останува да докажеме дека $x_n \to x, \ n \to \infty$ во l^p. Од (1) следува дека

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{mi} - x_{ni}|^p < \varepsilon^p ,$$

за $m, n \ge n_0$ и за секој k. Ако во последното неравенство земеме $m \to \infty$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{k} |y_i - x_{ni}|^p < \varepsilon^p$$

за $n \ge n_0$ и за секој k, од што следува

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i - x_{ni}|^p < \varepsilon^p$$

за $n \ge n_0$. Според тоа, $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, за $n \ge n_0$, т.е. $x_n \to x, \ n \to \infty$ во l^p.

г) Просторот l^{∞} е комплетен. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во l^{∞}, т.е. за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, за секои $m, n \ge n_0$. Тогаш

$$|x_{mi} - x_{ni}| < \varepsilon \tag{2}$$

за секои $m, n \ge n_0$ и за секој $i = 1,2,\dots$, што значи дека $\{x_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во $\mathbf{R}$ за секој фиксиран $i = 1,2,3,\dots$. Но, Кошиева низа реални броеви е конвергентна, па затоа постои $y_i \in \mathbf{R}$ таков што

$$x_{ni} \to y_i, \text{ кога } n \to \infty \text{, за } i = 1,2,3,\dots .$$

Ќе докажеме дека $x = (y_1, y_2, ...) \in l^\infty$. Навистина, бидејќи секоја Кошиева низа е ограничена, добиваме дека $\rho(x_n, 0) \le M$, што значи $|x_{ni}| \le M$, за секој n и за секој i. Ако во последното неравенство земеме $n \to \infty$ добиваме дека $|y_i| \le M$ за секој i. Според тоа, низата $x = (y_1, y_2, ...)$ е ограничена, т.е. $x = (y_1, y_2, ...) \in l^\infty$.

Конечно, ако во (2) земеме $m \to \infty$ добиваме

$$|y_i - x_{ni}| \le \varepsilon$$

за $n \ge n_0$ и за секој i, од што следува

$$\sup_{i=1,2,\dots} |y_i - x_{ni}| \le \varepsilon$$

за $n \ge n_0$. Според тоа, $\rho(x_n, x) < \varepsilon$, за $n \ge n_0$ т.е. $x_n \to x$, $n \to \infty$ во l^∞.

д) Просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ од пример IX 2.9 е комплетен. Нека $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева низа во $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$, т.е. за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \text{, за } m, n \ge n_0 \text{ и за секој } t \in [a,b]. \tag{3}$$

Значи, за секој $t \in [a,b]$ низата реални броеви $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева. Но, Кошиева низа реални броеви е конвергентна, па затоа постои реален број $x(t)$ таков што $x_n(t) \to x(t)$, кога $n \to \infty$. Меѓутоа $t \in [a,b]$, па затоа на овој начин е дефинирана функција $x(t)$ на $[a,b]$. Ако во (3) земеме $m \to \infty$, добиваме

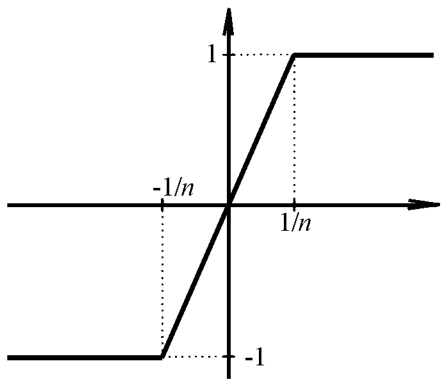
$$|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon \text{, за } n \ge n_0 \text{ и за секој } t \in [a,b].$$

што значи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ рамномерно конвергира на $[a,b]$. Според тоа, $x(t)$ е граница на рамномерна конвергентна низа непрекинати функции, па затоа и самата е непрекината. Според тоа, $x(t) \in \mathbf{C}([a,b])$ и $x_n \to x$, $n \to \infty$ во $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$.

ѓ) Ќе докажеме дека просторот $(C([a,b]), \rho_p)$, $p \ge 1$ од пример IX 2.11 не е комплетен. За таа цел доволно е да докажеме дека просторот $(C([-1,1]), \rho_p)$, $p \ge 1$ не е комплетен (зошто?).

Да ја разгледаме низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ во $C([-1,1])$ определена со

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t \le -\frac{1}{n} \\ nt, & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \le t \le 1, \end{cases}$$



Цртеж 1

цртеж 1. Прво, ќе покажеме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Наоѓаме $n_0 = [\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^p(p+1)}}]$ и нека $m, n > n_0$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $m > n$. Тогаш,

$$\rho_p(x_m, x_n) = (\int_{-1}^{1} | x_m(t) - x_n(t) |^p \, dt)^{1/p}$$

$$= (\int_{-1}^{-1/n} 0\bullet dt + \int_{-1/n}^{-1/m} (nt+1)^p \, dt + 2\int_{0}^{1/m} (m-n)^p t^p dt + \int_{1/m}^{1/n} (1-nt)^p \, dt + \int_{1/n}^{1} 0\bullet dt)^{1/p}$$

$$= (\frac{(nt+1)^{p+1}}{n(p+1)}\Big|_{-1/n}^{-1/m} + 2\frac{(m-n)^p t^{p+1}}{p+1}\Big|_{0}^{1/m} - \frac{(1-nt)^{p+1}}{n(p+1)}\Big|_{1/m}^{1/n})^{1/p}$$

$$= (\frac{(m-n)^{p+1}}{nm^{p+1}(p+1)} + 2\frac{(m-n)^p}{m^{p+1}(p+1)} + \frac{(m-n)^{p+1}}{nm^{p+1}(p+1)})^{1/p}$$

$$= \frac{m-n}{m}(\frac{2}{mn(p+1)})^{1/p} < (\frac{2}{mn(p+1)})^{1/p} < (\frac{2}{n_0^2(p+1)})^{1/p} \le (\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^p(p+1)}}^2(p+1)})^{1/p} = \varepsilon,$$

т.е. низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

Да ја разгледаме функцијата

$$x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1,0) \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t \in (0,1], \end{cases}$$

која не е непрекината, т.е. $x(t) \notin C([-1,1])$. Имаме:

$$(\int_{-1}^{1} | x_n(t) - x(t) |^p \, dt)^{1/p} = (2\int_{0}^{1/n} (1-nt)^p \, dt)^{1/p} = \sqrt[p]{\frac{2}{n(p+1)}},$$

па затоа за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секој $n > n_0$ важи

$$(\int_{-1}^{1} | x_n(t) - x(t) |^p \, dt)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Од последното неравенство не следува дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нема граница во $C([-1,1])$, бидејќи $x(t)$ не е непрекината, т.е. броевите $\rho_p(x_n, x)$, $n = 1, 2, ...$ не се дефинирани. Меѓутоа, ова неравенство ќе го искористиме да покажеме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нема граница во $C([-1,1])$.

Нека претпоставиме дека $y(t) \in C([-1,1])$ е граница на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_1 таков што за секој $n > n_1$ важи

$$(\int_{-1}^{1} | x_n(t) - y(t) |^p \, dt)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека $n > \max\{n_0, n_1\}$. Ако ги искористиме последните две неравенства, тогаш од неравенството на Минковски следува

$$(\int_{-1}^{0} |y(t)+1|^p\,dt + \int_{0}^{1} |y(t)-1|^p\,dt)^{1/p} = (\int_{-1}^{1} |y(t)-x(t)|^p\,dt)^{1/p}$$

$$= (\int_{-1}^{1} |y(t)-x_n(t)+x_n(t)-x(t)|^p\,dt)^{1/p}$$

$$= (\int_{-1}^{1} |y(t)-x_n(t)|^p\,dt)^{1/p} + (\int_{-1}^{1} |x_n(t)-x(t)|^p\,dt)^{1/p} < \varepsilon.$$

Сега од произволноста на ε следува

$$\int_{-1}^{0} |y(t)+1|^p\,dt = \int_{0}^{1} |y(t)-1|^p\,dt = 0$$

и како подинтегралните функции во последните интеграли се непрекинати и ненегативни од теорема V 14.8 следува $y(t) \equiv -1$ на интервалот $[-1,0]$ и $y(t) \equiv 1$ на интервалот $[0,1]$, што е противречност. ♦

2.4. Коментар. Според пример 2.3 в) просторот l^∞ е комплетен. Меѓутоа, во пример XI 2.3 ѓ) докажавме дека овој простор не е сепарабилен. Од друга страна, според пример 2.1 б) просторот полиноми $P(t), t \in [0,1]$ со метрика

$$\rho_\infty(P,Q) = \max_{t\in[0,1]} |P(t)-Q(t)|$$

не е комплетен метрички постор. Меѓутоа, овој простор е потпростор од сепарабилниот метрички простор $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ (пример XI 2.3 г), па од теорема XI 2.4 следува дека и самиот е сепарабилен.

Според тоа, имаме пример на комплетен метрички простор кој не е сепарабилен и на сепарабилен метрички простор кој не е комплетен, што значи дека *сепарабилноста и комплетноста на метричките простори се неспоредливи својства*.

2.5. Теорема (принцип на вложени затворени топки). Нека $\overline{B}_n(x_n;r_n)$, $n = 1,2,...$ е низа затворени топки во комплетниот метрички простор (X,ρ) кои ги задоволуваат условите:

i) $\overline{B}_{n+1}(x_{n+1};r_{n+1}) \subseteq \overline{B}_n(x_n;r_n)$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и

ii) $r_n \to 0$, кога $n \to \infty$.

Тогаш, постои еден и само еден $x \in X$ таков што $x \in \overline{B}_n(x_n;r_n)$, за секој n, т.е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n(x_n;r_n) = \{x\}$.

Доказ. Ќе докажеме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, центри на топките е Кошиева. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од условот *ii*) следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $r_n < \varepsilon$, за секој $n \geq n_0$. Понатаму, од условот *i*) имаме дека за секој $m \geq n_0$ и за секој $n > m$ важи $\overline{B}_n(x_n; r_n) \subseteq \overline{B}_m(x_m; r_m)$ што значи

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon . \tag{4}$$

Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева и како (X, ρ) е комплетен добиваме дека постои $x \in X$ таков што $x_n \to x, n \to \infty$ во (X, ρ). Ако во неравенството (4) земеме $n \to \infty$, добиваме

$$\rho(x_m, x) \leq r_m < \varepsilon \text{ за } m \geq n_0 ,$$

од што следува дека $x \in \overline{B}_m(x_m; r_m)$, за $m \geq n_0$. Сега од *i*) следува дека $x \in \overline{B}_n(x_n; r_n)$ за секој $n \geq 1$.

Останува да ја докажеме единственоста на точката x. Нека $y \in X$ е таква, што $y \in \overline{B}_n(x_n; r_n)$, за секој $n \geq 1$. Тогаш

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leq 2r_n \to 0, n \to \infty ,$$

па затоа $x = y$. ♦

2.6. Теорема. Нека во метричкиот простор (X, ρ) за секоја низа затворени топки $\overline{B}(x_n; r_n) \mid n = 1, 2, ...$ за која се исполнети условите *i*) и *ii*) од теорема 2.5 важи $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n; r_n) = \{x\}$. Тогаш (X, ρ) е комплетен метрички простор.

Доказ. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (X, ρ). За секој $k \in \mathbf{N}$ наоѓаме n_k таков што

$$\rho(x_{n_k + p}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} \text{, за секој } p > 0 .$$

Земаме $\overline{B}(x_{n_k}; \frac{1}{2^{k-1}})$ и добиваме дека

$$\overline{B}(x_{n_{k+1}}; \frac{1}{2^k}) \subseteq \overline{B}(x_{n_k}; \frac{1}{2^{k-1}}) \text{, за } k \geq 1 .$$

Навистина, ако $x \in \overline{B}(x_{n_{k+1}}; \frac{1}{2^k})$, тогаш

$$\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} ,$$

т.е. $x \in \overline{B}(x_{n_k}; \frac{1}{2^{k-1}})$.

Радиусите на овие затворени топки тежат кон 0, па од претпоставката добиваме дека

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_{n_k}; \tfrac{1}{2^{k-1}}) = \{x_0\} .$$

Ќе докажеме дека $x_n \to x_0, n \to \infty$ во (X, ρ). Имено, поднизата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ тежи кон x_0, бидејќи $x_0, x_{n_k} \in \overline{B}(x_{n_k}; \tfrac{1}{2^{k-1}})$ и затоа

$$\rho(x_0, x_{n_k}) \le \tfrac{1}{2^{k-1}} \to 0,\ k \to \infty ,$$

па од лема 1.6 следува дека $x_n \to x_0, n \to \infty$ во (X, ρ), т.е. просторот (X, ρ) е комплетен. ♦

2.7. Следнава теорема, која во литературата е позната како *принцип на опаѓачка низа затворени множества*, е обопштување на претходните две теореми.

Теорема (Кантор). Следниве тврдења се еквивалентни:

i) (X, ρ) е комплетен метрички простор.

ii) Ако $A_i, i \in \mathbf{N}$ е низа непразни затворени множества такви што $A_i \supseteq A_{i+1}$, за $i \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$, тогаш постои еден и само еден $x \in X$ таков што $x \in A_n$, за секој n, т.е. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$. ♦

Доказ. *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Нека $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ се непразни затворени подмножества од X такви што $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. Множествата $A_i, i \in \mathbf{N}$ се непразни, па затоа можеме да избереме низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $x_i \in A_i, i = 1,2,3,\ldots$.

Ќе докажеме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$ следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $d(A_n) < \varepsilon$, за секој $n \ge n_0$. Но, за множествата $A_i, i \in \mathbf{N}$ важи $A_i \supseteq A_{i+1}$, за $i \in \mathbf{N}$, па затоа за секои $m, n \ge n_0$ важи $A_m, A_n \subseteq A_{n_0}$. Според тоа, за секои $m, n \ge n_0$ важи $x_m, x_n \in A_{n_0}$, односно

$$\rho(x_m, x_n) \le d(A_{n_0}) < \varepsilon ,$$

т.е. низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

Метричкиот простор (X, ρ) е комплетен, па затоа низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон точка $x_0 \in X$. Ќе докажеме дека $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Нека претпоставиме дека $x_0 \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, т.е. дека постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $x_0 \notin A_k$. Множеството A_k е затворено, па од лема IX 9.12 следува *iii*) следува дека $\rho(x_0, A_k) = r > 0$, што значи дека A_k и отворената топка $B(x_0;\frac{r}{2})$ се дисјунктни. Според тоа, ако $n > k$, тогаш $x_n \in A_k$, па затоа $x_n \notin B(x_0;\frac{r}{2})$, што противречи на фактот дека $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Конечно, од добиената противречност следува дека $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Останува да ја докажеме единственоста на точката x_0. Нека $y \in X$ е таква, што $y \in A_i$, за $i \in \mathbf{N}$. Тогаш

$$\rho(x,y) \le d(A_n) \to 0, n \to \infty,$$

па затоа $x = y$.

ii) $\Rightarrow$ *i*) Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X. Ќе докажеме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна. Да ги разгледаме множествата

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, ...\},\ A_2 = \{x_2, x_3, x_4, ...\},\ A_3 = \{x_3, x_4, x_5, ...\},\ ... .$$

За овие множества важи $A_i \supseteq A_{i+1}$, за $i \in \mathbf{N}$, а од лема 1.8 следува $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. Понатаму, бидејќи $d(A_i) = d(\overline{A}_i)$, за $i \in \mathbf{N}$ добиваме дека $\overline{A}_i, i \in \mathbf{N}$ е низа непразни затворени множества такви што $\overline{A}_i \supseteq \overline{A}_{i+1}$, за $i \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n\to\infty} d(\overline{A}_n) = 0$, па од претпоставката следува дека $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \{x_0\}$.

Ќе докажеме дека Кошиевата низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x_0. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $\lim_{n\to\infty} d(\overline{A}_n) = 0$ следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $d(\overline{A}_n) < \varepsilon$, за секој $n \ge n_0$. Но, за множествата $\overline{A}_i, i \in \mathbf{N}$ важи $\overline{A}_i \supseteq \overline{A}_{i+1}$, за $i \in \mathbf{N}$, па затоа за секој $n \ge n_0$ важи $\overline{A}_n \subseteq \overline{A}_{n_0}$. Според тоа, за секој $n \ge n_0$ важи $x_0, x_n \in \overline{A}_{n_0}$, односно

$$\rho(x_0, x_n) \le d(\overline{A}_{n_0}) < \varepsilon,$$

т.е. низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x_0. ♦

2.8. Во следните два примера ќе покажеме дека во теорема 2.7 условите $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$ и множествата $A_i, i \in \mathbf{N}$ се затворени не може да се изостават.

Пример А. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}, \rho_1)$ да ги разгледаме множествата $A_i = [i, \infty)$, $i \in \mathbf{N}$. Јасно, просторот $(\mathbf{R}, \rho_1)$ е комплетен, разгледуваните множества се затворени и притоа важи $A_i \supseteq A_{i+1}$, за $i \in \mathbf{N}$. Меѓутоа, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Да забележиме дека за разгледуваните множества важи $\lim_{n\to\infty} d(A_n) \ne 0$. ♦

Пример Б. Во метричкиот простор $(\mathbf{R},\rho_1)$ да ги разгледаме множествата $A_i=(0,\frac{1}{i}]$, $i\in\mathbf{N}$. Јасно, просторот $(\mathbf{R},\rho_1)$ е комплетен, за разгледуваните множества важи $A_i\supseteq A_{i+1}$, за $i\in\mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n)=0$. Меѓутоа, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$. Да забележиме дека во случајов множествата $A_i, i\in\mathbf{N}$ не се затворени. ♦

2.9. Теорема. Нека метричките простори (X,ρ) и (Y,d) се изометрички. Просторот (X,ρ) е комплетен ако и само ако просторот (Y,d) е комплетен.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (Y,d). Бидејќи (X,ρ) и (Y,d) се изометрички, постои биекција $f:X\to Y$ за која важи

$$\rho(u,v)=d(f(u),f(v)),\ \text{за секои } u,v\in X .$$

Нека $x_n=f^{-1}(y_n)$. Тогаш, за секој $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков, што за секои $m,n\geq n_0$ важи

$$\rho(x_n,x_m)=d(f(x_n),f(x_m))=d(y_n,y_m)<\varepsilon ,$$

т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (X,ρ). Но, (X,ρ) е комплетен метрички простор, па затоа постои $x\in X$ таков, што $x_n\to x, n\to\infty$ во (X,ρ). Земаме $y=f(x)$ и добиваме

$$d(y_n,y)=d(f(x_n),f(x))=\rho(x_n,x)\to 0, n\to\infty ,$$

т.е. $y_n\to y, n\to\infty$ во (Y,d), што значи дека просторот (Y,d) е комплетен.

$\Leftarrow$. Обратната импликација следува од претходно изнесеното и од теорема X 5.4 б). ♦

2.10. Коментар. Како што видовме, ако (X,ρ) и (Y,d) се изометрички простори, тогаш комплетноста и сепарабилноста се својства кои се наследуваат, т.е. ако својството го има едниот простор, тогаш го има и другиот. Во натамошните разгледувања ќе докажеме дека за изометрички простори постојат и други својства кои се наследуваат, па затоа понекогаш е корисно да ги "идентификуваме" елементите на два изометрички простори (X,ρ) и (Y,d). Во овој дел ќе ја објасниме операцијата идентификација на елементите на изометричките простори (X,ρ) и (Y,d). Нека (X,ρ) и (Y^*,d) се метрички простори, $Y\subset Y^*$ и $f:X\to Y$ е изометрија. Да го разгледаме множеството $X^*=X\cup(Y^*\backslash Y)$, за кое очигледно важи $X^*\backslash X=Y^*\backslash Y$. Ќе дефинираме растојание во множеството X^*. За таа цел ќе ја разгледаме функцијата $F:X^*\to Y^*,$ определена со

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in X\\ x, & x\in X^*\backslash X.\end{cases}$$

Очигледно F е биекција. Според теорема X 5.5 со

$$\rho^*(x,y)=d(F(x),F(x)) \text{, за секои } x,y\in X^*$$

е определена метрика на X^*. Притоа (X^*,ρ^*) и (Y^*,d) се изометрички просто-ри и важи $F(X)=Y$.

Конечно, во просторот (Y^*,d) под идентификување на елементите на просторот (X,ρ) со елементите на нему изометричкиот простор (Y,d) ќе го подразбираме разгледувањето на просторот (X^*,ρ^*) наместо просторот (Y^*,d).

2.11. Теорема. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и (A,ρ) е негов потпростор. Ако просторот (A,ρ) е комплетен, тогаш A е затворено подмножество од X.

Доказ. Нека A е комплетен потпростор од X и нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа од A, која во X конвергира кон точката a. Ќе докажеме дека $a\in A$. Според лема 1.4 низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева и како таа припаѓа на A, кој е комплетен метрички простор, заклучуваме дека таа во A има граница, да кажеме точка b. Но, $b\in X$ и од теорема IX 3.4 следува $a=b\in A$. Конечно, од теорема IX 8.3 б) следува дека A е затворено подмножество од X. ♦

2.12. Теорема. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и (A,ρ) е негов потпростор. Ако A е затворено подмножество од X, тогаш (A,ρ) е комплетен метрички простор.

Доказ. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (A,ρ). Од $A\subseteq X$ следува дека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (X,ρ) и како (X,ρ) е комплетен метрички простор добиваме дека постои точка $x\in X$ таква, што $x_n\to x, n\to\infty$ во (X,ρ). Според тоа, x е атхерентна точка за A и како A е затворено множество добиваме дека $x\in A$, што значи просторот (A,ρ) е комплетен. ♦

2.13. Пример. Просторот c е комплетен. Согласно со пример 2.3 г) и теорема 2.12 доволно е да докажеме дека простор c разгледуван како потпростор од просторот l^{∞} е затворен во l^{∞}.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n=(x_{n1},x_{n2},x_{n3},...,x_{ni},...)$ е низа во c и $x_n\to y$, $n\to\infty$, каде $y=(y_1,y_2,y_3,...,y_n,...)$. Ќе докажеме дека низата $y_i, i=1,2,...$ конвергира, т.е. дека $y\in c$. Имаме

$$|y_i-y_j|\le|y_i-x_{ni}|+|x_{ni}-x_{nj}|+|x_{nj}-y_j|\le 2\rho(x_n,x)+|x_{ni}-x_{nj}|. \tag{5}$$

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $n\in\mathbf{N}$ таков, што

$$\rho(x_n,y)<\tfrac{\varepsilon}{4} \tag{6}$$

и да го фиксираме бројот n. Бидејќи низата $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots, x_{ni}, \ldots$ е конвергентна, таа е Кошиева, па затоа постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков, што за $i, j > n_0$ важи

$$|x_{ni} - x_{nj}| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Понатаму, од (5), (6) и (7) добиваме

$$|y_i - y_j| < \varepsilon$$

што значи, реалната низа $y_i, i = 1, 2, \ldots$ е Кошиева, па затоа таа е конвергентна. Конечно, $y \in c$, т.е. c е затворено множество во l^∞. ♦

2.14. Теорема. Декартовиот производ (Z, d_p) на метричките простори $(X_i, \rho_i), i = 1, 2, \ldots, n$, каде

$$d_p(x, y) = [(\rho_1(x_1, y_1))^p + (\rho_2(x_2, y_2))^p + \ldots + (\rho_n(x_n, y_n))^p]^{1/p}, \ p \geq 1 \tag{8}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2), \ldots, \rho_n(x_n, y_n)\}, \ p = \infty. \tag{9}$$

е комплетен метрички простор ако и само ако метричките простори (X_i, ρ_i), $i = 1, \ldots, n$ се комплетни.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека $(X_i, \rho_i), i = 1, \ldots, n$ се комплетни метрички простори и нека $\{(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})\}_{k=1}^\infty$ е Кошиева низа во (Z, d_p). Според последица 1.9 координатните низи $\{x_{ik}\}_{k=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се Кошиева во просторите $(X_i, \rho_i), i = 1, 2, \ldots, n$, соодветно. Но, просторите $(X_i, \rho_i), i = 1, 2, \ldots, n$ се комплетни, па затоа координатните низи $\{x_{ik}\}_{k=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$ се конвергентни. Конечно, од последица IX 14.6 следува дека низата $\{(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})\}_{k=1}^\infty$ конвергира во просторот (Z, d_p).

$\Rightarrow$. Обратното тврдење се докажува аналогно, деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3. ТЕОРЕМА НА БЕР

3.1. Теорема (Бер). Нека (X, ρ) е комплетен метрички простор и F_n, $n = 1, 2, \ldots$ е низа затворени подмножества такви што внатрешноста на секое од нив е празно множество, т.е. $F_n^0 = \varnothing$, за секој $n = 1, 2, \ldots$. Тогаш, множеството $X \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} F_n$ е секаде густо во X.

Доказ. Нека $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ се дадени. Треба да докажеме дека постои $y \in X \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} F_n$ таков, што $\rho(x, y) < \varepsilon$. За таа цел ќе ја разгледаме отворената топка $B(x;\varepsilon)$ и ќе докажеме дека во $B(x;\varepsilon)$ постои точка која припаѓа на $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$.

Бидејќи $B(x;\varepsilon) \neq \varnothing$ и $F_1^0 = \varnothing$ не може да биде $B(x;\varepsilon) \subseteq F_1$, па затоа постои точка $x_1 \in B(x;\varepsilon) \setminus F_1$. Но, множествата $X \setminus F_1$ и $B(x;\varepsilon)$ се отворени, па затоа постојат r_1', r_1'', $0 < r_1', r_1'' < 1$ такви, што $B(x_1;r_1') \subseteq X \setminus F_1$ и $B(x_1;r_1'') \subseteq B(x;\varepsilon)$. Земаме $r_1 = \frac{1}{2}\min\{r_1', r_1''\}$ и добиваме

$$\overline{B}_1(x_1;r_1) \subseteq B(x;\varepsilon),\ r_1 < \tfrac{1}{2}.$$

Понатаму, бидејќи $B(x_1;r_1) \neq \varnothing$ и $F_2^0 = \varnothing$ не може да биде $B_1(x_1;r_1) \subseteq F_2^0$, па затоа постои $x_2 \in B_1(x_1;r_1) \setminus F_2$. Но, множествата $X \setminus F_2$ и $B_1(x_1;r_1)$ се отворени, па затоа постојат r_2', r_2'', $0 < r_2', r_2'' < \frac{1}{2}$ такви, што $B(x_2;r_2') \subseteq X \setminus F_2$ и $B(x_2;r_2'') \subseteq B(x_1;r_1)$. За $r_2 = \frac{1}{2}\min\{r_2', r_2''\}$ добиваме

$$\overline{B}_2(x_2;r_2) \subseteq B_1(x_1;r_1),\ r_2 < \tfrac{1}{2^2}.$$

Продолжувајќи ја постапката конструираме низа отворени топки $B_i(x_i;r_i)$, $i = 1,2,...$ такви, што

$$\overline{B}_{i+1}(x_{i+1};r_{i+1}) \subseteq B_i(x_i;r_i),\ i = 1,2,... \tag{1}$$

$$B_i(x_i;r_i) \cap F_i = \varnothing\ ,i = 1,2,... \text{ и} \tag{2}$$

$$r_i < \frac{1}{2^i},\ \text{за } i = 1,2,.... \tag{3}$$

Сега, од теорема IX 9.7 *ii*) следува $\overline{B}_{i+1}(x_{i+1};r_{i+1}) \subseteq \overline{B}_i(x_i;r_i)$ и како $r_i \to 0$, $i \to \infty$ од теорема од теорема 2.5 следува дека постои единствена точка $y \in X$ таква, што $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i(x_i;r_i) = \{y\}$. Понатаму, од (1) следува $y \in B_i(x_i;r_i)$, $i = 1,2,...$, а од (2) следува дека $y \notin F_i$, $i = 1,2,...$, па затоа $y \in X \setminus \bigcup_{i\in\mathbf{N}} F_i$. Јасно, $y \in B_1(x_1;r_1) \subseteq B(x;\varepsilon)$. ♦

3.2. Теорема на Бер може да се искаже и со помош на таканаречените никаде густи множества. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За множеството A ќе велиме дека е *никаде густо* во X, ако неговиот затворач $\overline{A}$ не содржи ниедна отворена топка, т.е. ако $\overline{A}$ нема внатрешни точки.

Пример. Множеството $\mathbf{Z}^m = \{(z_1,z_2,...,z_m) \mid z_i \in \mathbf{Z}, i = 1,2,...,m\}$ е никаде густо во $(\mathbf{R}^m,\rho_2)$. Навистина, множеството $\mathbf{Z}^m$ е затворено во просторот $\mathbf{R}^m$, т.е. $\overline{\mathbf{Z}^m} = \mathbf{Z}^m$ и неговата внатрешност е празното множество. Затоа, $(\overline{\mathbf{Z}^m})^0 = (\mathbf{Z}^m)^0 = \varnothing$, што значи дека $\mathbf{Z}^m$ е никаде густо во просторот $\mathbf{R}^m$. ♦

3.3. Лема. Ако (X,ρ) е метрички простор и F е затворено множество во X, тогаш множеството $F \setminus F^0$ е никаде густо.

Доказ. Нека F е затворено множество во X. Според теорема IX 7.13 неговата внатрешност F^0 е отворено множество. Сега од теорема IX 8.4 в) следува дека множеството $F \setminus F^0$ е затворено, што според според последица IX 9.4 значи дека $\overline{F \setminus F^0} = F \setminus F^0$.

Нека претпоставиме дека $F \setminus F^0$ не е никаде густо. Од дефиниција 3.2 следува дека постојат $x^* \in \overline{F \setminus F^0}$ и $r^* > 0$ такви, што $B(x^*;r^*) \subseteq \overline{F \setminus F^0} = F \setminus F^0$. Понатаму, од $B(x^*;r^*) \subseteq F \setminus F^0$ следува $B(x^*;r^*) \subseteq F$ и $B(x^*;r^*) \cap F^0 = \varnothing$, т.е. x^* е внатрешна точка за множеството F и $x^* \notin F^0$, што е противречност. Конечно, од добиената противречноста следува дека множеството $F \setminus F^0$ е никаде густо. ♦

3.4. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За множеството $A \subseteq X$ ќе велиме дека е од *прва категорија* ако е унија од најмногу пребројливо многу никаде густи множества во X.

За множеството A ќе велиме дека е од *втора категорија* ако тоа не е од прва категорија.

Јасно, секое подмножество на множество од прва категорија е множество од прва категорија, но не секое подмножество на множество од втора категорија е множество од втора категорија. Имено, лесно се гледа дека множеството $\mathbf{R}^m$ е множество од втора категорија во просторот $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ и $\mathbf{Z}^m \subseteq \mathbf{R}^m$, но $\mathbf{Z}^m$ не е множество од втора категорија.

3.5. Пример. Множествата $\mathbf{Q}_q = \{(q_i, q) \mid q_i \in \mathbf{Q}\}, \quad q \in \mathbf{Q}$ се никаде густи во $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ и нив ги има пребројливо многу. Меѓутоа,

$$\bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \mathbf{Q}_q = \mathbf{Q}^2$$

и ова е секаде густо множество во $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$. Според тоа, множество од прва категорија може да биде секаде густо множество. ♦

3.6. Последица. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и $A \subseteq X$ е множество од прва категорија во X. Тогаш, множеството $X \setminus A$ е секаде густо во X и тоа е множество од втора категорија.

Доказ. Нека $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$, каде множествата A_n , $n \in \mathbf{N}$ се никаде густи во X . Тогаш, за множествата $F_n = \overline{A}_n$, важи $F_n^0 = \varnothing$, па од теорема 3.1 следува дека множеството $X \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$ е секаде густо во X . Понатаму, од $A_n \subseteq \overline{A}_n = F_n$, $n \in \mathbf{N}$ следува $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$, што значи

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n \subseteq X \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = X \setminus A$$

и како $X \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$ е секаде густо во X добиваме дека $X \setminus A$ е секаде густо во X . Јасно, $X \setminus A$ е множество од втора категорија. ♦

3.7. Последица (Бер). Секој комплетен метрички простор (X,ρ) е од втора категорија во себе.

Доказ. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор. Ако X е од прва категорија во себе, тогаш $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$, каде множествата A_n се никаде густи во X . Но, тогаш од последица 3.6 следува дека множеството

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = X \setminus X = \varnothing$$

е секаде густо во X , што е противреченост. Од добиената противречност следува дека X не е од прва категорија во себе, што значи X е од втора категорија во себе. ♦

3.8. Последица. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и нека U_n, $n = 1,2,...$ се отворени секаде густи множества во X . Тогаш, множеството $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} U_n$ е секаде густо во X .

Доказ. За секој $n \in \mathbf{N}$ важи $(X \setminus U_n)^0 \subseteq X \setminus U_n$, па затоа

$$U_n = X \setminus (X \setminus U_n) \subseteq X \setminus (X \setminus U_n)^0 \text{, за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Според теорема IX 7.13 множеството $(X \setminus U_n)^0$ е отворено, па затоа од теорема IX 8.4 в) следува дека множеството $X \setminus (X \setminus U_n)^0$ е затворено. Понатаму, за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $\overline{U}_n = X$, па од теорема IX 9.7 *ii*) следува

$$X = \overline{U}_n \subseteq \overline{X \setminus (X \setminus U_n)^0} = X \setminus (X \setminus U_n)^0 \text{, за секој } n \in \mathbf{N}.$$

Од последната инклузија следува $(X \setminus U_n)^0 = \varnothing$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Според теорема IX 8.4 в) множествата $F_n = X \setminus U_n$, $n \in \mathbf{N}$ се затворени и притоа

$$F_n^0 = (X \setminus U_n)^0 = \varnothing, \; n \in \mathbf{N},$$

т.е. внатрешноста на секое од нив е празно множество, па од теорема 3.1 следува дека множеството

$$X \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} (X \setminus F_n) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} U_n$$

е секаде густо во X. ♦

3.9. Последица. Секој комплетен метрички простор (X, ρ) без изолирани точки е непребројлив.

Доказ. Според претпоставката просторот X не содржи изолирани точки, па затоа секое едноелементно множество $\{x\} \subseteq X$ е никаде густо. Затоа, секое пребројливо множество A е множество од прва категорија, па од последица 3.6 следува дека множеството $X \setminus A$ е секаде густо, што значи $X \setminus A \neq \varnothing$. Значи, просторот X е непребројлив. ♦

4. ТЕОРЕМА НА БАНАХ

4.1. Теорема (Банах). Во метричкиот простор $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ множеството A кое ги содржи сите непрекинати функции кои имаат извод барем во една точка е множество од прва категорија, а множеството $\mathbf{C}([0,1]) \setminus A$ е множество од втора категорија.

Доказ. За секој $m \in \mathbf{N}$ со F_m да го означиме множеството од сите функции $f \in \mathbf{C}([0,1])$ со својство: постои барем една точка $x \in [0,1]$ таква, што за секој $y \in [0,1]$ важи

$$| f(y) - f(x) | \leq m \, | y - x |.$$

Чекор 1. Ќе докажеме дека за секој $m \in \mathbf{N}$ множеството F_m е затворено. Нека $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ е низа во F_m која конвергира кон f_0. Според пример IX 3.10 низата функции $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ рамномерно ковергира кон функцијата f_0. Нека $x_k \in [0,1]$ е точка за која важи

$$| f_k(y) - f_k(x_k) | \leq m \, | y - x_k |, \text{ за секој } y \in [0,1].$$

Но, $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ е низа во $[0,1]$ па затоа содржи конвергентна подниза $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$. Според тоа,

$$| f_{k_n}(y) - f_{k_n}(x_{k_n}) | \leq m \, | y - x_{k_n} |, \text{ за секој } y \in [0,1],$$

и ако земеме $n \to \infty$ добиваме

$$| f_0(y) - f_0(x_0) | \le m \, | y - x_0 |, \text{ за секој } y \in [0,1],$$

што значи $f_0 \in F_m$, т.е. множеството F_m е затворено.

Чекор 2. Ќе докажеме дека за секој $m \in \mathbf{N}$ множеството F_m е никаде густо во $\mathbf{C}([0,1])$. Нека $B(h;r)$ е произволна отворена топка во $\mathbf{C}([0,1])$. Непрекинатата функција $\varphi(x) = | x - \frac{1}{2} |, x \in [0,1]$ нема извод во точката $x = \frac{1}{2}$. Понатаму, функцијата $h - \varphi$ е непрекината, па од теоремата на Ваерштрас следува дека постои полином p таков што $| h(x) - \varphi(x) - p(x) | \le r$, за секој $x \in [0,1]$, што значи постои полином p таков што $g = p + \varphi \in B(h;r)$. Но, функцијата g нема извод во точката $x = \frac{1}{2}$, па затоа за реалниот број m постојат $\varepsilon \in (0,1)$ и $y \in [0,1]$, $y \ne x = \frac{1}{2}$ такви што важи $| \frac{g(y)-g(x)}{y-x} - m | \ge \varepsilon$. Значи,

$$m < \varepsilon + m \le \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = | \frac{g(y)-g(x)}{y-x} |, \text{ за некој } y \in [0,1], \; y \ne \frac{1}{2},$$

т.е.

$$m \, | y - x | < | g(y) - g(x) |, \text{ за некој } y \in [0,1], \; y \ne \frac{1}{2}.$$

Според тоа, $g \notin F_m$ и како множеството F_m е затворено, добиваме дека g не е точка на натрупување за множеството F_m. Последното значи дека постои отворена топка $B_1(g;r_1) \subseteq B(h;r)$ таква што $B_1(g;r_1) \cap F_m = \varnothing$. Но, $B(h;r)$ е произволна отворена топка во $\mathbf{C}([0,1])$, па од претходно изнесеното следува дека множеството F_m е никаде густо во $\mathbf{C}([0,1])$.

Чекор 3. Множеството $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ е пребројлива унија на никаде густи множества, па затоа тоа е множество од прва категорија. Но, $A \subseteq F$ (зошто?), па затоа A е множество од прва категорија, што значи множеството $\mathbf{C}([0,1]) \setminus A$ од сите непрекинати функции кои немаат извод во ниту една точка е множество од втора категорија. ♦

4.2. Коментар. Во претходната теорема всушност ја докажавме егзистенцијата на непрекинатите реални функции на затворен интервал кои немаат извод во ниту една точка. Последното не ја намалува вредноста на конструкцијата на примери на вакви функции, како што е следниот пример. Да забележиме дека множеството полиноми $P([0,1])$ е подмножество на множеството A, па затоа тоа е множество од прва категорија. Меѓутоа, како што знаеме ова множество е секаде густо во $\mathbf{C}([0,1])$, т.е. тоа е уште еден пример на множество од прва категорија кое е секаде густо.

4.3. Пример. Нека $f_1 : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbf{R}$ е определена со $f_1(x) = | x |$, $| x | \le \frac{1}{2}$ и истата периодично, со основна периода 1, ја продолжуваме на целата реална права, т.е. ставаме $f_1(x+k)=f_1(x)$, за секој $k\in\mathbf{Z}$ и за секој $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Понатаму, за секој $n>1$ со $f_n(x)=4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$ дефинираме $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Јасно, за секој $n\in\mathbf{N}$ функцијата f_n е периодична со основен период 4^{-n+1} и притоа важи $0\le f_n(x)\le 4^{-n+\frac{1}{2}}$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

Да го разгледаме функционалниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{1}$$

Бидејќи, $|f_n(x)|\le 4^{-n+\frac{1}{2}}$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} 4^{-n+\frac{1}{2}}=0$ од теорема VII 3.9 (Ваерштрас) следува дека редот (1) рамномерно конвергира на $\mathbf{R}$. Но, за секој $n\in\mathbf{N}$ функцијата f_n е непрекината на $\mathbf{R}$, па од теорема VII 4.1 следува дека границата $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x\in\mathbf{R}$ е непрекината на $\mathbf{R}$.

а) Нека $x\in\mathbf{R}$ и за секој природен број n бројот h_n го избираме така, што тој е еднаков на 4^{-n} или -4^{-n} и притоа важи $|f_n(x+h_n)-f_n(x)|=|h_n|$. Тогаш, за секој $m=1,...,n$ важи

$$|f_m(x+h_n)-f_m(x)|=|h_n|$$

и за секој $m>n$ важи

$$|f_m(x+h_n)-f_m(x)|=0.$$

Според тоа, количникот $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ е цел број, кој е парен ако n е парен број, а е непарен ако n е непарен број. Оттука следува, дека границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ не постои, па затоа не постои и $f'(x)$. Конечно, од произволноста на x следува дека непрекинатата функција f не е диференцијабилна во ниту една точка од $\mathbf{R}$, па затоа непрекинатата функција $g=f|_{[0,1]}$ не е диференцијабилна во ниту една точка од $[0,1]$.

б) Функцијата f има уште едно интересно својство. Имено, f е пример на функција која е непрекината, но не е монотона на ниту еден отворен интервал.

Да го разгледаме множеството точки $A=\{a\mid a=k4^{-m}, k\in\mathbf{Z}, m\in\mathbf{N}\}$. Нека $x\in\mathbf{R}$ и $\varepsilon>0$ е дадено. Согласно теорема на Архимед наоѓаме природен број m таков, што $4^m>\frac{1}{2\varepsilon}$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$4^m(x-\varepsilon)+1<4^m(x+\varepsilon).$$

Земаме $k=[4^m(x-\varepsilon)]+1$ и добиваме

$$4^m(x-\varepsilon)<k<4^m(x+\varepsilon),$$

т.е. $x-\varepsilon<\frac{k}{4^m}<x+\varepsilon$. Според тоа, за секој $x\in\mathbf{R}$ и за секој $\varepsilon>0$ постои $a\in A$ таков што $a\in B(x;\varepsilon)$, што значи дека множеството A е секаде густо во $\mathbf{R}$.

Нека $a\in A$, т.е. $a=k4^{-m}$, $k\in\mathbf{Z}, m\in\mathbf{N}$. Ако $n>m$, тогаш

$$f_n(a)=f_n(k4^{-m})=4^{-n+1}f_1(k4^{n-m-1})=4^{-n+1}f_1(0)=0,$$

па затоа

$$f(a)=f_1(a)+f_2(a)+...+f_m(a). \tag{2}$$

Нека $h_m=4^{-2m-1}$, $m\in\mathbf{N}$. Тогаш

$$a+h_m=(k4^{m+1}+1)4^{-2m-1}\in A \text{ и } a-h_m=(k4^{m+1}-1)4^{-2m-1}\in A$$

па затоа $f_n(a+h_m)=0$, за $n>2m+1$ и

$$f(a+h_m)=f_1(a+h_m)+f_2(a+h_m)+...+f_{2m+1}(a+h_m). \tag{3}$$

Понатаму, од (2) и (3) следува

$$\begin{aligned} f(a+h_m)-f(a)&=[f_1(a+h_m)-f_1(a)]+[f_2(a+h_m)-f_2(a)]+...+[f_m(a+h_m)-f_m(a)]+\\ &\quad+f_{m+1}(a+h_m)+f_{m+2}(a+h_m)+...+f_{2m+1}(a+h_m)\\ &\geq -mh_m+(m+1)h_m=h_m>0. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогно,

$$f(a-h_m)-f(a)\geq -mh_m+(m+1)h_m=h_m>0. \tag{5}$$

Нека (x,y) е отворен интервал. Множеството A е густо во $\mathbf{R}$, па затоа постои $a=k4^{-m}\in A$ таков што $x<k4^{-m}<y$. Понатаму, постои $n\in\mathbf{N}$ таков што $h_n=\frac{1}{4^{2n+1}}<\min\{a-x,y-a\}$. Но,

$$a=k4^{-m}=k4^{-m}4^n4^{-n}=(k4^{n-m})4^{-n}=k_1 4^{-n},$$

и од (4) и (5) добиваме

$$f(a+h_n)-f(a)\geq h_n>0 \text{ и } f(a-h_n)-f(a)\geq h_n>0$$

и како $a, a-h_n, a+h_n\in(x,y)$ добиваме дека функцијата f не е монотона на интервалот (x,y), што значи функцијата f не е монотона на ниту еден отворен интервал.♦

5. КОМПЛЕТИРАЊЕ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОР

5.1. Теорема (за комплетирање). Нека (X,ρ) е произволен метрички простор. Постои комплетен метрички простор (Y,d) со подмножество $\tilde{X}$ од Y такво, што

i) (X,ρ) е изометричен со $(\tilde{X},d)$, и

ii) $\tilde{X}$ е секаде густо во Y.

Просторот (Y,d) го нарекуваме *комплетирање* на просторот (X,ρ) и тој е единствен со точност до изометрија.

Доказ. Чекор 1. Да го разгледаме множеството S од сите Кошиеви низи

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \ldots$$

во просторот (X,ρ). Во множеството S ќе ја разгледаме следнава бинарна релација

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ако и само ако } \rho(x_n,y_n) \to 0, n\to\infty \text{ во } (X,\rho).$$

Јасно, вака дефинираната релација е рефлексивна и симетрична. Понатаму, нека

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ и } \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Тогаш,

$$\rho(x_n,z_n) \le \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,z_n) \to 0, n\to\infty$$

што значи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. релацијата е транзитивна. Според тоа, вака дефинираната релација е еквиваленција и таа го разбива множеството S на дисјунктни класи на еквиваленција. Со Y да го означиме множеството класи на еквиваленција.

Чекор 2. Нека $\tilde{x},\tilde{y} \in Y$. Од секоја од класите да земеме по една низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ќе докажеме дека границата $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)$ постои. Навистина, од лема IX 1.2 имаме

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x_m,y_m)| \le \rho(x_n,x_m) + \rho(y_n,y_m) \to 0, n\to\infty,$$

т.е. низата реални броеви $\{\rho(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, па затоа постои $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)$.

Ќе воведеме растојание во Y. Имено, за секои $\tilde{x},\tilde{y} \in Y$ дефинираме

$$d(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n), \text{ каде } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{x},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{y}.$$

Прво ќе докажеме дека вака дефинираниот број не зависи од изборот на претставниците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ на класите $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Навистина, нека $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n'\}_{n=1}^{\infty}$ се произволни низи од класите $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, соодветно. Од лема IX 1.4 имаме

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n')| \leq \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n') \to 0, n \to \infty$$

што значи

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n')$$

т.е. $d(\tilde{x}, \tilde{y})$ не зависи од изборот на претставниците на класите на еквиваленција.

Да ги провериме аксиомите за метрика.

i) Од $\rho(x_n, y_n) \geq 0$ следува

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \geq 0 .$$

Понатаму, $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ ако и само ако $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, односно ако и само ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. ако и само ако $\tilde{x} = \tilde{y}$.

ii) Јасно, $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, x_n) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$, за секои $\tilde{x}, \tilde{y} \in Y$.

iii) Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{x}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{y}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{z}$, тогаш

$$d(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}) .$$

Од досега изнесеното имаме дека (Y, d) е метрички простор.

Чекор 3. Ќе докажеме дека метричкиот простор (Y, d) е комплетен. Нека $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (Y, d), т.е. таква, што

$$d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to 0, \text{ кога } m, n \to \infty . \tag{1}$$

Од секоја класа $\tilde{x}_n$ земаме по една низа $\{x_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$, која е Кошиева, па затоа постои k_n таков што

$$\rho(x_{np}, x_{nk_n}) < \tfrac{1}{n}, \text{ за } p > k_n .$$

Сега да ја разгледаме низата $\{x_{nk_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Ќе докажеме дека оваа низа е Кошиева. Имаме

$$\rho(x_{nk_n}, x_{mk_m}) \leq \rho(x_{nk_n}, x_{np}) + \rho(x_{np}, x_{mp}) + \rho(x_{mp}, x_{mk_m}) . \tag{2}$$

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од (1) следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за $m, n \geq n_0$ важи

$$\lim_{p\to\infty} \rho(x_{np}, x_{mp}) = d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

па затоа за $m, n \geq n_0$ и доволно големо p имаме

$$\rho(x_{np}, x_{mp}) < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Притоа можеме да сметаме дека n_0 е таков, што $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$. Ги фиксираме m и n кои ги задоволуваат условите $m, n \geq n_0$ и можеме да избереме доволно големо p такво, што $p > k_m$, $p > k_n$. Тогаш, од изборот на броевите k_m и k_n имаме

$$\rho(x_{nk_n}, x_{np}) < \tfrac{1}{n} < \tfrac{\varepsilon}{4}, \qquad \rho(x_{mp}, x_{mk_m}) < \tfrac{1}{m} < \tfrac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Конечно, од (2), (3) и (4) следува

$$\rho(x_{nk_n}, x_{mk_m}) < \varepsilon,$$

што значи низата $\{x_{nk_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева.

Да ја означиме со $\tilde{x}$ класата на еквиваленција која ја содржи низата $\{x_{nk_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Ќе докажеме дека $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$, кога $n \to \infty$. Очигледно

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) &= \lim_{p\to\infty} \rho(x_{np}, x_{pk_p}) \leq \lim_{p\to\infty} \rho(x_{np}, x_{nk_n}) + \lim_{p\to\infty} \rho(x_{nk_n}, x_{pk_p}) \\ &< \tfrac{1}{n} + \lim_{p\to\infty} \rho(x_{nk_n}, x_{pk_p}). \end{aligned} \tag{5}$$

Бидејќи низата $\{x_{nk_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, за даденото $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што

$$\rho(x_{nk_n}, x_{pk_p}) < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

за $n, p \geq n_0$. Според тоа,

$$\lim_{p\to\infty} \rho(x_{nk_n}, x_{pk_p}) \leq \tfrac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

за $n \geq n_0$. Притоа, без ограничување на општоста можеме да земеме $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Конечно, од (5) и (6) следува, дека $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) < \varepsilon$, кога $n \geq n_0$ што значи дека низата $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ конвергира кон $\tilde{x}$ во (Y, d), т.е. (Y, d) е комплетен метрички простор.

Чекор 4. Да ги разгледаме стационарните низи во X, т.е. низите од видот $x_i = x$, $i = 1, 2, \dots$. Јасно, секоја од овие низи е Кошиева и затоа припаѓа на некоја класа на еквиваленција, т.е. на некој елемент на Y. Очигледно, на една иста класа припаѓа само една стационарна низа и множеството од овие класи на еквиваленција да го означиме со $\tilde{X}$. Притоа, ако $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, тогаш

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y). \tag{7}$$

Да го разгледаме пресликувањето $F : X \to \tilde{X}$ определено со $F(x) = \tilde{x}$. Јасно, ова пресликување е биекција и од (7) следува дека тоа е изометрија од X на $\tilde{X}$.

Чекор 5. Ќе докажеме дека $\tilde{X}$ е секаде густо во Y, т.е. дека за секој $\varepsilon > 0$ и за секој $\tilde{x} \in Y$ постои $\tilde{x}_\varepsilon \in \tilde{X}$ таков, што $d(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) < \varepsilon$. Нека $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \tilde{x}$.

Бидејќи низата $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ е Кошиева постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков, што $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, за $m, n \geq n_0$. Да ја разгледаме стационарната низа $\{x_{n_0}\}$ и со $\tilde{x}_\varepsilon$ да ја означиме класата која ја содржи оваа низа. Очигледно $\tilde{x}_\varepsilon \in \tilde{X}$ и притоа важи

$$d(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_{n_0}) \leq \varepsilon ,$$

што и требаше да се докаже.

Чекор 6. Ќе ја докажеме единственоста на Y со точност до изометрија. Нека (Y, d) и (Y_1, d_1) се две комплетирања на метричкиот простор (X, ρ) и $F : X \to \tilde{X}$, $F_1 : X \to \tilde{X}_1$ се изометриите при што $\tilde{X}$ и $\tilde{X}_1$ се секаде густи во Y и Y_1, соодветно. Ќе докажеме дека (Y, d) и (Y_1, d_1) се изометрички простори.

Нека $\tilde{y} \in Y$. Бидејќи $\tilde{X}$ е густ во Y постои низа $\{\tilde{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\tilde{y}_n \in \tilde{X}$ таква, што $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{y}_n = \tilde{y}$. Но, $F : X \to \tilde{X}$ е изометрија, па затоа $\tilde{y}_n = F(x_n)$, $x_n \in X$ и како низата $\{\tilde{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева добиваме дека и низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. Понатаму, $F_1 : X \to \tilde{X}_1$ е изометрија, па затоа низата $\{F_1(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева и како $\tilde{X}_1$ е густо подмножество од комплетниот метрички простор Y_1 добиваме дека низата $\{F_1(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна во Y_1. Нека $\tilde{z} = \lim\limits_{n \to \infty} F_1(x_n)$. Дефинираме $h : Y \to Y_1$, $h(\tilde{y}) = \tilde{z}$. Јасно, пресликувањето h е добро дефинирано и тоа е биекција. Останува да покажеме дека h е изометрија. Нека $\tilde{u} \in Y$ и $\tilde{v} \in Y_1$ се такви, што $h(\tilde{u}) = \tilde{v}$. Тогаш, постои $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\tilde{u}_n \in \tilde{X}$ таква, што $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{u}_n = \tilde{u}$ и нека $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата во X за која и $\tilde{u}_n = F(s_n)$. Сега, од дефиницијата на h имаме дека $\tilde{v} = \lim\limits_{n \to \infty} F_1(s_n)$. Конечно,

$$\begin{aligned} d(\tilde{y}, \tilde{u}) &= \lim_{n \to \infty} d(\tilde{y}_n, \tilde{u}_n) = \lim_{n \to \infty} d(F(x_n), F(s_n)) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, s_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} d_1(F_1(x_n), F_1(s_n)) = d_1(\tilde{z}, \tilde{v}) = d_1(h(\tilde{y}), h(\tilde{u})), \end{aligned}$$

т.е. h е изометрија. ♦

5.2. Забелешка. Претходната теорема, во која го докажавме комплетирањето на апстрактен метрички простор, се содржи во конструкцијата на реалните броеви, која ја дадовме во параграф I 17. Во наведениот параграф, ние всушност реалните броеви ги конструиравме со комплетирање на метричкиот простор $(\mathbf{Q}, \rho)$, каде

$$\rho(x, y) = | x - y |, \text{ за } x, y \in \mathbf{Q} .$$

5.3. Пример. а) Нека $(P([0,1]), \rho_\infty)$ е просторот полиноми дефинирани на $[0,1]$ во кој метриката е определена со

$$\rho_\infty(p,q)=\max_{t\in[0,1]}|p(t)-q(t)|.$$

Ако $x(t)$ е непрекината функција на $[0,1]$ која не е полином, тогаш од теоремата на Ваерштрас следува дека постои низа полиноми $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ таква, што $\rho(p_n,x)\to 0, n\to\infty$. Значи, $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева низа во $(P([0,1]),\rho_\infty)$, но таа не е конвергентна во него, т.е. $(P([0,1]),\rho)$ не е комплетен метрички простор. Бидејќи $(P([0,1]),\rho_\infty)$ е секаде густ во $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_\infty)$ од теорема 5.1 следува дека неговото комплетирање е простор изометричен со $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_\infty)$.

б) Да го разгледаме множеството

$$c_{00}=\{x\in l^p \mid x_j=0 \text{ почнувајќи од некој конечен индекс } j\}.$$

Јасно, c_{00} е потпростор од $l^p, 1\le p<\infty$ и истиот не е комплетен. Навистина, за низата

$$x_i=(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2^2},\dots,\tfrac{1}{2^{i-1}},0,0,..),\ i=1,2,...$$

важи

$$\rho(x_m,x_n)=(\sum_{i=m}^{n-1}\frac{1}{2^{ip}})^{1/p}\to 0\text{, кога } m,n\to\infty, m<\infty,$$

т.е. таа е Кошиева, но во просторот c_{00} нема граница. Со X да го означиме комплетирањето на c_{00}. Бидејќи c_{00} е секаде густ во l^p од теорема 5.1 следува дека X е изометричен со l^p, што значи дека комплетирањето на c_{00} доведува до простор кој е изометричен со l^p. ♦

6. НЕПРЕКИНАТОСТ И КОМПЛЕТНОСТ

6.1. Теорема. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и $f_i:X\to\mathbf{R}$, $i\in I$ фамилија непрекинати реални функции. Ако за секој $x\in X$ важи

$$\sup\{|f_i(x)|\,|\,i\in I\}<\infty,$$

тогаш постои отворена топка $B(x_0;r)$ и реален број $M>0$ такви, што

$$|f_i(x)|<M\text{, за секој } x\in B(x_0;r) \text{ и за секој } i\in I.$$

Доказ. За секој $i\in I$ функцијата f_i е непрекината, што значи функцијата $|f_i|$ е непрекината и како за секој $n\in\mathbf{N}$ функцијата $g:X\to\mathbf{R}$ определена со $g(x)=n$, за секој $x\in X$ е непрекината, од теорема X 2.12 следува дека за секои $i\in I$ и за секој $n\in\mathbf{N}$ множеството

$$G_{in} = \{x \in X \mid | f_i(x) | \leq n\}$$

е затворено. Понатаму, од теорема IX 8.2 следува дека множеството $F_n = \bigcap_{i \in I} G_{in}$ е затворено и истото се состои од сите точки $x \in X$ за кои $| f_i(x) | \leq n$, за секој $i \in I$. Според претпоставката за секој $x \in X$ множеството $\{| f_i(x) | \mid i \in I\}$ е ограничено, па затоа $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$. Но, метричкиот простор X е комплетен, па од последица 3.7 следува дека X е од втора категорија. Според тоа, барем едно од затворените множества F_n содржи некоја отворена топка $B(x_0; r)$ и нека тоа е множеството F_{n_0}. Конечно, ставаме $M = n_0 + 1$ и од $B(x_0; r) \subset F_{n_0}$ следува дека $| f_i(x) | < M$, за секој $x \in B(x_0; r)$ и за секој $i \in I$. ♦

6.2. Лема. Ако (X, ρ), (Y, d) се метрички простори, $f : X \to Y$ рамномерно непрекината функција и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X, тогаш $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во Y.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од рамномерната непрекинатост на f следува дека постои $\delta > 0$ таков што $x, y \in X$ за кои $\rho(x, y) < \delta$ важи $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Но, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во X, па затоа постои природен број n_0 таков што за секои $m, n > n_0$ важи $\rho(x_m, x_n) < \delta$, што значи $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. Според тоа, за даденото $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што за секои $m, n > n_0$ важи

$$d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon,$$

што значи низата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. ♦

6.3. Во претходната лема докажавме дека ако $f : X \to Y$ е рамномерно непрекината функција, тогаш Кошиева низа се пресликува во Кошиева. Природно е да се запрашаме дали, ако $f : X \to Y$ е непрекината функција и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X, тогаш $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во Y? Одговорот на поставеното прашање е негативен, што може да се види од следниов пример.

Пример. Нека $X = (0,1]$ со обичната метрика и $\rho(x, y) = | x - y |$, $x, y \in (0,1]$, $Y = [1, \infty)$ со обичната метрика $d(x, y) = | x - y |$, $x, y \in [1, \infty)$ и $f : X \to Y$ е определено со $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$. Очигледно f е непрекината функција. Да ја разгледаме низата $x_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Јасно низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, меѓутоа за низата $f(x_n) = n, n \geq 1$ важи $| f(x_m) - f(x_n) | \geq 1$, за секои $m, n \geq 1$, $m \neq n$. Според тоа, низата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не е Кошиева. ♦

6.4. Во теоремите X 7.9 и XI 1.8 и последица XI 2.9 докажавме кои својства се пренесуваат во случај на еквивалентни метрики. Во овој дел ќе дадеме пример на на еквивалентни метрики ρ и d на множеството X такви што просторот (X,ρ) е комплетен, но просторот (X,d) да не е комплетен.

Пример. Просторот $(\mathbf{R},\rho)$ со обичната метрика $\rho(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbf{R}$ е комплетен. Во пример X 7.5 покажавме дека метриката

$$d(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|,\ x,y\in\mathbf{R}$$

е еквивалентна на метриката ρ. Меѓутоа, метричкиот простор $(\mathbf{R},d)$ не е комплетен. Имено, $(\mathbf{R},d)$ е изометричен со отворениот интервал $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ со обичната метрика и како овој простор не е комплетен од теорема 2.9 следува дека $(\mathbf{R},\rho)$ не е комплетен метрички простор. ♦

6.5. Теорема. Ако ρ и d се рамномерно еквивалентни метрики на множеството X, тогаш (X,ρ) е комплетен метрички простор ако и само ако (X,d) е комплетен.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во (X,d). Метриките ρ и d се рамномерно еквивалентни, па од теорема X 8.3 следува дека функцијата $\mathrm{id}_X:(X,d)\to(X,\rho)$ е рамномерно непрекината. Сега, од лема 6.2 следува дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во (X,ρ). Но, (X,ρ) е комплетен метрички простор, па затоа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во (X,ρ). Сега од теорема X 7.9 а) следува дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во (X,d), т.е. просторот (X,d) е комплетен.

$\Leftarrow$. Аналогно се докажува дека од комплетноста на (X,d) следува комплетноста на (X,ρ). ♦

6.6. Теорема. Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори, множеството $A\subseteq X$ е секаде густо во X и $f:A\to Y$ е рамномерно непрекината функција. Ако просторот (Y,d) е комплетен, тогаш постои една и единствена непрекината функција $g:X\to Y$ таква, што $g_{|A}=f$. Притоа функцијата g е рамномерно непрекината.

Доказ. Од последица XI 1.8 следува дека постои најмногу една функција со наведените својства.

Ќе ја докажеме егзистенцијата на функцијата $g:X\to Y$ таква што $g_{|A}=f$. Нека $x\in X$. Множеството A е секаде густо во X, па од теорема XI 1.6 *iii*) следува дека во A постои низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ која конвергира кон x. Според лема 1.3 низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во X, па од лема 6.2 следува дека низата $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во Y и како просторот (Y,d) е комплетен заклучуваме дека постои точка $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \in Y$ и истата не зависи од изборот на низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Навистина, ако $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е друга низа од A која конвергира кон x, тогаш и низата $a_1, b_1, a_2, b_2, ...$ конвергира кон x, па затоа постои граница y на низата $f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), ...$. Но, од лема IX 3.17 следува дека

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = y.$$

Конечно, функцијата $g: X \to Y$ ја дефинираме така што ставаме

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n),\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ е низа во } A \text{ таква, што } a_n \to x, n \to \infty.$$

Притоа, ако $x \in A$, тогаш земаме $a_n = x$, за $n = 1, 2, ...$, па затоа

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x),$$

од што следува $g_{|A} = f$.

Ќе докажеме дека функцијата $g: X \to Y$ е рамномерно непрекината. Бидејќи функцијата $f: A \to Y$ е рамномерно непрекината, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секои $a, b \in A$ такви што $\rho(a,b) < \delta$ важи $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Нека сега $x, z \in X$ се такви што $\rho(x,z) < \delta$ и нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се низи кои конвергираат кон x и z, соодветно. Тогаш, од теорема IX 3.5 следува

$$\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(x,z) < \delta.$$

Според тоа, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\rho(a_n, b_n) < \delta, \text{ кога } n > n_0,$$

па затоа

$$d(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon, \text{ кога } n > n_0.$$

Конечно, од

$$d(g(x), g(y)) = d(\lim_{n\to\infty} f(a_n), \lim_{n\to\infty} f(b_n)) = \lim_{n\to\infty} d(f(a_n), f(b_n)) \le \varepsilon$$

следува дека g е рамномерно непрекината функција. ♦

6.7. Последица. Нека (X,ρ), (Y,d) се метрички простори, (X^*,ρ^*), (Y^*,d^*) се нивните комплетирања и $f: X \to Y$ е рамномерно непрекината функција. Тогаш постои единствена непрекината функција $g: X^* \to Y^*$ таква, што $g \circ i_X = i_Y \circ f$, каде $i_X : X \to X^*$ и $i_Y : Y \to Y^*$ се изометриите од теорема 5.1.

Притоа, функцијата g е рамномерно непрекината. ♦

7. ТЕОРЕМА НА БАНАХ ЗА ФИКСНА ТОЧКА

7.1. Дефиниција. Нека X е множество и $f: X \to X$. Точката $x \in X$ ја нарекуваме *неподвижна* (*фиксна*) за функцијата f, ако $f(x) = x$.

7.2. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За пресликувањето $f: X \to X$ ќе велиме дека е *контракција* ако постои $\lambda \in [0,1)$ таков, што

$$\rho(f(x), f(y)) \le \lambda\rho(x,y) \text{, за секои } x, y \in X. \tag{1}$$

7.3. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако $f: X \to X$ е контракција, тогаш, f е рамномерно непрекината на X.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено и $\lambda \in [0,1)$ е константата од дефиниција 7.2. Ако $\lambda = 0$, тогаш

$$\rho(f(x), f(y)) = 0 \text{, за секои } x, y \in X,$$

т.е. $f(x) = f(y)$, за секои $x, y \in X$, што значи дека f е рамномерно непрекината на X. Ако $\lambda \ne 0$, земаме $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ и добиваме дека за секои $x, y \in X$ такви што $\rho(x,y) < \delta$ важи

$$\rho(f(x), f(y)) \le \lambda\rho(x,y) < \lambda\delta = \varepsilon,$$

што значи дека f е рамномерно непрекината на X. ♦

7.4. Теорема (Банах). Ако (X,ρ) е комплетен метрички простор и $f: X \to X$ е контракција, тогаш f има единствена неподвижна точка.

Доказ. Нека x_0 е произволна точка во X. Да ја разгледаме низата

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

Ќе докажеме дека оваа низа е Кошиева. За секој $n \ge 1$ имаме

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1}) \le \lambda\rho(x_n, x_{n-1}) \le \dots \le \lambda^n \rho(x_1, x_0).$$

Од последното неравенство добиваме дека за секои $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$ важи

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &\le \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n) \\ &\le \lambda^m \rho(x_1, x_0) + \lambda^{m+1}\rho(x_1, x_0) + \dots + \lambda^{n-1}\rho(x_1, x_0) \le \tfrac{\lambda^m}{1-\lambda}\rho(x_1, x_0)\end{aligned} \tag{2}$$

и како $\lambda \in [0,1)$, од неравенството (2) следува дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева. Но, (X,ρ) е комплетен метрички простор, па затоа постои $x^* \in X$ таков што

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*. \tag{3}$$

Понатаму, f е контракција, па затоа

$$\rho(x_{n+1}, f(x^*)) = \rho(f(x_n), f(x^*)) \le \lambda \rho(x_n, x^*)$$

т.е

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, f(x^*)) \le \lim_{n\to\infty} \lambda^{n+1} \rho(x_0, x^*) = 0$$

што значи $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, f(x^*)) = 0$, односно

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f(x^*) . \tag{4}$$

Конечно, од равенствата (3) и (4) следува $x^* = f(x^*)$, т.е. x^* е неподвижна точка за X.

Останува да докажеме дека точката x^* е единствена. Нека претпоставиме дека за некој $z \in X$ важи $f(z) = z$. Тогаш,

$$\rho(z, x^*) = \rho(f(z), f(x^*)) \le \lambda \rho(z, x^*) ,$$

а тоа е можно ако и само ако $z = x^*$. ♦

7.5. Забелешка. а) Доказот на теорема 7.4 има конструктивен карактер. Имено, елементите на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ се приближувања кон неподвижната точка x^*, при што точноста на приближувањето е дадена со неравенството (3).

б) Од условот на теоремата на Банах не може да се елиминира барањето $\lambda < 1$. Навистина, во просторот $(\mathbf{R}, \rho)$ да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x + x, \; x \in \mathbf{R} .$$

Лесно се докажува дека за оваа функција важи

$$| f(x) - f(y) | = | x - \operatorname{arctg} x - y + \operatorname{arctg} y | < | x - y | \text{ при } x \ne y ,$$

но таа нема неподвижна точка. Имено, ако постои $x^* \in \mathbf{R}$ таква што $f(x^*) = x^*$, тогаш

$$x^* = f(x^*) = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^* + x^* ,$$

т.е. $\operatorname{arctg} x^* = \frac{\pi}{2}$ што е противречност.

7.6. Последица. Нека (X, ρ) е комплетен метрички простор, $f : X \to X$ и за некој $m \in \mathbf{N}$ функцијата f^m е контракција. Тогаш, функцијата f има единствена неподвижна точка.

Доказ. Јасно, функцијата f може да има само една неподвижна точка, бидејќи неподвижната точка за f е неподвижна и за f^m. Нека x^* е неподвижна точка за f^m, т.е $f^m(x^*) = x^*$ и $\lambda \in [0,1)$ е константата од дефиниција 7.2. Тогаш,

$$\rho(x^*, f(x^*)) = \rho(f^m(x^*), f^{m+1}(x^*)) \le \lambda \rho(x^*, f(x^*)),$$

од што следува

$$(1-\lambda)\rho(x^*, f(x^*)) \le 0 .$$

Но, $\lambda \in [0,1)$ па од последното неравенство следува $\rho(x^*, f(x^*)) = 0$, што значи $f(x^*) = x^*$. ♦

7.7. Забелешка. Понекогаш разгледуваме функција f за која неравенството (1) не е исполнето на целиот простор, туку само во некоја затворена околина $\overline{B}(\overline{x},;r)$ на некоја точка $\overline{x} \in X$. Тогаш, контракцијата може да се разгледува при дополнителен услов $f(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$ и притоа последователните приближувања се во $\overline{B}$. Нека, на пример, покрај неравенството (1) функцијата f го задоволува и неравенството

$$\rho(\overline{x}, f(\overline{x})) \le (1-\lambda)r .$$

Ако $\overline{B}(\overline{x};r)$, тогаш

$$\rho(f(x),\overline{x}) \le \rho(f(x), f(\overline{x})) + \rho(f(\overline{x}),\overline{x}) \le \lambda\rho(x,\overline{x}) + \rho(f(\overline{x}),\overline{x}) \le \lambda r + (1-\lambda)r = r,$$

т.е. $f(x) \in \overline{B}(\overline{x},;r)$. Затоа f може да се разгледува како функција на комплетниот метрички простор $\overline{B}(\overline{x},;r)$ и таа на овој простор го задоволува условот (1). Но, тогаш од теорема 7.4 следува дека f во $\overline{B}(\overline{x},;r)$ има единствена неподвижна точка.

7.8. Ако (X,ρ) е комплетен метрички простор и $f: X \to X$, тогаш за да ја примениме теоремата на Банах за фиксна точка мора да констатираме дека f е контракција во однос на метриката ρ. Меѓутоа, ако функцијата f не е контракција, тогаш во некои случаи може да се најде друга метрика d во однос на која X е комплетен метрички простор и функцијата f во однос на оваа метрика е контракција.

Пример. Да го разгледаме комплетниот метрички простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ и функцијата $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ определена со

$$f(\mathbf{z}) = (\tfrac{x}{10}+\tfrac{y}{10}, \tfrac{8x}{10}+\tfrac{8y}{10}), \text{ за секој } \mathbf{z} = (x,y) \in \mathbf{R}^2 .$$

За точките $\mathbf{o} = (0,0)$ и $\mathbf{a} = (2,6)$ имаме $f(\mathbf{o}) = (0,0)$ и $f(\mathbf{a}) = (\frac{8}{10},\frac{64}{10})$, па затоа

$$\begin{aligned}\rho_2(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{o})) &= \sqrt{(\tfrac{8}{10}-0)^2 + (\tfrac{64}{10}-0)^2} = \tfrac{4\sqrt{65}}{5} \\ &> \sqrt{40} = \sqrt{(6-0)^2+(2-0)^2} = \rho_2(\mathbf{a},\mathbf{o}),\end{aligned}$$

што значи дека во однос на метриката ρ_2 функцијата f не е контракција.

Од друга страна, за секои $\mathbf{z} = (x,y), \mathbf{w} = (u,v) \in \mathbf{R}^2$ имаме:

$$\rho_1(f(\mathbf{z}),f(\mathbf{w})) = \left|\frac{x}{10}+\frac{y}{10}-\frac{u}{10}-\frac{v}{10}\right| + \left|\frac{8x}{10}+\frac{8y}{10}-\frac{8u}{10}-\frac{8v}{10}\right|$$
$$\leq \frac{1}{10}|x-u| + \frac{1}{10}|y-v| + \frac{8}{10}|x-u| + \frac{8}{10}|y-v|$$
$$= \frac{9}{10}(|x-u|+|y-v| = \frac{9}{10}\rho_1(\mathbf{z},\mathbf{w}),$$

што значи дека во однос на метриката ρ_1 функцијата f е контракција со коефициент $\lambda = \frac{9}{10}$. ♦

7.9. Коментар. Од разгледаниот пример можеме да заклучиме, дека секоја метрика ρ во однос на која X е комплетен метрички простор е определена фамилија $\mathcal{K}(\rho)$ функции $f: X \to X$ кои се контракции во однос на метриката ρ. Притоа, претходниот пример покажува дека во општ случај $\mathcal{K}(\rho) \neq \mathcal{K}(d)$, дури и кога метриките ρ и d се рамномерно еквивалентни.

8. ПРИМЕНА НА ТЕОРЕМАТА НА БАНАХ ЗА ФИКСНА ТОЧКА

8.1. Решавање на равенка од видот $f(x) = x$. Во лема III 8.6 докажавме дека секоја функција $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ која го задоволува условот на Холдер од ред α е рамномерно непрекината. Класата на функции кои го задоволуваат условот на Холдер од ред α ќе ја означиме со $\mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$.

Од досега изнесеното имаме дека $f \in \mathrm{Lip}_\alpha([a,b])$ ако постојат $\alpha, L > 0$ такви, што

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^\alpha \text{, за секои } x,y \in [a,b].$$

Нека $f \in \mathbf{C}^{(1)}([a,b])$, т.е. f има непрекинат извод f' на $[a,b]$. Од теорема III 7.5 следува дека постои $x_0 \in [a,b]$ таков, што $|f'(x)| \leq |f'(x_0| = L$, за секој $x \in [a,b]$. Сега, од теоремата на Лагранж (теорема IV 10.5) следува дека

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^1 \text{, за секои } x,y \in [a,b],$$

т.е. $f \in \mathrm{Lip}_1([a,b])$, што значи $\mathbf{C}^{(1)}([a,b]) \subseteq \mathrm{Lip}_1([a,b])$.

Теорема. Нека $f:[a,b] \to [a,b]$ и $f \in \mathrm{Lip}_1([a,b])$ со константа L. Тогаш, постои единствена точка $x^* \in [a,b]$ таква, што $f(x^*) = x^*$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 7.4 применета на просторот (X,ρ), $X = [a,b]$, $\rho(x,y) = |x-y|$ и функцијата f. ♦

Коментар. Да забележиме дека претходната теорема може да се докаже и елементарно, меѓутоа теоремата на Банах овозможува при дадените услови почнувајќи од произволна точка $x_0 \in [a,b]$ да најдеме низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ која конвергира кон решението x^* на равенката $f(x) = x$.

Пример. Со точност до петто децимално место решете ја равенката

$$x = \pi + \log x . \tag{1}$$

Решение. Во дадениот случај имаме $f(x) = \pi + \log x$. Ако ги нацраме графиците на функциите $y = x$ и $y = f(x)$ ќе забележиме дека тие се сечат на интервалите $(0,1]$ и $[4,+\infty)$, што значи дека на овие интервали равенката (1) има по едно решение. Понатаму, $f'(x) = \frac{1}{x}$ и како $\sup\{f'(x) \mid x \in (0,1]\} = +\infty$ заклучуваме дека на интервалот $(0,1]$ не можеме да ја примениме претходната теорема. Понатаму, бидејќи

$$\sup\{f'(x) \mid x \in [4,+\infty)\} = \frac{1}{4}$$

добиваме дека $f \in \mathrm{Lip}_1([4,+\infty))$, т.е.

$$| f(x) - f(y) | \le \frac{1}{4} | x - y | .$$

Според тоа, едно решение на равенката (1) можеме да добиеме како граница на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ за која, на пример, важи $x_0 = 4$ и $x_{n+1} = f(x_n)$.

За да го добиеме другото решение на равенката (1) истата ќе ја запишеме во видот $x = g(x)$, каде $g(x) = e^{x-\pi}$. Понатаму, функцијата $g(x)$ монотоно расте, позитивна е во 0 и во 1 прима вредност $e^{1-\pi} < 0{,}12$ и како $g'(x) = g(x)$ добиваме

$$\sup\{g'(x) \mid x \in [0,1]\} = L < 0{,}12 .$$

Бидејќи $g([0,1]) \subseteq [0,1]$ според забелешка 7.7 функцијата g е контракција на $[0,1]$, т.е. $| g(x) - g(y) | \le L | x - y | < 0{,}12 | x - y |$, за секои $x, y \in [0,1]$. Според тоа, второто решение на равенката (1) можеме да го добиеме како граница на низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ за која, на пример, важи $y_0 = 1$ и $y_{n+1} = f(y_n)$.

n	x_n	$d(x_n, x_{n+1})$	y_n	$d(y_n, y_{n+1})$
0	4,000000		1,000000	
1	4,527887	0,527887	0,117468	0,882532
2	4,651848	0,123961	0,048600	0,068868
3	4,678857	0,027009	0,045366	0,003234
4	4,684647	0,005790	0,045220	0,000146
5	4,685883	0,001236	0,045213	0,000007
6	4,686147	0,000264	0,045212	0,000001
7	4,686203	0,000056		
8	4,686215	0,000012		
9	4,686218	0,000003		

Во горната табела се дадени првите неколку членови на низите $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, со што се најдени решенијата на равенката (1) со точност до петтото децимално место (разликата на две последователни приближувања е помала од $3 \bullet 10^{-6}$, односно $1 \bullet 10^{-6}$). ♦

8.2. Теорема (решавање на равенка од видот $F(x)=0$). Нека $F:[a,b] \to \mathbf{R}$, при што $F(a)<0<F(b)$ и постојат константи $m,M \in \mathbf{R}$, $0<m \le M$ такви, што $m \le F'(x) \le M$ за секој $x \in [a,b]$. Тогаш, постои единствена точка $x^* \in [a,b]$ таква, што $F(x^*)=0$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 7.4 применета на просторот (X,ρ), $X=[a,b]$, $\rho(x,y)=|x-y|$ и функцијата

$$f(x)=x-\lambda F(x)\,,\, x \in [a,b]$$

каде $\lambda \in (0,M^{-1})$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

Всушност претходната теорема, при дадените услови овозможува приближно решавање на равенка од видот $F(x)=0$. Јасно, и во овој случај важи коментарот од теоремата во 8.1.

8.3. Теорема (решавање на систем линеарни равенки). Нека $A=[a_{ij}]_{m\times m}$ е реална матрица таква што

$$\lambda^2=\sum_{i,j=1}^{m}(a_{ij}+\delta_{ij})^2<1,\;\; \delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\ne j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

Тогаш, за секој $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m$ постои единствено решение на системот $A\mathbf{x}=\mathbf{a}$.

Доказ. Во комплетниот метрички простор $(\mathbf{R}^m,\rho_2)$ функцијата $f:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ определена со

$$f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}+\mathbf{x}-\mathbf{a}\,,\;\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \tag{2}$$

е контракција.

Навистина, за секои $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ важи

$$\begin{aligned}\rho^2(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))&=\sum_{i=1}^{m}[f_i(\mathbf{x})-f_i(\mathbf{y})]^2=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j-x_i-a_i\sum_{j=1}^{m}a_{ij}y_j-y_i-a_i)^2\\ &=\sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}+\delta_{ij})(x_j-y_j)]^2\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}+\delta_{ij})^2\sum_{j=1}^{m}(x_j-y_j)^2\\ &\le\lambda^2\rho^2(\mathbf{x},\mathbf{y}),\end{aligned}$$

па затоа

$$\rho(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \le \lambda\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

т.е. функцијата (2) е контракција. Согласно со теорема 7.4 постои единствена точка $\mathbf{x}^*$ таква, што $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$, т.е. $A\mathbf{x}^* = \mathbf{a}$. Притоа

$$\mathbf{x}^* = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$$

во $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$, каде $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ е произволна точка и

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_n - \mathbf{a}\,,\ n = 0,1,2,\dots .$$

Освен тоа, за секој $i, 1 \le i \le m$ важи

$$| x_i^* - x_{in} | \le \rho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_n) \le \tfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)\,,\ n = 0,1,2,\dots . \ ♦$$

8.4. Теорема (за егзистенција и единственост на решение на диференцијална равенка). Нека функцијата $F:[a,b]\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е таква, што

а) $F \in \mathbf{C}([a,b]\times\mathbf{R})$ и

б) постои $L \in \mathbf{R}$ таков што за секој $x \in [a,b]$ и за секои $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ важи

$$| F(x, y_1) - F(x, y_2) | \le L | y_1 - y_2 | .$$

Тогаш, за секој $y_0 \in \mathbf{R}$ постои единствено решение на равенката

$$\tfrac{dy(x)}{dx} = F(x, y(x)),\ x \in [a,b],\ y(a) = y_0 . \tag{3}$$

Доказ. Прво да забележиме дека решението на равенката (3) е еквивалентно на решението на равенката

$$y(x) = y_0 + \int_a^x F(t, y(t))dt, \quad t \in [a,b] .$$

За да ја примениме теоремата на Банах за фиксна точка на множеството $\mathbf{C}([a,b])$ ќе воведеме метрика

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[a,b]} \{e^{-k(x-a)} \bullet | f(x) - g(x) |\}$$

каде $f, g \in \mathbf{C}([a,b])$ и $k > 0$ е фиксиран број, кој ќе го избереме покасно. Понатаму, за метриките ρ_∞ и d_∞ важи

$$e^{-k(b-a)}\rho_\infty(f,g) \le d_\infty(f,g) \le \rho_\infty(f,g)\,,$$

што според дефиниција X 8.1 значи дека метриките ρ_∞ и d_∞ се рамномерно еквивалентни. Но, просторот $\mathbf{C}([a,b], \rho_\infty)$ е комплетен, па од теорема 6.5 следува дека за секој $k > 0$ просторот $\mathbf{C}([a,b], d_\infty)$ е комплетен. Понатаму, за соодветен избор на константата $k > 0$ во просторот $\mathbf{C}([a,b], d_\infty)$ функцијата $A:\mathbf{C}([a,b]) \to \mathbf{C}([a,b])$ определена со

$$(Af)(x) = y_0 + \int_a^x F(t, f(t))dt, \quad t \in [a,b];\ f \in \mathbf{C}([a,b]), \tag{4}$$

е контракција. Навистина, од условот б) следува дека за секој $x \in [a,b]$ е исполнето неравенството

$$\begin{aligned} |(Af)(x) - (Ag)(x)| &= \left| \int_a^x (F(t, f(t)) - F(t, g(t))dt \right| \\ &\leq L\int_a^x |f(t) - g(t)|\, dt, \end{aligned},$$

за секои $f, g \in \mathbf{C}([a,b])$, па затоа

$$\begin{aligned} e^{-k(x-a)} |(Af)(x) - (Ag)(x)| &\leq L\int_a^x e^{-k(x-t)} e^{-k(t-a)} |f(t) - g(t)|\, dt \\ &\leq Ld_\infty(f,g)\int_a^x e^{-k(x-t)} dt \\ &= \tfrac{L}{k} d_\infty(f,g)[1 - e^{-k(x-a)}] \leq \tfrac{L}{k} d_\infty(f,g) \end{aligned}$$

од што следува

$$d_\infty(Af, Ag) \leq \tfrac{L}{k} d_\infty(f,g), \text{ за секои } f, g \in \mathbf{C}([a,b]).$$

Според тоа, ако земеме произволен $k > 0$ таков, што $k > L$, тогаш функцијата A определена со (4) е контракција. Конечно, од теоремата на Банах следува дека диференцијалната равенка (3) има единствено решение. ♦

8.5. Теорема (Фредхолмова интегрална равенка од втор ред). Нека $k \in (\mathbf{C}([a,b] \times [a,b]), \rho_\infty)$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ е таков што

$$|\lambda| < \tfrac{1}{M(b-a)}, \text{ каде } M = \max\{k(x,y) \mid (x,y) \in [a,b] \times [a,b]\}.$$

Тогаш, за секој $g \in \mathbf{C}([a,b])$ постои единствена функција $f \in \mathbf{C}([a,b])$ таква, што

$$f(x) = \lambda\int_a^b k(x,y) f(y)dy + g(x), \ x \in [a,b]. \tag{5}$$

При дадени функции k и g равенката (5) со непозната функција f ја нарекуваме *Фредхолмова интегрална равенка од втор ред*.

Доказ. На комплетниот метрички простор $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ да ја разгледаме функцијата A зададена со

$$(Af)(x) = \lambda\int_a^b k(x,y) f(y)dy + g(x), \ x \in [a,b], \ f \in \mathbf{C}([a,b]).$$

За секој $x \in [a,b]$ важи $k(x,y)f(y) \in \mathbf{C}([a,b])$, па затоа $(Af)(x) \in \mathbf{C}([a,b])$, т.е $A:\mathbf{C}([a,b]) \to \mathbf{C}([a,b])$. Понатаму,

$$\begin{aligned}\rho_\infty(A(f),A(h)) &= \max_{x\in[a,b]} |\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy - \lambda\int_a^b k(x,y)h(y)dy| \\ &\le |\lambda| \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\cdot|f(y)-h(y)|dy \\ &\le |\lambda| \int_a^b \max_{x\in[a,b]} |k(x,y)|\cdot \max_{x\in[a,b]} |f(x)-h(x)|dy \\ &\le |\lambda| M \max_{x\in[a,b]} |f(x)-h(x)| \int_a^b dy = |\lambda| M(b-a)\rho(f,h) = \lambda_1\rho_\infty(f,h),\end{aligned}$$

каде $\lambda_1 = |\lambda| M(b-a) < 1$.

Според тоа, A е контракција, па од теоремата на Банах следува дека постои единствена функција $f^* \in \mathbf{C}([a,b])$ таква, што

$$(Af^*)(x) = f^*(x),$$

односно

$$f^*(x) = \lambda\int_a^b k(x,y)f^*(y)dy + g(x),\ x \in [a,b]. ♦$$

8.6. Теорема за имплицитна функција. Во IV 4.3 рековме дека подоцна ќе се навратиме на прашањето кога со равенството $F(x,y)=0$ е определена некоја функција. Овде, користејќи ја теоремата на Банах, ќе дадеме одговор на ова прашање. За таа цел ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Нека функцијата $F:[a,b]\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е таква што

а) $F \in \mathbf{C}([a,b]\times\mathbf{R})$,

б) постојат m, M, $0 < m \le M$ такви што за секој $x \in [a,b]$ и за секои $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$, $y_1 \ne y_2$ важи

$$m \le \frac{F(x,y_1)-F(x,y_2)}{y_1-y_2} \le M\ . \tag{6}$$

Тогаш, постои единствена функција $f \in \mathbf{C}([a,b])$ таква што $F(x,f(x))=0$, за секој $x \in [a,b]$.

Доказ. На комплетниот метрички простор $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_\infty)$ да ја разгледаме функцијата A определена со

$$(Ag)(x) = g(x) - \tfrac{2}{m+M}F(x,g(x)),\ \text{за секој } x\in[a,b] \text{ и за секој } g \in \mathbf{C}([a,b]).$$

За секој $x \in [a,b]$ таков што $f(x) \ne g(x)$, од (6) следува

$$-\frac{2M}{m+M} \le -\frac{2}{m+M}\frac{F(x,g(x))-F(x,f(x))}{g(x)-f(x)} \le -\frac{2m}{m+M}$$

$$1-\frac{2M}{m+M} \le 1-\frac{2}{m+M}\frac{F(x,g(x))-F(x,f(x))}{g(x)-f(x)} \le 1-\frac{2m}{m+M}$$

$$\frac{m-M}{m+M} \le 1-\frac{2}{m+M}\frac{F(x,g(x))-F(x,f(x))}{g(x)-f(x)} \le \frac{M-m}{m+M}$$

$$|\,g(x)-f(x)\,|\bullet|\,1-\frac{2}{m+M}\bullet\frac{F(x,g(x))-F(x,f(x))}{g(x)-f(x)}\,| \le \frac{M-m}{m+M}\bullet|\,g(x)-f(x)\,|$$

па затоа

$$\begin{aligned}\rho_\infty(A(g),A(f)) &= \max_{x\in[a,b]} |\,g(x)-f(x)-\frac{2[F(x,g(x))-F(x,f(x))]}{m+M}\,| \\ &\le \max_{x\in[a,b]} |\,g(x)-f(x)\,|\bullet|\,1-\frac{2}{m+M}\bullet\frac{F(x,g(x))-F(x,f(x))}{g(x)-f(x)}\,| \\ &\le \frac{M-m}{m+M}\max_{x\in[a,b]} |\,g(x)-f(x)\,| = \frac{M-m}{m+M}\rho_\infty(g,f)\end{aligned}$$

и како $\frac{M-m}{m+M}\in[0,1)$ добиваме дека A е контракција. Конечно, од теорема 7.4 следува дека постои единствена функција $f^*\in\mathbf{C}([a,b])$ таква, што $A(f^*)=f^*$, т.е.

$$f^*(x) = f^*(x)-\frac{2}{m+M}F(x,f^*(x)) \text{, за секој } x\in[a,b].$$

што значи $F(x,f^*(x))=0$ за секој $x\in[a,b]$. ♦

9. ЗАДАЧИ

1. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f:X\to Y$ е изометрија. Докажете, дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во просторот X ако и само ако низата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во просторот Y.
2. Нека (X,ρ) е метрички простор. Докажете дека Кошиевата низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во X конвергира ако и само ако има барем една точка на натрупување.
3. Нека (X,ρ) е метрички простор, $D\subseteq X$ е секаде густо во X и нека секоја Кошиева низа од D конвергира кон некоја точка од X. Докажете дека (X,ρ) е комплетен метрички простор.
4. Докажете, дека комплетирањето (Y,d) на метричкиот простор (X,ρ) е сепарабилен простор ако и само ако просторот (X,ρ) е сепарабилен.
5. За метриката d на множеството X ќе велиме дека е *конвексна* ако за секои $x,y\in X$ постои барем една точка $z\in X$ таква што

   $$d(x,z)=d(y,z)=\tfrac{1}{2}d(x,y).$$

Нека (X, d) е комплетен метрички простор и d е конвексна метрика. Докажете, дека за секој подреден пар $(x, y) \in X \times X$ постои подмножество Y од X таков што просторот (Y, d) е изометричен со интервалот $[0, d(x, y)] \subseteq \mathbf{R}$.

6. Нека (X, ρ) е метрички простор, (Y, d) е комплетен метрички простор и $i: X \to Y$ е функција која ја запазува метриката и за која важи: за секој комплетен метрички простор (Z, d') и секоја функција $f: X \to Z$ која ја запазува метриката, постои единствена функција $g: Y \to Z$ која ја запазува метриката и за која важи $g \circ i = f$. Докажете, дека просторот (Y, d) е комплетирањето на просторот (X, ρ).

7. Докажете, дека за секое множество X просторот $(X^{\mathbf{N}}, \rho_B)$ е комплетен.

8. Докажете, дека за секој прост број p метричкиот простор $(\mathbf{Q}, \rho)$ од задача IX 12 не е комплетен.

9. Нека (X_i, d_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$ е низа метрички простори такви што $d(X_i) \leq 1$, за $i = 1, 2, 3, \ldots$, $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots$ и d е метриката на X од задача X 37. Ако просторите (X_i, d_i), $i = 1, 2, 3, \ldots$ се комплетни, тогаш и просторот (X, d) е комплетен. Докажете!

10. Нека $\mathbf{P}_n([a, b])$ е множеството од сите полиноми со реални коефициенти и степен помал или еднаков на n, разгледувани на интервалот $[a, b]$. За секои

$$p, q \in \mathbf{P}_n([a, b]): \ p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i, \ q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i, \ x \in [a, b]$$

ставаме

$$d(p, q) = \sum_{i=0}^{n} | p_i - q_i |.$$

Докажете, дека $(\mathbf{P}_n([a, b]), d)$ е комплетен сепарабилен метрички простор. Дали множеството од сите полиноми со коефициенти од $[0,1]$ е затворено.

11. Докажете дека метричкиот простор $(\mathcal{F}_B(X), d_{Ha})$ од задача IX 17 е комплетен ако и само просторот (X, ρ) е комплетен.

12. Нека (X, ρ) е метрички простор и (Y, d) е неговото комплетирање. Докажете, дека комплетирањето на метричкиот простор $(\mathcal{F}_B(X), d_{Ha})$ е метричкиот простор $(\mathcal{F}_B(Y), d_{Ha})$.

13. Да го разгледаме множеството $X = \mathbf{BV}_0([a, b]) = \{x \mid x \in \mathbf{BV}([a, b]) \text{ и } x(a) = 0\}$ и функцијата $\rho: X \times X \to \mathbf{R}$ определена со $\rho(x, y) = V(x - y, [a, b])$. Докажете:
   a) $(\mathbf{BV}_0([a, b]), \rho)$ е комплетен метрички метрички простор,
   b) просторот $(\mathbf{BV}_0([a, b]), \rho)$ не е сепарабилен метрички простор,

v) ако низата функции $x_n \to x, n \to \infty$ во $(\mathbf{BV}_0([a,b]),\rho)$, тогаш $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон x кога $n \to \infty$, меѓутоа обратното тврдење не важи.

14. Нека $\mathbf{BV}([a,b])$ е множеството од сите реални функции со ограничена варијација на интервалот $[a,b]$. За $f,g \in \mathbf{BV}([a,b])$ ставаме

$$d(f,g) = |f(a)-g(a)| + V(f-g,[a,b]).$$

Докажете дека $(\mathbf{BV}([a,b]),d)$ е комплетен метрички простор. Дали овој простор е сепарабилен?

15. За функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ дефинираме

$$\| f \|_{BL} = \sup_{[a,b]} |f| + \sup_{\substack{x,y\in[a,b] \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},$$

и нека $\mathbf{BL}([a,b]) = \{f \mid \| f \|_{BL} < +\infty\}$. Ставаме

$$d(f,g) = \| f-g \|_{BL}, \text{ за секои } f,g \in \mathbf{BL}([a,b]).$$

Докажете дека

а) $(\mathbf{BL}([a,b]),d)$ е комплетен сепарабилен метрички простор,

б) множеството $\mathbf{BL}([a,b])$ е секаде густо во $(\mathbf{C}([a,b]),\rho)$.

16. Нека (X,ρ) е метрички простор и множеството $A \subseteq X$ не е затворено во X. Докажете, дека постои непрекината функција $f: A \to \mathbf{R}$, која не може да се продолжи до непрекината функција $g:\overline{A} \to \mathbf{R}$.

17. Најдете метрички простор (X,ρ), незатворено множеството $A \subseteq X$ во X, некомплетен метрички простор (Y,d) и рамномерно непрекината функција $f: A \to Y$, која не може да се продолжи до непрекината функција $g:\overline{A} \to Y$.

18. Најдете комплетни метрички простори (X,ρ) и (Y,d) и
   1) непрекината сурјекција $f: X \to Y$ која не е отворена функција,
   2) непрекината биекција $f: X \to Y$ чија инверзна функција не е непрекината.

19. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f: X \to Y$ е непрекината сурјекција таква што $\rho(x,y) \le d(f(x),f(y))$, за секои $x,y \in X$.
   a) Ако X е комплетен метрички простор, тогаш Y е комплетен метрички простор. Докажете или дадете контрапример!
   b) Ако Y е комплетен метрички простор, тогаш X е комплетен метрички простор. Докажете или дадете контрапример!

20. Нека X е произволно множество, $f: X \to X$ е функција и F е множеството неподвижни точки за функцијата f. Докажете:
   1) Множеството F е инваријантно за функцијата f.
   2) Множеството F е инваријантно за функцијата $f^n: X \to X, n \in \mathbf{N}$.

3) Множеството F е инваријантно за секоја функција $g : X \to X$ која комутира со f, т.е. таква да $g \circ f = f \circ g$.

21. Нека X е произволно множество и $f : X \to X$ е функција. За подмножеството $Y \subseteq X$ ќе велиме дека е *инваријантно множество* за функцијата f ако $f(Y) \subseteq Y$.

a) Докажете, дека за секое множество $A \subseteq X$ множеството $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^n(A)$ е инваријантно за функцијата f.

b) Докажете, дека ако f е биекција, тогаш за секое множество $A \subseteq X$ множеството $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} f^m(A)$ е инваријантно за функцијата f (по дефиниција $f^{-n} = (f^{-1})^n$ и $f^0 = i_X$).

22. За просторот X ќе велиме дека има *својство на неподвижна точка*, ако секое непрекината функција $f : X \to X$ има барем една неподвижна точка. За функцијата $r : X \to Y$ од просторот X во потпросторот $Y \subseteq X$ ќе велиме дека е *ретракција* ако r е непрекината функција и ако важи $r \circ i = i_X$, каде $i : Y \to X$ е *инклузија*, т.е. $i(x) = x$, за секој $x \in Y$. За потпросторот $Y \subseteq X$ ќе велиме дека е *ретрактор* од просторот X ако постои ретракција $r : X \to Y$. Докажете дека, ако просторот X има својство на неподвижна точка, тогаш и секој ретрактор Y од X има својство на неподвижна точка.

23. Докажете, дека во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ функцијата $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ определена со

$$f(x,y) = (x+1, y+3), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

нема неподвижни точки и не е контракција.

24. Дали во просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ функцијата

1) $f(x) = -x$, $x \in \mathbf{C}([a,b])$ 2) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{C}([a,b])$

има неподвижна точка? Дали функцијата f е контракција?

25. Со точност до третото децимално место, најдете ги сите решенија на равенката $x \log x + 1 = xe^x$.

26. Со точност до шестото децимално место, најдете го најмалото позитивно решение на равенката $x \operatorname{tg} x = 1$.

27. Докажете, дека функцијата $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ определена со

$$f(x,y) = (\tfrac{1}{3}\sin x - \tfrac{1}{3}\cos y + 2, \tfrac{1}{6}\cos x + \tfrac{1}{2}\sin y - 1)$$

е контракција.

28. Докажете, дека функцијата $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ определена со

$$f(x,y) = (\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{3}y - 2, \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{3}y + 3)$$

има единствена неподвижна точка.

29. Нека во просторот $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_\infty)$ функцијата f е определена

$$f(x)(t)=\int_a^t x(s)ds,\ \ a\le t\le b,\ \ x\in\mathbf{C}([a,b]).$$

Најдете ги неподвижните точки на функцијата f. Дали f е контракција? Докажете, дека функцијата f^2 е контракција, ако $b-a<1$.

30. Нека $X=(-1,1)\subseteq\mathbf{R}$, d е метриката определена со формулата

$$d(x,y)=\min\{1,|x-y|\}\text{, за секои } x,y\in X$$

и $f:X\to X$ е функција определена со формулата $f(x)=\frac{x}{2}$. Докажете:

a) 0 е единствената неподвижна точка за функцијата f и важи $0=\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$, за секоја точка $x\in X$.

b) Метриката d е еквивалентна со обичната метрика на X и просторот (X,d) не е комплетен.

c) Функцијата f не е контракција во однос на метриката d, но е контракција во однос на обичната метрика на X.

31. Нека (X,ρ) е метрички простор и $f:X\to X$ е контракција со коефициент $\lambda, 0<\lambda<1$ и y е фиксна точка за X. Докажете, дека за секој $r>0$ важи $f^n(B(y;r))\subseteq B(y;r^n)$.

32. Нека f е контракција во $(\mathbf{R}^m,\rho_2)$ и функцијата $F:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ е определено со $F(\mathbf{x})=\mathbf{x}-f(\mathbf{x})$, за секој $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^m$. Докажете дека F е хомеоморфизам.

33. Нека (X,ρ) е метрички простор и $f:X\to X$ е функција за која постојат реален број $\lambda, 0\le\lambda<1$ и функција $\varphi:X\times X\to\mathbf{R}$ такви што

$$\rho(f^n(x),f^n(x'))\le\lambda^n\varphi(x,x')\text{, за секои } x,x'\in X \text{ и за секој } n\in\mathbf{N}.$$

Докажете:

a) За секој $x\in X$ низата $\{f^n(x)\}_{n=1}^\infty$ е Кошиева.

b) Ако просторот (X,ρ) е комплетен и функцијата $f:X\to X$ е непрекината, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$ е единствената неподвижна точка за функцијата f.

34. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и функцијата $f:X\to X$ е таква, што $\rho(f(x),f(y))\ge q\rho(x,y), q>1$, за секои $x,y\in X$. Докажете, дека f има единствена неподвижна точка.

35. Докажете, дека во просторот $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ функцијата

$$f(x,y)=(x\cos\alpha-y\sin\alpha, x\sin\alpha+y\cos\alpha),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

каде $\alpha \in \mathbf{R}$ е фиксирано, има неподвижна точка, но оваа функција не е контракција.

36. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и за функцијата $f : X \to X$ важи

$$\rho(f(x), f(y)) \le \alpha[\rho(x, f(x)) + \rho(y, f(y))] + \beta\rho(x, y)\text{, за секои } x, y \in X ,$$

каде $2\alpha + \beta \in [0,1),\ \alpha, \beta \ge 0$. Докажете, дека

a) функцијата f има единствена неподвижна точка $p \in X$ и

b) сите итерации конвергираат кон неподвижната точка p .

37. Нека $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Ако

а) $f(b) < 0 < f(a)$,

б) постојат $m, M > 0$ такви, што $-M < f'(x) < -m$, и

в) $p > 0$ е таков, што $M < \frac{1}{p}$,

тогаш за функцијата $g(x) = x + pf(x)$ важи $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ и g е контракција, т.е. равенката $f(x) = 0$ има единствено решение на $[a,b]$.

38. Нека множеството $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,3,...\}$ е снабдено со обичната метрика $\rho(x, y) =| x - y |$, за секои $x, y \in X$. Функцијата $f : X \to X$ е определена со

$$f(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n-1},\ n = 2,3,4,...,\ f(1) = f(0) = 0 ,$$

т.е. $x = 0$ е единствена фиксна точка. Докажете, дека

1) за секој точка $y \in X$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(y) = 0$,

2) не постои метрика d која е еквивалентна со метриката ρ и која има својство f да е контракција во просторот (X,d) .

39. Нека A е некоја функција, а T е хомеоморфизам на комплетниот метрички простор на себе. Докажете, дека ако функцијата $T^{-1}AT$ е контракција, тогаш функцијата A има единствена неподвижна точка.

40. Докажете, дека постои единствена функција $f \in \mathbf{C}([0,1])$ таква, што

$$f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt, \quad x \in [0,1] .$$

41. Нека $g \in \mathbf{C}([0,1])$ и $| g(x) |< 1$ за секој $x \in [0,1]$. Докажете, дека нулата е единствено решение на равенката

$$f(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt, \quad x \in [0,1],\ f \in \mathbf{C}([0,1]) .$$

42. Нека $g \in \mathbf{C}([0,1])$. Докажете, дека постои $f \in \mathbf{C}([0,1])$ таква, што

$$f(x) - \tfrac{1}{2}\sin f(x) + g(x) = 0 .$$

43. Нека $g \in C([0,1])$. Докажете, дека постои единствена функција $f \in C([0,1])$ таква што

$$f(x) - \int_0^x f(x-t) e^{-t^2} dt = g(x) \ .$$

44. Докажете, дека постои единствена функција $f \in C([0,1])$ таква што
$$f(x) = \sin x + \int_0^1 \frac{f(y)}{e^{x+y+1}} dy \ .$$

45. Користејќи ја итеративната постапка од теоремата на Банах за неподвижна точка, најдете функција $x \in \mathbf{C}([0,1])$ со својства $\frac{dx}{dt} = x$ и $x(0) = 1$, така што ќе ја решите интегралната равенка $x(t) = 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$. Оваа постапка во литературата е позната како *метод на Пикард за последователни апроксимации*.

46. Нека (X, ρ) е метрички простор. Докажете, дека множеството $A \subseteq X$ е никаде густо на просторот X ако и само ако за секое непразно отворено множество $U \subseteq X$ постои непразно отворено множество $V \subseteq U$ такво што $A \cap V = \varnothing$.

47. Нека (X, ρ) е метрички простор и множеството $V \subseteq X$ е отворено и густо во X . Докажете, дека множеството $F = X \setminus V$ е никаде густо во X .

48. Нека (X, ρ) е комплетен метрички простор. Докажете, дека
   1) за секое множество од прва категорија $A \subseteq X$ важи $A^0 = \varnothing$,
   2) ако множеството A е отворено и е од права категорија, тогаш $A = \varnothing$.

49. Нека (X, ρ) е комплетен метрички простор. Докажете, дека ако $F_n, n \in \mathbf{N}$ е низа F_σ-множества во X такви што $F_n^0 = \varnothing, n \in \mathbf{N}$, тогаш множеството $X \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ е густо во X . Формулирајте го и докажете го аналогниот резултат за G_δ-множествата.

50. Нека (X, ρ) е комплетен метрички простор. Докажете, дека ако $F_n, n \in \mathbf{N}$ е низа G_δ-множества во X такви што за секој $n \in \mathbf{N}$ множеството F_n е густо во во X , тогаш и множеството $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n$ е густо во X .

51. Нека $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е низа во $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ со својство да за секој $t \in \mathbf{R}$ постојат $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$ такви што $x_m(t) = x_n(t)$. Докажете, дека постојат $m_0, n_0 \in \mathbf{N}$, $m_0 \neq n_0$ и интервал $[a,b], a < b$ такви што $x_{m_0|[a,b]} = x_{n_0|[a,b]}$.

XIII ГЛАВА

КОМПАКТНОСТ

1. КОМПАКТНИ МНОЖЕСТВА ВО МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

1.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $F \subseteq X$. За множеството F ќе велиме дека е *компактно* во X, ако секоја отворена покривка на F содржи конечна потпокривка.

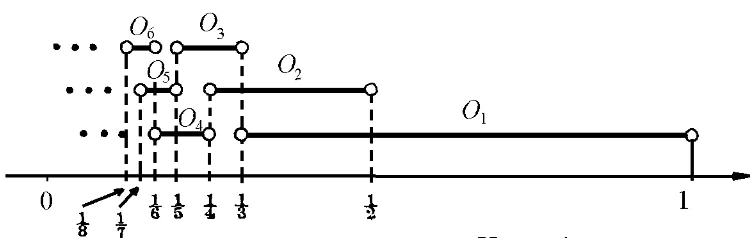
1.2. Пример. а) Секое конечно подмножество $A = \{a_1,...,a_m\}$ од X е компактно.

Навистина, ако $\mathcal{O} = \{O_i \mid i \in I\}$ е произволна отворена покривка на A, тогаш секоја точка од A се содржи во еден член на $\mathcal{O}$, т.е. $a_1 \in O_{i_1}, a_2 \in O_{i_2}, ...,$ $a_m \in O_{i_m}$, па затоа $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup ... \cup O_{i_m}$, што значи дека множеството A е компактно.

б) Од I 25.6 непосредно следува дека отворениот интервал $A = (0,1)$ не е компактно множествот во $(\mathbf{R},\rho)$.

Ќе дадеме и директен доказ на ова тврдење. На пример, да ја разгледаме фамилијата отворени интервали

$$\mathcal{O} = \{(\tfrac{1}{3},1), (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{3}), (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{4}), (\tfrac{1}{7},\tfrac{1}{5}), (\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{6}),...\},$$



Цртеж 1

(цртеж 1). Имаме, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, каде $O_i = (\frac{1}{i+2},\frac{1}{i}), i = 1,2,3,...$, што значи дека $\mathcal{O}$ е отворена покривка на A. Но, $\mathcal{O}$ не содржи конечна потпокривка. Навистина, ако

$$\mathcal{O}^* = \{(a_1,b_1), (a_2,b_2), ..., (a_m,b_m)\}$$

е произволна конечна потфамилија од $\mathcal{O}$, тогаш

$$(a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup ... \cup (a_m,b_m) \subseteq (\varepsilon,1)$$

каде $\varepsilon = \min\{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Меѓутоа, множествата $(0,\varepsilon)$ и $(\varepsilon,1)$ се дисјунктни, па затоа O^* не е покривка за A, што значи дека множеството A не е компактно.

в) Отворената топка $B(x;r)$ не е компактно множество во просторот $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$. Навистина, доволно е да ја разгледаме отворената покривка

$$\{B(x;r_i) \mid 0 < r_i < r, i \geq 1, r_i \to r, i \to \infty\}$$

на $B(x;r)$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

г) Нека (X,d) е метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна низа во X, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ќе докажеме дека множеството $K = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\}$ е компактно.

Навистина, нека $\{O_i \mid i \in I\}$ е произволна отворена покривка на K. Тогаш, постои O_0 такво $x_0 \in O_0$. Но, x_0 е граница на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, па затоа постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $x_n \in O_0$, за секој $n > n_0$. Понатаму, бидејќи $\{O_i \mid i \in I\}$ е покривка на K добиваме дека за секој $n \leq n_0$ постои O_n таков што $x_n \in O_n$. Конечно, потфамилијата $\{O_0, O_1, O_2, ..., O_{n_0}\}$ е отворена конечна потпокривка на K, што значи дека множеството K е компактно. ♦

1.3. Дефиниција. Ако X е компактно множество во (X,ρ), тогаш за метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *компактен*.

1.4. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. Множеството A е компактно во X ако и само ако потпросторот (A,ρ_A) е компактен.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека множеството A е компактно во X и нека $\{G_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка во потпросторот (A,ρ_A). Од теорема IX 12.3 следува дека за секое отворено множество $G_i, i \in I$ во потпросторот (A,ρ_A) постои отворено множество $O_i, i \in I$ во просторот (X,ρ) такво што $G_i = A \cap O_i \subseteq O_i, i \in I$. Затоа

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i ,$$

што значи дека фамилијата $\{O_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка на множеството A во просторот (X,ρ). Но, A е компактно во X, па затоа $\{O_i \mid i \in I\}$ содржи конечна потпокривка, т.е. постојат $O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_m}$ такви што $A \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup ... \cup O_{i_m}$. Според тоа,

$$A \subseteq A \cap (O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_m}) = (A \cap O_{i_1}) \cup ... \cup (A \cap O_{i_m}) = G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_m} ,$$

што значи дека $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_m}$ е конечна потпокривка од покривката $\{G_i \mid i \in I\}$, т.е. потпросторот (A,ρ_A) е компактен.

$\Leftarrow$. Нека потпросторот (A, ρ_A) е компактен и нека $\{O_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка на множеството A во просторот (X, ρ). Од теорема IX 12.3 следува дека множествата $G_i = A \cap O_i, i \in I$ се отворени во потпросторот (A, ρ_A) и како

$$A \subseteq A \cap \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap O_i) = \bigcup_{i \in I} G_i \ ,$$

добиваме дека $\{G_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка на A. Понатаму, потпросторот (A, ρ_A) е компактен, па затоа $\{G_i \mid i \in I\}$ содржи конечна потпокривка, т.е. постојат $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_m}$ такви што $A \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_m}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} A \subseteq G_{i_1} \cup ... \cup G_{i_m} &= (A \cap O_{i_1}) \cup ... \cup (A \cap O_{i_m}) \\ &= A \cap (O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_m}) \subseteq O_{i_1} \cup ... \cup O_{i_m} \end{aligned} ,$$

што значи дека $O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_m}$ е конечна потпокривка од покривката $\{O_i \mid i \in I\}$, т.е. множеството A е компактно во просторот (X, ρ). ♦

1.5. Последица. Нека (Y, ρ_Y) е потпростор на метричкиот простор (X, ρ) и $A \subseteq Y$. Тогаш A е компактно во (X, ρ) ако и само ако A е компактно во (Y, ρ_Y).

Доказ. Бидејќи (A, ρ_A) е потпростор од просторот (Y, ρ_Y), од теорема 1.4 следува дека множеството A е компактно во просторот (Y, ρ_Y) ако и само ако потпросторот (A, ρ_A) е компактен. Но, (A, ρ_A) е потпростор од просторот (X, ρ), па повторно од теорема 1.4 следува дека потпросторот (A, ρ_A) е компактен ако и само ако множеството A е компактно во просторот (X, ρ). ♦

1.6. Теорема. Просторот (X, ρ) е компактен ако и само ако секоја фамилија затворени подмножества $\{F_i \mid i \in I\}$ од X таква што $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$ содржи конечна потфамилија $\{F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_m}\}$ таква што $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_m} = \varnothing$.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека претпоставиме дека просторот (X, ρ) е компактен и нека фамилијата затворени подмножества $\{F_i \mid i \in I\}$ од X е таква што $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$. Но, тогаш

$$X = {}^c\varnothing = {}^c(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} {}^cF_i \ ,$$

што значи дека фамилијата $\{{}^cF_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка на X. Според претпоставката просторот X е компактен, па затоа покривката $\{{}^cF_i \mid i \in I\}$ содржи конечна потпокривка, т.е. постојат ${}^cF_{i_1}, {}^cF_{i_2}, ..., {}^cF_{i_m}$ такви што

$$X = {}^cF_{i_1} \cup {}^cF_{i_2} \cup ... \cup {}^cF_{i_m} \ .$$

Но, тогаш

$$\varnothing = {}^cX = {}^c({}^cF_{i_1} \cup {}^cF_{i_2} \cup \ldots \cup {}^cF_{i_m}) = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_m} .$$

$\Leftarrow$. Обратно, нека $\{O_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка на X, т.е. нека $X = \bigcup_{i \in I} O_i$, што значи

$$\varnothing = {}^cX = {}^c(\bigcup_{i \in I} O_i) = \bigcap_{i \in I} {}^cO_i .$$

Множествата $O_i, i \in I$ се отворени, па затоа ${}^cO_i, i \in I$ е фамилија затворени подмножества од X чиј пресек е празно множество. Од претпоставката следува дека постои конечна потфамилија ${}^cO_{i_1}, {}^cO_{i_2}, \ldots, {}^cO_{i_m}$ таква што

$${}^cO_{i_1} \cap {}^cO_{i_2} \cap \ldots \cap {}^cO_{i_m} = \varnothing .$$

Но, тогаш

$$X = {}^c\varnothing = {}^c({}^cO_{i_1} \cap {}^cO_{i_2} \cap \ldots \cap {}^cO_{i_m}) = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \ldots \cup O_{i_m} ,$$

што значи дека $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_m}$ е конечна потпокривка од покривката $\{O_i \mid i \in I\}$, т.е. просторот (X, ρ) е компактен. ♦

1.7. Теорема. Нека (X, ρ) е метрички простор. Затворено подмножество од компактно множество во X е компактно множество.

Доказ. Нека F е компактно множество во (X, ρ), $G \subseteq F$ и G е затворено во (X, ρ). Ако $\mathcal{O} = \{O_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка на G, тогаш фамилијата $\mathcal{O} \cup \{X \setminus G\}$ е отворена покривка на F, па затоа постои конечна потпокривка

$$O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_n}, X \setminus G$$

на F. Значи,

$$G \subseteq F \subseteq (X \setminus G) \cup \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$$

и како $G \cap (X \setminus G) = \varnothing$ добиваме $G \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$, што значи дека G е компактно множество во (X, ρ). ♦

1.8. Теорема. Ако $K_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ е фамилија компактни множества во метричкиот простор (X, ρ) таква што секоја нејзина конечна потфамилија има непразен пресек, тогаш $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} K_\alpha \neq \varnothing$.

Доказ. Да фиксираме множество K_1 од $K_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ и за $\alpha \neq 1$ да означиме $G_\alpha = X \setminus K_\alpha$. Нека претпоставиме дека

$$K_1 \cap (\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq 1} K_\alpha) = \varnothing .$$

Тогаш,

$$K_1 \subset X \setminus (\bigcap_{\alpha \in A, \alpha \neq 1} K_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A, \alpha \neq 1} (X \setminus K_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A, \alpha \neq 1} G_\alpha \ .$$

Но, K_1 е компактно множество, па затоа постојат $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ такви, што

$$K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup ... \cup G_{\alpha_n} \ .$$

Според тоа,

$$\emptyset = K_1 \cap (X \setminus (G_{\alpha_1} \cup ... \cup G_{\alpha_n}) = K_1 \cap (X \setminus G_{\alpha_1}) \cap ... \cap (X \setminus G_{\alpha_n})$$
$$= K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap ... \cap K_{\alpha_n} \ ,$$

што противречи на условот на лемата. Од добиената противречност следува дека $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset$. ♦

1.9. Последица. Ако K_m, $m = 1, 2, ...$ е низа непразни компактни множества во метричкиот простор (X, ρ) такви што $K_m \supset K_{m+1}$, $m = 1, 2, ...$, тогаш $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m \neq \emptyset$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 1.8. ♦

1.10. Теорема (за раздвојување). Ако F е компактно множество во метричкиот простор (X, ρ) и $x_0 \in X \setminus F$, тогаш постојат дисјунктни отворени множества $U, V \subseteq X$ такви што $x_0 \in V$ и $F \subseteq U$.

Доказ. Нека F е компактно множество во (X, ρ) и $x_0 \in X \setminus F$. На секоја точка $x \in F$ и придружуваме отворени топки $B(x_0; r(x))$ и $B(x; r(x))$ каде $r(x) = \frac{1}{3} \rho(x, x_0)$. Фамилијата $\{B(x; r(x)) \mid x \in F\}$ е отворена покривка на F , па затоа постои конечна потпокривка

$$\{B(x_1, r_1), B(x_2, r_2), ..., B(x_n, r_n)\}, r_i = r(x_i), i = 1, 2, ..., n$$

на F . Нека $r = \min\{r_1, r_2, ...,, r_n\}$. Отворената топка

$$B(x_0; r) = \bigcap_{i=1}^{n} B(x_0; r_i)$$

е отворено множество во X и како $B(x_0; r) \cap B(x_i; r_i) = \emptyset$, за секој $i = 1, ..., n$ добиваме

$$B(x_0; r) \cap \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i; r_i) = \emptyset \ .$$

Според тоа, за отворените множества $U = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i; r_i)$ и $V = B(x_0; r)$ важи $F \subseteq U$, $x_0 \in V$ и $U \cap V = \emptyset$. ♦

1.11. Последица. Ако F е компактно множество во метричкиот простор (X,ρ), тогаш F е затворено.

Доказ. Од теорема 1.10 следува дека за секоја точка $x_0 \in X \setminus F$ постои отворена топка $V = B(x_0;r)$ таква што $x_0 \in V \subseteq X \setminus F$. Значи, множеството $X \setminus F$ е отворено, па затоа множеството F е затворено. ♦

1.12. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако F е затворено, а K е компактно во (X,ρ), тогаш $F \cap K$ е компактно.

Доказ. Според последица 1.11 множеството K е затворено, па затоа и множеството $F \cap K$ е затворено во (X,ρ), па од теорема 1.7 следува дека тоа е компактно. ♦

1.13. Последица (теорема за раздвојување). Нека A и B се дисјунктни компактни подмножества на метричкиот простор (X,ρ). Тогаш постојат дисјунктни отворени множества G и H такви што $A \subseteq G$ и $B \subseteq H$.

Доказ А. Според последица 1.11 множествата A и B се затворени. Но, A и B се дисјунктни, па од теорема IX 9.13 следува дека постојат дисјунктни отворени множества G и H такви што $A \subseteq G$ и $B \subseteq H$.

Доказ Б. Нека $a \in A$. Од $A \cap B = \varnothing$ следува $a \notin B$. По претпоставка множеството B е компактно, па од теорема 1.10 следува дека постојат отворени множества V_a и U_a такви што $a \in V_a$, $B \subseteq U_a$ и $V_a \cap U_a = \varnothing$. Од $a \in V_a$ следува дека $\{V_a \mid a \in A\}$ е отворена покривка на A. Но, множеството A е компактно, па затоа отворената покривка $\{V_a \mid a \in A\}$ на A содржи конечна потпокривка, т.е. постојат $V_{a_1}, V_{a_2}, ..., V_{a_m}$ такви што $A \subseteq V_{a_1} \cup V_{a_2} \cup ... \cup V_{a_m}$. Освен тоа, од $B \subseteq U_a$, за секој $a \in A$ следува $B \subseteq U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap ... \cap U_{a_m}$.

Земаме

$$G = V_{a_1} \cup V_{a_2} \cup ... \cup V_{a_m} \text{ и } H = U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap ... \cap U_{a_m}.$$

Множествата G и H се отворени како унија и пресек на конечни фамилии отворени множества, соодветно. Понатаму, $A \subseteq G$ и $B \subseteq H$. Останува да докажеме дека $G \cap H = \varnothing$. Навистина, по конструкција имаме $V_{a_i} \cap U_{a_i} = \varnothing$, за $i = 1,2,...,m$, па затоа $V_{a_i} \cap H = \varnothing$, за $i = 1,2,...,m$, од што следува

$$\begin{aligned} G \cap H &= (V_{a_1} \cup V_{a_2} \cup ... \cup V_{a_m}) \cap H = (V_{a_1} \cap H) \cup (V_{a_2} \cap H) \cup ... \cup (V_{a_m} \cap H) \\ &= \varnothing \cup \varnothing \cup ... \cup \varnothing = \varnothing, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

2. ОГРАНИЧЕНОСТ И КОМПАКТНОСТ. ТЕОРЕМА НА ХАУЗДОРФ

2.1. Теорема. Ако F е компактно множество во метричкиот простор (X,ρ), тогаш F е ограничено.

Доказ. Нека F е компактно множество во (X,ρ). За секој $x \in F$ да го разгледаме отвореното множество $B(x;1)$. Фамилијата $\{B(x;1) \mid x \in F\}$ е отворена покривка на F. Од дефиниција 1.1 следува дека постои конечна потпокривка

$$\{B(x_1,1), B(x_2,1), ..., B(x_n,1)\}$$

на F, т.е. $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i;1)$. Но, $d(B(x_i;1)) < 2,$ за $i = 1,2,...n$, што значи множествата $B(x_i;1)$, $i = 1,2,...n$ се ограничени. Конечно, од последица IX 4.9 следува дека компактното множеството F е ограничено. ♦

2.2. Последица. Компактните подмножества на произволен метрички простор (X,ρ) се затворени и ограничени.

Доказ. Непосредно следува од последица 1.11 и теорема 2.1. ♦

2.3. Коментар. Обратното тврдење на последица 2.2 не важи. Навистина, во метричкиот простор $(\mathbf{N},\rho)$, каде $\mathbf{N}$ е множеството природни броеви и ρ е дискретната метрика, множеството $\mathbf{N}$ е ограничено и затворено, но не е компактно. Навистина, фамилијата едноелементни множества

$$\mathcal{O} = \{B(n;1) \mid n \in \mathbf{N}\} = \{\{n\} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

е отворена покривка на $\mathbf{N}$, но истата не содржи конечна подпокривка.

Сепак, како што покасно ќе видиме во некои простори затворените и ограничени множества се компактни.

2.4. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор, $A \subseteq X$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Множеството $C \subset X$ го нарекуваме $\varepsilon-$*мрежа* за множеството A, ако за секој $x \in A$ постои $y \in C$ таков што $\rho(x,y) < \varepsilon$, т.е. $A \subseteq \bigcup_{y \in C} B(y;\varepsilon)$.

За множеството $A \subseteq X$ ќе велиме дека е *потполно ограничено* ако за секој $\varepsilon > 0$ постои конечна $\varepsilon-$ мрежа за A, т.е. постојат $x_i, i = 1,2,...,n$ такви што $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i;\varepsilon)$.

2.5. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и A е потполно ограничено множество. Ако $B \subseteq A$, тогаш множеството B е потполно ограничено.

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 2.4. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2.6. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A\subseteq X$. Ако множеството A е потполно ограничено, тогаш A е ограничено множество.

Доказ. Нека $\varepsilon>0$. Множеството A е потполно ограничено, па затоа постои конечна $\varepsilon-$мрежа за A, т.е. постојат $x_i, i=1,2,...,n$ такви што $A\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i;\varepsilon)$. Но, $d(B(x_i;\varepsilon))<2\varepsilon,$ за $i=1,2,...n$, што значи множествата $B(x_i;\varepsilon)$, $i=1,2,...n$ се ограничени. Конечно, од последица IX 4.9 следува дека потполно ограниченото множество A е ограничено. ♦

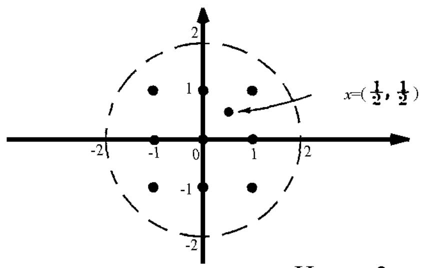
2.7. Пример А. Нека

$$A=\{\mathbf{x}=(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}.$$

Ако $\varepsilon=\frac{3}{2}$, тогаш множеството

$$C=\{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$$

е конечна $\varepsilon-$мрежа за A, цртеж 2. Проверете! Меѓутоа, ако $\varepsilon=\frac{1}{2}$, тогаш аналогно како во пример XI 3.2 се докажува дека множеството C не е $\varepsilon-$мрежа за A. ♦



Цртеж 2

Во лема 2.6 докажавме дека секое потполно ограничено множество е ограничено. Меѓутоа, во општ случај обратното тврдење не важи, што може да се види од следниве примери.

Пример Б. Метричкиот простор $(\mathbf{N},\rho)$, каде $\mathbf{N}$ е множеството природни броеви и ρ е дискретната метрика, множеството $\mathbf{N}$ е ограничено, но е потполно ограничено. Имено, за $\varepsilon<1$ важи $B(n;\varepsilon)=\{n\}$ и конечно многу вакви множества сигурно не можат да го покријат бесконечното множество $\mathbf{N}$. ♦

Пример В. Да го разгледаме метричкиот простор $(\mathbf{R},d)$ каде

$$d(x,y)=\min\{1,|x-y|\}\text{, за секои } x,y\in\mathbf{R},$$

Јасно, множеството $\mathbf{R}$ е ограничено, но тоа не е потполно ограничено бидејќи за $\varepsilon\in(0,1)$ и за секои $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbf{R}$ важи

$$1+|x_1|+|x_2|+...+|x_n|\notin\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i;\varepsilon).$$

Меѓутоа, ако $X=\mathbf{R}^m$ со метрика $\rho_p, 1\le p<\infty$, тогаш покасно ќе докажеме дека секое ограничено подмножество од $\mathbf{R}^m$ е потполно ограничено. ♦

2.8. Теорема. Нека (X,ρ) е метричкиот простор. Ако X е потполно ограничен, тогаш X е сепарабилен.

Доказ. Нека метричкиот простор X е потполно ограничен. Тогаш за секој $k=1,2,...$ постои конечна $\frac{1}{k}-$мрежа $C_k=\{y_{ki}\mid i=1,2,...,n_k\}$ и притоа за секој $x\in X$ постои y_{km_k}, $1\le m_k\le n_k$ таков што

$$\rho(x,y_{km_k})<\frac{1}{k}\,. \tag{1}$$

Јасно, множеството $C=\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k$ е најмногу пребројливо. Нека $x\in X$ и $\varepsilon>0$ се дадени. Наоѓаме $k\in\mathbf{N}$ таков, што $\frac{1}{k}\le\varepsilon$. Бидејќи C_k е конечна $\varepsilon-$мрежа на X, постои $m_k\in\{1,2,...,n_k\}$ таков што важи (1). Конечно, за секој $x\in X$ и за секој $\varepsilon>0$ постои $y_{km_k}\in C_k\subseteq C$ таков што $\rho(x,y_{km_k})<\frac{1}{k}\le\varepsilon$, што значи множеството C е секаде густо во X, т.е. X е сепарабилен. ♦

2.9. Теорема (Хауздорф). а) Нека (X,ρ) е метричкиот простор. Ако множеството F е компактно, тогаш F е потполно ограничено.

б) Ако (X,ρ) е комплетен метрички простор, F е затворено множество во (X,ρ) и F е потполно ограничено, тогаш множеството F е компактно.

Доказ. а) Нека множеството F е компактно и $\varepsilon>0$ е дадено. Отворената покривка $\{B(x;\varepsilon)\mid x\in F\}$ на множеството F содржи конечна потпокривка

$$\{B(x_i;\varepsilon)\mid i=1,2,...,n\}\,.$$

Според тоа, множеството $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ е конечна $\varepsilon-$ мрежа за F, т.е. F е потполно ограничено.

б) Нека F е затворено подмножество од комплетниот метрички простор (X,ρ) и да претпоставиме дека F не е компактно. Тоа значи, постои отворена покривка $\mathcal{O}=\{O_i\mid i\in I\}$ на F која не содржи конечна потпокривка.

Нека за $\varepsilon=1$ множеството C_1 е конечна 1-мрежа за F. Тогаш, барем едно од множествата $\{B(x;1)\cap F\mid x\in C_1\}$ не може да се покрие со конечно многу множества од $\mathcal{O}$. Нека тоа е множеството $F_1=B(x_1;1)\cap F$. Нека за $\varepsilon=\frac{1}{2}$ множеството C_2 е конечна $\frac{1}{2}$-мрежа за F, што значи и за F_1. Барем едно од множествата $\{B(x;\frac{1}{2})\cap F_1\mid x\in C_2\}$ не може да се покрие со конечно многу множества од $\mathcal{O}$. Нека тоа е множеството $F_2=B(x_2;\frac{1}{2})\cap F_1$. Продолжувајќи ја постапката конструираме низа множества $\{F_n\mid n\ge1\}$ такви, што

i) $F_n\subset F$, $\quad n\ge1$,

ii) $F_n \subset B(x_n;2^{-n+1}), \quad n \geq 1$

iii) $F_n, n \geq 1$ не може да се покрие со конечно многу елементи од $\boldsymbol{O}$.

Јасно, секое од множествата $F_n, n \geq 1$ е бесконечно. Сега да разгледаме низа елементи $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви, што

$y_1 \in F_1 = B(x_1;1) \cap F$,

$y_2 \in F_2 = B(x_2;\frac{1}{2}) \cap F_1, \quad y_2 \neq y_1,$

....

$y_n \in F_n = B(x_n;2^{-n+1}) \cap F_{n-1}, \quad y_n \neq y_k, k = 1,2,...,n-1$

....

Низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, бидејќи $\rho(x_m, x_n) < 2^{-m+1}, m < n$. Но, (X,ρ) е комплетен метрички простор, па затоа постои $y \in X$ таков што $y_n \to y$, $n \to \infty$ во (X,ρ) и како F е затворено имаме $y \in F$. Според тоа, отворената покривка O на множеството F содржи елемент O_{i_y} таков што $y \in O_{i_y}$. Бидејќи O_{i_y} е отворено, постои $\delta > 0$ таков што $B(y;\delta) \subseteq O_{i_y}$. Нека n е таков што

$$2^{-n+1} < \frac{\delta}{3},\ \rho(y_n, y) < \frac{\delta}{3}.$$

Тогаш $F_n \subset B(x_n;2^{-n+1}) \subset B(y;\delta)$, бидејќи за секој $x \in F_n$ имаме

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\leq \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) < 2^{-n+1} + \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,y)\\ &< 2^{-n+2} + \rho(y_n,y) < \delta.\end{aligned}$$

Според тоа, множеството F_n може да се покрие со едно множество O_{i_y}, што е противречност. Од добиената противречност следува дека F е компактно множество. ♦

2.10. Последица (теорема на Хајне-Борел). Нека F е подмножество од метричкиот простор $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$, $p \geq 1$. Тогаш, F е компактно ако и само ако е ограничено и затворено.

Доказ. ⇒. Нека F е компактно. Според лема 2.6 множеството F е ограничено и затворено.

⇐. Обратно, нека F е ограничено и затворено. За секој $\varepsilon > 0$ множеството

$$C_\varepsilon = \{(\frac{\varepsilon k_1}{\sqrt[p]{m}}, \frac{\varepsilon k_2}{\sqrt[p]{m}}, ..., \frac{\varepsilon k_m}{\sqrt[p]{m}}) \mid k_i \in \mathbf{Z}, i = 1,2,...,m\}$$

е ε – мрежа во $\mathbf{R}^m$. Бидејќи F е ограничено, постои $p > 0$ таков што

$$F \subseteq J = \{(x_1, x_2, ..., x_m) \mid |x_i| \leq p, i = 1, 2, ..., m\},$$

Понатаму, множеството $C = C_\varepsilon \cap J$ е конечно и е $\varepsilon-$ мрежа за F. Конечно, просторот $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$ е комплетен, па од теоремата на Хауздорф (теорема 2.9 б)) следува дека множеството F е компактно. ♦

2.11. Теорема. Компактен метрички простор е сепарабилен.

Доказ. Нека (X, ρ) е компактен метрички простор. Од теоремата на Хауздорф (теорема 2.9 а)) следува дека X е потполно ограничен. Конечно, од теорема 2.8 следува дека просторот X е сепарабилен. ♦

3. ТЕОРЕМА НА БОЛЦАНО-ВАЕРШТРАС

3.1. Теорема (Болцано-Ваерштрас). Ако F е компактно множество во (X, ρ), тогаш секоја бесконечна низа елементи од F содржи конвергентна подниза во (X, ρ) која конвергира кон некој елемент од F.

Доказ. Нека множеството F е компактно и $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е произволна низа во F таква што $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не содржи подниза која конвергира кон некој елемент $x \in F$. Според тоа, за секој $x \in F$ не постои подниза од $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ која конвергира кон x. Тоа значи, за секој $x \in F$ постои $\varepsilon(x) > 0$ и постои $n_0(x)$ такви што за секој $n \geq n_0(x)$ важи $\rho(x_n, x) \geq \varepsilon(x)$. Фамилијата $\{B(x;\varepsilon(x)) \mid x \in F\}$ е отворена покривка на компактното множество F, па затоа содржи конечна потпокривка

$$\{B(x_1;\varepsilon(x_1)), B(x_2;\varepsilon(x_2)), ..., B(x_m;\varepsilon(x_m))\}$$

т.е.

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i;\varepsilon(x_i)).$$

Земаме

$$n^* = \max\{n_i(x_i) \mid i = 1, 2, .., m\}$$

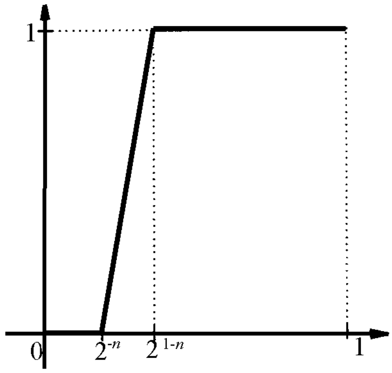
и добиваме дека за $n \geq n^*$ важи $\rho(x_n, x_i) \geq \varepsilon(x_i)$, за $i = 1, 2, ..., m$, што значи дека

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^m B(x_i;\varepsilon(x_i)), \text{ за } n \geq n^*,$$

т.е. $x_n \notin F$, за $n \geq n^*$, што е противречност. ♦

3.2. Пример. Во просторот $X = (\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ да ја разгледаме низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ определена со

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 2^{-n}\\ 2^n t-1, & 2^{-n}<t<2^{1-n}\\ 1, & 2^{1-n}\le t\le 1,\end{cases}$$



Цртеж 3

цртеж 3. Очигледно,

$$\rho_\infty(0,x_n)=\max_{t\in[0,1]}|0-x_n(t)|=1,$$

што значи дека сите овие функции лежат во затворената топка $\overline{B}(0;1)$. Понатаму, за $m>n$ важи

$$x_n(2^{-n})=0 \text{ и } x_m(2^{-n})=1,$$

па затоа при $m\neq n$ имаме

$$\rho_\infty(x_m,x_n)=\max_{t\in[0,1]}|x_m(t)-x_n(t)|=1.$$

Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не содржи конвергентна подниза, па од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека множеството $\overline{B}(0;1)$ не е компактно. ♦

3.3. Последица. Нека F е компактно множество во метричкиот простор (X,ρ) и нека $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е низа во F таква што секоја конвергентна подниза од $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ конвергира кон x. Тогаш низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ конвергира кон x.

Доказ. Нека претпоставиме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не конвергира кон x. Тогаш постојат $\delta>0$ и подниза $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ на $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ такви што

$$\rho(y_i,x)>\delta \text{, за } i=1,2,\dots. \tag{1}$$

Но, множеството F е компактно, па од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека низата $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ содржи конвергетна подниза. Според претпоставката оваа подниза конвергира кон x, што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува дека низата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ конвергира кон x. ♦

3.4. Последица. Нека A е компактно подмножество од метричкиот простор (X,ρ) и $B\subset X$. Тогаш постои точка $x_0\in A$ таква што $\rho(A,B)=\rho(x_0,B)$.

Доказ. Нека $\rho(A,B)=r$. Бидејќи

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,\, y\in B\},$$

за секој $n\in\mathbf{N}$ постојат $x_n\in A$ и $y_n\in B$ такви, што

$$r\le\rho(x_n,y_n)<r+\tfrac{1}{n}.$$

Множеството A е компактно, па од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи подниза која конвергира кон точка $x_0 \in A$. Ќе докажеме дека $r = \rho(A,B) = \rho(x_0,B)$.

Нека претпоставиме дека $\rho(x_0,B) > r$, т.е. дека $\rho(x_0,B) = r+\varepsilon$, каде $\varepsilon > 0$. Бидејќи поднизата од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон x_0, па затоа постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\rho(x_0,x_{n_0}) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ и } \rho(x_{n_0},y_{n_0}) < r + \tfrac{1}{n_0} < r + \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Но, тогаш

$$\rho(x_0,x_{n_0}) + \rho(x_{n_0},y_{n_0}) < r + \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = r + \varepsilon = \rho(x_0,B) \le \rho(x_0,y_{n_0}),$$

што противречи на неравенството на триаголник. Конечно, од добиената противречност следува равенството $\rho(A,B) = \rho(x_0,B)$. ♦

3.5. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $F \subset X$. Ако секоја низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во F содржи подниза која конвергира кон некој елемент $x \in F$, тогаш множеството F е компактно.

Доказ. Јасно, F е затворено бидејќи ги содржи сите свои точки на натрупување. Ќе докажеме дека F е потполно ограничено, т.е. дека за секој $\varepsilon > 0$ постои конечна $\varepsilon-$ мрежа.

Да претпоставиме дека постои $\varepsilon_0 > 0$ за кој не постои конечна $\varepsilon_0 -$ мрежа за F. Нека $x_1 \in F$. Јасно, фамилијата $\{B(x_1;\varepsilon_0)\}$ не е покривка за F. Затоа постои $x_2 \in F$ таков што $x_2 \notin B(x_1;\varepsilon_0)$. Понатаму, фамилијата $\{B(x_1;\varepsilon_0), B(x_2;\varepsilon_0)\}$ не е покривка за F итн. Така, добиваме низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во F за која важи $\rho(x_m,x_n) \ge \varepsilon_0$, за $m \ne n$. Последното значи дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содржи конвергентна подниза, што е противречност. Од добиената противречност следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои конечна $\varepsilon-$ мрежа.

Понатаму, доказот е аналоген на доказот од теорема 2.9 б), со таа разлика што, според условот, конструираната Кошиева низа содржи подниза која конвергира кон точка од F, што значи Кошиевата низа конвергира кон точка од F. ♦

3.6. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор и $K_i, i=1,2,....,m$ се компактни подмножества од X. Тогаш $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ е компактно множество во X.

Доказ. Нека (X,ρ) е метрички простор, $K_i, i=1,2,....,m$ се компактни подмножества од X и $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$. Ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа во K, тогаш постои $t, 1 \le t \le m$ таков, што множеството K_t содржи бесконечно многу елементи од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. множеството K_t содржи подниза $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Но, множеството K_t е компактно, па од теорема 3.1 (Болцано-Ваерштрас) следува дека поднизата $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ содржи ковергентна подниза која конвергира кон точка $x \in K_t$. Конечно, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во K содржи конвергентна подниза која конвергира кон точка од $K_t \subseteq K$, т.е. кон точка од K, што според теорема 3.5 значи дека множеството K е компактно. ♦

3.7. Забелешка. Во случај на бесконечна фамилија компактни множества нивната унија не мора да биде компактно множество. Навистина, според последица 2.10 множествата $\overline{B}(\mathbf{o};1-\frac{1}{n}), n = 2,3,...$ се компактни во метричиот простор $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$. Меѓутоа,

$$B(\mathbf{o};1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{B}(\mathbf{o};1-\tfrac{1}{n})$$

и како $B(\mathbf{o};1)$ е отворено множество, повторно од последица 2.10 следува дека тоа не е компактно.

3.8. Теорема. Компактен метрички простор е комплетен.

Доказ. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во X. Од теорема на Болцано-Ваерштрас следува дека постои подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и елемент $x \in X$ такви, што $x_{n_k} \to x, k \to \infty$ во (X,ρ). Но, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ важи

$$\rho(x_n, x) \le \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon,$$

за доволно големи n и n_k. Конечно, Кошиевата низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна, т.е. (X,ρ) е комплетен метрички простор. ♦

3.9. Забелешка. Обратното тврдење на теорема 3.8 не важи. Имено, како што видовме во пример XII 3.3 в) и г) просторите $l^p, 1 \le p \le \infty$ се комплетни, но тие не се компактни. Навистина, ако просторот l^p е компактен, тогаш и неговото затворено подмножество $\overline{B}(0;1)$ треба да е компактно, што според теоремата на Болцано-Ваерштрас значи дека секоја низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во $\overline{B}(0;1)$ треба да содржи конвергентна подниза. Последното очигледно не е исполнето за низата $e_n = (0,...,0,1,0,...)$, каде 1 се наоѓа на $n-$тото место, што значи дека множеството $\overline{B}(0;1)$ не е компактно.

Според последица 2.2 компактните множества во метрички простор се затворени и ограничени. Меѓутоа, во забелешка 2.3 дадовме пример на затворено и ограничено множество кое не е компактно. Множеството $\overline{B}(0;1) \subset l^p$, $1 \le p \le \infty$ е уште еден пример на затворено и ограничено множество кое не е компактно множество, па од теоремата на Хауздорф следува дека тоа не е потполно ограничено множество во просторите $l^p, 1 \le p \le \infty$.

Слично, множеството $\overline{B}(0;1)$ е ограничено и затворено во метричкиот простор $X = (\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$, но како што видовме во пример 3.2 тоа не е компактно.

3.10. Теорема. Декартовиот производ (Z, ρ_p) на метричките простори (X, ρ) и (Y, d) , каде

$$\rho_p(z_1, z_2) = (\rho^p(x_1, x_2) + d^p(y_1, y_2))^{1/p} \text{ , за } p \ge 1 \tag{1}$$

$$\rho_\infty(z_1, z_2) = \max\{\rho(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\} \text{ , } p = \infty \tag{2}$$

за секои $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in Z$ е компактен ако и само ако метричките простори (X, ρ) и (Y, d) се компактни.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека (X, ρ) и (Y, d) се компактни метрички простори и $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, $z_n = (x_n, y_n)$ е произволна низа во (Z, ρ_p) . Тогаш, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ се низи во X и Y , соодветно. Но, X е компактен метрички простор, па од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека постои конверегентна подниза $\{x_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ од $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Понатаму, $\{y_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ е низа во Y и како Y е компактен метрички простор, повторно од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека постои конвергентна подниза $\{y_{n_{i(k)}}\}_{k=1}^\infty$ од $\{y_{n_i}\}_{i=1}^\infty$. Според тоа, $\{x_{n_{i(k)}}\}_{k=1}^\infty$ е подниза од конвергентната низа $\{x_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, па затоа таа е конвергентна. Значи, низата $\{z_{n_{i(k)}}\}_{k=1}^\infty$, $z_{n_{i(k)}} = (x_{n_{i(k)}}, y_{n_{i(k)}})$ е подниза од низата $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ и таа според теорема IX 14.5 е конвергентна. Конечно, од теорема 3.5 следува дека (Z, ρ_p) е компактен метрички простор.

$\Rightarrow$. Нека Декартовиот производ (Z, ρ_p) е компактен емтрички простор и $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ се низи во X и Y , соодветно. Тогаш, $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, $z_n = (x_n, y_n)$ е низа во (Z, ρ_p) . Но, просторот (Z, ρ_p) е компактен, па од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека постои конвергентна подниза $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $z_{n_k} = (x_{n_k}, y_{n_k})$ од $\{z_n\}_{n=1}^\infty$. Но, сега од теорема IX 14.5 следува дека поднизите $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ од низите $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, соодветно, се конвергентни. Конечно, од теорема 3.5 следува дека метричките простори (X, ρ) и (Y, d) се компактни. ♦

3.11. Последица. Декартовиот производ (Z, d_p) на метричките простори (X_i, ρ_i), $i = 1, 2, ..., n$, каде

$$d_p(x, y) = [(\rho_1(x_1, y_1))^p + (\rho_2(x_2, y_2))^p + ... + (\rho_n(x_n, y_n))^p]^{1/p}, \ p \geq 1 \tag{8}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2), ..., \rho_n(x_n, y_n)\}, \ p = \infty. \tag{9}$$

е компактен метрички простор ако и само ако метричките простори $(X_i, \rho_i), i = 1, ..., n$ се компактни.

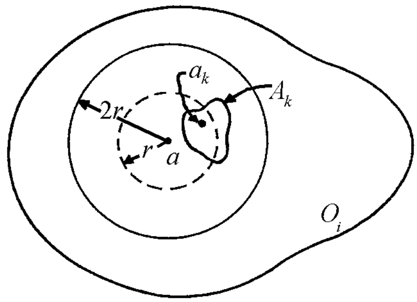
Доказ. Непосредно следува од теорема 3.10 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.13. Овде, користејќи ја теоремата на Болцано-Ваерштрас ќе ја докажеме теоремата на Лебег, која се однесува на таканаречениот Лебегов број за отворена покривка на компактен метрички простор.

Теорема (Лебег). Ако (X, ρ) е компактен метрички простор и $\mathcal{O} = \{O_i \mid i \in I\}$ е отворена покривка на X, тогаш постои $\delta > 0$ таков што секое множество $A \subset X$ за кое важи $d(A) < \delta$ е подмножество од некој елемент на покривката $\mathcal{O}$.

Бројот δ го нарекуваме *Лебегов број* за покривката $\mathcal{O}$.

Доказ. Нека претпоставиме дека таков δ не постои. За секој природен број n да избереме множество A_n такво, што $d(A_n) < \frac{1}{n}$, но такво што A_n не е подмножество на ниту еден елемент од покривката $\mathcal{O}$. Јасно, множеството A_n постои, бидејќи во спротивно бројот $\frac{1}{n}$ би бил Лебегов број на покривката $\mathcal{O}$. За секој n да земеме точка $a_n \in A_n$, со што добиваме низа $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Но, X е компактен метрички простор, па од теорема на Болцано-Ваерштрас следува дека низата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ содржи конвергентна подниза која конвергира кон некој елемент $a \in X$. Според тоа, постои $i \in I$ таков, што $a \in O_i$ и како множеството O_i е отворено постои $r > 0$ таков, што $B(a; 2r) \subseteq O_i$, цртеж 4.



Цртеж 4

Точката a е граница на подниза на низата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, па затоа отворената топка $B(a; r)$ содржи бесконечно многу членови на низата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Според тоа, постои $k > \frac{1}{r}$ таков, што $a_k \in B(a; r)$. Понатаму,

$$\rho(a_k, x) \leq d(A_k) < \frac{1}{k} < r \text{, за секој } x \in A_k,$$

од што следува

$$\rho(a,x) \le \rho(a,a_k) + \rho(a_k,x) < r + r = 2r ,$$

за секој $x \in A_k$, т.е.

$$A_k \subseteq B(a;2r) \subseteq O_i ,$$

што противречи на изборот на множествата A_n , $n = 1,2,\ldots$. Конечно, од добиената противречност следува егзистенцијата на Лебеговиот број. ♦

3.14. На крајот од овој параграф ќе се задржиме на релативно компактните множества, при што ќе дадеме критериум за релативна компактност, кој е непосредна последица од теоремите 3.1 (Болцано-Ваерштрас) и 3.5. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. За множеството A ќе велиме дека е *релативно компактно* ако неговото затворање $\overline{A}$ е компактно множество.

3.15. Лема. а) Секое подмножество на компактен метрички простор е релативно компактно.

б) Секое ограничено подмножество на просторот $(\mathbf{R}^m,\rho_p)$ е релативно компактно.

Доказ. а) Непосредно следува од теорема 1.7.

б) Непосредно следува од теоремата на Хајне-Борел (последица 2.10). ♦

3.16. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A \subseteq X$. Множеството A е релативно компактно ако и само ако секоја низа точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ од A содржи конвергентна подниза која конвергира во X .

Доказ. $\Rightarrow$. Нека A е релативно компактно множество и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа од A . Значи, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа од компактното множество $\overline{A}$, па од теорема 3.1 следува дека таа содржи конвергентна подниза.

$\Leftarrow$. Нека A е множество за кое секоја низа содржи конвергентна подниза која конвергира во X и нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа во $\overline{A}$. Од дефиниција IX 9.1 следува дека за секој n постои точка $a_n \in A$ таква што $\rho(x_n,a_n) < \frac{1}{n}$. Сега од низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ избираме подниза $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, која во X има граница, да ја означиме со b .

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено и нека k_0 таков, што $\rho(a_{n_k},b) < \frac{\varepsilon}{2}$, за секој $k > k_0$. Земаме $k > \max\{k_0,\frac{\varepsilon}{2}\}$ и добиваме

$$\rho(x_{n_k},b) \le \rho(x_{n_k},a_{n_k}) + \rho(a_{n_k},b) < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

т.е. b е граница на поднизата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ од низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Конечно, од теорема 3.5 следува дека множеството $\overline{A}$ е компактно, т.е. множеството A е релативно компактно. ♦

4. НЕПРЕКИНАТОСТ И КОМПАКТНОСТ

4.1. Лема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f\in\mathbf{C}(X,Y)$. Ако $K_i, i=1,2,3,...$ се непразни компактни множества такви што $K_{i+1}\subseteq K_i$, за $i=1,2,3,...$ и $K=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}K_i$, тогаш $f(K)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}f(K_i)$.

Доказ. Од $K\subseteq K_i$, за $i=1,2,...$ следува $f(K)\subseteq f(K_i)$, за $i=1,2,...$, па затоа $f(K)\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}f(K_i)$.

Нека $y\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}f(K_i)$. Според лема IX 8.4 б) множеството $\{y\}$ е затворено, па од X 3.5 следува дека множеството $f^{-1}(\{y\})$ е затворено, што според 1.7 значи дека за секој $i\in\mathbf{N}$ множеството $f^{-1}(\{y\})\cap K_i$ е компактно. Понатаму,

$$f^{-1}(\{y\})\cap K_{i+1}\subseteq f^{-1}(\{y\})\cap K_i \text{, за } i=1,2,...,$$

па од последица 1.9 следува дека множеството

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(f^{-1}(\{y\})\cap K_i)=f^{-1}(\{y\})\cap(\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i)=f^{-1}(\{y\})\cap K$$

не е празно, па затоа $y\in f(K)$ и од произволноста на y следува

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}f(K_i)\subseteq f(K).$$

Конечно, од $f(K)\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}f(K_i)$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}f(K_i)\subseteq f(K)$ следува

$$f(K)=\bigcap_{i=1}^{\infty}f(K_i). \text{ ♦}$$

4.2. Теорема. а) Ако (X,ρ) е компактен метрички простор, (Y,d) е метрички простор и $f\in\mathbf{C}(X,Y)$, тогаш $f(X)$ е компактно множество во (Y,d).

б) Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f\in\mathbf{C}(X,Y)$. Ако множеството M е релативно компактно во (X,ρ), тогаш $f(M)$ е релативно компактно множество во (Y,d).

Доказ. а) Нека $\mathcal{O} = \{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е произволна отворена покривка на множеството $f(X)$ во (Y,d). Од теорема X 3.2 следува дека за секој $\alpha \in A$ множеството $f^{-1}(O_\alpha)$ е отворено, па затоа фамилијата $\{f^{-1}(O_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е отворена покривка на X. Но, (X,ρ) е компактен метрички простор, па затоа постојат $\alpha_i \in A, i = 1,2,...,n$ такви, што

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha_i})$$

од што следува

$$f(X) \subseteq f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(O_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{\alpha_i} \ ,$$

т.е. $f(X)$ е компактно множество во (Y,d).

б) Нека M е релативно компактно во (X,ρ). Тогаш $\overline{M}$ е компактно во (X,ρ), па од тврдењето под а) следува дека $f(\overline{M})$ е компактно во (Y,d). Ќе докажеме дека $\overline{f(M)} = f(\overline{M})$, што значи дека множеството $\overline{f(M)}$ е компактно, па затоа множеството $f(M)$ е релативно компактно во (Y,d).

Навистина, од $M \subseteq \overline{M}$ следува $f(M) \subseteq f(\overline{M})$ е како $f(\overline{M})$ е компактно множество, тоа е затворено, па затоа $\overline{f(M)} \subseteq f(\overline{M})$. Обратно, ако $y \in f(\overline{M})$, тогаш постои $x \in \overline{M}$ таков што $y = f(x)$. Понатаму, ако $x \in \overline{M}$, од теорема IX 9.2 следува дека постои низа $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во M таква, што $x_n \to x$, $n \to \infty$. Но, $f \in \mathbf{C}(X,Y)$, па од теорема IX 2.1 следува дека $f(x_n) \to f(x)$, кога $n \to \infty$. Според тоа, постои низа $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ во $f(M)$ таква, што $f(x_n) \to y$, $n \to \infty$, па од теорема IX 9.2 следува дека $y \in \overline{f(M)}$. Значи, $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$ и како $\overline{f(M)} \subseteq f(\overline{M})$, добиваме $\overline{f(M)} = f(\overline{M})$. ♦

4.3. Забелешка. Од претходната теорема следува, дека ако (X,ρ), (Y,d) се метрички простор, E е компактно подмножество од X и $f \in \mathbf{C}(E,Y)$, тогаш $f(E)$ е компактно множество во (Y,d).

4.4. Последица. Ако $f : X \to Y$ е непрекината биекција од компактниот метрички простор (X,ρ) во метричкиот простор (Y,d), тогаш f е хомеоморфизам.

Доказ. Доволно е да докажеме дека инверзната функција $f^{-1} : Y \to X$ е непрекината. Нека A е затворено подмножество од X. Просторот X е компактен, па од теорема 1.7 следува дека множеството A е компактно. Понатаму, функцијата f е непрекината, па од теорема 4.2 а) следува дека множеството

$f(A)$ е компактно во Y, што според последица 1.11 значи дека множеството $f(A)$ е затворено. Конечно, праслликата $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ на секое затворено множество A во X е затворено множество во Y, па од последица X 3.5 следува дека функцијата f^{-1} е непрекината. ♦

4.5. Забелешка. Во претходната последица претпоставката за компактноста на просторот (X,ρ) не може да се изостави. Навистина, за непрекинатата биекција $f:[0,1) \to S((0,0);1)$ определена со

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

за секој $t \in [0,1)$, инверзната функција не е непрекината, (зошто?). Според тоа, f не е хомеоморфизам. ♦

4.6. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор, F е компактно подмножество од X и $f \in \mathbf{C}(F)$. Тогаш

а) постои $L \in \mathbf{R}$ таков, што за секој $x \in F$ важи $|f(x)| \le L$;

б) постои $x_* \in F$ таков, што $f(x_*) = \inf\limits_{x \in F} f(x) = \min\limits_{x \in F} f(x)$;

в) постои $x^* \in F$ таков, што $f(x^*) = \sup\limits_{x \in F} f(x) = \max\limits_{x \in F} f(x)$;

Доказ. Според забелешка 4.3 множеството $f(F)$ е компактно во $\mathbf{R}$, што значи тоа е ограничено и затворено, па затоа постојат L, x_* и x^* кои ги задоволуваат тврдењата а), б) и в). ♦

4.7. Пример. Нека $x_n \in \mathbf{C}([0,1])$, за $n = 1,2,...$ се такви што

$$\int_0^1 (x_n(t) - x_m(t))^2 \, dt \to 0, \text{ кога } m,n \to \infty$$

и $k:[0,1]\times[0,1] \to \mathbf{R}$ е непрекината функција. Дефинираме $y_n:[0,1] \to \mathbf{R}$ со

$$y_n(t) = \int_0^1 k(t,t')x_n(t')dt', \text{ за } n = 1,2,....$$

Докажете дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира.

Решение. Бидејќи функцијата $|k|$ е непрекината на компактното множество $[0,1]\times[0,1]$, од теорема 4.6 в) следува дека постои $M = \sup\limits_{t,t' \in [0,1]} |k(t,t')|$.

Понатаму, од својствата на Римановиот интеграл, неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, својствата на супремумот и условот на задачата следува

$$\rho_\infty(y_n, y_m) = \sup_{t \in [0,1]} |y_n(t) - y_m(t)|$$

$$= \sup_{t\in[0,1]} |\int_0^1 k(t,t')[x_n(t') - x_m(t')]dt'|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,t')| \bullet |x_n(t') - x_m(t')|\, dt'$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} [(\int_0^1 |k(t,t')|^2\, dt')^{1/2} \bullet (\int_0^1 |x_n(t') - x_m(t')|^2\, dt')^{1/2}]$$

$$\leq M(\int_0^1 |x_n(t') - x_m(t')|^2\, dt')^{1/2} \to 0, \quad m,n \to \infty$$

што значи дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во просторот $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$. Но, според пример XII 2.3 д) овој простор е комплетен, па затоа низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$. Конвергенцијата во $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ е еквивалентна на рамномерната конвергенција (пример IX 3.10), што значи дека $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира. ♦

4.8. Пример. Нека (X,d) е метрички простор, K е непразно компактно подмножество од X и за функцијата $\varphi: K \to K$ важи

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x,y), \tag{1}$$

за секои $x, y \in K$, $x \neq y$. Докажете дека постои единствена точка $x \in K$ таква што $\varphi(x) = x$.

Решение. Од неравенството (1) следува дека функцијата φ е рамномерно непрекината, па значи таа е непрекината. Да ја разгледаме функцијата $F: K \to \mathbf{R}$ определена со $F(x) = d(x, \varphi(x))$. Јасно, функцијата F е непрекината и како непразното множество K е компактно, од теорема 4.6 б) следува дека постои точка x' таква што

$$F(x') = \min_{x\in K} F(x) = m \tag{2}$$

Нека претпоставиме дека $\varphi(x') \neq x'$. Но, тогаш $\varphi(x') \in K$ и користејќи го условот (1) добиваме

$$F(\varphi(x')) = d(\varphi(x'), \varphi(\varphi(x'))) < d(x', \varphi(x')) = F(x'),$$

што противречи на равенството (2). Од добиената противречност следува дека постои точка $x' \in K$ таква што $\varphi(x') = x'$.

Нека $x', x'' \in K$ се такви што $\varphi(x') = x'$, $\varphi(x'') = x''$ и $x' \neq x''$. Тогаш, од условот (1) следува

$$d(x'', x') = d(\varphi(x''), \varphi(x')) < d(x'', x'),$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $x' = x''$, што значи дека x' е единствена фиксна точка. ♦

4.9. Пример. Нека k е непрекината функција на $\mathbf{R}^2$ таква што $|k(x,y)|<1$, за секои $x,y\in[0,1]$. Докажете, дека постои единствена непрекината функција $f(x)$ на $[0,1]$ таква што

$$f(x)+\int_0^1 k(x,y)f(y)dy=e^{x^2}.$$

Решение. Множеството $\{(x,y)\,|\,x,y\in[0,1]\}$ е компактно и k е непрекината функција на $\mathbf{R}^2$, па затоа постои $\lambda\in\mathbf{R}$ таков што $\max\limits_{x,y\in[0,1]}|k(x,y)|=\lambda<1$. На комплетниот метрички простор $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_\infty)$ да ја разгледаме функцијата A зададена со

$$(Af)(x)=e^{x^2}-\int_0^1 k(x,y)f(y)dy \text{, за секој } f\in C([0,1]).$$

Имаме:

$$|(Af)(x)-(Ag)(y)|=|\int_0^1 k(x,y)[f(y)-g(y)]dy|\le\int_0^1|k(x,y)|\bullet|f(y)-g(y)|dy$$

$$\le\lambda\max_{y\in[0,1]}|f(y)-g(y)|\int_0^1 dy=\lambda\rho_\infty(f,g),$$

од што следува $\rho_\infty(Af,Ag)\le\lambda\rho_\infty(f,g)$, т.е. пресликувањето A е контранкција. Сега, од теоремата на Банах за фиксна точка следува дека A има единствена неподвижна точка, што значи дека постои единствена функција $h\in\mathbf{C}([0,1])$ таква што важи $Ah=h$, што и требаше да се докаже. ♦

4.10. Ако непрекината функција f е зададена на некомпактно множество M, тогаш $\sup\limits_{x\in M}f(x)$ и $\inf\limits_{x\in M}f(x)$ може да не се достигнуваат, што може да се види од следниов пример.

Пример. Во просторот $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_\infty)$ да го разгледаме множеството M од сите функции $x(t)$ такви, што

$$\max_{t\in[0,1]}|x(t)|\le 1 \text{ и } x(0)=0,\, x(1)=1.$$

Јасно, M е ограничено и затворено множество во $(\mathbf{C}([0,1]),\rho_\infty)$. Да ја разгледаме функцијата $f:\mathbf{C}([0,1])\to\mathbf{R}$, определена со:

$$f(x)=\int_0^1 x^2(t)dt$$

Лесно се докажува дека оваа функција е непрекината на M, но таа не го достигнува својот инфимум. Имено, ако $x(t) = t^n$, тогаш $f(x) = \frac{1}{2n+1}$, па значи $\inf\limits_{x \in M} f(x) = 0$. Но, очигледно, за секоја непрекината функција таква, што $x(0) = 0, x(1) = 1$ важи $f(x) > 0$. Според тоа, множеството M е уште еден пример на множество во $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ кое не е компактно, иако тоа е ограничено и затворено.

Во натамошните разгледувања ќе дадеме критериум за компактност во $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$. ♦

4.11. Според теорема 4.6 а) непрекината реална функција на компактно подмножество K од $\mathbf{R}^m$ е ограничена. Ќе докажеме дека во просторот $\mathbf{R}^m$ важи обратната теорема.

Теорема. Ако K е подмножество од $\mathbf{R}^m$ и ако секоја непрекината реална функција на K е ограничена, тогаш множеството K е компактно.

Доказ. Според пример X 2.3 в) функцијата $f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{o})$ е непрекината на K. Ако множеството K не е ограничено, тогаш функцијата f не е ограничена, што е противречност. Од добиената противречност следува дека множеството K е ограничено.

Ако множеството K е ограничено, но не е компактно, тогаш од теоремата на Хајне-Борел (последица 2.10) следува дека тоа не е затворено. Затоа постои $\mathbf{y}_0 \in \overline{K} \setminus K$. Јасно, во овој случај реалната функција $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)}$ е непрекината на K, но таа не е ограничена (зошто?). Според тоа, множеството K е затворено.

Конечно, K е ограничено и затворено подмножество од $\mathbf{R}^m$, па од теоремата на Хајне-Борел следува дека тоа е компактно. ♦

4.12. Теорема (Кантор). Нека (X, ρ) и (Y, d) се метрички простори и да претпоставиме дека:

а) X е компактно множество во (X, ρ) и

б) $f \in \mathbf{C}(X, Y)$.

Тогаш, функцијата f е рамномерно непрекината на X.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ следува дека за секој $x \in X$ постои $\delta_x > 0$ таков што

$$\text{од } \rho(x, y) < \delta_x \text{ следува } d(f(x), f(y)) < \tfrac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Нека $O_x = B(x; \frac{1}{2}\delta_x)$. Фамилијата $\mathcal{O} = \{O_x \mid x \in X\}$ е отворена покривка на X и бидејќи X е компактно множество, добиваме дека постојат $x_1, \ldots, x_n \in X$ такви што

$$X \subseteq O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup ... \cup O_{x_n} . \tag{4}$$

Нека $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n}\}$. Јасно $\delta > 0$. Нека $x', x'' \in X$ се точки за кои $\rho(x', x'') < \delta$. Од (4) следува дека постои $m \in \{1, 2, ..., n\}$ таков што $x' \in O_{x_m}$, па затоа $\rho(x', x_m) < \frac{1}{2}\delta_{x_m}$, од што следува:

$$\rho(x'', x_m) \le \rho(x', x'') + \rho(x', x_m) < \delta + \tfrac{1}{2}\delta_{x_m} \le \delta_{x_m} .$$

Конечно, од (3) добиваме:

$$d(f(x'), f(x'')) \le d(f(x'), f(x_m)) + d(f(x''), f(x_m)) < \varepsilon ,$$

т.е. функцијата f е рамномерно непрекината на A. ♦

4.13. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор, A е компактно и B е затворено подмножество од X и притоа важи $A \cap B = \varnothing$. Тогаш, $\rho(A, B) > 0$.

Доказ А. Да ја разгледаме функцијата $f : X \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \rho(x, B) \text{, за секој } x \in X .$$

Според лема X 2.9 оваа функција е рамномерно непрекината, па затоа таа е непрекината. Понатаму, множеството $X \setminus B$ е отворено, т.е. за секој $x \in X \setminus B$ постои $r_x > 0$ таков што $B(x; r_x) \subseteq X \setminus B$, па затоа за секој $b \in B$ важи $b \notin B(x; r_x)$, т.е. $\rho(x, b) \ge r_x$. Значи, за секој $x \in X \setminus B$ важи

$$f(x) = \rho(x, B) = \inf\{\rho(x, b) \mid b \in B\} \ge r_x > 0 ,$$

т.е. функцијата f е позитивна на $X \setminus B$. Но, $A \subset X \setminus B$, па затоа функцијата f е позитивна на A. Понатаму, множеството A е компактно, па од теорема 4.6 б) следува дека постои $x_* \in A$ таков, што $f(x_*) = \inf\limits_{x \in A} f(x) > 0$, што според лема IX 4.8 а) значи $\rho(A, B) = f(x_*) > 0$.

Доказ Б. Нека претпоставиме дека $\rho(A, B) = 0$. Од последица 3.4 следува дека постои $x_0 \in A$ таков што

$$\rho(x_0, B) = \rho(A, B) = 0 .$$

Но, множеството B е затворено, па од лема IX 9.12 следува $x_0 \in B$, што противречи на претпоставката $A \cap B = \varnothing$. Конечно, од добиената противречност следува $\rho(A, B) > 0$. ♦

4.14. Пример. Нека (X, ρ) е компактен метрички простор и $f : X \to X$ е изометрија. Докажете дека $f(X) = X$.

Решение. Нека претпоставиме дека постои $x \notin f(X)$. Според лема X 5.3 изометријата f е рамномерно непрекината, па затоа таа е непрекината. Сега од теорема 4.2 следува дека $f(X)$ е компактно множество. Но, множеството $\{x\}$ е затворено подмножество од X и како $\{x\} \cap f(X) = \varnothing$ од лема 4.13 следува дека постои $\alpha > 0$ таков што $\rho(x, f(X)) = \alpha > 0$.

Множеството X е компактно, па од теорема 3.1 (Болцано-Ваерштрас) следува дека низата $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ содржи конвергентна подниза $\{f^{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$. Но, тогаш бидејќи f е изометрија, за $i < k$ имаме

$$\rho(f^{n_i}(x), f^{n_k}(x)) = \rho(x, f^{n_k - n_i}(x)) = \alpha > 0$$

што противречи на фактот дека секоја конвергентна низа е Кошиева. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои $x \in X$ таков што $x \notin f(X)$, што значи дека $f(X) = X$. ♦

4.15. На крајот од овој параграф ќе докажеме дека својството множеството е компактно е наследно кај еквивалентните метрики, т.е. ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Нека ρ и d се еквивалентни метрики на множеството X. Тогаш, множеството A е компактно (релативно компактно) во (X, ρ) ако и само ако тоа е компактно (релативно компактно) во (X, d).

Доказ А. Според теорема X 7.3 метриките ρ и d се еквивалентни ако и само ако функцијата $\mathrm{id}_X : (X, \rho) \to (X, d)$ определена со $\mathrm{id}_X(x) = x$, за секој $x \in X$ е хомеоморфизам. Сега тврдењето на теоремата непосредно следува од теорема 4.2.

Доказ Б. $\Rightarrow$. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во множеството A. Тогаш бидејќи A е компактно во просторот (X, ρ), од теорема 3.1 (Болцано-Ваерштрас) следува дека постои подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ која во просторот (X, ρ) конвергира кон точка $x \in A$. Сега, од теорема X 7.9 следува дека поднизата $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира во просторот (X, d) кон точката $x \in A$. Конечно, од теорема 3.5 следува дека множеството A е компактно во просторот (X, d).

Ако множеството A е релативно компактно во просторот (X, ρ), тогаш множеството $\overline{A}$ е компактно во просторот (X, ρ), па затоа тоа е компактно и во просторот (X, d). Но, тоа значи дека A е релативно компактно во просторот (X, d).

$\Leftarrow$. Доволно е претходно изнесеното да ги замениме местата на просторите (X, ρ) и (X, d). ♦

5. КАРАКТЕРИЗАЦИЈА НА КОМПАКТНИТЕ МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

5.1. Во овој параграф, со помош на Канторовото множество ќе дадеме карактеризацијата на компактните метрички простори. Во II 11.2 докажавме дека Канторовото множество D е затворено. Но, множеството D е и ограничено, па според теорема I 25.6 Канторото множество D е компактно. Понатаму, ако (X,ρ) е метрички простор и $f:D\to X$ е непрекината сурјекција, тогаш од теорема 4.2 а) следува дека $X=f(D)$ е компактно множество.

5.2. Меѓутоа, во врска со компактноста на метричките простори, Канторовото множество има посебна улога. Пред да ја искажеме и докажеме следнава теорема, со чија помош ќе ги карактеризираме компактните метрички простори, накратко ќе се осврнеме на Канторовото множество. Во I 11.2 Канторовото множество го добивме на следниов начин: најдовме низа затворени множества $I_i, i=0,1,2,3,...$ за кои важи $I_{i+1}\subset I_i, i=0,1,2,3,...$ и за секој $i=0,1,2,3,...$ множеството I_i е унија на 2^i затворени интервали со должина 3^{-i} и $D=\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} I_i$.

Во следните разгледувања за 2^i-те интервали со должина 3^{-i} чија унија го дава множеството I_i ќе велиме дека се *интервали од ранг* i. Сега сме подготвени да ја докажеме споменатата теорема.

Теорема. Секој компактен метрички простор (X,ρ) е непрекината слика на Канторовото совршено множество.

Доказ. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго монотоно опаѓачка низа позитивни броеви која конвергира кон нула. За секој $n=1,2,...$ конструираме конечна ε_n – мрежа $\{x_{i_1}^{(n)}\mid i_1=1,2,...,m_n\}$ на просторот X. Со додавање точки, ако тоа е потребно, можеме да сметаме дека $m_n=2^{k_n}$. За отворените топки

$$B_{i_1}^{(1)}(x_{i_1}^{(1)};\varepsilon_1),\ i_1=1,2,...,m_1=2^{k_1}$$

важи $X=\bigcup\limits_{i_1=1}^{2^{k_1}} B_{i_1}^{(1)}(x_{i_1}^{(1)};\varepsilon_1)$, па затоа $X=\bigcup\limits_{i_1=1}^{2^{k_1}} \overline{B}_{i_1}^{(1)}(x_{i_1}^{(1)};\varepsilon_1)$. Да ставиме

$$X_{i_1}=X\cap\overline{B}_{i_1}^{(1)}(x_{i_1}^{(1)};\varepsilon_1),\ i_1=1,2,...,m_1=2^{k_1},$$

со што добивме претставување на множеството X како унија на $m_1=2^{k_1}$ затворени множества секое од кои има дијаметар помал или еднаков на $2\varepsilon_1$. Според последица 1.12 множествата X_{i_1}, $i_1=1,2,...,m_1=2^{k_1}$ се компактни. Повторувајќи ја постапката, секое од множествата X_{i_1}, $i_1=1,2,...,m_1=2^{k_1}$ можеме да го претставиме како унија на $m_2 = 2^{k_2}$ затворени множества $X_{i_1 i_2}$, $i_2 = 1, 2, ..., m_2 = 2^{k_2}$ секое од кои има дијаметар помал или еднаков на $2\varepsilon_2$ итн. Притоа, можеме да сметаме дека сите множества во претходната конструкција се непразни (зошто?).

Да се вратиме на Канторовото множество D. Според конструкцијата множеството D лежи на интервалите со ранг k_1, а исто така и на интервалите со ранг $k_1 + k_2$. Имаме $m_1 = 2^{k_1}$ интервали со ранг k_1 и истите да ги нумерираме од лево на десно и да ги означиме со

$$\Delta_{i_1},\ i_1 = 1, 2, ..., m_1 = 2^{k_1}.$$

На секој интервал Δ_{i_1} со ранг k_1 лежат $m_2 = 2^{k_2}$ интервали со ранг $k_1 + k_2$ и истите да ги нумерираме од лево на десно и да ги означиме со

$$\Delta_{i_1 i_2},\ i_2 = 1, 2, ..., m_2 = 2^{k_2} \text{ итн.}$$

Според тоа, за секој $j \in \mathbf{N}$ со опишаната постапка воспоставивме биекција меѓу претходно конструираните затворени множества $X_{i_1 i_2 ... i_j}$ на просторот X и затворените интервали $\Delta_{i_1 i_2 ... i_j}$ од конструкцијата на Канторовото множество.

Да земеме произволна точка $t_0 \in D$. Од конструкцијата на Канторовото множество следува дека t_0 е еднозначно определена со фамилија затворени интервали $\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2}, \Delta_{i_1 i_2 i_3}, ...$. Да ја разгледаме соодветната фамилија затворени множества X_{i_1}, $X_{i_1 i_2}$, $X_{i_1 i_2 i_3}$, ... Просторот X е комплетен (теорема 3.8) и според конструкцијата, оваа фамилија ги задоволува условите на теоремата на Кантор (теорема XII 2.7), па затоа постои една и само една точка $x_0 \in X$ која припаѓа на сите множества X_{i_1}, $X_{i_1 i_2}$, $X_{i_1 i_2 i_3}$, ... и на точката $t_0 \in D$ и ја придружуваме вака определената точка $x_0 \in X$, т.е. дефинираме пресликување $f : D \to X$ такво, што $f(t_0) = x_0$.

Ќе докажеме, дека вака дефинираната функција f е сурјекција. Нека x е произволна точка од X. Според конструкцијата постои индекс $i_1 \in \{1, 2, ..., 2^{k_1}\}$ таков што $x \in X_{i_1}$ (индексот i_1 не е еднозначно определен, бидејќи во општ случај множествата X_{i_1}, $i_1 = 1, 2, ..., m_1 = 2^{k_1}$ може да се сечат). Понатаму, постои индекс $i_2 \in \{1, 2, ..., 2^{k_2}\}$ таков што $x \in X_{i_1 i_2}$ итн. На множествата X_{i_1}, $X_{i_1 i_2}$, $X_{i_1 i_2 i_3}$, ... им соодветствуваат интервалите $\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2}, \Delta_{i_1 i_2 i_3}$, ... Овие интервали еднозначно определуваат точка $t \in D$. Јасно, $f(t) = x$, т.е. f е сурјекција.

Од досега изнесеното следува дека со претходната постапка еднозначно е определена сурјекција f од Канторовото множество во компактниот метрички простор. Ќе докажеме дека сурјекцијата f е непрекината на множеството D.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено, t_0 е произволна точка од D и $x_0 = f(t_0) \in X$. Според конструкцијата во низата множества X_{i_1}, $X_{i_1 i_2}$, $X_{i_1 i_2 i_3}$, ... постои множество $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ такво, што $x_0 \in X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ и $d(X_{i_1 i_2 \dots i_n}) < \varepsilon$, што значи $X_{i_1 i_2 \dots i_n} \subseteq B(x_0; \varepsilon)$. Со δ да го означиме растојанието од точката t_0 до поблиската крајна точка на интервалот $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кој соодветствува на множеството $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$. Ако $|t - t_0| < \delta$, тогаш $t \in \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$, па затоа

$$x = f(t) \in X_{i_1 i_2 \dots i_n} \subseteq B(x_0; \varepsilon),$$

т.е. $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, што значи f е непрекинато во t_0 и од произволноста на t_0 следува дека f е непрекината на множеството D. ♦

5.3. Имајќи ја предвид теорема 5.2 и дискусијата во 5.1 можеме да ја дадеме следнава карактеризација на компактните метрички простори.

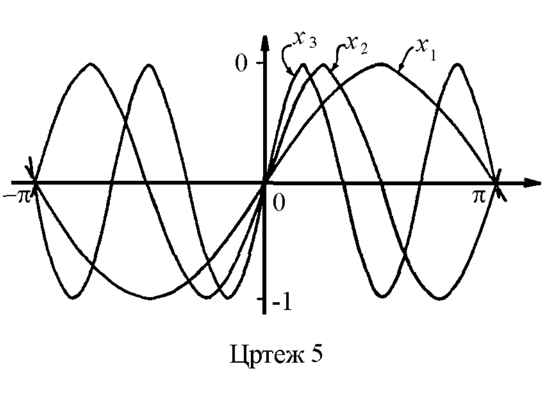
Теорема. Метричкиот простор (X, ρ) е компактен ако и само ако е непрекината слика на Канторовото совршено множество D. ♦

6. КОМПАКТНИ МНОЖЕСТВА ВО ПРОСТОРИТЕ $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$ И $l^p, 1 \le p < \infty$

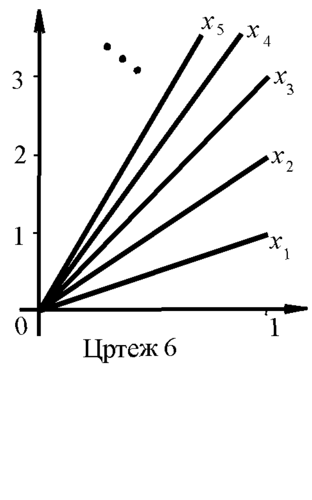
6.1. Дефиниција. Нека $A \subset \mathbf{C}([a,b])$. За фамилијата функции A ќе велиме дека е *рамномерно ограничена*, ако постои $L \in \mathbf{R}$ таков, што $|x(t)| \le L$, за секој $x \in A$ и за секој $t \in [a,b]$, т.е. ако множеството A е ограничено во просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$.

6.2. Пример. а) Фамилијата функции

$$A = \{x_n(t) = \sin nt \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{C}([0,1])$$



Цртеж 5



Цртеж 6

е рамномерно ограничена, цртеж 5. Навистина, за $L = 1$ важи

$$|x_n(t)| = |\sin nt| \leq 1, \text{ за секој } n \in \mathbf{N} \text{ и за секој } t \in [0,1].$$

б) Фамилијата функции

$$\mathcal{A} = \{x_n(t) = nt \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{C}([0,1])$$

не е рамномерно ограничена, цртеж 6. Навистина, за секој реален број $L > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што $n_0 > L$ и затоа $x_{n_0}(1) = n_0 > L$, што значи дека A не е рамномерно ограничена фамилија функции. ♦

6.3. Дефиниција. Нека $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}([a,b])$. За фамилијата функции $\mathcal{A}$ ќе велиме дека е *рамностепено непрекината*, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што за секој $x \in \mathcal{A}$ и за секои $t', t'' \in [a,b]$ за кои $|t' - t''| < \delta$ важи $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$.

6.4. Пример. Нека k е непрекината реална функција на $[0,1]\times[0,1]$ и A е фамилијата функции $x:[0,1] \to \mathbf{R}$ од видот

$$x(t) = \int_0^1 y(t')k(t,t')dt'$$

каде $y \in \mathbf{C}([0,1])$ и

$$|y(t)| \leq 1, \text{ за секој } t \in [0,1].$$

Докажете, дека фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината.

Решение. Множеството $[0,1]\times[0,1]$ е компактно, па затоа непрекинатата функција k е рамномерно непрекината. Според тоа, за $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што

$$|k(t_1, t_1') - k(t_2, t_2')| < \varepsilon, \text{ кога } \rho_2((t_1, t_1'), (t_2, t_2')) < \delta.$$

Нека $t_1, t_2 \in [0,1]$ се такви што $|t_1 - t_2| < \delta$. Тогаш, за секоја функција $x \in \mathcal{A}$ важи

$$\begin{aligned} |x(t_1) - x(t_2)| &= \left|\int_0^1 y(t')[k(t_1,t') - k(t_2,t')]dt'\right| \\ &\leq \int_0^1 |y(t')| \bullet |k(t_1,t') - k(t_2,t')|\, dt' < \int_0^1 1 \bullet \varepsilon dt' = \varepsilon, \end{aligned}$$

што значи дека фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината. ♦

6.5. Лема. Ако фамилијата $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}([a,b])$ е рамностепено непрекината, тогаш и фамилијата $\overline{\mathcal{A}}$ е рамностепено непрекината.

Доказ. Нека фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината, $x \in \overline{\mathcal{A}}$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Тогаш постои $y \in \mathcal{A}$ таков што $\rho_\infty(x,y) < \frac{\varepsilon}{3}$ и постои $\delta > 0$ таков што за секој $y \in \mathcal{A}$ и за секои $t', t'' \in [a,b]$ за кои $|t'-t''| < \delta$ важи $|y(t') - y(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Според тоа, за секои $t', t'' \in [a,b]$ за кои $|t'-t''| < \delta$ важи

$$|x(t') - x(t'')| \leq |x(t') - y(t')| + |y(t') - y(t'')| + |y(t'') - x(t'')| < \varepsilon,$$

и од произволноста на $x \in \overline{\mathcal{A}}$ следува дека фамилијата $\overline{\mathcal{A}}$ е рамностепено непрекината. ♦

6.6. Теорема (Арцело-Асколи). Во просторот $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ затвореното множество $\mathcal{F}$ е компактно ако и само ако

а) фамилијата $\mathcal{F}$ е рамномерно ограничена, и

б) фамилијата $\mathcal{F}$ е рамностепено непрекината.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека $\mathcal{F}$ е компактно подмножество од $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$. Тогаш, $\mathcal{F}$ е ограничено, па затоа условот а) е исполнет.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Од теоремата на Хауздроф (теорема 2.9) следува дека постои конечна $\frac{\varepsilon}{3}-$мрежа $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ за $\mathcal{F}$, $n = n_\varepsilon$. Но, функциите $x_1, x_2, ..., x_n$ се непрекинати на компактното множество $[0,1]$, па од теоремата на Кантор следува дека тие се рамномерно непрекинати, што значи дека постои $\delta > 0$ таков, што за секој $k = 1, 2, ..., n$ и за секои $t', t'' \in [a,b]$ за кои $|t'-t''| < \delta$ важи $|x_k(t') - x_k(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Нека $x \in F$ е дадено. Тогаш, постои $k \in \{1, 2, ..., n\}$ таков, што $\rho_\infty(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{3}$, т.е.

$$|x(t) - x_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ за секој } t \in [a,b].$$

Затоа, за секои $t', t'' \in [a,b]$ за кои $|t'-t''| < \delta$ важи

$$\begin{aligned} |x(t') - x(t'')| &= |x(t') - x_k(t') + x_k(t') - x_k(t'') + x_k(t'') - x(t'')| \\ &\leq |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t'')| + |x_k(t'') - x(t'')| < \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. условот б) е исполнет.

$\Leftarrow$. Обратно, нека $\mathcal{F}$ е затворено множество кое ги задоволува условите а) и б). Со $\{r_n \mid n \geq 1\}$ да го означиме множеството рационални броеви од интервалот $[a,b]$, нумерирани во произволен редослед. Нека $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е произволна низа во $\mathcal{F}$. Од условот а) следува дека низата $\{x_n(r_1)\}_{n=1}^\infty$ е ограничена, па затоа таа содржи конвергентна подниза $\{x_{n_k}(r_1)\}_{k=1}^\infty$, таква што

$$x_{n_k}(r_1) \to x(r_1), \; k \to \infty.$$

Да означиме $x_{n_k} = x_{1k}$, $k \geq 1$ Низата $\{x_{1k}\}_{k=1}^\infty$ од $\mathcal{F}$ е таква што $x_{1k}(r_1) \to x(r_1)$, $k \to \infty$. Понатаму, да ја разгледаме низата $\{x_{1k}(r_2)\}_{k=1}^\infty$, која исто така е ограничена, па затоа содржи конвергентна подниза $\{x_{1k_i}(r_2)\}_{i=1}^\infty$, таква што

$$x_{1k_i}(r_2) \to x(r_2),\ i \to \infty .$$

Да означиме $x_{1k_i} = x_{2i}, i \geq 1$. Низата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ од F е таква што

$$x_{2n}(r_1) \to x(r_1),\ x_{2n}(r_2) \to x(r_2),\ n \to \infty .$$

Продолжувајќи ја постапката, за секој $m \in \mathbf{N}$ конструираме низа $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, која е подниза од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и за која

$$x_{mn}(r_i) \to x(r_i) \in \mathbf{R},\ n \to \infty, \text{ за } i = 1,2,...,m .$$

Низата $\{x_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ е подниза од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, при што $x_{nn} \in \{x_{nk} \mid k \geq 1\}$, за $n \geq 1$. Затоа за секој $i \geq 1$ важи

$$x_{nn}(r_i) \to x(r_i), n \to \infty .$$

Навистина, за зададено $i \geq 1$ имаме

$$x_{in}(r_i) \to x(r_i), n \to \infty$$

и затоа за секој $\varepsilon > 0$ само за конечно многу броеви n важи

$$| x_{in}(r_i) - x(r_i) | \geq \varepsilon .$$

Сите низи $\{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}, m > i$; $\{x_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ по конструкција се поднизи од низата $\{x_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, па затоа неравенството $| x_{nn}(r_i) - x(r_i) | \geq \varepsilon$ може да биде исполнето само за конечно многу природни броеви n.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено, а $\delta > 0$ е соодветниот број од дефиницијата на рамностепената непрекинатост на F. Од компактноста на $[a,b]$ следува дека постои конечна $\delta -$мрежа на $[a,b]$ и нека тоа е множеството рационални броеви $r_{k(1)}, r_{k(2)},\ ..., r_{k(s)}$. За $t \in [a,b]$ со $r(t)$ да го означиме елементот на $\delta -$мрежата таков што $| t - r(t) | < \delta$. Тогаш, за секој $t \in [a,b]$ и за секои $m,n \in \mathbf{N}$ важи

$$\begin{aligned} | x_{mm}(t) - x_{nn}(t) | &\leq | x_{mm}(t) - x_{mm}(r(t)) | + | x_{mm}(r(t)) - x_{nn}(r(t)) | + | x_{nn}(r(t)) - x_{nn}(t) | \\ &< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{s} | x_{mm}(r_{k(i)}) - x_{nn}(r_{k(i)}) |. \end{aligned}$$

Според тоа, низата $\{x_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ го задоволува критериумот на Коши за рамномерна конвергетност, па затоа таа конвергира кон непрекината функција x на $[a,b]$ и како F е затворено добиваме дека $x \in F$. Конечно, од теорема 3.5 следува дека F е компактно множество. ♦

6.7. Пример. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа функции во множеството $\mathbf{C}^{(1)}([0,1])$ таква што за секој n важи

$$| x_n'(t) | \leq t^{-1/2},\ t \in (0,1]$$

и

$$\int_0^1 x_n(t)dt = 0 . \qquad (1)$$

Докажете, дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи подниза која рамномерно конвергира на $[0,1]$.

Решение. Да го разгледаме множеството $A = \{x_n \mid n = 1,2,...\} \subseteq \mathbf{C}([0,1])$. Ќе докажеме дека фамилијата $\overline{A}$ е рамностепено непрекината и рамномерно ограничена.

Нека $0 \le t' < t'' \le 1$. Тогаш за секој $n \in \mathbf{N}$ имаме

$$|x_n(t'') - x_n(t')| = |\int_{t'}^{t''} x_n'(t)dt| \le \int_{t'}^{t''} t^{-1/2}dt = 2\sqrt{t''} - 2\sqrt{t'} . \qquad (2)$$

Функцијата $F(t) = 2\sqrt{t}$ е непрекината на $[0,1]$, што значи дека таа е рамномерно непрекината на $[0,1]$. Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

за секои $t', t'' \in [0,1]$ такви што $|t'' - t'| < \delta$. Значи, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in A$ и за секои $t', t'' \in [a,b]$ за кои $|t' - t''| < \delta$ важи $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$, што значи дека фамилијата A е рамностепено непрекината. Сега, од лема 6.4 следува дека фамилијата $\overline{A}$ е рамностепено непрекината.

Од (2) следува дека функцијата x_n не може да биде само позитивна или само негативна и како истата е непрекината добиваме дека постои $t_n \in [0,1]$ таков што $x_n(t_n) = 0$. Но, тогаш од (2) следува дека

$$|x_n(t)| = |x_n(t) - x_n(t_n)| \le 2|\sqrt{t} - \sqrt{t_n}| \le 2 ,$$

за секој $t \in [0,1]$, што значи дека фамилијата A е рамномерно ограничена, т.е. множеството A е ограничено во просторот $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$. Сега, од последица IX 9.8 б) следува дека множеството $\overline{A}$ е ограничено во $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$, т.е. фамилијата $\overline{A}$ е рамномерно ограничена.

Конечно, од теоремата на Арцело-Асколи следува дека множеството $\overline{A}$ е компактно и како $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа функции во $\overline{A}$, од теоремата na Болцано-Ваерштрас следува дека таа содржи конвергентна подниза. Јасно, оваа подниза рамномерно конвергира, бидејќи според пример IX 3.10 конвергентноста во просторот $(\mathbf{C}([0,1]), \rho_\infty)$ е еквивалентна со рамномерната конвергентност. ♦

6.8. Ако точката $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4, ...)$ се менува во множеството $A \subset l^p$, $1 \le p < \infty$, тогаш нејзината $i-$та координата x_i е функција од ξ, па затоа ќе ја означуваме со $x_i(\xi)$.

Теорема. Затвореното множество $K \subset l^p$, $1 \le p < \infty$ е компактно во l^p ако и само ако

а) постојат позитивни броеви $r_i, i = 1, 2, ...$ такви, што $|x_i(\xi)| \le r_i$, за секој $\xi \in K$ и за секој $i = 1, 2, ...$, и

б) редот $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(\xi)|^p$ рамномерно конвергира по $\xi \in K$.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека се исполнети условите а) и б). Бидејќи редот во б) рамномерно конвергира, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i(\xi)|^p < (\tfrac{\varepsilon}{2})^p \text{, за секој } \xi \in K .$$

На секоја точка $\xi = (x_1, x_2, ...)$ и придружуваме точка $\xi^* = (x_1, x_2, ..., x_{n_0}, 0, ...)$. Од

$$\rho_p(\xi, \xi^*) = (\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i(\xi)|^p)^{1/p} < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

следува дека множеството точки $A = \{\xi^* \mid x_i = 0, i \ge n_0 + 1\}$ е $\frac{\varepsilon}{2}$-мрежа за K. Но, од а) следува дека A е ограничено множество во потпросторот $\mathbf{R}_{\rho}^{n_0}$ од l^p, во кој ограниченоста се совпаѓа со потполната ограниченост (зошто?). Значи, постои конечна $\frac{\varepsilon}{2}$-мрежа $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ на A. Ќе докажеме дека $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ е конечна $\varepsilon-$мрежа на K. Навистина, ако $\xi \in K$, тогаш бидејќи A е $\frac{\varepsilon}{2}$-мрежа за K постои $\xi^* \in A$ таков што $\rho_p(\xi, \xi^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но, $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ е конечна $\frac{\varepsilon}{2}$-мрежа $\{\xi_1, ..., \xi_m\}$ на A, па затоа за вака најденото $\xi^* \in A$ постои $\xi_i, i \in \{1, 2, ..., m\}$ таков што $\rho_p(\xi_i, \xi^*) < \frac{\varepsilon}{2}$. Според тоа, за $\xi \in K$ постои $\xi_i, i \in \{1, 2, ..., m\}$ таков, што

$$\rho_p(\xi, \xi_i) \le \rho_p(\xi, \xi^*) + \rho_p(\xi_i, \xi^*) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

т.е. $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ е конечна $\varepsilon-$мрежа на K. Конечно, од теорема 2.9 следува дека K е компактно во l^p.

$\Rightarrow$. Обратно, да претпоставиме дека K е компактно во l^p и дека за некој фиксиран $i_0, i_0 = 1, 2, ...$ множеството $\{x_{i_0}(\xi) \mid \xi \in K\}$ не е ограничено, т.е. постои низа $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ во K таква, што $x_{i_0}(\eta_n) \to +\infty,\ n \to \infty$. Ќе докажеме дека низата $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содржи конвергентна подниза $\{\eta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, што противречи на теорема 3.1. Навистина, ако $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи конвергентна подниза $\{\eta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, тогаш, бидејќи во l^p конвергенцијата по метрика повлекува конвергенција по координати (пример IX 3.9), добиваме дека низата $\{x_{i_0}(\eta_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира, што не е можно бидејќи $x_{i_0}(\eta_n) \to +\infty,\ n \to \infty$.

Нека претпоставиме дека редот $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(\xi)|^p$ не конвергира рамномерно по $\xi \in K$. Тоа значи дека постои $\varepsilon > 0$ и низа $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ во K таква што

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i(\eta_n)|^p \geq \varepsilon, \text{ за секој } n = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Ќе докажеме дека низата $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содржи конвергентна подниза $\{\eta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Навистина, ако $\eta_{n_k} \to \xi = (x_1, x_2, \ldots)$, тогаш од $\xi \in l^p$ следува дека постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon}{2^p} \tag{4}$$

и постои $k_0 \in \mathbf{N}$ таков, што $\rho(\eta_{n_k}, \xi) < \frac{\sqrt[p]{\varepsilon}}{2}$, кога $k > k_0$ па затоа

$$\sum_{i=n_k+1}^{\infty} |x_i(\eta_{n_k}) - x_i|^p < \frac{\varepsilon}{2^p}, \text{ за } k > k_0 . \tag{5}$$

Ако k_0 го избереме така, што $n_{k_0} > n_0$, тогаш од (4) и (5) следува

$$\Big(\sum_{i=n_k+1}^{\infty} |x_i(\eta_{n_k})|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=n_k+1}^{\infty} |x_i(\eta_{n_k}) - x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=n_k+1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{1/p} < \varepsilon^{1/p},$$

што противречи на (3). ♦

6.9. Пример. Да го разгледаме Хилбертовиот квадар I^{∞}, т.е. множеството точки $\xi = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ од просторот l^2 такви што

$$|x_i| \leq \frac{1}{i}, \ i = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Очигледно, Хилбертовиот квадар I^{∞} е затворено множество. Понатаму, постојат позитивни броеви $r_i = \frac{1}{i}, i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ такви, што

$$|x_i(\xi)| \leq \frac{1}{i} = r_i, \text{ за секој } \xi \in I^{\infty} .$$

Од друга страна, бидејќи редот $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ конвергира и

$$|x_i(\xi)|^2 \leq \frac{1}{i^2}, \text{ за секој } i = 1, 2, \ldots \text{ и за секој } \xi \in I^{\infty},$$

добиваме дека редот $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(\xi)|^2$ рамномерно конвергира по $\xi \in I^{\infty}$. Конечно, од теорема 6.7 следува дека Хилбертовиот квадар е компактно множество во l^2. ♦

7. ЗАДАЧИ

1. Нека A е компактно подмножество од метричкиот простор (X,ρ). Докажете дека изводното множество A' е компактно во X.

2. Докажете, дека просторот $(X^{\mathbf{N}},\rho_B)$ е компактен ако и само ако множеството X е конечно.

3. Нека X и Y се конечни множества и ρ_X и ρ_Y се метриките на Бер. Докажете, дека метричките простори $(X^{\mathbf{N}},\rho_X)$ и $(Y^{\mathbf{N}},\rho_Y)$ се изометрички ако и само ако множествата X и Y имаат ист број елементи.

4. Нека $(\mathbf{P}_n([a,b]),d)$ е метричкиот простор од задача XII 10. Дали множеството од сите полиноми со коефициенти од $[0,1]$ е компактно.

5. Докажете дека метричкиот простор $(\mathcal{F}_B(X),d_{Ha})$ од задача IX 17 е компактен ако и само просторот (X,ρ) е компактен.

6. Најдете множество X и две ограничени еквивалентни метрики ρ и ρ' на X така да соодветните метрики d_{Ha} и d'_{Ha} не се еквивалентни на множеството $\mathcal{F}(X)$.

7. Нека (X,ρ) е метрички простор и со $\mathcal{K}(X)$ да ја означиме фамилијата од сите непразни компактни подмножества на X. Докажете, дека $(\mathcal{K}(X),d_{Ha})$ е потпростор на просторот $(\mathcal{F}_B(X),d_{Ha})$ и дека фамилијата од сите конечни подмножества на X е секаде густа во $\mathcal{K}(X)$.

8. Нека (X,ρ) е сепарабилен метрички простор. Докажете, дека $(\mathcal{K}(X),d_{Ha})$ е сепарабилен метрички простор.

9. Нека (X,ρ) е метрички простор и U е отворено, а F е затворено множество во X. Кое од следниве множества:

   а) $\{A\in\mathcal{K}(X)\mid A\subset U\}$,

   б) $\{A\in\mathcal{K}(X)\mid A\cap U\neq\varnothing\}$,

   в) $\{A\in\mathcal{K}(X)\mid A\subset F\}$,

   г) $\{A\in\mathcal{K}(X)\mid A\cap F\neq\varnothing\}$,

   е отворено, а кое е затворено во просторот $(\mathcal{K}(X),d_{Ha})$.

10. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во X која има една и единствена точка на натрупување $x_0\in X$. Тогаш низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Докажете!

11. Нека (X,ρ) е метрички простор и $A,B \subset X$. Ако A и B се компактни подмножества од X, тогаш постојат $a \in A$ и $b \in B$ такви, што $\rho(A,B) = \rho(a,b)$. Докажете!

12. Нека (X,ρ) е метрички простор таков што затворачот на секоја топка во X е компактно множество. Докажете, дека (X,ρ) е комплетен метрички простор.

13. Докажете, дека метричкиот простор (X,ρ) е комплетен ако и само ако секое потполно ограничено множество $A \subseteq X$ има барем една точка на натрупување.

14. Нека (X,ρ) е потполно ограничен метрички простор. Докажете, дека неговото комплетирање (Y,d) е компактен метрички простор.

15. Нека $A = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y = 0\}$ и O е отворена покривка на множеството A во $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$. Докажете дека постои $\varepsilon > 0$ таков што O е покривка на множеството

$$A_\varepsilon = \{(x,y) \mid x \in [-\varepsilon, 1+\varepsilon],\ \ |y| \le \varepsilon\}.$$

16. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор. Докажете, дека постојат $x, y \in X$ такви што $\rho(x,y) = d(A)$.

17. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и нека d е друга метрика на X, еквивалентна на метриката ρ. Докажете, дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што $B_\rho(x;\delta) \subseteq B_d(x;\varepsilon)$ и $B_d(x;\delta) \subseteq B_\rho(x;\varepsilon)$, за секој $x \in X$,

18. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор. Докажете, дека множеството $A \subseteq X$ е релативно компактно во X ако и само ако е потполно ограничено.

19. Нека метричкиот простор (X,ρ) е $\sigma-$*компактен*, т.е. тој е унија на пребројлива фамилија компактни множества. Докажете, дека X е сепарабилен.

20. За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *локално компактен* ако за секоја точка $x \in X$ постои барем едно компактно множество $A \subseteq X$ такво, што $x \in A$. Докажете, дека секое затворено множество $A \subseteq X$ од локално компактен простор (X,ρ) и самото е локално компактно.

21. Нека (X,ρ) е дискретен метрички простор. Докажете, дека X е локално компактен.

22. Докажете, дека секој локално компактен простор со пребројлива база е $\sigma-$ компактен.

23. Докажете дека просторот $(\mathbf{BV}_0([a,b]),\rho)$ од задача XII 7 не е локално компактен метрички простор.

24. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор, $V \subseteq X$ е отворено множество и $F_a, a \in \mathcal{A}$ е фамилија затворени подмножества од X таква што $\bigcap_{a\in\mathcal{A}} F_a \subseteq V$.

Докажете, дека постојат $a_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,2,...,n$ такви што $\bigcap_{i=1}^{n} F_{a_i} \subseteq V$.

25. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $A \subset X, B \subset Y$ се компактни множества. Нека W е отворено множество во Декартовиот производ $X \times Y$ такво што $A \times B \subset W$. Докажете, дека постои отворено множество U во X за кое важи $A \subset U$ и постои отворено множество V во Y за кое важи $B \subset V$ такви што $U \times V \subset W$. Ако $B = Y$ докажете дека во условот претпоставката за компактност на множеството A може да биде изоставена.

26. Нека K е компактно подмножество на компактниот метрички простор (X,ρ) и нека U е отворено множество такво што $K \subset U$. Докажете, дека постои непрекината функција $f : X \to [0,1]$ таква што

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in K, \\ 1, & x \in X \setminus U. \end{cases}$$

27. Докажете, дека непрекината слика на локално компактен простор не мора да биде локално компактна. Меѓутоа, ако функцијата е отворена, тогаш сликата на локално компактен простор е локално компактна.

28. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и $f : X \to X$ е изометрија. Докажете, дека f е сурјекција.

29. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори. За функцијата $f : X \to Y$ ќе велиме дека е *локален хомеоморфизам* ако за секој $x \in X$ постојат отворени множества U и V, $x \in U$ и $f(x) \in V$ такви што $f_{|U} : U \to V$ е хомеоморфизам. Нека A е компактно подмножество од X и $f : X \to Y$ е локален хомеоморфизам таков што $f_{|A} : A \to f(A)$ е хомеоморфизам. Докажете, дека ако просторот X е локално компактен, тогаш постои отворено множество U такво што $A \subseteq U$ и $f_{|U} : U \to f(U)$ е хомеоморфизам.

30. Нека K е компактно множество во метричкиот простор (X,ρ) и $f \in \mathbf{C}(K)$. Докажете дека графикот

$$\{(x,y) \mid x \in K, y = f(x)\}$$

е компактно множество во просторот $(X \times R, \rho^*)$, каде

$$\rho^*((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \rho(x_1,x_2) + |y_1 - y_2|.$$

31. Нека (X,ρ) и (Y,d) се компактни метрички простори и $f : X \to Y$ е непрекината сурјекција. Докажете, дека множеството V е отворено во Y ако и само ако множеството $f^{-1}(V)$ е отворено во X.

32. Нека (X,ρ) и (Y,d) се компактни метрички простори, $f: X \to Y$ е непрекината сурјекција и $y \in Y$. Докажете, дека за секое отворено множество U кое ја содржи точката $f^{-1}(y)$ постои отворено множество V кое ја содржи точката y таква што $f^{-1}(V) \subseteq U$.

33. Нека $X \subset \mathbf{R}^m$ е компактно множество и нека функцијата $f: X \to \mathbf{R}$ е непрекината. Дадено е $\varepsilon > 0$. Докажете, дека постои $M > 0$ таков што

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq M\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \varepsilon, \text{ за секои } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$$

34. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор и нека F е некое множество реални непрекинати функции $f: X \to \mathbf{R}$ со својство за секој $x \in X$ множеството $\{f(x) \mid f \in F\}$ е ограничено. Докажете, дека постои непразно отворено множество $U \subseteq X$ и број $\lambda \in \mathbf{R}$ таков што важи

$$|f(x)| \leq \lambda, \text{ за секој } x \in U \text{ и за секоја функција } f \in F.$$

35. Докажете, дека метричкиот простор (X,ρ) е компактен ако и само ако секоја непрекината функција $f: X \to \mathbf{R}$ е ограничена.

36. Нека (X,d) е метрички простор и X е потполно ограничен. Докажете, дека ако за функцијата $f: X \to X$ важи

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x,y), \text{ за секои } x,y \in X,$$

тогаш f е изометрија.

37. Нека (X,d) е компактен метрички простор и за функцијата $f: X \to X$ важи

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x,y), \text{ за секои } x,y \in X.$$

Докажете, дека $f(X) = X$ и дека f е изометрија.

38. Нека (X,d) е метрички простор и за функцијата $f: X \to X$ важи

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y), \text{ за секои } x,y \in X,\ x \neq y$$

и множеството $f(X)$ е компактно во (X,d). Докажете, дека f има единствена неподвижна точка.

39. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f: X \to Y$ е рамномерно непрекината функција. Докажете, ако множеството $A \subseteq X$ е потполно ограничено, тогаш и множеството $f(A)$ е потполно ограничено.

40. Нека $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}([a,b])$ е рамномерно ограничена и рамностепено непрекината фамилија функции. Докажете, дека функцијата

$$g(x) = \sup\{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$$

е непрекината.

41. За $x, y \in \mathbf{C}^{(1)}([0,1])$ дефинираме

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)-y(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)-y'(t)|.$$

Докажете дека ρ е метрика во $\mathbf{C}^{(1)}([0,1])$. Најдете ги компактните подмножества на $\mathbf{C}^{(1)}([0,1])$.

42. Функцијата $f:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ има единствена неподвижна точка $\mathbf{x}^*$ и го задоволува следниов услов: за секое компактно множество K постои реален број $\alpha < 1$ таков, што

$$\rho_2(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \le \alpha\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{, за секои } \mathbf{x},\mathbf{y} \in K .$$

Докажете, дека за секој $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^m$ низата

$$\mathbf{x}^{(1)} = f(\mathbf{x}^{(0)}),\ \mathbf{x}^{(2)} = f(\mathbf{x}^{(1)}),\ \mathbf{x}^{(3)} = f(\mathbf{x}^{(2)}),\ldots$$

конвергира кон $\mathbf{x}^*$.

43. Нека $f:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$ и K е компактно множество. Нека претпоставиме дека постои $\alpha \in (0,1)$ таков, што

$$\rho_2(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \le \alpha\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{, за секои } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m \setminus K .$$

Докажете, дека функцијата f има неподвижна точка.

44. Нека (X,ρ) е комплетен сепарабилен метрички простор и $f \in \mathbf{C}(X)$. Функцијата f ја нарекуваме *компактна*, ако за секој $a \in \mathbf{R}$ множеството $\{x \in X \mid f(x) \le a\}$ е компактно. Најдете пример на компактна функција.

XIV ГЛАВА

СВРЗАНОСТ

1. СВРЗАНИ МНОЖЕСТВА ВО МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

1.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За непразното множество $M \subseteq X$ ќе велиме дека е *сврзано* ако од $M \subseteq U \cup V$ каде што U и V се отворени множества такви што $U \cap V = \varnothing$ следува $M \subseteq U$ или $M \subseteq V$.

За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *сврзан* ако множеството X е сврзано.

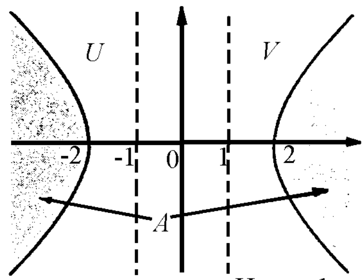
1.2. Пример. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ множеството

$$A = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 \geq 4\}$$

не е сврзано. Навистина, множествата

$$U = \{(x,y) \mid x < -1\} \text{ и } V = \{(x,y) \mid x > 1\}$$

се отворени подмножества од $\mathbf{R}^2$ и за истите важи $A \subseteq U \cup V$ и $U \cap V = \varnothing$, но $A \not\subseteq U$ и $A \not\subseteq V$, цртеж 1. ♦



Цртеж 1

1.3. Лема. Метричкиот простор (X,ρ) е сврзан ако и само ако не постојат отворени множества $U,V \subseteq X$ такви, што

$$U \neq \varnothing, V \neq \varnothing, X = U \cup V, U \cap V = \varnothing .$$

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 1.1. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

1.4. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $M \subseteq X$. Множеството M е сврзано во X ако и само ако потпросторот (M,ρ_M) е сврзан.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека множеството M не е сврзано во просторот (X,ρ). Тогаш постојат отворени множества U и V во просторот X такви, што

$$M \subseteq U \cup V \text{ , } U \cap V = \varnothing \text{, } M \cap U \neq \varnothing \text{ и } M \cap V \neq \varnothing .$$

Понатаму, според теорема IX 12.3 множествата $U' = U \cap M$ и $V' = V \cap M$ се отворени во потпросторот (M,ρ_M) и притоа важи

$$M \subseteq (U \cup V) \cap M = (U \cap M) \cup (V \cap M) = U' \cup V' ,$$

$$U'\cap V' = (U\cap M)\cap(V\cap M) = (U\cap V)\cap M = \varnothing\cap M = \varnothing,$$

$$U'\cap M = (U\cap M)\cap M \neq \varnothing \text{ и } V'\cap M = (V\cap M)\cap M \neq \varnothing,$$

што значи дека потпросторот (M,ρ_M) не е сврзан.

$\Leftarrow$. Обратно, нека потпросторот (M,ρ_M) не е сврзан. Тогаш постојат отворени множества U' и V' во потпросторот M такви што

$$M = U'\cup V' \text{ и } U'\cap V' = \varnothing,\ M\cap U' \neq \varnothing \text{ и } M\cap V' \neq \varnothing.$$

Понатаму, според теорема IX 12.3 во просторот (X,ρ) постојат дисјунктни отворени множества U и V такви што $U' = U\cap M$ и $V' = V\cap M$. Според тоа, за отворени подмножества U и V на просторот X важи

$$M = U'\cup V' = (U\cap M)\cup(V\cap M) = (U\cup V)\cap M \subseteq (U\cup V),\ U\cap V = \varnothing,$$

$$M\cap U = M\cap(M\cap U) = M\cap U' \neq \varnothing \text{ и}$$

$$M\cap V = M\cap(M\cap V) = M\cap V' \neq \varnothing,$$

што значи дека множеството M не е сврзано во X. ♦

1.5. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако $M_\alpha, \alpha\in A$ е произволна фамилија сврзани подмножества од X таква што $\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha \neq \varnothing$, тогаш $M = \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha$ е сврзано множество.

Доказ. Нека претпоставиме дека $M \subseteq U\cup V$, каде што U и V се отворени множества и $U\cap V = \varnothing$. Но, за секој $\alpha\in A$ множеството

$$M_\alpha \subseteq M \subseteq U\cup V$$

е сврзано, па затоа $M_\alpha \subseteq U$ или $M_\alpha \subseteq V$, за секој $\alpha\in A$.

Да претпоставиме дека постојат $\alpha,\beta\in A$ такви, што $M_\alpha \subseteq U$ и $M_\beta \subseteq V$. Тогаш, $M_\alpha \cap M_\beta \subseteq U\cap V = \varnothing$, што е противречност. Значи, за секој $\alpha\in A$ важи $M_\alpha \subseteq U$ или за секој $\alpha\in A$ важи $M_\alpha \subseteq V$, т.е.

$$M = \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha \subseteq U \text{ или } M = \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha \subseteq V,$$

односно множеството M е сврзано. ♦

1.6. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако за секои $x,y\in X$ постои сврзан потпростор Y таков што $x,y\in Y$, тогаш X е сврзан метрички простор.

Доказ. Нека $a\in X$. За секоја точка $b\in X$, $b\neq a$ постои сврзан потпростор Y_b од X таков што $a,b\in Y_b$. Според теорема 1.4 множествата Y_b, $b\neq a$ се сврзани и како за истите важи

$$\bigcap_{b\in X,\, b\neq a} Y_b = \{a\} \neq \varnothing ,$$

од лема 1.5 следува дека множеството $\bigcup\limits_{b\in X,\, b\neq a} Y_b = X$ е сврзано множество. ♦

1.7. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор Ако $M_i, i=1,2,3,...,n$ се сврзани подмножества од X и ако важи

$$M_i \cap M_{i+1} \neq \varnothing \text{, за секој } i=1,2,...,n-1 ,$$

тогаш множеството $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$ е сврзано.

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со индукција по k. За $k=2$ тврдењето следува од лема 1.5.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k<n$, т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} M_i$ е сврзано множество. Од $M_k \cap M_{k+1} \neq \varnothing$, добиваме

$$M_{k+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{k} M_i) \neq \varnothing ,$$

што според лема 1.5 значи дека $\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} M_i$ е сврзано множество. Сега, од принципот на математичка индукција следува дека $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$ е сврзано множество. ♦

1.8. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако M е сврзано подмножество од X, тогаш секое множество M_1 такво што, $M \subseteq M_1 \subseteq \overline{M}$ е сврзано.

Доказ. Нека M_1 не е сврзано множество. Значи, постојат отворени множества U и V такви, што

$$M_1 \subseteq U \cup V \text{ и } U \cap V = \varnothing ,\ M_1 \cap U \neq \varnothing \text{ и } M_1 \cap V \neq \varnothing .$$

Но M е сврзано множество, па затоа од

$$M \subseteq M_1 \subseteq U \cup V \text{ и } U \cap V = \varnothing$$

следува $M \subseteq U$ или $M \subseteq V$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $M \subseteq U$, па затоа постои $x \in M_1 \setminus M$ таков што $x \in V$. Но, од $M_1 \subseteq \overline{M}$ следува дека, ако $x \in M_1 \setminus M$, тогаш x е точка на натрупување за множеството M, што противречи на $M \subseteq U$, $x \in V$, $U \cap V = \varnothing$ и U и V се отворени множества. Од добиената противречност следува дека M_1 е сврзано множество. ♦

1.9. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако M е сврзано подмножество од X, тогаш множеството $\overline{M}$ е сврзано множество во X.

Доказ. Непосредно следува од инклузиите $M \subseteq \overline{M} \subseteq \overline{M}$ и лема 1.8. ♦

1.10. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор и (Y,ρ_Y) е сврзан густ потпростор од X. Тогаш X е сврзан метрички простор.

Доказ. Според теорема 1.4 множеството Y е сврзано во просторот X и како $Y \subseteq X \subseteq \overline{Y}$, од лема 1.8 следува дека просторот X е сврзан. ♦

1.11. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Тогаш, следниве тврдења се еквивалентни:

i) X е сврзан.

ii) Не постојат затворени множества $F_1, F_2 \subseteq X$ такви, што

$$F_1 \neq \varnothing, F_2 \neq \varnothing, X = F_1 \cup F_2, F_1 \cap F_2 = \varnothing .$$

iii) Секоја непрекината функција $f : X \to \{0,1\}$ од просторот X на дискретниот простор над дволементното множество $\{0,1\}$ е константна.

iv) Ако множеството $U \subseteq X$ е истовремено и затворено и отворено, тогаш $U = X$ или $U = \varnothing$.

v) Ако за множествата $U,V \subseteq X$ важи $X = U \cup V$, $\overline{U} \cap V = \varnothing = U \cap \overline{V}$, тогаш $U = \varnothing$ или $V = \varnothing$.

Доказ. $i) \Rightarrow ii)$. Нека X е сврзан. Ако $F_1, F_2 \subseteq X$ се затворени множества такви што $X = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, тогаш, множествата $F_1 = X \setminus F_2$ и $F_2 = X \setminus F_1$ се отворени, па од лема 1.3 следува дека не е можно $F_1 \neq \varnothing$ и $F_2 \neq \varnothing$.

$ii) \Rightarrow iii)$. Нека постои непрекината функција $f : X \to \{0,1\}$ од просторот X на дискретниот простор над дволементното множество $\{0,1\}$ која не е константна. Според тоа, $F_1 = f^{-1}(0) \neq \varnothing$, $F_2 = f^{-1}(1) \neq \varnothing$. Но, множествата $\{0\}$ и $\{1\}$ се затворени, па од последица X 3.5 следува дека F_1 и F_2 се затворени множества во X за кои важи $X = F_1 \cup F_2$ и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, што противречи на *ii*).

$iii) \Rightarrow iv)$. Нека секоја непрекината функција $f : X \to \{0,1\}$ од просторот X на дискретниот простор над дволементното множество $\{0,1\}$ е константна, а $U \subseteq X$ е множество кое истовремено е и отворено и затворено. Нека претпоставиме дека $U \neq \varnothing$ и $U \neq X$ и да ставиме $f_{|U} = 1$ и $f_{|X \setminus U} = 0$. Но, множествата

$$f^{-1}(\{0,1\}) = X ,\ f^{-1}(\varnothing) = \varnothing ,\ f^{-1}(\{1\}) = U \text{ и } f^{-1}(\{0\}) = X \setminus U$$

се отворени множества, па затоа f е непрекината функција, која не е константна. Последното противречи на *iii*) и од добиената противречност следува $U = X$ или $U = \varnothing$.

iv) $\Rightarrow$ *i*). Нека претпоставиме дека $U, V \subseteq X$ се отворени множества за кои $X = U \cup V$ и $U \cap V = \emptyset$. Тогаш, множеството $U = X \setminus V$ е затворено, па од *iv*) следува $U = \emptyset$ или $U = X$, т.е. $V = \emptyset$. Конечно, од лема 1.3 следува дека X е сврзан метрички простор.

v) $\Rightarrow$ *iii*). Нека постои непрекината функција $f : X \to \{0,1\}$ од просторот X на дискретниот простор над двоелементното множество $\{0,1\}$ која не е константна. Тогаш за множествата $U = f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$ и $V = f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ важи

$$X = U \cup V\,,\; \overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}\,.$$

Последното противречни на *v*) и од добиената противречност следува дека функцијата f е константна.

iv) $\Rightarrow$ *v*). Нека постојат множества $U, V \subseteq X$ такви што $X = U \cup V$, $\overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}$. Тогаш $\overline{U} \subseteq X \setminus V \subseteq U$, што значи дека $\overline{U} = U$, т.е. множеството U е затворено. Аналогно, $\overline{V} \subseteq X \setminus U \subseteq V$, па затоа $\overline{V} = V$, т.е. множеството V е затворено. Значи, множествата U и V се затворени. Понатаму, од $X = U \cup V$ и $U \cap V = \emptyset$ следува $U = X \setminus V$ и $V = X \setminus U$, па затоа множествата U и V истовремено се и отворени, па од *iv*) следува дека $U = \emptyset$ или $V = \emptyset$. ♦

2. НЕПРЕКИНАТОСТ И СВРЗАНОСТ

2.1. Теорема. Нека $(X, \rho), (Y, d)$ се метрички простори и да претпоставиме дека

i) метричкиот простор X е сврзан,

ii) $f \in \mathbf{C}(X, Y)$.

Тогаш, множеството $f(X)$ е сврзано во (Y, d).

Доказ А. Да претпоставиме дека $f(X)$ не е сврзано во (Y, d). Тогаш, постојат отворени множества A и B такви што

$$A \cap B = \emptyset\,,\; f(X) \cap A \neq \emptyset\,,\; f(X) \cap B \neq \emptyset \text{ и } f(X) \subseteq A \cup B\,.$$

Множествата $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ се отворени во X и притоа важи

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset\,,\; X \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset\,,$$
$$X \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \text{ и } X \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\,,$$

што противречи на *i*). Конечно, од добиената противречност следува дека множеството $f(X)$ е сврзано во (Y, d).

Доказ Б. Нека множеството $f(X)$ не е сврзано во (Y, d). Според теорема 1.4 потпросторот $(f(X), d_{f(X)})$ не е сврзан, па од теорема 1.11 следува дека постои неконстантна непрекината функција $g: f(X) \to \{0,1\}$. Но, тогаш од теорема X 2.10 следува дека композицијата $g \circ f: X \to \{0,1\}$ е неконстантна непрекината функција. Сега, повторно од теорема 1.11 следува дека просторот X не е сврзан, што противречи на *i*). Конечно, од добиената противречност следува дека множеството $f(X)$ е сврзано во (Y,d). ♦

2.2. Последица. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f: X \to Y$ е хомеоморфизам. Тогаш, X е сврзан ако и само ако Y е сврзан.

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.1. ♦

2.3. Последица. Нека (X,ρ) е компактен сврзан метрички простор. Ако функцијата $f \in \mathbf{C}(X)$, тогаш $f(X)$ е затворен интервал, т.е. $f(X) = [a,b], a \le b$.

Доказ. Множеството X е компактно, па од теорема XII 4.6 следува дека постојат $x_*, x^* \in X$ такви, што

$$f(x_*) = \min_{x \in X} f(x) = a \text{ и } f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) = b.$$

Јасно, $a \le b$ и $f(X) \subseteq [a,b]$. Но, $f \in \mathbf{C}(X)$ и од теорема 2.1 следува дека множеството $f(X)$ е сврзано во $\mathbf{R}$, па од лема I 26.5 следува дека $f(X)$ е интервал. Според тоа, $f(X)$ е интервал, $f(X) \subseteq [a,b]$, $a \le b$ и $a,b \in f(X)$ следува $f(X) = [a,b], a \le b$. ♦

2.4. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и со

$$\rho_p(z_1,z_2) = (\rho^p(x_1,x_2) + d^p(y_1,y_2))^{1/p}, \; p \ge 1 \tag{1}$$

$$\rho_\infty(z_1,z_2) = \max\{\rho(x_1,x_2), d(y_1,y_2)\}, \; p = \infty \tag{2}$$

за секои $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ дефинирани метрики на Декартовиот производ $Z = X \times Y$.

а) Ако (X,ρ) е сврзан, тогаш за секој $y \in Y$ множеството $X \times \{y\}$ е сврзано во Z.

б) Ако (Y,d) е сврзан, тогаш за секој $x \in X$ множеството $\{x\} \times Y$ е сврзано во Z.

Доказ. а) Нека $y \in Y$ е дадено. Да ја разгледаме функцијата $F: X \to X \times Y$ определена со $F(x) = (x,y)$, за секој $x \in X$. Според пример X 2.3 б) функцијата $\mathrm{id}_X(x) = x$, за секој $x \in X$ е непрекината, а според пример X 2.3 а) функцијата $g(x) = y$, за секој $x \in X$ е непрекината, па од равенството $F(x) = (\mathrm{id}_X(x), g(x))$, за секој $x \in X$ и од лема X 6.5 а) следува дека функцијата F е непрекината. Конечно, просторот X е сврзан, па од теорема 2.1 следува дека множеството $F(X) = X \times \{y\}$ е сврзано.

б) Доказот е наполно аналоген на доказот на тврдењето под а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2.5. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) и со (1) или (2) е дефинирана метрика на Декартовиот производ $Z = X\times Y$. Декартовиот производ Z е сврзан ако и само ако просторите X и Y се сврзани.

Доказ. $\Rightarrow$. Нека Декартовиот производ Z е сврзан метрички простор. Според теорема X 6.2 природните проекции $\mathrm{pr}_X : X\times Y \to X$ и $\mathrm{pr}_Y : X\times Y \to Y$ определени со $\mathrm{pr}_X(x,y) = x$ и $\mathrm{pr}_Y(x,y) = y$ се непрекинати функции. Но, $\mathrm{pr}_X(X\times Y) = X$ и $\mathrm{pr}_Y(X\times Y) = Y$, па од теорема 2.1 следува дека просторите X и Y се сврзани.

$\Leftarrow$. Нека метричките простори X и Y се сврзани и (a,b) и (c,d) се произволни точки во просторот Z . Според теорема 2.4 множествата $X\times\{b\}$ и $\{c\}\times Y$ се сврзани. Но, $X\times\{b\}\cap\{c\}\times Y = \{(c,b)\}\neq\varnothing$, па од лема 1.5 следува дека множеството $X\times\{b\}\cup\{c\}\times Y$ е сврзано. Конечно, од последица 1.6 следува дека Декартовиот производ Z е сврзан метрички простор. ♦

2.6. Последица. Декартовиот производ (Z,d_p) на метричките простори $(X_i,\rho_i),\ i=1,2,...,n$, каде

$$d_p(x,y) = [(\rho_1(x_1,y_1))^p + (\rho_2(x_2,y_2))^p + ... + (\rho_n(x_n,y_n))^p]^{1/p},\ p\geq 1 \tag{8}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2),...,\rho_n(x_n,y_n)\},\ p=\infty, \tag{9}$$

е сврзан метрички простор ако и само ако метричките простори $(X_i,\rho_i), i=1,...,n$ се сврзани.

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.5 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2.7. Пример. Метричкиот простор $(\mathbf{R},\rho)$ е сврзан, (зошто?). Од последица 2.6 следува дека за секој $m\in\mathbf{N}$ метричките простори $(\mathbf{R}^m,\rho_p)$, $p\geq 1$ или $p=\infty$ се сврзани. ♦

3. КОМПОНЕНТИ НА СВРЗАНОСТ. КВАЗИКОМПОНЕНТИ

3.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $x\in X$. Унијата на сите сврзани потпростори на просторот X кои ја содржат точката x ја нарекуваме *компонента на сврзаност на точката* x и ја означуваме со C_x .

3.2. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. За секој $x \in X$ неговата компонента на сврзаност C_x е сврзан затворен потпростор од X.

Доказ. Според лема 1.5 унијата C_x на сите сврзани потпростори кои ја содржат точката x е сврзан потпростор во X. Понатаму, според последица 1.9 затворачот на секој потпростор е сврзан потпростор, па затоа компонентата на сврзаност C_x на точката x е затворен потпростор од X. ♦

3.3. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Тогаш за секои $x, y \in X$ или $C_x = C_y$ или $C_x \cap C_y = \varnothing$.

Доказ. Нека $C_x \cap C_y \neq \varnothing$. Според лема 3.2 компонентите на сврзаност C_x и C_y се сврзани потпростори од X и како нивниот пресек не е празно множество од лема 1.5 следува дека $C_x \cup C_y$ е сврзан потпростор. Но, $x \in C_x \cup C_y$, па од дефиниција 3.1 следува дека $C_x \cup C_y \subseteq C_x$, што значи $C_y \subseteq C_x$. Аналогно, $y \in C_x \cup C_y$, па затоа $C_x \cup C_y \subseteq C_y$, односно $C_x \subseteq C_y$. Конечно, од $C_y \subseteq C_x$ и $C_x \subseteq C_y$ добиваме $C_x = C_y$. ♦

3.4. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор. Компонентите на сврзаност го разбиваат просторот X на по парови дисјунктни сврзани затворени потпростори кои ги нарекуваме *компоненти на сврзаност на просторот* X.

Доказ. Непосредно следува од лемите 3.2 и 3.3. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.5. Теорема. Нека (Z, d_p) е Декартовиот производ на метричките простори (X_i, ρ_i), $i = 1,2,...,n$, каде

$$d_p(x,y) = [(\rho_1(x_1,y_1))^p + (\rho_2(x_2,y_2))^p + ... + (\rho_n(x_n,y_n))^p]^{1/p}, \; p \ge 1 \tag{1}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2), ..., \rho_n(x_n,y_n)\}, \; p = \infty, \tag{2}$$

и $x_i \in X_i$, $i = 1,2,...,n$.

Ако C е компонентата на сврзаност на точката $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ во просторот Z, тогаш $C = C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$, каде C_i, $i = 1,2,...,n$ се компонентите на сврзаност на точките $x_i, i = 1,2,...,n$ во просторите $X_i, i = 1,2,...,n$, соодветно.

Доказ. Нека C е компонентата на сврзаност на точката $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ во просторот Z. Според забелешка X 6.3 природната проекција $\mathrm{pr}_{X_i} : Z \to X_i$, $i = 1,2,...,n$ е непрекината функција, па од теорема 2.1 следува дека множеството $\mathrm{pr}_{X_i}(C)$, $i = 1,2, \;...,n$ е сврзано во просторот $X_i, i = 1,2,...,n$, соодветно. Но, $x_i \in \mathrm{pr}_{X_i}(C), i = 1,2,...,n$, па од дефиниција 4.1 следува $\mathrm{pr}_{X_i}(C) \subseteq C_i, i = 1,2,...,n$, па затоа $C \subseteq C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$.

Од друга страна, C_i, $i=1,2,...,n$ се сврзани потпростори на X_i, $i=1,2,...,n$, па според последица 2.6 Декартовиот производ $C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$ е сврзан потпростор од Z кој ја содржи точката $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и затоа $C_1 \times C_2 \times ... \times C_n \subseteq C$ и како $C \subseteq C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$ добиваме $C = C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$. ♦

3.6. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $x \in X$. *Квазикомпонента на точката* x, во ознака KC_x, го нарекуваме пресекот на сите потпростори на X кои ја содржат точката x и кои истовремено се и отворени и затворени во X.

3.7. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. За секој $x \in X$ неговата квазикомпонента KC_x е затворен потпростор од X.

Доказ. Според дефиниција 3.6 квазикомпонентата KC_x на точката x е пресек на затворени потпростори од X, па од теорема IX 8.1 *ii*) следува дека KC_x е затворен потпростор од X. ♦

3.8. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Тогаш за секои $x,y \in X$ или $KC_x = KC_y$ или $KC_x \cap KC_y = \varnothing$.

Доказ. Нека $KC_x \cap KC_y \neq \varnothing$ и да претпоставиме дека $x \notin KC_x \cap KC_y$. Тогаш од теоремите IX 8.1 *ii*) и IX 7.8 *iii*) следува дека $KC_x \cap KC_y$ е истовремено и отворен и затворен потпростор во X. Сега од лема IX 8.4 в) следува дека $KC_x \setminus (KC_x \cap KC_y)$ е истовремено и отворен и затворен потпростор од X кој ја содржи точката x. Но, $KC_x \setminus (KC_x \cap KC_y)$ е вистински потпростор на KC_x, што противречи на дефиниција 3.6. Од добиената противречност следува дека $x \in KC_x \cap KC_y$, што според дефиниција 3.6 значи $KC_x \subseteq KC_x \cap KC_y$, односно $KC_x \subseteq KC_y$. Аналогно се докажува дека $KC_y \subseteq KC_x$.

Конечно, од $KC_x \subseteq KC_y$ и $KC_y \subseteq KC_x$ следува $KC_y = KC_x$. ♦

3.9. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор. Квазикомпонентите на точките на просторот X го разбиваат X на по парови дисјунктни затворени потпростори кои ги нарекуваме *квазикомпоненти на просторот* X.

Доказ. Непосредно следува од лемите 3.7 и 3.8. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.10. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Тогаш $C_x \subseteq KC_x$, за секој $x \in X$.

Доказ. Нека Y е потпростор кој ја содржи точката x и кој истовремено е и отворен и затворен. Множествата Y и $Z = X \setminus Y$ се затворени, па затоа

$$\overline{Y} \cap Z = Y \cap Z = Y \cap (X \setminus Y) = \varnothing \tag{3}$$

$$Y \cap \overline{Z} = Y \cap Z = Y \cap (X \setminus Y) = \varnothing . \tag{4}$$

Да ги разгледаме множествата $A = C_x \cap Y$ и $B = C_x \cap Z$. Од теорема IX 9.7 *iii*) и од равенствата (3) и (4) следува

$$\overline{A} \cap B = \overline{C_x \cap Y} \cap (C_x \cap Z) \subseteq (\overline{C}_x \cap \overline{Y}) \cap C_x \cap Z = \varnothing ,$$

$$A \cap \overline{B} = (C_x \cap Y) \cap \overline{C_x \cap Z} \subseteq C_x \cap Y \cap (\overline{C}_x \cap \overline{Z}) = \varnothing ,$$

што значи $\overline{A} \cap B = \varnothing$ и $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Понатаму, бидејќи $x \in C_x \cap Y = A$, т.е. $A \neq \varnothing$ и $C_x = A \cup B$ од теорема 1.11 следува дека $B = \varnothing$, што значи $C_x = A \subseteq Y$. Конечно, од произволноста на потпросторот Y и од дефиниција 3.6 следува $C_x \subseteq KC_x$. ♦

3.11. Пример. Во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ да го разгледаме потпросторот

$$X = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i ,$$

каде $\mathbf{a} = (0,0), \mathbf{b} = (1,0)$ и $X_i = \{\frac{1}{i}\} \times [0,1]$, за $i = 1,2,3,...$.

Лесно се покажува дека компоненти на сврзаност на просторот X се множествата $X_i, i = 1,2,3,...$ и едноелементните множества $\{\mathbf{a}\}$ и $\{\mathbf{b}\}$.

Ќе докажеме дека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \subseteq KC_{\mathbf{a}}$. Нека Y е потпростор на просторот X кој ја содржи точката $\mathbf{a}$ и кој истовремено е и отворен и затворен во X. Во просторот X да ја разгледаме низата точки $\{(\frac{1}{n}, 0)\}_{n=1}^{\infty}$. Оваа низа конвергира кон точката $\mathbf{a}$ и како множеството Y е отворено, добиваме дека постои природен број n_0 таков што $(\frac{1}{n}, 0) \in Y$, за секој $n > n_0$. Според тоа, за секој $n > n_0$ во потпросторот Y се содржи точката $(\frac{1}{n}, 0)$ од множеството X_n и како ова множество е сврзано, а Y е истовремено и отворен и затворен во X добиваме дека $X_n \subseteq Y$, за секој $n > n_0$. Според тоа, подн изата $\{(\frac{1}{n_0+k}, 1)\}_{k=1}^{\infty}$ припаѓа на потпросторот Y и како Y е затворен од теорема IX 8.3 б) следува дека

$$\lim_{k \to \infty} (\frac{1}{n_0+k}, 1) = (0,1) = \mathbf{b} \in Y .$$

Според тоа, секој потпростор Y на просторот X кој истовремено е и отворен и затворен во X и ја содржи точката $\mathbf{a}$, ја содржи и точката $\mathbf{b}$, па од дефиниција 3.6 следува дека $\mathbf{b} \in KC_{\mathbf{a}}$, т.е. $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \subseteq KC_{\mathbf{a}}$. ♦

4. СВРЗАНОСТ И КОМПАКТНОСТ. КОНТИМИУМ

4.1. Теорема. Компактниот метрички простор (X,ρ) е сврзан ако и само ако за секој пар точки $x,y\in X$ и за секој $\varepsilon>0$ постојат природен број k и точки $x_1,x_2,...,x_k\in X$ такви што $x=x_1$, $y=x_k$ и

$$\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon\text{ , за секој } i=1,2,...,k-1\,. \tag{1}$$

Доказ. $\Rightarrow$. Нека компактниот метричкиот простор (X,ρ) е сврзан и нека се дадени точките $x,y\in X$ и реалниот број $\varepsilon>0$. Со A да го означиме множеството од сите точки z од просторот X такви да постои природен број k и точки $x_1,x_2,...,$ $x_k\in X$ такви што $x=x_1$, $z=x_k$ и се исполнети неравенствата (1). Множеството A не е празно, бидејќи сигурно ја содржи точката x. Множеството A е отворено, бидејќи ако $z\in A$, тогаш отворената топка $B(z;\varepsilon)$ се содржи во множеството A. Навистина, ако $w\in B(z;\varepsilon)$ и ако природниот број k и точките $x_1,x_2,...,x_k\in X$ се такви што $x=x_1$, $z=x_k$ и $\rho(x_i,x_{i+1})<\varepsilon$, за секој $i=1,2,...,k-1$, тогаш ако ставиме $x_{k+1}=w$ добиваме дека $\rho(x_k,x_{k+1})<\varepsilon$, што значи $w\in A$. Понатаму, множеството A е и затворено, бидејќи за секоја точка $w\in\overline{A}$, отворената топка $B(w;\varepsilon)$ содржи некоја точка $z\in A$, па на потполно аналоген начин заклучуваме дека $w\in A$, т.е. $\overline{A}=A$, што според последица IX 9.4 значи дека множеството A е затворено.

Според тоа, непразното множество A е истовремено и отворено и затворено подмножество од X и како просторот X е сврзан од теорема 2.1 следува дека $A=X$. Според тоа, $y\in A$, па затоа природниот број k и точките $x_1,x_2,...,x_k\in X$ се такви што $x=x_1$, $y=x_k$ и е исполнет условот (1).

$\Leftarrow$. Нека претпоставиме дека компактниот метрички простор (X,ρ) има својство да за секој пар точки $x,y\in X$ и за секој $\varepsilon>0$ постојат природен број k и точки $x_1,x_2,...,x_k\in X$ такви што $x=x_1$, $y=x_k$ и се исполнети неравенствата (1). Ако просторот X не е сврзан, тогаш според теорема 2.1 постојат затворени множества $F_1,F_2\subseteq X$ такви што

$$F_1\neq\varnothing,F_2\neq\varnothing,X=F_1\cup F_2,F_1\cap F_2=\varnothing\,.$$

Нека $x\in F_1$ и $y\in F_2$. Според теорема XIII 1.7 затворените множества F_1 и F_2 се компактни, па од лема XII 4.13 следува дека $\rho(F_1,F_2)=\varepsilon>0$. По претпоставка постои природен број и точки $x_1,x_2,...,x_k\in X$ такви што $x=x_1$, $y=x_k$ и се исполнети неравенствата (1). Но, $F_1\cap F_2=\varnothing$, па од $x\in F_1$, $y\in F_2$ и $x_1,x_2,...,x_k\in X=F_1\cup F_2$ следува дека постои $m<k$ таков што $x_m\in F_1$, $x_{m+1}\in F_2$, што значи $\rho(x_m,x_{m+1})<\varepsilon$, од што би следувало $\rho(F_1,F_2)<\varepsilon$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека просторот (X,ρ) е сврзан. ♦

4.2. Коментар. Во првиот дел на доказот на претходната теорема не ни беше потребна претпоставката дека просторот (X,ρ) е сврзан. Меѓутоа, за вториот дел истата е важна, бидејќи множеството

$$X=\{(x,0)\mid x\in(0,1]\}\cup\{(0,y)\mid y\in(0,1]\}$$

со метриката ρ_2 е некомпактен и несврзан метрички простор во кој за секој пар точки $x,y\in X$ и за секој $\varepsilon>0$ постојат природен број k и точки $x_1,x_2,...,x_k\in X$ такви што $x=x_1$, $y=x_k$ и се исполнети неравенствата (1).

4.3. Коментар. Според теорема 3.10 за секоја точка $x\in X$ важи $C_x\subseteq KC_x$, но според пример 3.11 во општ случај важи $C_x\neq KC_x$. Логично е да се запрашаме дали при некои услови важи $C_x=KC_x$. Одговор на поставеното прашање дава следнава теорема, чиј доказ излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, па затоа истиот нема да го презентираме.

4.4. Теорема. Ако (X,ρ) е компактен метрички простор, тогаш $C_x=KC_x$, за секој $x\in X$. ♦

4.5. Дефиниција. За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *континиум* ако е компактен и сврзан.

4.6. Теорема. а) Декартовиот производ (Z,d_p) на метричките простори (X_i,ρ_i), $i=1,2,...,n$, каде

$$d_p(x,y)=[(\rho_1(x_1,y_1))^p+(\rho_2(x_2,y_2))^p+...+(\rho_n(x_n,y_n))^p]^{1/p},\ p\geq 1 \tag{8}$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2),...,\rho_n(x_n,y_n)\},\ p=\infty. \tag{9}$$

е континиум ако и само ако метричките простори $(X_i,\rho_i), i=1,...,n$ се континиуми.

б) Ако (X,ρ) е континиум и $f\in\mathbf{C}(X)$, тогаш $f(X)=[a,b], a\leq b$.

Доказ. а) Непосредно следува од последица 2.6 и последица XIII 3.11. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

б) Просторот X е компактен, па од теорема XIII 4.6 следува дека постои $x_*,x^*\in F$ такви што $f(x_*)=a=\min\limits_{x\in X}f(x)$ и $f(x^*)=b=\max\limits_{x\in X}f(x)$. Јасно, $a\leq b$. Според тоа, $f(X)\subseteq[a,b]$. Од друга страна, според теорема 2.1 множеството $f(X)$ е сврзано подмножество од $\mathbf{R}$, па значи е интервал и како $a,b\in f(X)$ добиваме дека $[a,b]\subseteq f(X)$, т.е. $[a,b]=f(X)$. ♦

4.7. Доказот на следнава теорема излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, па затоа истиот нема да го презентираме.

Теорема. Ако $X_\alpha, \alpha \in A$ е фамилија континиуми такви што за секој природен број k и за секои $\alpha_i \in A$, $i = 1, 2, ..., k$ важи

$$\bigcap_{i=1}^{k} X_{\alpha_i} \in \{X_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

тогаш $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ е континиум. ♦

4.8. Последица. Ако X_i, $i = 1, 2, 3, ...$ се континиуми такви што $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ...$, тогаш $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ е континиум.

Доказ. Непосредно следува од теорема 4.7. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4.9. Лема. Секоја компонента на сврзаност C на вистински непразен затворен потпростор Y на континиумот X ја сече границата ∂Y на Y .

Доказ. Нека $x \in C$. Според лема 3.3 важи $C = C_x$, па од теорема 4.5 следува $C_x = KC_x$. Но, тоа значи дека компонентата C е еднаква на пресекот на фамилијата $\{F_i \mid i \in I\}$ потпростори на Y кои ја содржат точката x и кои истовремено се и отворени и затворени во Y .

Нека претпоставиме дека $C \cap \partial Y = \varnothing$. Потпросторот Y е затворен и како X е компактен од теорема XIII 1.7 следува дека Y е компактен простор. Множеството ∂Y е затворено во компактниот простор Y и потпросторите $F_i, i \in I$ се затворени во Y , па од $(\bigcap_{i \in I} F_i) \bigcap \partial Y = \varnothing$ и теорема XIII 1.6 следува дека постојат потпростори F_{i_1}, $F_{i_2}, ..., F_{i_m}$ такви што $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_m} \cap \partial Y = \varnothing$. Понатаму, од теоремите IX 7.8 *iii*) и IX 8.2 *ii*) следува дека $F = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_m}$ е потпростор на Y кој истовремено е и отворен и затворен, ја содржи точката x и за кој важи $F \cap \partial Y = \varnothing$. Множеството F е отворено во Y , па од теорема IX 12.3 следува дека постои множество U кое е отворено во X такво што $U \cap Y = F$. Но, $F \cap \partial Y = \varnothing$ и како според теорема IX 11.5 важи $Y = \partial Y \cup Y^0$ добиваме дека $F = U \cap Y^0$, што значи дека множеството F е отворено во просторот X . Од друга страна, множеството F е затворено во Y , па затоа е компактно во Y и од последица XIII 1.5 следува дека тоа е компактно во X , што според последица XIII 1.11 значи дека тоа е затворено во X . Но, просторот X е сврзан и како непразното множество F е истовремено и отворено и затворено од теорема 1.11 следува дека $F = X$. Но, тоа значи дека $X \cap \partial Y = \varnothing$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $C \cap \partial Y \neq \varnothing$. ♦

4.10. Лема. Нека (X, ρ) е континиум и $X_i, i = 1, 2, 3, ...$ се по парови дисјунктни затворени множества, меѓу кои најмалку две се непразни, такви што

$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$. Тогаш за секој природен број n постои континиум C таков што $C\cap X_n=\varnothing$ и најмалку две од множествата $C\cap X_i$, $i=1,2,3,...$ се непразни.

Доказ. Ако $X_n=\varnothing$, тогаш ставаме $C=X$ и теоремата е докажана.

Нека $X_n\neq\varnothing$. Од условот на теоремата следува дека постои $m\neq n$ таков што $X_m\neq\varnothing$. Според условот множествата X_m и X_n се затворени и дисјунктни, па од теорема IX 9.13 следува дека постојат дисјунктни отворени множества U и V такви што $X_m\subset U$ и $X_n\subset V$. Нека $p\in X_m$ и нека C е компонентата на сврзаност на точката p во просторот $\overline{U}$. Множеството $\overline{U}$ е затворено подмножество од компактниот простор X , па од теорема XIII 1.7 следува дека тоа е компактно. Според лема 3.2 компонентата на сврзаност C е сврзан затворен потпростор на $\overline{U}$ и од теорема XIII 1.7 следува дека C е континиум. Јасно, $C\cap X_n\subseteq\overline{U}\cap X_n=\varnothing$ и $p\in C\cap X_m$. Останува да докажеме дека постои најмалку еден природен број $k\neq m$ таков што $C\cap X_k\neq\varnothing$.

Најпрво да забележиме дека од лема 4.9 следува дека $C\cap\partial\overline{U}\neq\varnothing$. Од друга страна множеството U е отворено, па од теорема IX 7.14 *iii*) следува $U=U^0$. Понатаму, $U\subseteq\overline{U}$, па од теорема IX 7.14 *iv*) следува $U^0\subseteq\overline{U}^0$. Значи, $X_m\subset U=U^0\subseteq\overline{U}^0$ и како $\overline{U}^0\cap\partial\overline{U}=\varnothing$ (теорема IX 11.6) добиваме дека $X_m\cap\partial\overline{U}=\varnothing$. Нека претпоставиме дека за секој $k\neq m$ важи $C\cap X_k=\varnothing$. Тогаш од $\partial\overline{U}\subset X$ и $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$ следува

$$\varnothing\neq C\cap\partial\overline{U}\subseteq C\bigcap(\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i)=(\bigcup_{i\neq m}(C\bigcap X_i))\bigcup(C\bigcap X_m)=\varnothing\,,$$

што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека постои најмалку еден природен број $k\neq m$ таков што $C\cap X_k\neq\varnothing$. ♦

4.11. Лема. Нека (X,ρ) е континиум и X_i, $i=1,2,3,...$ се по парови дисјунктни затворени множества такви што $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$. Тогаш најмногу едно од множествата X_i, $i=1,2,3,...$ е непразно.

Доказ. Нека претпоставиме дека постојат по парови дисјунктни затворени множества X_i, $i=1,2,3,...$ такви $X_1\neq\varnothing, X_2\neq\varnothing$ и $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$.

За $n=1$, од лема 4.10 следува дека постои континиум C_1 таков што $C_1\cap X_1=\varnothing$ и најмалку две од множествата $C_1\cap X_i$, $i=2,3,4,...$ се непразни. Но,

C_1 е континиум и како $C_1 = \bigcup_{i=2}^{\infty} (C_1 \bigcap X_i)$, повторно од лема 4.10, при $n = 2$, следува дека постои континиум $C_2 \subseteq C_1$ таков што $\varnothing = C_2 \cap (C_1 \cap X_2) = C_2 \cap X_2$ и најмалку две од множествата $C_2 \cap (C_1 \cap X_i) = C_2 \cap X_i$, $i = 3, 4, ...$ се непразни. Продолжувајќи ја постапката наоѓаме непразни континиуми C_i, $i = 1, 2, 3, ...$ такви што

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq C_4 \supseteq ...$$

и

$$C_i \cap X_i = \varnothing, \text{ за } i = 1, 2, 3, 4, ... \tag{2}$$

Конечно, од равенствата (2) следува

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = X \bigcap (\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) \bigcap (\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) = \bigcup_{i=1}^{\infty} ((X_i \bigcap C_i) \bigcap (\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\varnothing \bigcap (\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k)) = \varnothing$$
,

што противречи на последица XIII 1.9. Конечно, од добиената противречност следува дека најмногу едно од множествата X_i, $i = 1, 2, 3, ...$ е непразно. ♦

5. СВРЗАНОСТ СО ПАТИШТА

5.1. Дефиниција. Нека (X, ρ) е метрички простор. Секоја непрекината функција $\gamma : [0,1] \to X$ ја нарекуваме *пат* во просторот X. Притоа за точките $x_0 = \gamma(0)$ и $x_1 = \gamma(1)$ велиме дека се сврзани со патот γ. Точката x_0 ја нарекуваме *почеток на патот*, а точката x_1 *крај на патот* γ.

За просторот X ќе велиме дека е *сврзан со патишта* ако за секои точки $x_0, x_1 \in X$ постои пат γ кој ги сврзува. За множеството $A \subseteq X$ ќе велиме дека е *сврзано со патишта*, ако потпросторот (A, ρ_A) е сврзан со патишта.

5.2. Лема. а) Ако $\gamma : [0,1] \to X$ е пат со почеток x_0 и крај x_1, тогаш функцијата $\gamma_1 : [0,1] \to X$, каде $\gamma_1(t) = \gamma(1-t)$ е пат со почеток x_1 и крај x_0, кој го нарекуваме *спротивен пат* на патот γ.

б) Ако точките $x_0, x_1 \in X$ се поврзани со пат и точките $x_1, x_2 \in X$ се поврзани со пат, тогаш постои пат кој ги поврзува точките x_0 и x_2.

в) Ако γ е пат во X, тогаш $\gamma([0,1])$ е континиум.

Доказ. а) Функцијата $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ определена со $\alpha(t) = 1 - t, t \in [0,1]$ е непрекината, па затоа и функцијата $\gamma_1 : [0,1] \to X$ определена со

$$\gamma_1(t) = \gamma(\alpha(t)) = \gamma(1-t), t \in [0,1]$$

е непрекината и притоа важи $\gamma_1(0) = \gamma(1) = x_1$ и $\gamma_1(1) = \gamma(0) = x_2$.

б) Нека патот $\gamma : [0,1] \to X$ ги сврзува точките x_0 и x_1 и патот $\gamma' : [0,1] \to X$ ги сврзува точките x_1 и x_2 . Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точката x_1 е крај на патот γ и е почеток на патот γ' (зошто?). Да ја разгледаме функцијата $\gamma'' : [0,1] \to X$ определена со формулата

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma'(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Функциите $\gamma(2t)$ и $\gamma'(2t-1)$ се непрекинати на множествата $A = [0, \frac{1}{2}]$ и $B = [\frac{1}{2}, 1]$, $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$ и притоа важи

$$\gamma(2 \bullet \tfrac{1}{2}) = \gamma(1) = x_1 = \gamma'(0) = \gamma'(2 \bullet \tfrac{1}{2} - 1),$$

па од теорема X 9.7 следува дека функцијата γ'' е непрекината. Конечно, од $\gamma''(0) = x_0$ и $\gamma''(1) = x_2$ добиваме дека γ'' е пат кој ги поврзува точките x_0 и x_2 .

в) Функцијата γ е непрекината, па од теорема 2.1 следува дека множеството $\gamma([0,1])$ е сврзано. Од теорема XIII 4.6 следува дека множеството $\gamma([0,1])$ е компактно, што значи е континиум. ♦

5.3. Коментар. Патот γ'' , конструиран во доказот на претходната лема го нарекуваме *производ на патиштата* γ и γ' и го означуваме со $\gamma'' = \gamma \cdot \gamma'$. Понатаму, може да се докаже дека ако производите $\gamma \cdot \gamma'$ и $\gamma' \cdot \gamma''$ се определени, тогаш се определени и производите $(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''$ и $\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')$ и притоа важи

$$((\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma'')([0,1]) = (\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma''))([0,1]) .$$

Проверете!

5.4. Теорема. Нека (X, ρ) е метрички простор. Ако X е сврзан со патишта, тогаш X е сврзан простор.

Доказ. Нека x_0 е произволна точка од X . Според претпоставката за секој $x \in X$ постои пат $\gamma_x : [0,1] \to X$ кој ги поврзува точките x_0 и x . Интервал $I = [0,1]$ е сврзано множество, па од теорема 2.1 следува дека за секој $x \in X$ множеството $\gamma_x(I)$ е сврзано. Но, за секој $x \in X$ важи $x_0 \in \gamma_x(I)$, што значи $\bigcap\limits_{x \in X} \gamma_x(I) \neq \varnothing$, па од лема 1.5 следува дека просторот $X = \bigcup\limits_{x \in X} \gamma_x(I)$ е сврзан. ♦

5.5. Пример. а) Во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ отворената топка $B(\mathbf{x}; r)$ е сврзано множество.

Навистина, нека $\mathbf{u}=(x_1,y_1),\mathbf{v}=(x_2,y_2)\in B(\mathbf{x};r)$. Тогаш

$$\gamma(t)=(x_1+t(x_2-x_1),\, y_1+t(y_2-y_1))\in B(\mathbf{x};r)\text{, за секој } t\in[0,1], \qquad (1)$$

што значи дека функцијата $\gamma:[0,1]\to B(\mathbf{x};r)$ определена со (1) е добро дефинирана. Но, функцииите

$$\gamma_1(t)=x_1+t(x_2-x_1),\, t\in[0,1] \text{ и } \gamma_2(t)=y_1+t(y_2-y_1),\, t\in[0,1]$$

се непрекинати, па од лема X 6.6 а) следува дека функцијата γ е непрекината и притоа важи $\gamma(0)=\mathbf{u}$ и $\gamma(1)=\mathbf{v}$, што според дефиниција 5.1 значи дека γ е пат кој ги сврзува точките $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Конечно, од произволноста на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ следува дека отворената топка $B(\mathbf{x};r)$ е сврзана со патишта, па од теорема 5.4 следува дека $B(\mathbf{x};r)$ е сврзано множество.

б) Ако G е непразно отворено сврзано подмножество во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$. Ќе докажеме дека G е сврзано со патишта.

Нека $\mathbf{u}\in G$ и нека U ги содржи точките од G кои во G се со пат сврзани со точката $\mathbf{u}$. Ќе докажеме дека множеството U е отворено. Нека $\mathbf{v}\in U\subseteq G$. Множеството G е отворено, па затоа постои отворена топка $B(\mathbf{v};r)$ таква што $B(\mathbf{v};r)\subseteq G$. Но, според примерот под а) отворената топка $B(\mathbf{v};r)$ е сврзана со патишта, па затоа секоја точка $\mathbf{x}\in B(\mathbf{v};r)$ е со пат сврзана со точката $\mathbf{v}$. Но, точката $\mathbf{v}$ е со пат сврзана со точката $\mathbf{u}$, па од лема 5.2 следува дека точката $\mathbf{x}$ е со пат сврзана со точката $\mathbf{u}$, што значи $\mathbf{x}\in U$. Од произволноста на точката $\mathbf{x}$ следува дека $B(\mathbf{v};r)\subseteq U$, што значи множеството U е отворено.

Нека $V=G\setminus U$, т.е. V е множеството точки од G кои во G не може да се сврзат со пат. Ќе докажеме дека множеството V е отворено. Нека $\mathbf{w}\in V\subseteq G$. Множеството G е отворено, па затоа постои отворена топка $B(\mathbf{w};\varepsilon)$ таква што $B(\mathbf{w};\varepsilon)\subseteq G$. Ако постои точка $\mathbf{x}\in B(\mathbf{w};\varepsilon)$ која во G може со пат да се сврзе со точката $\mathbf{u}\in G$, тогаш од лема 5.2 следува дека и точката $\mathbf{w}$ може со пат да се сврзе со точката $\mathbf{u}$, што е противречност. Од добиената противречност следува $\mathbf{x}\in V$, па од произволноста на точката $\mathbf{x}$ следува $B(\mathbf{w};\varepsilon)\subseteq V$, што значи множеството V е отворено.

Множеството G е сврзано и притоа важи $G=U\cup V$, $U\cap V=\varnothing$ и множествата U и V се отворени, па согласно со дефиниција 1.1 добиваме дека $G\subseteq U$ или $G\subseteq V$. Но, $G\cap U\neq\varnothing$, па затоа $G\subseteq U$, што значи $G=U$, т.е. множеството G е сврзано со патишта. ♦

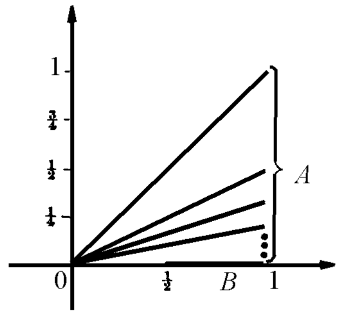
5.6. Обратното тврдење на теорема 5.4 не важи, што може да се види од следниов пример.

Пример. Во просторот $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ да го разгледаме потпросторот $Y=A\cup B$, каде

$$A = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y = \tfrac{x}{n},\ n \in \mathbf{N}\} \text{ и}$$

$$B = \{(x,0) \mid x \in [\tfrac{1}{2},1]\}.$$

Множеството A е составено од отсечките кои со почетна точка во $\mathbf{o} = (0,0)$ и крајни точки $(1,\frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}$, а множеството B од точките на $x-$оската меѓу $\frac{1}{2}$ и 1, (цртеж 2).



Цртеж 2

Јасно, множествата A и B се сврзани со патишта (проверете!), па од теорема 5.4 следува дека тие се сврзани множества. Имаме,

$$\overline{A} = A \cup \{(x,0) \mid x \in [0,1]\},$$

(зошто?), и како $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A}$ од лема 1.8 следува дека множеството $A \cup B$ е сврзано. Но, множеството $A \cup B$ не е сврзано со патишта, бидејќи за секој $\mathbf{x} \in A$ и за секој $\mathbf{y} \in B$ не постои пат кој ги поврзува точките $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, (зошто?). ♦

5.7. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори. Ако просторот X е сврзан со патишта и $f: X \to Y$ е непрекината сурјекција, тогаш и просторот Y е сврзан со патишта.

Доказ. Нека $y_0, y_1 \in Y$. Функцијата f е сурјекција, па затоа постојат $x_0, x_1 \in X$ такви што $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1)$. Но, просторот X е сврзан со патишта па затоа постои непрекината функција $\gamma : [0,1] \to X$ таква што $x_0 = \gamma(0)$ и $x_1 = \gamma(1)$. Понатаму, од теорема X 2.10 следува дека функцијата $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ определена со

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)), \text{ за секој } t \in [0,1]$$

е непрекината и притоа важи

$$(f \circ \gamma)(0) = y_0 \text{ и } (f \circ \gamma)(1) = y_1,$$

т.е. $f \circ \gamma$ е пат кој ги сврзува точките $y_0, y_1 \in Y$. Конечно, од произволноста на точките y_0 и y_1 следува дека просторот Y е сврзан со патишта. ♦

5.8. Теорема. Декартовиот производ (Z,ρ_p) на метричките простори (X,ρ) и (Y,d), каде

$$\rho_p(z_1,z_2) = (\rho^p(x_1,x_2) + d^p(y_1,y_2))^{1/p}, \text{ за } p \ge 1 \tag{2}$$

$$\rho_\infty(z_1,z_2) = \max\{\rho(x_1,x_2), d(y_1,y_2)\},\ p = \infty \tag{3}$$

за секои $z_1 = (x_1,y_1), z_2 = (x_2,y_2) \in Z$ е сврзан со патишта ако и само ако метричките простори (X,ρ) и (Y,d) се сврзани со патишта.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека метричките простори (X,ρ) и (Y,d) се сврзани со патишта и $z_1=(x_1,y_1), z_2=(x_2,y_2)\in Z$. Од $x_1,x_2\in X$, бидејќи просторот X е сврзан со патишта, следува дека постои непрекината функција $\gamma_1:[0,1]\to X$ таква што $x_1=\gamma_1(0)$ и $x_2=\gamma_1(1)$, а од $y_1,y_2\in Y$, бидејќи просторот Y е сврзан со патишта, следува дека постои непрекината функција $\gamma_2:[0,1]\to Y$ таква што $y_1=\gamma_2(0)$ и $y_2=\gamma_2(1)$. Да ја разгледаме функцијата $\gamma:[0,1]\to Z$ определена со

$$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t)),\text{ за секој } t\in[0,1].$$

Функциите γ_1 и γ_2 се непрекинати, па од лема X 6.6 а) следува дека функцијата γ е непрекината и притоа важи

$$\gamma(0)=(\gamma_1(0),\gamma_2(0))=(x_1,y_1)=z_1 \text{ и } \gamma(1)=(\gamma_1(1),\gamma_2(1))=(x_2,y_2)=z_2,$$

т.е. патот γ ги поврзува точките z_1 и z_2. Конечно, од произволноста на точките z_1 и z_2 следува дека Декартовиот производ Z е сврзан со патишта.

$\Rightarrow$. Нека Декартовиот производ Z е сврзан со патишта и нека $x_1,x_2\in X$ и $y_1,y_2\in Y$. Јасно, $z_1=(x_1,y_1), z_2=(x_2,y_2)\in Z$ и како просторот Z е сврзан со патишта добиваме дека постои непрекината функција $\gamma:[0,1]\to Z$ таква што

$$\gamma(0)=z_1=(x_1,y_1) \text{ и } \gamma(1)=z_2=(x_2,y_2). \tag{4}$$

Сега, од лема X 6.5 следува дека постојат функции $\gamma_1:[0,1]\to X$ и $\gamma_2:[0,1]\to Y$ такви што

$$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t)),\text{ за секој } t\in[0,1]. \tag{5}$$

Функцијата γ е непрекината, па од лема X 6.6 а) следува дека функциите γ_1 и γ_2 се непрекинати и притоа од равенствата (4) и (5) следува

$$(\gamma_1(0),\gamma_2(0))=\gamma(0)=(x_1,y_1) \text{ и } (\gamma_1(1),\gamma_2(1))=\gamma(1)=(x_2,y_2),$$

т.е. $x_1=\gamma_1(0)$, $x_2=\gamma_1(1)$, $y_1=\gamma_2(0)$ и $y_2=\gamma_2(1)$. Според тоа, патот γ_1 ги сврзува точките $x_1,x_2\in X$, а патот γ_2 ги сврзува точките $y_1,y_2\in Y$. Конечно од произволноста на точките x_1 и x_2 следува дека просторот X е сврзан со патишта, а од произволноста на точките y_1 и y_2 следува дека просторот Y е сврзан со патишта. ♦

5.9. Последица. Декартовиот производ (Z,d_p) на метричките простори (X_i,ρ_i), $i=1,2,...,n$, каде

$$d_p(x,y)=[(\rho_1(x_1,y_1))^p+(\rho_2(x_2,y_2))^p+...+(\rho_n(x_n,y_n))^p]^{1/p},\ p\ge 1 \tag{8}$$

$$d_\infty(x,y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2),...,\rho_n(x_n,y_n)\},\ p=\infty, \tag{9}$$

е сврзан со патишта ако и само ако метричките простори $(X_i,\rho_i), i=1,...,n$ се сврзани со патишта.

Доказ. Непосредно следува од теорема 5.8 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

5.10. Нека (X,ρ) е метрички простор и $x \in X$. Функцијата $e_x:[0,1] \to X$ определена со $e_x(t) = x$, за секој $t \in [0,1]$ е непрекината, т.е. таа е пат кој го нарекуваме *константен пат*. Сега, ако ја земеме предвид лема 5.2 добиваме дека релацијата $x \sim y$ ако и само ако постои пат γ со почеток во x и крај во y е релација на еквиваленција. Оваа релација на еквиваленција го разбива просторот X на дисјунктни класи на еквиваленција кои ги нарекуваме пат компоненти. Во натамошните разгледувања *пат компонентата* која ја содржи точката x ќе ја означуваме со PC_x.

5.11. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $x \in X$. Тогаш

а) $x \in PC_x$,

б) PC_x е сврзан со патишта и

в) ако множеството $A \subseteq X$ е сврзано со патишта и ако $x \in A$, тогаш $A \subseteq PC_x$.

Доказ. а) $\gamma(t) = x$, за секој $t \in [0,1]$ е пат од x до x, па затоа $x \in PC_x$.

б) Нека $y \in PC_x$. Тогаш постои пат $\gamma:[0,1] \to X$ таков што $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. За да го докажеме тврдењето доволно е да докажеме дека $\gamma([0,1]) \subseteq PC_x$, т.е. дека γ е пат во PC_x. Нека $s \in [0,1]$. Функцијата $\alpha:[0,1] \to X$ определена со $\alpha(t) = \gamma(st)$, за секој $t \in [0,1]$ е непрекината и притоа важи $\alpha(0) = \gamma(0) = x$ и $\alpha(1) = \gamma(s)$, што значи постои пат од точката x до точката $\gamma(s)$, односно $\gamma(s) \in PC_x$.

в) Нека A е множество сврзано со патишта кое ја содржи точката x и нека $y \in A$. Од сврзаноста со патишта на множеството A следува дека постои пат $\gamma:[0,1] \to A$ таков што $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Понатаму, функцијата $\alpha: A \to X$ определена со $\alpha(x) = x$, за секој $x \in A$ е непрекината, па затоа функцијата $\alpha \circ \gamma:[0,1] \to X$ е пат во X таков што $(\alpha \circ \gamma)(0) = x$ и $(\alpha \circ \gamma)(1) = y$, што значи дека $y \in PC_x$. Конечно, од произволноста на y следува $A \subseteq PC_x$. ♦

6. ДОЛЖИНА НА ПАТ ВО МЕТРИЧКИ ПРОСТОР

6.1. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\gamma:[0,1] \to X$ е пат во X. За секоја поделба $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ на $[0,1]$ дефинираме

$$\alpha(\gamma,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)). \tag{1}$$

Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\gamma:[0,1]\to X$ е пат во X. Ако π и π^* се две поделби на $[0,1]$ такви што π^* е пофина од π, тогаш

$$\alpha(\gamma,\pi)\le\alpha(\gamma,\pi^*)\,. \tag{2}$$

Доказ. Нека претпоставиме дека π^* содржи само една точка повеќе од π и нека тоа е точката $t^*, t^*\in(t_{k-1},t_k)$. Тогаш, од неравенството на триаголник и од (1) следува

$$\begin{aligned}\alpha(\gamma,\pi)&=\sum_{i=1}^{n}\rho(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i))=\sum_{i=1}^{k-1}\rho(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i))+\rho(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))+\sum_{i=k+1}^{n}\rho(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i))\\&\le\sum_{i=1}^{k-1}\rho(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i))+\rho(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t^*))+\rho(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))+\sum_{i=k+1}^{n}\rho(\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i))\\&=\alpha(\gamma,\pi^*).\end{aligned}$$

Сега, ако π^* содржи k точки повеќе од π, тогаш претходното размислување ќе го повториме k-пати и го добиваме неравенството (2). ♦

6.2. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\gamma:[0,1]\to X$ е пат во X. *Должина на патот* γ е

$$l(\gamma)=\sup\{\alpha(\gamma,\pi)\mid\pi \text{ е поделба на интервалот } [0,1]\}\,.$$

За патот γ ќе велиме дека е *измерлив* ако $l(\gamma)<+\infty$.

6.3. Пример. а) Нека (X,ρ) е произволен метрички простор и нека $x\in X$. Константниот пат $\gamma(t)=x$, за секој $t\in[0,1]$ има должина 0. Навистина, за секоја поделба $\pi=\{t_i\}_{i=0}^{n}$ на $[0,1]$ имаме $\gamma(t_i)=x$, за $i=0,1,2,...,n$, па затоа

$$\alpha(\gamma,\pi)=\sum_{i=1}^{n}\rho(x,x)=0\,,$$

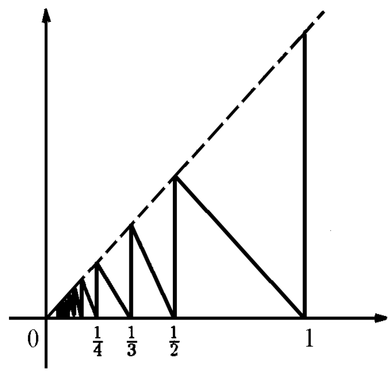
од што следува $l(\gamma)=0$.

б) Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ да ја разгледмае низата точки $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена со:

$$\mathbf{x}_{2n-1}=(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}),\ \mathbf{x}_{2n}=(\tfrac{1}{n},0),\ n=1,2,3,4,...\,.$$

Понатаму, да ја земеме низата

$$t_n=\tfrac{n-1}{n},\ \ n=1,2,3,...$$



Цртеж 3

и да ја разгледаме функцијата $\gamma:[0,1]\to\mathbf{R}^2$ таква што секој интервал $[t_n,t_{n+1}]$ линеарно се пресликува на отсечката која ги поврзува точките $\mathbf{x}_n$ и $\mathbf{x}_{n+1}$ и бројот 1 се пресликува во точката $\mathbf{o}=(0,0)$, цртеж 3. Лесно се докажува дека функцијата

γ е непрекината, што значи е пат во $\mathbf{R}^2$. Ќе докажеме дека патот γ не е измерлив. Навистина, за поделбата $\pi_n : t_1, t_2, ..., t_{2n}, 1$ на интервалот $[0,1]$ имаме:

$$\alpha(\gamma, \pi_n) > \sum_{i=1}^{n} \rho(\mathbf{x}_{2i-1}, \mathbf{x}_{2i}) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{n},$$

па затоа

$$l(\gamma) \geq \sup\{\alpha(\gamma, \pi_n) \mid n = 1,2,3,...\} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{n} + ... = +\infty . \ \blacklozenge$$

6.4. Забелешка. Во дефиниција 5.1 наместо интервалот $[0,1]$ можеме да земеме произволен интервал $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Навистина, ако $\gamma : [a,b] \to X$ е непрекината функција, тогаш бидејќи линеарната функција $\tau : [0,1] \to [a,b]$ определена со

$$\tau(t) = a + (b-a)t \text{, за секој } t \in [0,1]$$

е непрекината, добиваме дека функцијата $\gamma^* = \gamma \circ \tau : [0,1] \to X$ е непрекината, што значи дека е пат во X и притоа важи $\gamma^*(0) = \gamma(\tau(0)) = \gamma(a)$, $\gamma^*(1) = \gamma(\tau(1)) = \gamma(b)$ и $\gamma^*([0,1]) = \gamma([a,b])$. Последното значи дека γ и γ^* всушност определуваат еден ист пат во просторот X, (зошто?). Имајќи го предвид претходно изнесеното во натамошните разгледувања секоја непрекината функција $\gamma : [a,b] \to X$ ќе ја нарекуваме пат во метричкиот простор X.

6.5. Во следната лема ќе докажеме две тврдења за *инваријантност на должина на пат* во метрички простор.

Лема. а) Нека (X, ρ) е метрички простор и $\gamma : [a,b] \to X$ и $\gamma_1 : [c,d] \to X$ се два пата во X. Ако постои непрекината строго монотона функција $f : [c,d] \to \mathbf{R}$ таква што $f([c,d]) = [a,b]$ и $\gamma_1 = \gamma \circ f$, тогаш γ и γ_1 имаат исти должини.

б) Нека (X, ρ) е метрички простор, $f : X \to X$ е изометрија и $\gamma : [a,b] \to X$ е пат во X. Тогаш $f \circ \gamma$ е пат во X и патот γ е измерлив ако и само ако патот $f \circ \gamma$ е измерлив и притоа важи $l(f \circ \gamma) = l(\gamma)$.

Доказ. а) Нека $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ е поделба на интервалот $[c,d]$. Земаме $s_i = f(t_i)$, $i = 0,1,2,...,n$ и добиваме дека

$$\pi^* = \begin{cases} s_0, s_1, ..., s_{n-1}, s_n, & \text{ако функцијата } f \text{ расте,} \\ s_n, s_{n-1}, ..., s_1, s_0, & \text{ако функцијата } f \text{ опаѓа,} \end{cases}$$

е поделба на интервалот $[a,b]$. Понатаму, бидејќи

$$\gamma(s_i) = \gamma(f(t_i)) = (\gamma \circ f)(t_i) = \gamma_1(t_i) \text{, за } i = 0,1,2,...,n$$

добиваме

$$\alpha(\gamma_1, \pi) = \alpha(\gamma, \pi^*) \leq l(\gamma) .$$

Но, π е произволна поделба на интервалов $[c,d]$, па затоа

$$l(\gamma_1) = \sup_{\pi \text{ на } [c,d]} \alpha(\gamma_1, \pi) \leq l(\gamma) . \tag{3}$$

Понатаму, од теорема III 6.6 следува дека инверзната функција f^{-1} постои и притоа важи $f^{-1}([a,b]) = [c,d]$ и $\gamma = \gamma_1 \circ f^{-1}$, па од претходно изнесеното следува дека

$$l(\gamma) \leq l(\gamma_1) . \tag{4}$$

Конечно, од (3) и (4) добиваме $l(\gamma) = l(\gamma_1)$.

б) Според лема X 5.3 изометријата f е рамномерно непрекината, па од лема X 2.6 следува дека таа е непрекината. Понатаму, од теорема X 2.10 следува дека функцијата $f \circ \gamma : [a,b] \to X$ е непрекината, што значи дека е пат во просторот X .

Нека $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ е поделба на интервалот $[a,b]$. Имаме

$$\begin{aligned} l(f \circ \gamma) &= \sup_{\pi} \alpha(f \circ \gamma, \pi) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \rho((f \circ \gamma)(t_{i-1}), (f \circ \gamma)(t_i)) \\ &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \rho(f(\gamma(t_{i-1})), f(\gamma(t_i))) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \rho(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = l(\gamma), \end{aligned}$$

што значи дека патот γ е измерлив ако и само ако патот $f \circ \gamma$ е измерлив и притоа важи $l(f \circ \gamma) = l(\gamma)$. ♦

6.6. Лема. Нека (X, ρ) е метрички простор и $\gamma : [a,b] \to X$ е пат во X и $c \in (a,b)$. Патот γ е измерлив ако и само ако патиштата $\gamma_{|[a,c]}$ и $\gamma_{|[c,b]}$ се измерливи и притоа важи

$$l(\gamma) = l(\gamma_{|[a,c]}) + l(\gamma_{|[c,b]}) . \tag{5}$$

Доказ. $\Rightarrow$. Нека патот γ е измерлив. Ако $\pi = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ е поделба на интервалот $[a,c]$ и $\pi^* = \{s_i\}_{i=0}^{m}$ е поделба на интервалот $[c,b]$, тогаш $\pi \cup \pi^*$ е поделба на интервалот $[a,b]$ и притоа важи

$$\alpha(\gamma_{|[a,c]}, \pi) + \alpha(\gamma_{|[c,b]}, \pi^*) = \alpha(\gamma, \pi \cup \pi^*) \leq l(\gamma) . \tag{6}$$

Нека фиксираме поделба π на интервалот $[a,c]$. Од неравенството (6) добиваме дека за секоја поделба π^* на интервалот $[c,b]$ важи

$$\alpha(\gamma_{|[c,b]}, \pi^*) \leq l(\gamma) - \alpha(\gamma_{|[a,c]}, \pi) , \tag{7}$$

и ако во (7) земеме супремум по поделбите π^* на $[c,b]$ го добиваме неравенството $l(\gamma_{|[c,b]}) \leq l(\gamma) - \alpha(\gamma_{|[a,c]}, \pi)$, т.е. неравенството

$$\alpha(\gamma_{|[a,c]},\pi) \le l(\gamma) - l(\gamma_{|[c,b]}) . \tag{8}$$

Конечно, ако во (8) земеме супремум по сите поделби π на интервалот $[a,c]$ го добиваме неравенството $l(\gamma_{|[a,c]}) \le l(\gamma) - l(\gamma_{|[c,b]})$, кое е еквивалентно на неравенството

$$l(\gamma_{|[a,c]}) + l(\gamma_{|[c,b]}) \le l(\gamma) . \tag{9}$$

од што следува дека патиштата $\gamma_{|[a,c]}$ и $\gamma_{|[c,b]}$ се измерливи.

$\Leftarrow$. Обратно, нека патиштата $\gamma_{|[a,c]}$ и $\gamma_{|[c,b]}$ се измерливи. Ако $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ е произволна поделба на интервалот $[a,b]$ и $\pi^* = \pi \cup \{a,c,b\}$, тогаш $\pi^* = \pi' \cup \pi''$, каде π' е поделба на интервалот $[a,c]$, а π'' е поделба на интервалот $[c,b]$. Понатаму, од лема 6.1 следува дека

$$\begin{aligned}\alpha(\gamma,\pi) \le \alpha(\gamma,\pi^*) &= \alpha(\gamma_{|[a,c]},\pi') + \alpha(\gamma_{|[c,b]},\pi'') \\ &\le l(\gamma_{|[a,c]}) + l(\gamma_{|[c,b]})\end{aligned}$$

и ако во последното неравенство земеме супремум по поделбите π на $[a,b]$ го добиваме неравенството

$$l(\gamma) \le l(\gamma_{|[a,c]}) + l(\gamma_{|[c,b]}) . \tag{10}$$

од што следува дека патот γ е измерлив.

Конечно, од неравенствата (9) и (10) следува равенството (5). ♦

6.7. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\gamma:[a,b] \to X$ е измерлив пат во X. Функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = a, \\ l(\gamma_{|[a,t]}), & t \in (a,b], \end{cases}$$

е монотоно растечка и непрекината.

Доказ. Според лема 6.6 за секој $t \in (a,b]$ патот $l(\gamma_{|[a,t]})$ е измерлив, па затоа функцијата f е добро дефинирана. Нека $a \le t_1 < t_2 \le b$. Ако го искористиме равенството (5) и фактот дека $l(\gamma_{|[t_1,t_2]}) \ge 0$ добиваме

$$f(t_1) = l(\gamma_{|[a,t_1]}) \le l(\gamma_{|[a,t_1]}) + l(\gamma_{|[t_1,t_2]}) = f(t_2) ,$$

што значи дека функцијата f монотоно расте.

Ќе докажеме дека функцијата f е непрекината од лево во секоја точка $t \in (a,b]$. Нека $t \in (a,b]$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Согласно со дефиниција 6.2 постои поделба $\pi = \{t_i\}_{i=0}^n$ на интервалот $[a,t]$ таква што

$$\alpha(\gamma_{|[a,t]},\pi) > l(\gamma_{|[a,t]}) - \varepsilon . \tag{11}$$

Но, функцијата γ е непрекината, што според теорема XIII 4.12 значи дека е рамномерно непрекината, па затоа постои $\delta > 0$ таков што за секој $t^* \in (t_{n-1}, t] \cap (t-\delta, t]$ важи

$$\rho(\gamma(t^*), \gamma(t)) < \varepsilon \, . \tag{12}$$

За поделбите $\pi' : t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t^*$ на $[a, t^*]$ и $\pi'' : t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t^*, t$ на $[a, t]$ имаме π'' е пофина од π, па од лема 6.1 и неравенствата (11) и (12) добиваме

$$\begin{aligned} f(t^*) &= l(\gamma_{|[a,t^*]}) \geq \alpha(\gamma_{|[a,t^*]}, \pi') = \alpha(\gamma_{|[a,t]}, \pi'') - \rho(\gamma(t), \gamma(t^*)) \\ &\geq \alpha(\gamma_{|[a,t]}, \pi) - \rho(\gamma(t), \gamma(t^*)) > \alpha(\gamma_{|[a,t]}, \pi) - \varepsilon > l(\gamma_{|[a,t]}) - 2\varepsilon = f(t) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Значи, за даденото $\varepsilon > 0$ најдовме $\delta > 0$ таков што за секој $t^* \in (t_{n-1}, t] \cap (t-\delta, t]$ важи $| f(t) - f(t^*) | = f(t) - f(t^*) < 2\varepsilon$, што значи дека функцијата f е непрекината од лево во секоја точка $t \in (a, b]$. Аналогно се докажува дека функцијата f е непрекината од десно во секоја точка $t \in [a, b)$. Конечно, од лема III 5.16 следува дека функцијата f е непрекината. ♦

6.8. Измерливите патишта во метричките простори $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$, $p \geq 1$ или $p = \infty$ имаат огромна примена, па затоа во следнава теорема ќе дадеме карактеризација на истите.

Теорема. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^m, \rho_p)$, $p \geq 1$ патот $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ е измерлив ако и само ако координатните функции γ_i, $i = 1, 2, ..., m$ за функцијата γ се функции со ограничена варијација. Притоа се исполнети неравенствата

$$V(\gamma_i, [a, b]) \leq l(\gamma) \leq \sum_{k=1}^{m} V(\gamma_k, [a, b]), \text{ за секој } i = 1, 2, ..., m \, . \tag{13}$$

Доказ. $\Rightarrow$. Нека патот γ е измерлив. Ако $\pi = \{t_s\}_{s=0}^{n}$ е поделба на интервалот $[a, b]$, тогаш за координатната функција γ_i, $i = 1, 2, ..., m$ важи

$$\sum_{s=0}^{n-1} | \gamma_i(t_{s+1}) - \gamma_i(t_s) | \leq \sum_{s=0}^{n-1} \rho_p(\gamma(t_{s+1}), \gamma(t_s)) \leq l(\gamma) \, .$$

Конечно, ако во последното неравенство земеме супремум по сите поделби π на интервалот $[a, b]$ добиваме дека за координатната функција γ_i, $i = 1, 2, ..., m$ важи

$$V(\gamma_i, [a, b]) = \sup_{\pi} \sum_{s=0}^{n-1} | \gamma_i(t_{s+1}) - \gamma_i(t_s) | \leq l(\gamma) < \infty \, , \tag{14}$$

што значи дека функцијата γ_i, $i = 1, 2, ..., m$ е со ограничена варијација.

$\Leftarrow$. Нека координатните функции γ_i, $i = 1, 2, ..., m$ се со ограничена варијација. Ако $\pi = \{t_s\}_{s=0}^{n}$ е поделба на интервалот $[a, b]$, тогаш од забелешка IX 14.4 следува неравенството

$$\sum_{s=0}^{n-1} \rho_p(\gamma(t_{s+1}),\gamma(t_s)) \leq \sum_{s=0}^{n-1} \rho_1(\gamma(t_{s+1}),\gamma(t_s)) = \sum_{s=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} |\gamma_i(t_{s+1})-\gamma_i(t_s)|$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=0}^{n-1} |\gamma_i(t_{s+1})-\gamma_i(t_s)| \leq \sum_{i=1}^{m} V(\gamma_i,[a,b]).$$

Конечно, ако во последното неравенствоземеме супремум по сите поделби π на интервалот $[a,b]$ добиваме

$$l(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_{s=0}^{n-1} \rho_p(\gamma(t_{s+1}),\gamma(t_s)) \leq \sum_{i=1}^{m} V(\gamma_i,[a,b]) < \infty\,, \tag{15}$$

што значи дека патот γ е измерлив. Од (14) и (15) следуваат неравенствата (13). ♦

6.9. Дефиниција. За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *лак* ако за секој затворен интервал $[a,b]\subset \mathbf{R}$ постои непрекината биекција $\gamma:[a,b]\to X$. Патот γ го нарекуваме *параметризација на лакот* X.

6.10. Теорема. Нека метричкиот простор (X,ρ) е лак. Тогаш сите параметризации на X имаат иста должина.

Доказ. Нека $\gamma:[a,b]\to X$ и $\gamma_1:[c,d]\to X$ се произволни параметризации на лакот X. Патот γ е непрекината биекција и како множеството $[a,b]$ е компактно, од последица XIII 4.4 следува дека функцијата γ^{-1} е непрекината, па затоа непрекината е и композицијата $f=\gamma^{-1}\circ\gamma_1:[c,d]\to[a,b]$. Но, γ и γ_1 се биекции, па затоа f е биекција и од непрекинатоста на f следува, дека функцијата f е строго монотона. Конечно, за патот γ_1 имаме $\gamma_1=\gamma\circ f:[c,d]\to X$, па од лема 6.5 следува дека γ и γ_1 имаат исти должини. ♦

6.11. Дефиниција. Нека X е лак. Должината на произволна параметризација ја нарекуваме *должина на лакот* X, во ознака $l(X)$. За лакот X ќе велиме дека е *измерлив* ако произволна негова параметризација е измерлива.

6.12. Последица. Нека X е лак и $x_0\in X$ е точка која не е почетна и крајна точка за лакот X. Тогаш постојат единствени два лака X_1 и X_2 такви што

1) x_0 е крајна точка за лакот X_1 и е почетна точка за лакот X_2 и
2) $X=X_1\cup X_2$, $X_1\cap X_2=\{x_0\}$.

Притоа лакот X е измерлив ако и само ако лаците X_1 и X_2 се измерливи и важи

$$l(X)=l(X_1)+l(X_2)\,. \tag{16}$$

Доказ. Нека $\gamma:[a,b]\to X$ е произволна параметризација на лакот X. Но, γ е биекција и како $x_0\in X$ е точка која не е почетна и крајна точка за лакот X

добиваме дека постои $c \in (a,b)$ таков што $\gamma(c) = x_0$. Земаме $\gamma([a,c]) = X_1$ и $\gamma([c,b]) = X_2$. Јасно, $\gamma|_{[a,c]}$ и $\gamma|_{[c,b]}$ се непрекинати биекции од $[a,c]$ и $[c,b]$ на X_1 и X_2, соодветно, што значи дека X_1 и X_2 се лаци со параметризации $\gamma|_{[a,c]}$ и $\gamma|_{[c,b]}$ и се исполнети условите 1) и 2).

Конечно, од лема 6.6 следува дека лакот X е измерлив ако и само ако лаците X_1 и X_2 се измерливи и притоа е исполнето равенството (16). ♦

6.13. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор таков што секои $x, y \in X$ може да се сврзат со измерлив пат во X. Функцијата $\widetilde{\rho} : X \times X \to \mathbf{R}$ определена со

$$\widetilde{\rho}(x,y) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ е пат во } X \text{ од } x \text{ до } y\} \tag{17}$$

е метрика во X за која важи

$$\widetilde{\rho}(x,y) \ge \rho(x,y), \text{ за секои } x, y \in X. \tag{18}$$

Метриката $\widetilde{\rho}$ ја нарекуваме *должинска метрика* придружена на метриката ρ.

Доказ. Нека $x, y \in X$ и $\gamma : [a,b] \to X$ е пат од x до y, односно $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$. За тривијалната поделба $\pi : a,b$ на $[a,b]$ имаме

$$l(\gamma) \ge \alpha(\gamma,\pi) = \rho(\gamma(a),\gamma(b)) = \rho(x,y),$$

и ако на левата страна земеме инфимум по сите патишта од x до y добиваме $\widetilde{\rho}(x,y) \ge \rho(x,y)$, т.е. важи условот (18).

Јасно, $\widetilde{\rho}(x,y) \ge 0$, за секои $x, y \in X$ и ако $\widetilde{\rho}(x,y) = 0$, тогаш од условот (17) следува $\rho(x,y) = 0$ и како ρ е метрика добиваме $x = y$. Но, од пример 6.3 а) следува $\widetilde{\rho}(x,x) = 0$, за секој $x \in X$, т.е. важи аксиомата *i*) од дефиниција IX 1.1.

Нека $\gamma : [a,b] \to X$ е пат од x до y. Тогаш функцијата $\gamma^* : [-b,-a] \to X$ определена со $\gamma^*(t) = \gamma(-t)$ е пат од y до x и како функцијата $f : [-b,-a] \to [a,b]$ определена со $f(t) = -t$ е строго монотона, $f([-b,-a]) = [a,b]$ и $\gamma^* = \gamma \circ f$, од лема 6.5. следува дека $l(\gamma) = l(\gamma^*) \ge \widetilde{\rho}(y,x)$. Последното неравенство важи за секој пат γ од x до y, па ако земеме инфимум по сите патишта γ добиваме $\widetilde{\rho}(x,y) \ge \widetilde{\rho}(y,x)$. Ако ги замениме местата на x и y добиваме $\widetilde{\rho}(y,x) \ge \widetilde{\rho}(x,y)$, што заедно со претходното неравенство значи $\widetilde{\rho}(y,x) = \widetilde{\rho}(x,y)$, т.е. важи аксиомата *ii*) од дефиниција IX 1.1.

Нека $x, y, z \in X$ и нека $\gamma : [a,b] \to X$ е пат од x до y и $\gamma^* : [a',b'] \to X$ е пат од y до z. Нека $b'' = b + b' - a'$. Функцијата $\gamma_1 : [b,b''] \to X$ определена со

$$\gamma_1(t) = \gamma^*(t - b + a'), \text{ за секој } t \in [b,b''],$$

е пат од y до z, па од 6.5 следува $l(\gamma_1)=l(\gamma^*)$. Понатаму, од лема 5.2 б) следува дека функцијата $\gamma_2:[a,b'']\to X$ определена со

$$\gamma_2(t)=\begin{cases}\gamma(t), & t\in[a,b],\\ \gamma_1(t), & t\in[b,b''],\end{cases}$$

е пат од x до z. Сега, од лема 6.6 и од $l(\gamma_1)=l(\gamma^*)$ следува

$$l(\gamma_2)=l(\gamma)+l(\gamma_1)=l(\gamma)+l(\gamma^*)\,.$$

Но, γ_2 е пат од x до z, па од (17) следува $\widetilde{\rho}(x,z)\le l(\gamma_2)$, односно

$$\widetilde{\rho}(x,z)\le l(\gamma)+l(\gamma^*)$$

и како патиштата γ и γ^* се произволни, ако во последното неравенство земеме инфимум по сите патишта γ од x до y и по сите патишта γ^* од y до z добиваме

$$\widetilde{\rho}(x,z)\le\widetilde{\rho}(x,y)+\widetilde{\rho}(y,z)\,,$$

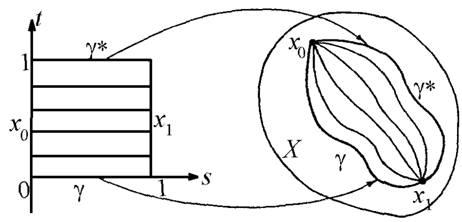
т.е. важи аксиомата *iii*) од дефиниција IX 1.1. ♦

7. ХОМОТОПНИ ПАТИШТА

7.1. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\gamma:[0,1]\to X$ и $\gamma^*:[0,1]\to X$ се два пата со заеднички почетна точка $\gamma(0)=\gamma^*(0)=x_0$ и крајна точка $\gamma(1)=\gamma^*(1)=x_1$. Ќе велиме дека γ е *хомотопен* на γ^*, во ознака $\gamma\simeq\gamma^*$, ако постои непрекината функција $H:[0,1]^2\to X$ таква што

$$H(s,0)=\gamma(s),\quad H(s,1)=\gamma^*(s),\ \text{за секој } s\in[0,1],$$
$$H(0,t)=x_0,\ \ H(1,t)=x_1,\ \text{за секој } t\in[0,1],$$

(види цртеж 4). Притоа ќе велиме дека γ може *непрекинато да се деформира* во γ^*. Функцијата H ја нарекуваме *хомотопија* од патот γ на патот γ^*.



Цртеж 4

7.2. Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор. Точни се следниве тврдења:

i) $\gamma\simeq\gamma$, за секој пат γ во X,

ii) ако γ и γ_1 се патишта во X такви што $\gamma\simeq\gamma_1$, тогаш $\gamma_1\simeq\gamma$, и

iii) ако γ, γ_1 и γ_2 се патишта во X такви што $\gamma\simeq\gamma_1$ и $\gamma_1\simeq\gamma_2$, тогаш $\gamma\simeq\gamma_2$.

Доказ. *i*) Нека $\gamma:[0,1]\to X$ е пат. Тогаш функцијата $H:[0,1]^2\to X$ определена со $H(s,t)=\gamma(s)$, за секои $s,t\in[0,1]$ е хомотопија од патот γ на патот γ.

ii) Нека γ и γ_1 се патишта во X такви што $\gamma\simeq\gamma_1$. Тогаш постои хомотопија $H:[0,1]^2\to X$ од γ на γ_1. Да ја разгледаме функцијата $H_1:[0,1]^2\to X$ определена со

$$H_1(s,t)=H(s,1-t)\text{, за секои } s,t\in[0,1].$$

Јасно, функцијата H_1 е непрекината и притоа важи

$$H_1(s,0)=H(s,1)=\gamma^*(s),\quad H_1(s,1)=H(s,0)=\gamma(s),\ \text{за секој } s\in[0,1],$$

$$H_1(0,t)=H(0,1-t)=x_0,\quad H_1(1,t)=H(1,1-t)=x_1,\ \text{за секој } t\in[0,1],$$

што значи дека H_1 е хомотопија од γ_1 на γ, т.е. $\gamma_1\simeq\gamma$.

iii) Нека γ, γ_1 и γ_2 се патишта во X такви што $\gamma\simeq\gamma_1$ и $\gamma_1\simeq\gamma_2$. Тогаш постојат хомотопија $H:[0,1]^2\to X$ од γ на γ_1 и хомотопија $H_1:[0,1]^2\to X$ од γ_1 на γ_2. Да ја разгледаме функцијата $H_2:[0,1]^2\to X$ определена со

$$H_2(s,t)=\begin{cases}H(s,2t), & s\in[0,1],\ t\in[0,\frac{1}{2}],\\ H_1(s,2t-1), & s\in[0,1],\ t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Функцијата $H(s,2t)$ е непрекината на множеството $A=[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]$, а функцијата $H_1(s,2t-1)$ е непрекината на множеството $B=[0,1]\times[\frac{1}{2},1]$. Но, $A\cap B=[0,1]\times\{\frac{1}{2}\}$ и притоа важи

$$H(s,2\cdot\tfrac{1}{2})=H(s,1)=\gamma_1(s)=H_1(s,0)=H_1(s,2\cdot\tfrac{1}{2}-1)\text{, за секој } s\in[0,1],$$

па од лема X 9.7 следува дека функцијата H_2 е непрекината. Понатаму:

$$H_2(s,0)=H(s,0)=\gamma(s),\quad H_2(s,1)=H_1(s,1)=\gamma_2(s),\ \text{за секој } s\in[0,1],$$

$$H_2(0,t)=H(0,2t)=x_0,\ t\in[0,\tfrac{1}{2}],\qquad H_2(0,t)=H_1(0,2t-1)=x_0,\ t\in[\tfrac{1}{2},1],$$

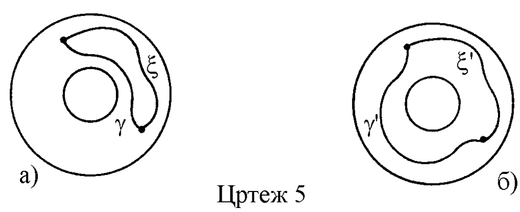
$$H_2(1,t)=H(1,2t)=x_1,\ t\in[0,\tfrac{1}{2}],\qquad H_2(1,t)=H_1(1,2t-1)=x_1,\ t\in[\tfrac{1}{2},1],$$

што значи дека H_2 е хомотопија од γ на γ_2, т.е. $\gamma\simeq\gamma_2$. ♦

7.3. Пример. Нека

$$X=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2 \mid \tfrac{1}{2}\le\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{o})\le 2\}.$$

Тогаш во метричкиот простор (X,ρ_2) патиштата γ и ξ (цртеж. 5 а)) се хомотопни, а додека па-



Цртеж 5

тиштата γ' и ξ' (цртеж 5 б)) не се хомотопни. ♦

7.4. Според теорема 7.2 во множеството патишта во просторот X релацијата $\simeq$ е релација на еквиваленција и истата го разбива множеството патишта на дисјунктни класи на еквиваленција. Во натамошните разгледувања класата која го содржи патот γ ќе ја означуваме со $[[\gamma]]$ и истата ќе ја нарекуваме *хомотопна класа патишта со претставник* γ.

7.5. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор. За патот $\gamma:[0,1]\to X$ ќе велиме дека е *затворен* во X ако $\gamma(0)=\gamma(1)$.

7.6. Пример. а) Нека (X,ρ) е метрички простор и $x\in X$. Константниот пат $e_x:[0,1]\to X$ определен со $e_x(t)=x$, за секој $t\in[0,1]$ е затворен пат во X.

б) Во просторот $(\mathbf{R}^2,\rho_2)$ за патот $\gamma:[0,1]\to\mathbf{R}^2$ определен со

$$\gamma(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t),\ \ t\in[0,1]$$

имаме

$$\begin{aligned}\gamma(0)&=(\cos 2\pi\cdot 0,\sin 2\pi\cdot 0)=(\cos 0,\sin 0)=(1,0)\\&=(\cos 2\pi,\sin 2\pi)=(\cos 2\pi\cdot 1,\sin 2\pi\cdot 1)=\gamma(1),\end{aligned}$$

што значи дека γ е затворен пат во $\mathbf{R}^2$. ♦

7.7. Во метричкиот простор (X,ρ) фамилијата хомотопни класи затворени патишта кои ја содржат точката $x\in X$ ќе ја означуваме со $\mathrm{Hp}(X,x)$. Јасно, меѓу овие хомотопни класи патишта постои хомотопна класа чиј претставник е константниот пат e_x и која ја означуваме со $[[e_x]]$. Во натамошните разгледувања од овој параграф ќе докажеме, дека со помош на производот на патишта (лема 5.2 б)) во $\mathrm{Hp}(X,x)$ може да се воведе операција во однос на која $\mathrm{Hp}(X,x)$ е група со единица $[[e_x]]$.

7.8. Лема. Ако $[[\gamma]],[[\gamma']],[[\xi]],[[\xi']]\in\mathrm{Hp}(X,x)$ и

$$[[\gamma]]=[[\gamma']],\ [[\xi]]=[[\xi']],$$

тогаш $[[\gamma\cdot\xi]]=[[\gamma'\cdot\xi']]$.

Доказ. Според условот $[[\gamma]]=[[\gamma']]$, односно $\gamma\simeq\gamma'$, па затоа постои хомотопија $H:[0,1]^2\to X$ таква што

$$\begin{aligned}&H(s,0)=\gamma(s),\quad H(s,1)=\gamma'(s),\ \text{за секој } s\in[0,1],\\&H(0,t)=x=H(1,t),\ \text{за секој } t\in[0,1],\end{aligned}$$

Понатаму, од $[[\xi]]=[[\xi']]$ следува $\xi\simeq\xi'$, па затоа постои хомотопија $K:[0,1]^2\to X$ таква што

$$K(s,0)=\xi(s),\quad K(s,1)=\xi'(s),\ \text{за секој } s\in[0,1],$$
$$K(0,t)=x=K(1,t),\ \text{за секој } t\in[0,1],$$

Да ја разгледаме функцијата $L:[0,1]^2\to X$ определена со

$$L(s,t)=\begin{cases} H(2s,t), & s\in[0,\tfrac{1}{2}],\, t\in[0,1],\\ K(2s-1,t), & s\in[\tfrac{1}{2},1],\, t\in[0,1].\end{cases}$$

Функциите $H(2s,t)$ и $K(2s-1,t)$ се непрекинати на затворените множества

$$A=[0,\tfrac{1}{2}]\times[0,1] \text{ и } B=[\tfrac{1}{2},0]\times[0,1],$$

соодветно и на множеството $A\cap B=\{\tfrac{1}{2}\}\times[0,1]$ важи

$$H(2\bullet\tfrac{1}{2},t)=H(1,t)=x=K(0,t)=K(2\bullet\tfrac{1}{2}-1,t),$$

па од лема X 9.7 следува дека функцијата L е непрекината. Понатаму,

$$L(s,0)=\begin{cases} H(2s,0), & s\in[0,\tfrac{1}{2}],\\ K(2s-1,0), & s\in[\tfrac{1}{2},1],\end{cases}=\begin{cases} \gamma(2s), & s\in[0,\tfrac{1}{2}],\\ \xi(2s-1), & s\in[\tfrac{1}{2},1],\end{cases}=(\gamma\cdot\xi)(s),$$

за секој $s\in[0,1]$,

$$L(s,1)=\begin{cases} H(2s,1), & s\in[0,\tfrac{1}{2}],\\ K(2s-1,1), & s\in[\tfrac{1}{2},1],\end{cases}=\begin{cases} \gamma'(2s), & s\in[0,\tfrac{1}{2}],\\ \xi'(2s-1), & s\in[\tfrac{1}{2},1],\end{cases}=(\gamma'\cdot\xi')(s),$$

за секој $s\in[0,1]$,

$$L(0,t)=H(0,t)=x=K(1,t)=L(1,t),$$

за секој $t\in[0,1]$, што значи L е хомотопија од патот $\gamma\cdot\xi$ на патот $\gamma'\cdot\xi'$, т.е. $[[\gamma\cdot\xi]]=[[\gamma'\cdot\xi']]$. ♦

7.9. Лема. Нека (X,ρ) е метрички простор и $x\in X$. Тогаш $(\mathrm{Hp}(X,x),\cdot)$, каде

$$[[\gamma]]\cdot[[\xi]]=[[\gamma\cdot\xi]],\ \text{за секои } [[\gamma]],[[\xi]]\in \mathrm{Hp}(X,x)$$

е групоид.

Доказ. Непосредно следува од лема 7.8. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

7.10. Лема. $[[\gamma]]\cdot[[e_x]]=[[e_x]]\cdot[[\gamma]]=[[\gamma]]$, за секој $[[\gamma]]\in \mathrm{Hp}(X,x)$.

Доказ. Ќе докажеме, дека

$$[[\gamma\cdot e_x]]=[[\gamma]]\cdot[[e_x]]=[[\gamma]]. \tag{1}$$

Според лема 5.2 б) имаме

$$(\gamma\cdot e_x)(\tau)=\begin{cases}\gamma(2\tau), & \tau\in[0,\frac{1}{2}],\\ e_x(2\tau-1)=x, & \tau\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Да ја разгледаме функцијата $H:[0,1]^2\to X$ определена со

$$H(s,t)=\begin{cases}\gamma(\frac{2s}{t+1}), & s,t\in[0,1] \text{ и } t\geq 2s-1,\\ e_x(2s-1), & s,t\in[0,1] \text{ и } t\leq 2s-1.\end{cases}$$

Функциите $\gamma(\frac{2s}{t+1})$ и $e_x(2s-1)$ се непрекинати на затворените множества

$$A=\{(s,t)\,|\,s,t\in[0,1] \text{ и } t\geq 2s-1\} \text{ и } B=\{(s,t)\,|\,s,t\in[0,1] \text{ и } t\leq 2s-1\},$$

соодветно и на множеството $A\cap B=\{(s,t)\,|\,s,t\in[0,1] \text{ и } t=2s-1\}$ важи

$$\gamma(\tfrac{2s}{2s-1+1})=\gamma(1)=x=e_x(2s-1),$$

па од лема X 9.7 следува дека функцијата H е непрекината. Понатаму, ако $t=1$, тогаш $t\geq 2s-1$, па затоа $H(s,1)=\gamma(\frac{2s}{1+1})=\gamma(s)$, за секој $s\in[0,1]$. Ако $t=0$, тогаш за $s\in[0,\frac{1}{2}]$ имаме $t\geq 2s-1$, па затоа

$$H(s,0)=\gamma(\tfrac{2s}{0+1})=\gamma(2s)=(\gamma\cdot e_x)(s),$$

за $s\in[0,\frac{1}{2}]$, а за $s\in[\frac{1}{2},1]$ имаме $t\leq 2s-1$, па затоа

$$H(s,0)=e_x(2s-1)=(\gamma\cdot e_x)(s),$$

за $s\in[\frac{1}{2},1]$. Конечно, од претходно изнесеното и од

$$H(0,t)=\gamma(0)=x=e_x(1)=H(1,t),$$

за $t\in[0,1]$ следува дека H е хомотопија од патот $\gamma\cdot e_x$ на патот γ, т.е. точно е равенството (1).

Аналогно се докажува равенството $[[e_x\cdot\gamma]]=[[e_x]]\cdot[[\gamma]]=[[\gamma]]$, со тоа што треба даземеме предвид дека

$$(e_x\cdot\gamma)(\tau)=\begin{cases}e_x(2\tau)=x, & \tau\in[0,\frac{1}{2}],\\ \gamma(2\tau-1), & \tau\in[\frac{1}{2},1],\end{cases}$$

и да докажеме, дека функцијата $K:[0,1]^2\to X$ определена со

$$K(s,t)=\begin{cases}e_x(2\tau), & s,t\in[0,1] \text{ и } t\geq 2s,\\ \gamma(\frac{2s-t}{2-t}), & s,t\in[0,1] \text{ и } t\leq 2s,\end{cases}$$

е хомотопија од патот $e_x\cdot\gamma$ на патот γ. ♦

7.11. Во лема 5.2 а) докажевме дека за секој пат $\gamma:[0,1]\to X$ со почеток x_0 и крај x_1, тогаш $\gamma_1:[0,1]\to X$, каде $\gamma_1(t)=\gamma(1-t)$, за секој $t\in[0,1]$, е пат со почеток x_1 и крај x_0. Во натамошните разгледувања патот γ_1 ќе го означуваме со γ^*. Јасно, ако патот γ е затворен и ја содржи точката $x\in X$, тогаш и патот γ^* е затворен и ја содржи точката $x\in X$.

7.12. Лема. За секој $[[\gamma]]\in \mathrm{Hp}(X,x)$ е исполнето

$$[[\gamma]]\cdot[[\gamma^*]]=[[\gamma^*]]\cdot[[\gamma]]=[[e_x]].$$

Доказ. Ќе докажеме, дека

$$[[\gamma\cdot\gamma^*]]=[[\gamma]]\cdot[[\gamma^*]]=[[e_x]]. \tag{2}$$

Според лема 5.2 б) имаме

$$(\gamma\cdot\gamma^*)(t)=\begin{cases}\gamma(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}],\\ \gamma^*(2t-1)=\gamma(2-2t), & t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Да ја разгледаме функцијата $H:[0,1]^2\to X$ определена со

$$H(s,t)=\begin{cases}\gamma(2s-2st), & t\in[0,1] \text{ и } s\in[0,\frac{1}{2}],\\ \gamma(2-2s-2t+2st), & t\in[0,1] \text{ и } s\in[\frac{1}{2},1].\end{cases} \tag{3}$$

Функциите $\gamma(2s-2st)$ и $\gamma(2-2s-2t+2st)$ се непрекинати на затворените множества $A=\{(s,t)\,|\,t\in[0,1] \text{ и } s\in[0,\frac{1}{2}]\}$ и $B=\{(s,t)\,|\,t\in[0,1] \text{ и } s\in[\frac{1}{2},1]\}$ и на множеството $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}\times[0,1]$ важи

$$\gamma(2s-2st)=\gamma(2\bullet\tfrac{1}{2}-2t\bullet\tfrac{1}{2})=\gamma(1-t)=\gamma(2-2t-2\bullet\tfrac{1}{2}+2t\bullet\tfrac{1}{2})=\gamma(2-2s-2t+2st),$$

па од лема X 9.7 следува дека функцијата H е непрекината. Понатаму, ако во (3) последователно ставиме $t=0, t=1, s=0$ и $s=1$ добиваме

$$H(s,0)=(\gamma\cdot\gamma^*)(s),\quad H(s,1)=\gamma(0)=e_x(s), \text{ за секој } s\in[0,1],$$

$$H(0,t)=H(1,t)=\gamma(0)=x, \text{ за секој } t\in[0,1],$$

односно H е хомотопија од патот $\gamma\cdot\gamma^*$ на патот e_x, т.е. точно е равенството (2).

Равенството $[[\gamma^*]]\cdot[[\gamma]]=[[e_x]]$ се докажува аналогно, при што доволно е само да ги замениме местата на патиштата γ и γ^*. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

7.13. Лема. За секои $[[\gamma]],[[\xi]],[[\zeta]]\in \mathrm{Hp}(X,x)$ важи

$$([[\gamma]]\cdot[[\xi]])\cdot[[\zeta]]=[[\gamma]]\cdot([[\xi]]\cdot[[\zeta]]). \tag{4}$$

Доказ. Прво да забележиме дека од лема 5.2 б) следува дека

$$((\gamma\cdot\xi)\cdot\zeta)(t)=\begin{cases}\gamma(4t), & t\in[0,\frac{1}{4}],\\ \xi(4t-1), & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],\\ \zeta(2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1],\end{cases} \text{ и } \quad (\gamma\cdot(\xi\cdot\zeta))(t)=\begin{cases}\gamma(2t), & t\in[0,\frac{1}{2}],\\ \xi(4t-2), & t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}],\\ \zeta(4t-3), & t\in[\frac{3}{4},1].\end{cases}$$

За да докажеме дека $(\gamma\cdot\xi)\cdot\zeta\simeq\gamma\cdot(\xi\cdot\zeta)$ множеството во $[0,1]^2$ ќе ги разгледаме затворените множества

$$A=\{(s,t)\,|\,t\in[0,1],\, s\in[0,\tfrac{t+1}{4}]\},$$
$$B=\{(s,t)\,|\,t\in[0,1],\, s\in[\tfrac{t+1}{4},\tfrac{t+2}{4}]\} \text{ и}$$
$$C=\{(s,t)\,|\,t\in[0,1],\, s\in[\tfrac{t+2}{4},1]\}$$

и ќе ја разгледаме функцијата $H:[0,1]^2\to X$ определена со:

$$H(s,t)=\begin{cases}\gamma(\frac{4s}{t+1}), & (s,t)\in A,\\ \xi(4s-t-1), & (s,t)\in B,\\ \zeta(\frac{4s-t-2}{2-t}), & (s,t)\in C.\end{cases} \tag{5}$$

Функциите $\gamma(\frac{4s}{t+1})$ и $\xi(4s-t-1)$ се непрекинати на затворените множества A и B и на множеството $A\cap B=\{(s,t)\,|\,t\in[0,1],\, s=\frac{t+1}{4}\}$ важи

$$\gamma(\tfrac{4s}{t+1})=\gamma(1)=x=\xi(0)=\xi(4s-t-1),$$

а функциите $\xi(4s-t-1)$ и $\zeta(\frac{4s-t-2}{2-t})$ се непрекинати на затворените множества B и C и на множеството $B\cap C=\{(s,t)\,|\,t\in[0,1],\, s=\frac{t+2}{4}\}$ важи

$$\xi(4s-t-1)=\xi(1)=x=\zeta(0)=\zeta(\tfrac{4s-t-2}{2-t})$$

па ако двапати ја примениме лема X 9.7 добиваме дека функцијата H е непрекината на $A\cup B\cup C=[0,1]^2$. Понатаму, ако во (5) последователно ставиме $t=0, t=1, s=0$ и $s=1$ добиваме

$$H(s,0)=((\gamma\cdot\xi)\cdot\zeta)(s),\quad H(s,1)=(\gamma\cdot(\xi\cdot\zeta))(s), \text{ за секој } s\in[0,1],$$
$$H(0,t)=\gamma(0)=x=\zeta(1)=H(1,t), \text{ за секој } t\in[0,1],$$

односно H е хомотопија од патот $(\gamma\cdot\xi)\cdot\zeta$ на патот $\gamma\cdot(\xi\cdot\zeta)$, т.е. точно е равенството (4). ♦

7.14. Последица. Нека (X,ρ) е метрички простор и $x\in X$. Тогаш $(\mathrm{Hp}(X,x),\cdot)$ е група, која ја нарекуваме *фундаментална група*.

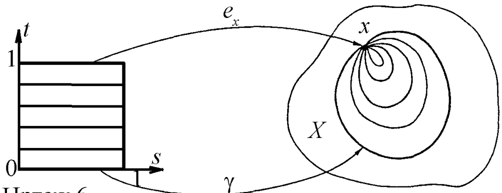
Доказ. Непосредно следува од лемите 7.9, 7.10, 7.12 и 7.13. ♦

8. ЕДНОСТАВНО СВРЗАНИ ПРОСТОРИ

8.1. Дефиниција. Метричкиот простор (X,ρ) го нарекуваме *едноставно сврзан* ако за секоја точка $x \in X$ постои само една класа затворени патишта кои ја содржат точката x.

8.2. Лема. Метричкиот простор (X,ρ) е едноставно сврзан ако и само ако $\mathrm{Hp}(X,x)=\{[[e_x]]\}$, за секој $x \in X$.

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 8.1. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦



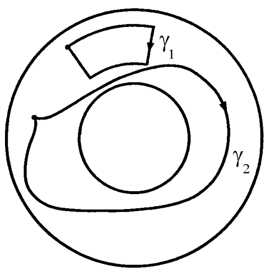
Цртеж 6

8.3. Од лема 8.2 непосредно следува дека за секој затворен пат γ кој ја содржи точката x постои хомотопија $H:[0,1]^2 \to X$ која патот γ непрекинато го деформира во константниот пат e_x, цртеж 6.

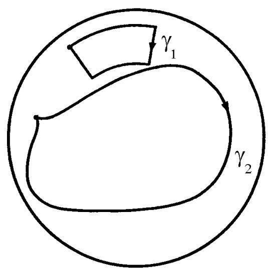
8.4. Пример. а) Нека

$$X=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2 \mid \tfrac{1}{2}\le \rho_2(\mathbf{x},\mathbf{o})\le 2\}.$$

Тогаш, може да се докаже дека метричкиот простор (X,ρ_2) не е едноставно сврзан, бидејќи на пример затворениот пат γ_1 е хомотопен на константен пат (цртеж 7 а)), но затворениот пат γ_2 не е хомотопен на константен пат.



Цртеж 7 а)



Цртеж 7 б)

б) Нека

$$Y=\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2 \mid \rho_2(\mathbf{x},\mathbf{o})\le 2\}.$$

Тогаш, може да се докаже дека метричкиот простор (Y,ρ_2) е едноставно сврзан, бидејќи секој затворен пат γ во Y (цртеж 7 б)) е хомотопен со константен пат. ♦

8.5. Теорема. Нека метричкиот простор (X,ρ) е сврзан со патишта и нека $x \in X$. Тогаш X е едноставно сврзан ако и само ако постои точно една хомотопна класа затворени патишта кои ја содржат точката x.

Доказ. Доволно е да се споредат хомотопните класи затворени патишта на различните точки од X. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

9. ЗАДАЧИ

1. Нека $X_\alpha, \alpha \in A$ е фамилија сврзани множества во просторот (X,ρ) такви што секој X_α го сече сврзаното во X множество Z. Докажете, дека множеството $Z\bigcup(\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha)$ е сврзано.

2. Нека $f:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ е функција со својство: за секое сврзано множество $A\subseteq \mathbf{R}^m$ множествата $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ се сврзани. Докажете, дека функцијата f е непрекината.

3. Нека $f:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ е биекција со својство: за секое сврзано множество $A\subseteq \mathbf{R}^m$ и множеството $f(A)$ е сврзано, а за секое несврзано множество $B\subseteq \mathbf{R}^m$ и множеството $f(B)$ е несврзано. Докажете, дека f е хомеоморфизам

4. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $f:X\to Y$ е хомеоморфизам. Докажете, дека f е биекција меѓу компонентите на сврзаност на просторот X и компонентите на сврзаност на просторот Y.

5. Нека (X,ρ) е метрички простор и $f:X\to\mathbf{R}$. За функцијата f ќе велиме дека е *локално константна* ако за секој $x\in X$ постои отворено множество U кое ја содржи x и такво што функцијата $f_{|U}$ е константна. Ако просторот X е сврзан, тогаш секоја локално константна функција е константна функција. Докажете!

6. Нека $X=[0,1)\cup\{2\}\subset\mathbf{R}$, $Y=[0,1]\subset\mathbf{R}$ и нека функцијата $f:X\to Y$ е определена со
$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1), \\ 2, & x=1. \end{cases}$$
Докажете, дека f е непрекината биекција, но не е хомеоморфизам.

7. За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *локално сврзан во точката* $x_0\in X$ ако за секое отворено множество U кое ја содржи точката x_0 постои сврзано отворено множество V такво, што $x_0\in V\subseteq U$. Просторот X е *локално сврзан* ако е локално сврзан во секоја точка $x_0\in X$. Секој отворен потпростор на локално сврзан метрички простор (X,ρ) е локално сврзан. Докажете!

8. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ е определена со
$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\in 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Докажете ги следниве тврдења:

1) множеството $\Gamma(f)=\{(x,f(x)\,|\,x\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{R}^2$ е сврзано,
2) множеството $\Gamma(f)$ не е локално сврзано во точката $\mathbf{o}=(0,0)$,
3) множеството $\Gamma(f)$ не е сврзано со патишта.

9. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и функцијата $f:X\to Y$ е непрекината.
   1) Ако просторот X е сврзан, тогаш множеството
   $$\Gamma(f)=\{(x,f(x)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}\subseteq X\times Y$$
   е сврзано во $X\times Y$. Докажете!
   2) Ако X е континиум, тогаш $\Gamma(f)$ е континиум. Докажете!

10. Ако просторот (X,ρ) е локално сврзан во точката a, тогаш a е внатрешна точка за компонентата на сврзаност C_a. Докажете!

11. Нека (X,ρ) е сврзан ограничен метрички простор. За секој пар точки $x,y\in X$ со $\Psi_{x,y}$ да ја означиме фамилијата од сите сврзани множества $C\subseteq X$ за кои $x,y\in C$. Нека $d(x,y)=\inf\{d(C)\,|\,C\in\Psi_{x,y}\}$. Докажете:
    1) функцијата d е метрика на X.
    2) За секои $x,y\in X$ важи $\rho(x,y)\le d(x,y)$.
    3) Ако просторот (X,ρ) е локално сврзан, тогаш метриките ρ и d се еквивалентни.

12. Нека (X,ρ) е комплетен метрички простор со конвексна метрика ρ. Докажете дека X е локално сврзан.

13. Нека (X,ρ) е метрички простор. Следниве тврдења се еквивалентни:
    а) X е локално сврзан.
    б) Сврзаните отворени множества во просторот X формираат база на X.

14. Нека (X,ρ) и (Y,d) се локално сврзани метрички простори. Докажете, дека Декартовиот производ $Z=X\times Y$ е локално сврзан простор.

15. Докажете дека Хилбертовиот квадар I^∞ е сврзан со патишта.

16. Нека (X,ρ) е метрички простор. Ако множествата A и B се сврзани со патишта и $A\cap B\neq\varnothing$, тогаш множеството $A\cup B$ е сврзано со патишта. Докажете!

17. За метричкиот простор (X,ρ) ќе велиме дека е *локално сврзан со патишта во точката* $x_0\in X$ ако за секое отворено множество U кое ја содржи точката x_0 постои отворено со патишта сврзано множество V такво, што $x_0\in V\subseteq U$. Просторот X е *локално сврзан со патишта* ако е локално сврзан со патишта во секоја точка $x_0\in X$. Докажете, дека ако просторот X е

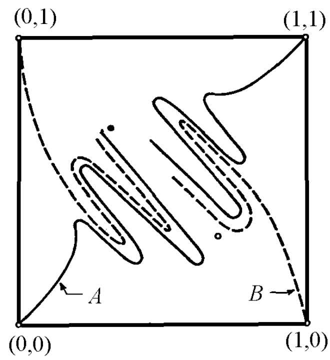
локално сврзан со патишта во точката $x_0 \in X$, тогаш x_0 е внатрешна точка за пат компонентата PC_x.

18. Ако просторот (X,ρ) е локално сврзан со патишта во точката $x_0 \in X$, тогаш тој е локално сврзан во точката x_0. Докажете!

19. Нека просторот (X,ρ) е локално сврзан со патишта. Докажете дека пат компонентата PC_x е истовремено и отворено и затворено множество во X, т.е. дека $PC_x = C_x$.

20. Нека (X,ρ) е метрички простор. Следниве тврдења се еквивалентни:
    1) X е сврзан со патишта.
    2) Сврзаните со патишта отворени множества во просторот X формираат база на X.

21. Нека $I^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{R},\ |x| \le 1, |y| \le 1\}$. Докажете, дека постојат дисјунктни сврзани множества $A,B \subseteq I^2$ такви што $(0,0),(1,1) \in A$ и $(1,0),(0,1) \in B$ (цртеж 8).



Цртеж 8

22. Нека (X,ρ) е измерлив лак. Докажете, дека метриката ρ е еквивалентна на придружената должинска метрика $\tilde{\rho}$.

23. Нека ρ и d се еквивалентни метрики на множеството X. Докажете, дека:
    1) патот γ е измерлив во метриката ρ ако и само ако е измерлив во метриката d,
    2) придружените должински метрики $\tilde{\rho}$ и $\tilde{d}$ на ρ и d, соодветно, се еквивалентни.

24. Нека $Y = (\mathbf{C}([0,1]), \rho_p), 1 \le p \le \infty$. Функцијата $\gamma : [0,1] \to Y$ е определена со: $\gamma(t) = f_t$, за секој $t \in [0,1]$, каде $f_t(x) = x^t$, за секој $x \in [0,1]$. Дали за некој p функцијата γ е измерлив пат во Y? Пресметајте ја должината на тој пат за $p = 1$.

25. Конструирајте пат γ во просторот $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ таков што $\gamma([0,1]) = [0,1]^2$. Дали за секој $m \in \mathbf{N}$ постои пат γ во $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ таков што $\gamma([0,1]) = [0,1]^m$? Дали за секој $m \in \mathbf{N}$ постои пат γ во $(\mathbf{R}^m, \rho_2)$ таков што $\gamma([0,1]) = \mathbf{R}^m$?

26. Докажете, дека пат γ во $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ таков што $\gamma([0,1])$ е полн квадрат не е измерлив. Користејќи го ова тврдење докажете, дека секој измерлив пат во $\mathbf{R}^2$ е никаде густо множество.

27. Во метричкиот простор $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$ дефинираме множество многуаголници T_i, $i = 0,1,2,...$ на следниов начин:

   1) T_0 е рамностран триаголник со темиња во точките $(0,0), (1,0)$ и $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

   2) многуаголникот T_{i+1} го добиваме така што секоја страна на многуаголникот T_i ја делиме на три еднакви делови и средниот дел го заменуваме со рамностран триаголник кој го конструираме од надворешната страна.

   Докажете, дека за секој $i = 0,1,2,...$ многуаголникот T_i има $4 \bullet 3^i$ страници. За секој $i = 0,1,2,...$ интервалот $[0,1]$ го делиме на $4 \bullet 3^i$ подинтервали и дефинираме функција $\gamma_i : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ таква што $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = (0,0)$ и последователно секој интервал од направената поделба на $[0,1]$ линеарно го пресликуваме на соодветната страна на многуаголникот одејќи од точката $(0,0)$ во обратна насока од насоката на стрелката на часовникот. Докажете, дека низата $\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}$ е Кошиева во просторот $\mathbf{C}([0,1], \mathbf{R}^2)$ и дека истата конвергира кон пат γ во $(\mathbf{R}^2, \rho_2)$. Докажете, дека $l(\gamma) = \infty$.

28. Нека (X, ρ) и (Y, d) се метрички простори и $f : X \to Y$ е непрекината функција, $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0$. Нека γ и γ' се затворени патишта кои ја содржат точката x_0.

   1) Докажете, дека $f \circ \gamma \simeq f \circ \gamma'$ ако и само ако $\gamma \simeq \gamma'$.

   2) Докажете, дека функцијата $f^* : \mathrm{Hp}(X, x_0) \to \mathrm{Hp}(Y, y_0)$ определена со
   $$f^*([[\gamma]]) = [[f \circ \gamma]], \text{ за секој } [[\gamma]] \in \mathrm{Hp}(X, x_0)$$
   е хомоморфизам.

29. Нека (X, ρ) е метрички простор, γ е пат во X таков што $x = \gamma(0)$ и $y = \gamma(1)$ и ξ е затворен пат кој ја содржи точката y.

   1) Докажете, дека функцијата $\xi_\gamma : [0,1] \to X$ определена со
   $$\xi_\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(3t), & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ \xi(3t-1), & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \gamma(3-3t), & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$
   е затворен пат во X.

   2) Докажете, дека ако $[[\xi]] = [[\xi']] \in \mathrm{Hp}(X, y)$, тогаш
   $$[[\xi_\gamma]] = [[\xi'_\gamma]] \in \mathrm{Hp}(X, x).$$

3) Докажете, дека ако γ и γ' се хомотопни патишта такви што $\gamma(0) = \gamma'(0) = x$ и $\gamma(1) = \gamma'(1) = y$, тогаш за секој $[[\xi]] \in \mathrm{Hp}(X, y)$ важи $[[\xi_\gamma]] = [[\xi_{\gamma'}]]$.

4) Докажете, дека функцијата $f_\gamma : \mathrm{Hp}(X, y) \to \mathrm{Hp}(X, x)$ определена со

$$f_\gamma([[\xi]]) = [[\xi_\gamma]],\text{ за секој } [[\xi]] \in \mathrm{Hp}(X, y)$$

е хомоморфизам и ако $\gamma \simeq \gamma'$, тогаш $f_\gamma = f_{\gamma'}$.

5) Докажете, дека функциите

$$f_\gamma : \mathrm{Hp}(X, y) \to \mathrm{Hp}(X, x) \text{ и } f_{\gamma^*} : \mathrm{Hp}(X, x) \to \mathrm{Hp}(X, y),$$

каде γ^* е спротивниот пат на γ, се заемно инверзни функции.

30. Нека (X, ρ) е метрички простор. Докажете, дека $(\mathrm{Hp}(X, x), \cdot) = (\mathrm{Hp}(C_X, x), \cdot)$, за секој $x \in X$.

31. Докажете, дека производ на едноставно сврзани простори е едноставно сврзан простор.

XV ГЛАВА

ФУНКЦИОНАЛНИ ПРОСТОРИ

1. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ. ТЕОРЕМА НА ДИНИ

1.1. Во глава VII ги разгледавме функционалните низи и редови определени на множество $D \subset \mathbf{R}$. Како што претходно рековме еден од најважните случаи на функции е кога (X, ρ) е метрички простор, $Y = \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$, реални функции зададени на подмножество A од метричкиот простор X. Во овој дел ќе се осврнеме на овие функции и ќе дадеме генерализација на некои резултати од глава VII.

Дефиниција. Нека T е произволно множество и нека за секој природен број n е дефинирана реална функција $f_n : T \to \mathbf{R}$. Тогаш ќе велиме дека на множеството T е определена *низа реални функции* (*функционална низа*)

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1}$$

1.2. Забелешка. Јасно, за фиксиран $x_0 \in T$ со низата (1) е зададена бројна низа

$$\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{2}$$

која може да биде конвергентна или дивергентна, па затоа има смисла да се разгледува конвергентност на низата (1).

1.3. Дефиниција. За функцијата $f : T \to \mathbf{R}$ ќе велиме дека е *ограничена на множеството* T ако постои реален број $M > 0$ таков што за секој $x \in T$ важи $|f(x)| \le M$.

За низата (1) ќе велиме дека е *рамномерно ограничена* на множеството T, ако постои реален број $M > 0$ таков што за секој $x \in T$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $|f_n(x)| \le M$. Всушност, низата (1) е рамномерно ограничена ако и само ако фамилијата функции $\mathcal{A} = \{f_i \mid i = 1, 2, 3, ...\}$ е рамномерно ограничена (види дефиниција XIII 6.1)

1.4. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека *монотоно опаѓа* (*монотоно расте*) на множеството T, ако за секој $x \in T$ и за секој $n \in \mathbf{N}$ се исполнети неравенствата $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$, (соодветно $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$). За низата (1) ќе велиме дека е *монотона* на множеството T ако монотоно расте или монотоно опаѓа на множеството T.

1.5. Дефиниција. За низата (1) ќе велиме дека *конвергира во точката* $x_0 \in T$, ако бројната низа (2) конвергира.

За низата (1) ќе велиме дека *конвергира на множеството* $A \subseteq T$, ако таа конвергира во секоја точка $x \in A \subseteq T$. Притоа, за функцијата $f: T \to \mathbf{R}$ определена со

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in A \tag{3}$$

ќе велиме дека е граница на низата (1) на множеството A, т.е. дека низата (1) на множеството A *обично конвергира кон функцијата* $f(x)$, (*конвергира по точки*).

1.6. Коментар. Ако ја земеме предвид дефиницијата за конвергенција на низа реални броеви, тогаш обичната конвергенција на низата (1) кон функцијата f на множеството T може да се искаже во следниов еквивалентен вид:

Низата функции (1) *обично конвергира кон функцијата* f *ако и само ако за секој* $x \in T$ *и за секој* $\varepsilon > 0$ *постои* $n_0 \in \mathbf{N}$ *таков што за секој* $n > n_0$ *важи* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

1.7. Дефиниција. Нека функцијата f и низата функции (1) се определени на множеството T. За низата (1) ќе велиме дека *рамномерно конвергира кон функцијата* f *на множеството* T, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секој $n > n_0$ важи

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ за секој } x \in T. \tag{4}$$

1.8. Коментар. Како и во претходниот случај, условот за рамномерна конвергенција може да се искаже во следниов еквивалентен вид:

Низата функции (1) *рамномерно конвергира кон функцијата* f *ако и само ако за секој* $\varepsilon > 0$ *постои* $n_0 \in \mathbf{N}$ *таков што за секој* $x \in T$ *и за секој* $n > n_0$ *важи* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Забележуваме дека, како и кај функционалните низи кои ги разгледувавме во глава VII и овде разликата меѓу обичната и рамномерната конвергенција е во тоа што кај обичната конвергенција изборот на природниот број n_0 зависи од точката x и бројот ε, а додека кај рамномерната конвергенција изборот на n_0 зависи само од ε.

Понатаму, лесно се гледа дека ако низата (1) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството T, тогаш таа конвергира и обично кон f на T. Меѓутоа, во пример VII 2.3 видовме дека обратното тврдење не важи.

Овде да забележиме дека за рамномерно конвергентни низи функции над исто множество T можат да се докажат тврдења кои се аналогни на лемите VII 2.4 и 2.5, теоремите VII 2.7 и 2.8 и последица VII 2.9. На читателот му препорачуваме самостојно да ги формулира и докаже овие тврдења.

1.9. Во теорема VII 2.11 го разгледувавме прашањето за непрекинатост на границата на рамномерно конвергентна низа непрекинати функции на множество

$D \subset \mathbf{R}$ и докажавме дека во случајот границата е непрекината функција. Природно е да се запрашаме, дали аналоген резултат важи во случај кога множеството T е подмножество од метрички простор (X,ρ)? Одговор на ова прашање е позитивен, т.е. важи следнава теорема.

Теорема. Нека (X,ρ) е метрички простор и (1) е низа реални функции $f_n : X \to \mathbf{R}$ која рамномерно конвергира кон функцијата $f : X \to \mathbf{R}$. Ако секоја од функциите f_n е непрекината во точката $x_0 \in X$, тогаш и функцијата f е непрекината во точката x_0. Ако секоја од функциите f_n е непрекината на множеството $A \subseteq X$, тогаш и функцијата f е непрекината на множеството A.

Доказ. Доказот е аналоген на доказот на теорема VII 2.11. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

1.10. Како што рековме од рамномерната конвергенција на низата (1) следува нејзината обична конвергенција, но обратното не важи. Затоа, од посебен интерес е кога важи обратното, т.е. кога од обичната конверегенција на низата (1) следува нејзината рамномерна конвергенција. Еден од позабележителните резултати во оваа насока е познатата теорема на Дини, која ќе ја докажеме во случај на компактен метрички простор.

Теорема (Дини). Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и нека $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е низа непрекинати функции $f_n : X \to \mathbf{R}$ која обично конвергира кон функцијата $f : X \to \mathbf{R}$. Ако за секој $x \in X$ низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона и функцијата f е непрекината, тогаш $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон f.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте, т.е. дека за секој $x \in X$ за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Од $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),$ за секој $x \in X$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_x \in \mathbf{N}$ таков што

$$0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) < \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Функциите f и f_{n_x} се непрекинати во точката x, па затоа постои $\delta_x > 0$ таков што за секој $y \in X$ за кој $\rho(x,y) < \delta_x$ важи

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ и} \tag{6}$$

$$|f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Понатаму, од неравенствата (5), (6) и (7) добиваме

$$f(y) - f_{n_x}(y) = |f(y) - f_{n_x}(y)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \varepsilon \tag{8}$$

Меѓутоа, по претпоставка низата $\{f_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно расте, па од (10) следува дека за секој $n > n_x$ и за секој $y \in X$ за кој $\rho(x,y) < \delta_x$ важи

$$| f(y)-f_n(y) |= f(y)-f_n(y) \le f(y)-f_{n_x}(y) < \varepsilon . \qquad (9)$$

За секој $x \in X$ наоѓаме $\delta_x > 0$ таков, што важи (9). Фамилијата

$$\{B(x;\delta_x) \mid x \in X\}$$

е отворена покривка на X. Но, X е компактен метрички простор, па затоа оваа фамилија содржи конечна подпокривка

$$\{B(x_i;\delta_{x_i}) \mid i = 1,2,...,k\} .$$

Нека $n_0 = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, ..., n_{x_k}\}$. Ќе докажеме дека од $n > n_0$ следува

$$| f_n(t) - f(t) |< \varepsilon \text{, за секој } t \in X . \qquad (10)$$

Навистина, за секоја точка $t \in X$ постои $i \in \{1,2,...,k\}$ таков, што $t \in B(x_i;\delta_{x_i})$, т.е. $\rho(x_i,t) < \delta_{x_i}$. Притоа, ако $n > n_0$, тогаш $n > n_{x_i}$, па од (9) следува (10), што значи низата функции $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата f. ♦

2. ТЕОРЕМА НА БЕР

2.1. Во теорема 1.9 видовме дека во случај на рамномерна конвергенција на низа непрекинати реални функции $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ дефинирани на произволен метрички простор (X,ρ) границата е непрекината функција $f : X \to \mathbf{R}$. Меѓутоа, ако конвергенцијата е обична, тогаш како што покажува пример VII 1.7 границата на низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ не мора да биде непрекината функција. Забележуваме дека во наведениот пример граничната функција има прекин во точката $x = 0$. Логично е да се запрашаме, дали при обичната конвергенција на низа непрекинати функции $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ може да се даде определена карактеризација на множеството точки на прекин на граничната функција f. Следнава теорема дава одговор на поставеното прашање.

2.2. Теорема (Бер). Ако (X,ρ) е метрички простор и $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е низа непрекинати функции $f_n : X \to \mathbf{R}$ која конвергира обично кон функцијата $f : X \to \mathbf{R}$, тогаш множеството точки на прекин A на функцијата f е множество од прва категорија.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Да ги разгледаме множествата

$$F_m(\varepsilon) = \{x \in X \mid | f_m(x) - f_{m+k}(x) |\le \varepsilon, k \in \mathbf{N}\} ,$$

$$A_m(\varepsilon) = \{x \in X \mid | f(x) - f_m(x) |\le \varepsilon\} \text{ и } G(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^0(\varepsilon) ,$$

каде $A_m^0(\varepsilon)$ е внатрешноста на множеството $A_m(\varepsilon)$.

Чекор 1. Ќе докажеме дека $G = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} G(\frac{1}{n})$ е множеството точки во кои функцијата f е непрекината.

Нека функцијата f е непрекината во точката x_0. Низата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира обично кон функцијата f, па затоа постои $m \in \mathbf{N}$ таков што

$$| f_m(x_0) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{1}$$

Понатаму, функциите f и f_n се непрекинати во точката x_0, па затоа постои $\delta > 0$ таков што од $x \in B(x_0;\delta)$ следува

$$| f(x) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } | f_m(x) - f_m(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека за секој $x \in B(x_0;\delta)$ важи

$$| f(x) - f_m(x) | \leq | f(x) - f(x_0) | + | f(x_0) - f_m(x_0) | + | f_m(x_0) - f_m(x) | < \varepsilon ,$$

што значи $B(x_0;\delta) \subseteq A_m(\varepsilon)$. Според тоа, $x_0 \in A_m^0(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$. Но, $\varepsilon > 0$ е произволен број, па затоа $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} G(\frac{1}{n})$.

Нека $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} G(\frac{1}{n})$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Нека n_0 е таков што $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$. Од $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} G(\frac{1}{n})$ следува дека за најденото n_0 важи $x_0 \in G(\frac{1}{n_0}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^0(\frac{1}{n_0})$, па затоа постои m таков, што $x_0 \in A_m^0(\frac{1}{n_0})$. Според тоа, постојат m и $\delta_1 > 0$ такви што за секој $x \in B(x_0;\delta_1)$ важи

$$| f_m(x) - f(x) | \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Но, f_m е непрекината во точката x_0, па затоа постои $\delta_2 > 0$ таков што за секој $x \in B(x_0;\delta_2)$ важи

$$| f_m(x) - f_m(x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Ако земеме $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогаш од претходните неравенства следува

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon , \text{ за секој } x \in B(x_0;\delta) ,$$

т.е. функцијата f е непрекината во точката x_0.

Чекор 2. Ќе докажеме дека за секој $\varepsilon > 0$ и за секој m множеството $F_m(\varepsilon)$ е затворено.

Навистина, за секои $m, k \in \mathbf{N}$ функциите

$$g_1(x) = | f_m(x) - f_{m+k}(x) | \text{ и } g_2(x) = \varepsilon$$

се непрекинати, па од теорема 12.20 следува дека за секои $m,k\in\mathbf{N}$ множеството

$$F_{mk}(\varepsilon)=\{x\in X \mid |f_m(x)-f_{m+k}(x)|\le\varepsilon\}$$

е затворено. Но, тоа значи дека за секој m множеството

$$\begin{aligned}\bigcap_{k\in\mathbf{N}} F_{mk}(\varepsilon) &= \bigcap_{k\in\mathbf{N}} \{x\in X \mid |f_m(x)-f_{m+k}(x)|\le\varepsilon\}\\ &=\{x\in X \mid |f_m(x)-f_{m+k}(x)|\le\varepsilon,\, k\in\mathbf{N}\}=F_m(\varepsilon)\end{aligned}$$

е затворено.

Чекор 3. Ќе докажеме дека за секој $\varepsilon>0$ важи $X=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)$.

Јасно, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)\subseteq X$. Нека, $x\in X$. Тогаш, од $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ следува дека реалната низа $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, па затоа постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секој $m>n_0$ и за секој $k\in\mathbf{N}$ важи $|f_m(x)-f_{m+k}(x)|<\varepsilon$. Според тоа, ако избереме $m_0>n_0$ добиваме

$$|f_{m_0}(x)-f_{m_0+k}(x)|<\varepsilon \text{, за секој } k\in\mathbf{N}\,,$$

па затоа $x\in F_{m_0}(\varepsilon)\subseteq\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)$, т.е. $X\subseteq\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon)$.

Чекор 4. Ќе докажеме дека за секој $\varepsilon>0$ множеството $X\setminus G(\varepsilon)$ е множество од прва категорија.

Нека $x\in F_m(\varepsilon)$. Тоа значи $|f_m(x)-f_{m+k}(x)|<\varepsilon$, за секој $k\in\mathbf{N}$. Ако во последното неравенство земеме $k\to\infty$ добиваме $|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$, што значи $x\in A_m(\varepsilon)$. Според тоа, $F_m(\varepsilon)\subseteq A_m(\varepsilon)$, па од теорема IX 7.14 следува $F_m^0(\varepsilon)\subseteq A_m^0(\varepsilon)$. Значи,

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m^0(\varepsilon)\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m^0(\varepsilon)=G(\varepsilon)\,.$$

Во чекор 2 докажавме дека за секој $\varepsilon>0$ и за секој m множеството $F_m(\varepsilon)$ е затворено, па од лема XII 3.3 следува дека за секој m множеството $F_m(\varepsilon)\setminus F_m^0(\varepsilon)$ е никаде густо. Понатаму, од чекор 3 следува

$$X\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m^0(\varepsilon)=(\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m(\varepsilon))\setminus(\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m^0(\varepsilon))\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}(F_m(\varepsilon)\setminus F_m^0(\varepsilon))$$

што значи дека $X\setminus\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}F_m^0(\varepsilon)$ е множество од прва категорија. Конечно,

$$X\setminus G(\varepsilon)=X\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m^0(\varepsilon)\subseteq X\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m^0(\varepsilon)$$

е множество од прва категорија.

Чекор 5. Ќе докажеме дека множеството точки на прекин $A = X \setminus G$ на функцијата f е множество од прва категорија.

Тврдењето следува од равенството

$$X \setminus G = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbf{N}} G(\tfrac{1}{n}) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (X \setminus G(\tfrac{1}{n})) ,$$

чекор 4 и фактот дека најмногу пребројлива унија на множества од прва категорија е множество од прва категорија (зошто?). ♦

3. ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

3.1. Дефиниција. Нека T е произволно множество. Парот функционални низи $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, каде $f_n : T \to \mathbf{R}$, за секој $n \in \mathbf{N}$ и за секој $k \in \mathbf{N}$ функцијата $s_k : T \to \mathbf{R}$ е определена со $s_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$, го нарекуваме *ред реални функции* (*функционален ред*) на T. Функцијата f_n ја нарекуваме $n-$*ти член на редот*, а функцијата s_k ја нарекуваме $k-$*та парцијална сума*.

Притоа, за редот $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ја прифаќаме ознаката

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) . \qquad (1)$$

3.2. Дефиниција. Нека (1) е ред реални функции на множеството T и нека $s : T \to \mathbf{R}$. Ќе велиме дека редот (1) дека *конвергира кон функцијата* s *во точката* x_0 ако редот реални броеви $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ конвергира кон бројот $s(x_0)$. Ако $A \subseteq T$ и редот (1) конвергира кон функцијата s во секоја точка $x \in A$, тогаш ќе велиме дека редот (1) *конвергира по точки* (*конвергира обично*) кон функцијата s на множеството A. Ќе велиме дека *редот* (1) *апсолутно конвергира на множеството* A ако конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | f_n(x) |$.

Со други зборови, редот (1) конвергира (обично) кон функцијата s во точката x_0 (на множеството A), ако низата парцијални суми $\{s_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира (обично) кон s во точката x_0 (на множеството A).

3.3. За нашите натамошни разгледувања од посебен интерес е рамномерната конвергентност на редовите реални функции. Така, ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека (1) е ред реални функции на множеството T и нека $s:T\to\mathbf{R}$. Ќе велиме дека редот (1) *рамномерно конвергира кон функцијата* s на множеството T ако низата парцијални суми $\{s_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата s на T. Ќе велиме дека редот (1) *рамномерно конвергира кон функцијата* s *на множеството* $A\subseteq T$ ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n|A}$ рамномерно конвергира кон функцијата $s_{|A}$ на множеството A.

Со други зборови, редот (1) рамномерно конвергира кон функцијата s на множеството T ако и само ако е исполнет условот:

За секој $\varepsilon>0$ *постои* $k_0\in\mathbf{N}$ *таков, што за секој* $x\in T$ *и за секој* $k>k_0$ *важи*

$$|s_k(x)-s(x)|=|\sum_{n=1}^{k} f_n(x)-s(x)|<\varepsilon .$$

3.4. Коментар. Лесно се гледа дека ако редот (1) рамномерно конвергира кон функцијата s на множеството T, тогаш тој конвергира и обично кон s на T. Меѓутоа, во пример VII 3.6 видовме дека обратното тврдење не важи.

Како што рековме рамномерната конвергентност на редот (1) означува дека постои таква функција $s(x)$ кон која низата парцијални суми $\{s_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира на множеството T. Од рамномерната конвергенција следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x),$ за секој $x\in T$, па затоа $s(x)$ е сума на редот (1).

Понатаму, ако ставиме $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$. Тогаш, $s(x)-s_n(x)=r_n(x)$, па затоа редот (1) рамномерно конвергира кон функцијата $s(x)$ ако и само ако низата $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $g(x)=0,\ x\in T$.

Овде да забележиме дека во врска со рамномерно конвергентните редови функции можат да се докажат тврдења кои се аналогни на теоремите VII 3.4 и 3.5. На читателот му препорачуваме самостојно да ги формулира и докаже овие тврдења.

На крајот од овој дел, заради нејзиното значење, ќе ја докажеме теоремата на Ваерштрас, која дава доволен услов за рамномерна конвергенција на ред реални функции.

3.5. Теорема (Ваерштрас). Нека T е множество и (1) е ред реални функции определени на T. Ако постои низа ненегативни реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, таква што редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и ако

$$|f_n(x)|\le a_n \text{, за секој } x\in T \text{, за секој } n\in\mathbf{N} \tag{2}$$

тогаш редот (1) конвергира рамномерно и апсолутно на T и важи

$$|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} | f_n(x) | \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{, за секој } x \in T . \qquad (3)$$

Доказ. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш од признакот на срамнување (теорема VI 3.3) и од неравенствата (2) следува дека редот (1) апсолутно конвергира на множеството T . Јасно, редот (1) конвергира обично на множеството T .

Нека $s(x)$ е сумата на редот (1) и $s_n(x)$ е неговата $n-$та парцијална сума. Од конвергентноста на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков, што за секој $n > n_0$ е исполнето неравенството $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Но, тогаш за секој $n > n_0$ и за секој $x \in T$ важи

$$| s_n(x) - s(x) |=| r_n(x) |=| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) |\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} | f_k(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon,$$

што значи дека редот (1) рамномерно конвергира на множеството T . Очигледно неравенствата (3) се исполнети. ♦

4. ПРОСТОРОТ ОГРАНИЧЕНИ ФУНКЦИИ

4.1. Во пример IX 2.10 покажавме дека за произволно множество T множеството од сите ограничени функции од T во $\mathbf{R}$:

$$B(T) = \{x : T \to \mathbf{R} \mid \sup_{t \in T} | x(t) |< \infty\}$$

е метрички простор со метриката на рамномерна конвергенција

$$\rho_{\infty}(x, y) = \sup_{t \in T} | x(t) - y(t) | .$$

Понатаму, според пример IX 3.10 низата функции $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата f ако и само ако $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира конвергира кон f во смисла на метриката ρ_{∞} . Во овој дел, заради значењето на ограничените функции подетално ќе се задржиме на истите.

4.2. Дефиниција. Нека X е произволно множество и (Y,d) е метрички простор. За функцијата $f : X \to Y$ ќе велиме дека е *ограничена*, ако множеството $f(X)$ е ограничено во (Y,d) . Множеството од сите ограничени функции од X во Y ќе го означуваме со $\mathbf{B}(X,Y)$.

4.3. Теорема. За произволно непразно множество X и метричкиот простор (Y,ρ) со

$$\rho_\infty(f,g)=\sup\{\rho(f(x),g(x))\mid x\in X\} \tag{1}$$

е определена метрика на множеството $\mathbf{B}(X,Y)$.

Доказ. Прво ќе докажеме дека за секои $f,g\in\mathbf{B}(X,Y)$ важи $\rho_\infty(f,g)<\infty$, т.е. дека функцијата ρ_∞ е добро дефинирана. Да земеме точка $a\in X$. Тогаш, за секој $x\in X$ важи

$$\begin{aligned}\rho(f(x),g(x)) &\le \rho(f(x),f(a))+\rho(f(a),g(a))+\rho(g(a),g(x))\\ &\le d(f(X))+\rho(f(a),g(a))+d(g(X)),\end{aligned}$$

од што следува

$$\begin{aligned}\rho_\infty(f,g) &= \sup\{\rho(f(x),g(x))\mid x\in X\}\\ &\le d(f(X))+\rho(f(a),g(a))+d(g(X))<\infty.\end{aligned}$$

Ќе докажеме дека се исполнети аксиомите за метрика.

i) Од $\rho(f(x),g(x))\ge 0$, за секој $x\in X$ следува

$$\rho_\infty(f,g)=\sup\{\rho(f(x),g(x))\mid x\in X\}\ge 0.$$

Понатаму, ако $\rho_\infty(f,g)=0$, од (1) следува дека $\rho(f(x),g(x))=0$, за секој $x\in X$, т.е. $f(x)=g(x)$, за секој $x\in X$ и како $f,g:X\to Y$ заклучуваме дека $f\equiv g$.

ii) Имаме

$$\begin{aligned}\rho_\infty(f,g) &= \sup\{\rho(f(x),g(x))\mid x\in X\}\\ &= \sup\{\rho(g(x),f(x))\mid x\in X\}=\rho_\infty(g,f),\end{aligned}$$

за секои $f,g\in\mathbf{B}(X,Y)$

iii) За секои $f,g,h\in\mathbf{B}(X,Y)$ и за секој $x\in X$ важи

$$\begin{aligned}\rho(f(x),h(x)) &\le \rho(f(x),g(x))+\rho(g(x),h(x))\\ &\le \sup\{\rho(f(x),g(x))\mid x\in X\}+\sup\{\rho(g(x),h(x))\mid x\in X\}\\ &= \rho_\infty(f,g)+\rho_\infty(g,h),\end{aligned}$$

од што следува

$$\begin{aligned}\rho_\infty(f,h) &= \sup\{\rho(f(x),h(x))\mid x\in X\}\\ &\le \rho_\infty(f,g)+\rho_\infty(g,h).\end{aligned}$$

Според тоа, со (1) е определена метрика на множеството $\mathbf{B}(X,Y)$, што значи дека $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$ е метрички простор, кој го нарекуваме *простор ограничени функции*. ♦

4.4. Последица. За произволни метрички простори (X,ρ) и (Y,d) со (1) е определена метрика на множеството $\mathbf{CB}(X,Y)=\mathbf{C}(X,Y)\cap\mathbf{B}(X,Y)$ ограничени и непрекинати функции.

Доказ. Непосредно следува од IX 12.1 и теорема 4.3. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4.5. Коментар. Нека X е произволно множество и (Y,d) е метрички простор и со X^Y да го означиме множеството од сите функции од X во Y. За секои $f,g \in X^Y$ ставаме $d'(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$. Може да се докаже дека со

$$\rho^*(f,g) = \min\{d'(f,g),1\}\,, \tag{2}$$

е определена метрика на X^Y. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. Понатаму, ако (X,ρ) е метрички простор, бидејќи $\mathbf{C}(X,Y) \subseteq X^Y$ од IX 12.1 следува дека со (2) е определена метрика на $\mathbf{C}(X,Y)$.

4.6. Да ја разгледаме конвергенцијата во просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$ и во неговиот потпростор $(\mathbf{CB}(X,Y),\rho_\infty)$. Нека низата функции $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ конвергира кон функцијата f. Тоа значи, за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков, што $\rho_\infty(f_n,f) < \varepsilon$, за секој $n > n_0$, т.е. за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што

$$\sup\{d(f_n(x),f(x)) \mid x \in X\} < \varepsilon\,,$$

за секој $n > n_0$. Според тоа, во просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$ и во неговиот потпростор $(\mathbf{CB}(X,Y),\rho_\infty)$ ако низата функции $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ конвергира кон функцијата f, тогаш

за секој $\varepsilon > 0$ *постои* n_0 *таков, што* $d(f_n(x),f(x)) < \varepsilon$ *, за секој* $x \in X$,

и обратно. Претходно опишаната конвергенција во просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$, односно во просторот $(\mathbf{CB}(X,Y),\rho_\infty)$ ја нарекуваме *рамномерна конвергенција во метриката* (1), па затоа метриката (1) ја нарекуваме *рамномерна метрика* на $\mathbf{B}(X,Y)$, односно $\mathbf{CB}(X,Y)$.

4.7. Лема. Ако (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори, тогаш, множествто $\mathbf{CB}(X,Y)$ е затворено во просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$.

Доказ. Нека $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ е низа во $\mathbf{CB}(X,Y)$ која во $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$ конвергира кон функцијата f. Нека $a \in X$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Од $f_n \to f, n \to \infty$ следува дека постои n таков, што $d(f_n(x),f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, за секој $x \in X$. Понатаму, бидејќи функцијата f_n е непрекината во $a \in X$, добиваме дека постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in X$ за кој $\rho(x,a) < \delta$ важи $d(f_n(x),f_n(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој $x \in X$ за кој $\rho(x,a) < \delta$ важи

$$\begin{aligned} d(f(x),f(a)) &\le d(f(x),f_n(x)) + d(f_n(x),f_n(a)) + d(f_n(a),f(a)) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. функцијата f е непрекината во точката $a \in X$, па од произволноста на точката a следува дека таа е непрекината на X. Според тоа, за низата функции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ во $\mathbf{CB}(X,Y)$ која во $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$ конвергира, границата f се содржи во $\mathbf{CB}(X,Y)$. Конечно, од теорема IX 8.3 б) следува дека множеството $\mathbf{CB}(X,Y)$ е затворено во просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$. ♦

4.8. Последица. Ако (X,ρ) е компактен метрички простор и (Y,d) е произволен метрички простор, тогаш $\mathbf{C}(X,Y)=\mathbf{CB}(X,Y)$, множеството $\mathbf{C}(X,Y)$ е затворено во просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$ и за метриката (1) важи

$$\rho_\infty(f,g)=\max\{d(f(x),g(x))\,|\,x\in X\}, \text{ за секои } f,g\in\mathbf{C}(X,Y).$$

Доказ. Јасно, $\mathbf{CB}(X,Y)\subseteq\mathbf{C}(X,Y)$. Ако $f\in\mathbf{C}(X,Y)$, тогаш од теорема XIII 4.2 следува дека множеството $f(X)$ е компактно. Понатаму, според теорема XIII 2.1 компактното множество $f(X)$ е ограничено, па затоа $f\in\mathbf{CB}(X,Y)$ и од произволноста на функцијата f следува $\mathbf{C}(X,Y)\subseteq\mathbf{CB}(X,Y)$. Значи $\mathbf{CB}(X,Y)\subseteq$ $\mathbf{C}(X,Y)$ и $\mathbf{C}(X,Y)\subseteq\mathbf{CB}(X,Y)$, па затоа $\mathbf{C}(X,Y)=\mathbf{CB}(X,Y)$. Понатаму, од лема 4.7 следува дека множеството $\mathbf{C}(X,Y)=\mathbf{CB}(X,Y)$ е затворено во просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$.

Нека $f,g\in\mathbf{C}(X,Y)$. Според лема X 6.6 а) функцијата $F:X\to Y\times Y$ определена со $F(x)=(f(x),g(x))$, за секој $x\in X$ е непрекината, а според лема X 8.12 функцијата $d:Y\times Y\to\mathbf{R}$ е рамномерно непрекината, па затоа таа е непрекината. Значи, $d\circ F:X\to\mathbf{R}$ е непрекината реална функција определена на компактното множество X. Според теорема XIII 4.6 постои точка $x^*\in X$ во која функцијата $d\circ F$ го достигнува супремумот, т.е. важи

$$\begin{aligned}\rho_\infty(f,g)&=\sup\{d(f(x),g(x))\,|\,x\in X\}=\sup\{(d\circ F)(x)\,|\,x\in X\}\\&=\max\{(d\circ F)(x)\,|\,x\in X\}=\max\{d(f(x),g(x))\,|\,x\in X\}.\end{aligned}$$ ♦

4.9. Лема. Ако X е произволно бесконечно множество и (Y,d) е метрички простор со најмалку две точки, тогаш просторот $(\mathbf{B}(X,Y),\rho_\infty)$ не е сепарабилен.

Доказ. Нека

$$F=\{f_n\,|\,n\in\mathbf{N}\}\subset B(X,Y)$$

е произволно пребројливо множество, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа по парови различни точки во X и $a,b\in Y$ се произволни различни точки. Ставаме $r=\frac{d(a,b)}{2}$ и дефинираме функција $g:X\to Y$ така, што за секоја точка $x\in X$, различна од сите x_n, ставаме $g(x)=a$, а за секој n ставаме

$$g(x_n) = \begin{cases} a, & \text{ако } \ d(f_n(x_n), a) \geq r \\ b, & \text{ако } \ d(f_n(x_n), a) < r. \end{cases}$$

Очигледно, функцијата g е ограничена. Понатаму,

$$\text{ако } g(x_n) = a \text{, тогаш } d(f(x_n), g(x_n)) = d(f(x_n), a) \geq r \text{,} \tag{3}$$

а ако $g(x_n) = b$, тогаш $2r = d(a,b) \leq d(a, f(x_n)) + d(f(x_n), b) < r + d(f(x_n), g(x_n))$, т.е.

$$\text{ако } g(x_n) = b \text{, тогаш } d(f(x_n), g(x_n)) > r \text{.} \tag{4}$$

Од (3) и (4) следува, дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи $d(f(x_n), g(x_n)) \geq r$, па затоа

$$\rho_\infty(f_n, g) = \sup\{d(f_n(x), g(x)) \mid x \in X\} \geq r \text{.} \tag{5}$$

Сега, од (5) следува дека отворената топка $B(g;r) \subset \mathbf{B}(X,Y)$ не го сече множеството F, па затоа истото не може да биде густо во просторот $(\mathbf{B}(X,Y), \rho_\infty)$. Конечно, тврдењето следува од произволноста на множеството F. ♦

4.10. Теорема. Ако (X,ρ) е метрички простор и (Y,d) е комплетен метрички простор, тогаш $(\mathbf{B}(X,Y), \rho_\infty)$ е комплетен метрички простор.

Доказ. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна Кошиева низа во $(\mathbf{B}(X,Y), \rho_\infty)$. Тогаш, за секој $x \in X_0$ и за секои природни броеви m и n важи

$$d(f_m(x_0), f_n(x_0)) \leq \sup\{d(f_m(x), f_n(x)) \mid x \in X\} = \rho_\infty(f_m, f_n) \text{,}$$

$\mathbf{C}(X,Y)$ т.е. за секој $x \in X_0$ низата $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во просторот (Y,d). Но, (Y,d) е комплетен метрички простор, па затоа за секој $x \in X$ постои $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, со што е дефинирана функција $f : X \to Y$.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева, па затоа постои $k > 0$ таков, што за секои $m,n > k$ важи $\rho_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon$, што значи за секои $m,n > k$ и за секој $x \in X$ важи $d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$. Да земеме произволен n таков, што $n > k$. Според пример X 2.3 в) функцијата $g : Y \to \mathbf{R}$ определена со

$$g(y) = d(y, f_n(x)) \text{, за секој } y \in Y$$

е непрекината. Понатаму, за секој $x \in X$ постои $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$, па затоа за секој $x \in X$ важи

$$\lim_{m\to\infty} g(f_m(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(x), f_n(x)) = d((f(x), f_n(x)) \text{.}$$

Но, за секој $x \in X$ сите членови на низата $\{d(f_m(x), f_n(x)\}_{m=1}^{\infty}$, лежат во интервалот $[0, \varepsilon)$, па затоа важи

$$d((f(x), f_n(x)) \le \varepsilon \text{ , за секој } n > k \text{ и за секој } x \in X \text{ .}$$

Конечно, за секои $x', x'' \in X$ важи

$$\begin{aligned} d(f(x'), f(x'')) &\le d(f(x'), f_{k+1}(x')) + d(f_{k+1}(x'), f_{k+1}(x'')) + d(f_{k+1}(x''), f(x'')) \\ &\le d(f_{k+1}(X)) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

па затоа

$$d(f(X)) \le \sup\{d(f(x'), f(x'')) \mid x', x'' \in X\} \le d(f_{k+1}(X)) + 2\varepsilon < \infty \text{ ,}$$

т.е. $f \in \mathbf{B}(X,Y)$, што значи $(\mathbf{B}(X,Y), \rho_\infty)$ е комплетен метрички простор. ♦

4.11. Последица. Ако (X,ρ) е метрички простор и (Y,d) е комплетен метрички простор, тогаш метричкиот простор $(\mathbf{CB}(X,Y), \rho_\infty)$ е комплетен.

Доказ. Според лема 4.7 множеството $\mathbf{CB}(X,Y)$ е затворено во просторот $(\mathbf{B}(X,Y), \rho_\infty)$. Според теорема 4.10 просторот $(\mathbf{B}(X,Y), \rho_\infty)$ е комплетен, па од теорема XII 2.12 следува дека метричкиот простор $(\mathbf{CB}(X,Y), \rho_\infty)$ е комплетен. ♦

4.12. Во доказот на теорема 4.10 никаде не го искористивме фактот дека (X,ρ) е метрички простор, што значи дека доволно е наместо метрички простор X да земеме произволно множество T. Притоа, ако земеме $(Y,d) = (\mathbf{R}, \rho)$ добиваме дека е точна следнава теорема.

Теорема. Ако T е произволно множество, тогаш $(\mathbf{B}(T, \mathbf{R}), \rho_\infty)$ е комплетен метрички простор. ♦

5. ТЕОРЕМА НА АРЦЕЛО-АСКОЛИ

5.1. Како што видовме компактноста е едно од најзначајните својства на метричките простори, па затоа од посебна важност е за одделни простори да се најдат посебни критериум за компактност. Во претходните разгледувања ја докажавме теоремата на Арцело-Асколи, која дава критериум за компактност во просторот $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$. За таа цел претходно ги воведовме поимите рамномерно ограничена и рамностепено непрекината фамилија функции во $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_\infty)$. Во овој параграф ќе ја разгледаме соодветна варијанта на оваа теорема во случај кога (X,ρ) е произволен компактен простор. За таа цел, прво ќе дефинираме рамностепена непрекинатост на фамилија функции определени на произволни метрички простори (X,ρ) и (Y,d). Така, ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека (X,ρ) и (Y,d) се метрички простори и $A \subset \mathbf{C}(X,Y)$. За фамилијата функции $\mathcal{A}$ ќе велиме дека е *рамностепено непрекината во точката* $x \in X$ ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секој $x' \in B(x;\delta)$ и за секоја функција $f \in \mathcal{A}$ важи $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

За фамилијата $\mathcal{A}$ ќе велиме дека е *рамностепено непрекината* ако е рамностепено непрекината во секоја точка $x \in X$.

5.2. Забелешка. Условот фамилијата $\mathcal{A}$ да е рамностепено непрекината во точка $x \in X$ е појак од условот секоја функција $f \in \mathcal{A}$ да е непрекината во точката $x \in X$, бидејќи според дефиниција 5.1 може да се избере една иста отворена топка $B(x;\delta)$ на точката $x \in X$ за секоја функција $f \in \mathcal{A}$, т.е. $B(x;\delta)$ зависи само од точката x и од ε , а не зависи од функцијата $f \in \mathcal{A}$.

5.3. Теорема. Ако (X,ρ) е компактен и (Y,d) произволен метрички простор и фамилијата $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}(X,Y)$. Следниве услови се еквивалентни:

1) фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината,
2) за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што за секои $x', x'' \in X$, за кои важи $\rho(x',x'') < \delta$ и за секоја функција $f \in \mathcal{A}$ важи $d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Доказ. 1) $\Rightarrow$ 2). Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината, па затоа за секој $x \in X$ постои $\delta_x > 0$ таков што

$$\text{од } \rho(x,y) < \delta_x \text{ и } f \in \mathcal{A} \text{ следува } d(f(x), f(y)) < \tfrac{\varepsilon}{2} . \qquad (1)$$

Нека $O_x = B(x; \frac{1}{2}\delta_x)$. Фамилијата $\mathcal{O} = \{O_x \mid x \in X\}$ е отворена покривка на X и бидејќи X е компактно множество, добиваме дека постојат $x_1,...,x_n \in X$ такви што

$$X \subseteq O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup ... \cup O_{x_n} . \qquad (2)$$

Нека

$$\delta = \tfrac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, ..., \delta_{x_n}\} .$$

Јасно $\delta > 0$. Ако $x', x'' \in X$ се точки за кои важи $\rho(x',x'') < \delta$, тогаш од (2) следува дека постои $m \in \{1,2,...,n\}$ таков што $x' \in O_{x_m}$, па затоа

$$\rho(x', x_m) < \tfrac{1}{2}\delta_{x_m} < \delta_{x_m} , \qquad (3)$$

од што следува:

$$\rho(x'', x_m) \le \rho(x', x'') + \rho(x', x_m) < \delta + \tfrac{1}{2}\delta_{x_m} \le \delta_{x_m} . \qquad (4)$$

Конечно, од (1), (3) и (4) следува за секои $x', x'' \in X$ такви што $\rho(x',x'') < \delta$ и за секој $f \in \mathcal{A}$ важи:

$$d(f(x'), f(x'')) \le d(f(x'), f(x_m)) + d(f(x''), f(x_m)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

2) $\Rightarrow$ 1). Нека $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Тогаш постои постои $\delta > 0$ таков што за секој $x' \in X$, за кој важи $\rho(x,x') < \delta$, т.е. $x' \in B(x;\delta)$ и за секоја функција $f \in \mathcal{A}$ важи $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$, што според дефиниција 5.1 значи дека фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината. ♦

5.4. Коментар. Од теорема 5.3 следува дека во случај на компактен метрички простор (X,ρ) дефиницијата за рамностепена непрекинатост на $\mathbf{C}(X,Y)$ е наполно аналогна со дефиницијата за рамностепена непрекинатост на $\mathbf{C}([a,b])$. Следнава теорема дава потребен и доволен услов за релативна компактност на множество $\mathcal{A}\subset\mathbf{C}(X,Y)$ во случај кога (X,ρ) е произволен компактен метрички простор.

5.5. Теорема (Арцело-Асколи). Нека (X,ρ) е компактен и (Y,d) е произволен метрички простор. Множеството $\mathcal{A}\subset\mathbf{C}(X,Y)$ е релативно компактно во просторот $(\mathbf{C}(X,Y),\rho_\infty)$ ако и само ако се исполнети условите:

1) фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината и
2) множеството $\mathcal{A}(X)=\{f(x)\mid x\in X,\ f\in\mathcal{A}\}$ е релативно компактно во просторот (Y,d).

Доказ. $\Leftarrow$. Нека множеството $\mathcal{A}$ ги исполнува условите 1) и 2) и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во $\mathcal{A}$. Метричкиот простор X е компактен, па од теорема XIII 2.11 следува дека тој е сепарабилен, што значи дека постои пребројливо густо подмножество на X, на пример $A=\{a_k\mid k\in\mathbf{N}\}$. Понатаму, според условот 2) множеството $\mathcal{A}(X)$ е релативно компактно во Y, па затоа множеството $\mathcal{A}(a_1)\subseteq\mathcal{A}(X)$ е релативно компактно во Y, и како $A_1=\{f_n(a_1)\mid n\in\mathbf{N}\}\subseteq\mathcal{A}(a_1)$ заклучуваме дека и множеството A_1 е релативно компактно во Y. Но, $\{f_n(a_1)\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во A_1, па од лема XIII 3.16 следува дека таа содржи подниза која конвергира во Y, т.е. постои бесконечно множество $N_1\subseteq\mathbf{N}$ такво што низата $\{f_i(a_1)\}_{i\in N_1}$ е конвергентна во Y. Понатаму, множеството $\mathcal{A}(a_2)$ е релативно компактно во Y, па затоа и множеството $A_2=\{f_i(a_2)\mid i\in N_1\}\subseteq\mathcal{A}(a_2)$ е релативно компактно во Y, што повторно според лема XIII 3.16 значи дека низата $\{f_i(a_2)\}_{i\in N_1}$ содржи подниза која конвергира во Y, т.е. постои бесконечно множество $N_2\subseteq N_1$ такво што низата $\{f_i(a_2)\}_{i\in N_2}$ е конвергентна во Y. Продолжувајќи ја постапката, индуктивно наоѓаме бесконечни множества N_p, $p=1,2,...$ од $\mathbf{N}$ такви што $N_{p+1}\subseteq N_p$, $p=1,2,3,...$ и низата $\{f_i(a_p)\}_{i\in N_p}$ конвергира во Y. Земаме $i_1=\min N_1$, за секој $p>1$ нека $i_p\in N_p$ и $i_p>i_{p-1}$. Низата $\{f_{i_p}\}_{p=1}^{\infty}$ е подниза на низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и истата конвергира по точки на множеството A, бидејќи за секој k низата $\{f_{i_p}(a_k)\}_{p=1}^{\infty}$ почнувајќи од $k-$от член оваа низа дава подниза од конвергентната низа $\{f_i(a_p)\}_{i\in N_p}$.

Ќе докажеме дека низата $\{f_{i_p}\}_{p=1}^{\infty}$ е Кошиева. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Според условот 1) фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината, па од теорема 5.3

следува дека постои $\delta > 0$ таков што за секои $x', x'' \in X$, за кои важи $\rho(x', x'') < \delta$ и за секоја функција $f \in \mathcal{A}$ важи

$$d(f(x'), f(x'')) < \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Понатаму, просторот X е компактен, па според теоремата на Хауздорф (теорема XIII 2.9) тој е потполно ограничен, т.е. постојат точки $x_1, x_2, ..., x_m \in X$ такви што $X = \bigcup_{k=1}^{m} B(x_i; \tfrac{\delta}{2})$. Но, множеството A е густо во X, па затоа за секој $k \in \{1, ..., m\}$ постои точка $y_k \in A \cap B(x_k; \tfrac{\delta}{2})$. Но, низата $\{f_{i_p}(y_k)\}_{p=1}^{\infty}$ е конвергентна во Y, што значи дека таа е Кошиева (лема XII 1.3). Според тоа, постои $n_k \in \mathbf{N}$ таков што

$$d(f_{i_p}(y_k), f_{i_q}(y_k)) < \tfrac{\varepsilon}{3}, \tag{6}$$

за секои $i_p, i_q > n_k$. Нека $n_0 = \max\{n_k \mid k = 1, 2, ..., m\}$. Ако $x \in X$, тогаш постои $k \in \{1, 2, ..., m\}$ таков што $x \in B(x_k; \tfrac{\delta}{2})$, па затоа

$$\rho(x, y_k) \le \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

Сега, ако за точките x и y_k и функциите f_{i_p} и f_{i_q} го примениме неравенството (5) и го земеме предвид неравенството (6) добиваме дека за секои $i_p, i_q > n_0$ важи

$$\begin{aligned} d(f_{i_p}(x), f_{i_q}(x)) &\le d(f_{i_p}(x), f_{i_p}(y_k)) + d(f_{i_p}(y_k), f_{i_q}(y_k)) + d(f_{i_q}(y_k), f_{i_q}(x)) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

и како x е произволна точка од X заклучуваме дека низата $\{f_{i_p}\}_{p=1}^{\infty}$ е Кошиева.

Според 2) множеството $\mathcal{A}(X)$ е релативно компактно и затоа множеството $\overline{\mathcal{A}(X)} = Y'$ е компактно, па од теорема XIII 3.8 следува дека тоа е комплетен метрички простор. Понатаму, просторот X е компактен, па од последица 4.8 следува дека $\mathbf{C}(X, Y') = \mathbf{CB}(X, Y')$ и како Y' е комплетен метрички простор од последица 4.11 следува дека просторот $\mathbf{CB}(X, Y')$ е комплетен. Но, низата $\{f_{i_p}\}_{p=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во комплетниот метрички простор $\mathbf{CB}(X, Y')$, што значи дека е конвергентна. Конечно, произволна низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ од $\mathcal{A}$ содржи подниза $\{f_{i_p}\}_{p=1}^{\infty}$ која конвергира во $\mathbf{CB}(X, Y')$, па од лема XIII 3.16 следува дека множеството $\mathcal{A}$ е релативно компактно.

$\Rightarrow$. Нека $\mathcal{A}$ е релативно компактно. Нека $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Ако фамилијата $\mathcal{A}$ не е рамностепено непрекината, тогаш за секој $n \in \mathbf{N}$ постојат функција $f_n \in \mathcal{A}$ и точка $x_n \in B(x; \tfrac{1}{n})$ такви што $d(f_n(x), f_n(x_n)) \ge \varepsilon$. Но, множеството $\mathcal{A}$

е релативно компактно, па затоа множеството $\{f_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ е релативно компактно и од лема XIII 3.16 следува дека низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи подниза $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ која конвергира во $\mathbf{C}(X,Y)$. Нека f е граница на поднизата $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Но, $f \in \mathbf{C}(X,Y)$, па затоа постои $\delta > 0$ таков што $d(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$, за секој $x' \in B(x;\delta)$. Поднизата $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира кон f, па затоа постои $n_k > \frac{1}{\delta}$ таков што $\rho_\infty(f_{n_k}, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Но, тогаш за точката $x_{n_k} \in B(x;\frac{1}{n_k}) \subseteq B(x;\delta)$ добиваме

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(x_{n_k})) &\leq d(f_{n_k}(x), f(x)) + d(f(x), f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}), f_{n_k}(x_{n_k})) \\ &\leq \rho_\infty(f_{n_k}, f) + d(f(x), f(x_{n_k})) + \rho_\infty(f_{n_k}, f) < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека фамилијата $\mathcal{A}$ е рамностепено непрекината.

Ќе докажеме дека множеството $\mathcal{A}(X)$ е релативно компактно во просторот Y. Нека $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна низа во $\mathcal{A}(X)$. За секој $n \in \mathbf{N}$ да избереме функција $f_n \in \mathcal{A}$ и точка x_n такви што $y_n = f_n(x_n)$. Просторот X е компактен, па од теоремата на Болцано-Ваерштрас (XIII 3.1) следува дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи конвергентна подниза $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. постои монотоно растечка функција $\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ определена со $\alpha(k) = n_k$, за секој $k \in \mathbf{N}$ таква што низата $\{x_{\alpha(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира кон точка $x \in X$. Но, множеството $\mathcal{A}$ е релативно компактно, па затоа низата $\{f_{\alpha(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ содржи подниза која конвергира во $\mathbf{C}(X,Y)$, (лема XIII 3.16), т.е. постои монотоно растечка функција $\beta : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ таква што низата $\{f_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi(k) = (\beta \circ \alpha)(k)$, за секој $k \in \mathbf{N}$ конвергира кон функција $f \in \mathbf{C}(X,Y)$. Ќе докажеме, дека поднизата $\{y_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ на низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон точката $f(x)$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Бидејќи $\{x_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ е подниза од $\{x_{\alpha(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, од лема IX 3.17 следува дека $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\varphi(k)} = x$ и како $f \in \mathbf{C}(X,Y)$ од забелешка X 2.4 б) следува дека $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{\varphi(k)}) = f(x)$, т.е. постои $k_1 \in \mathbf{N}$ таков што

$$d(f(x_{\varphi(k)}), f(x)) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ за секој } k > k_1.$$

Но, $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\varphi(k)} = f$, па затоа постои $k_2 \in \mathbf{N}$ таков што

$$\rho_\infty(f_{\varphi(k)}, f) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ за секој } k > k_2.$$

Земаме $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ и добиваме дека за секој $k > k_0$ важи

$$\begin{aligned} d(y_{\varphi(k)}, f(x)) &\leq d(f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}), f(x_{\varphi(k)})) + d(f(x_{\varphi(k)}), f(x)) \\ &\leq \rho_\infty(f_{\varphi(k)}, f) + d(f(x_{\varphi(k)}), f(x)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

што значи дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ содржи подниза $\{y_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ која конвергира во Y, па од лема XIII 3.16 следува дека множеството $\mathcal{A}(X)$ е релативно компактно. ♦

6. ТЕОРЕМА НА СТОУН-ВАЕРШТРАС

6.1. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор. Во претходните разгледувања докажавме, дека со

$$\rho_\infty(f,g)=\max_{x\in X}|f(x)-g(x)|,\ f,g\in \mathbf{C}(X), \tag{1}$$

на множеството непрекинати функции $\mathbf{C}(X)$ е воведена метрика. Понатаму, бидејќи $(\mathbf{R},d)$, $d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbf{R}$ е комплетен метрички простор од последица 4.11 следува дека $(\mathbf{C}(X),\rho_\infty)$ е комплетен метрички простор.

6.2. Дефиниција. Нека (X,ρ) е метрички простор и $\mathcal{A}\subseteq\mathbf{C}(X)$. Множеството $\mathcal{A}$ го нарекуваме *алгебра реални функции* (*алгебра*), ако за секои $f,g\in\mathcal{A}$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи $\alpha f,\ f+g,\ fg\in\mathcal{A}$.

Нека $\mathcal{A}$ е алгебра реални функции на метричкиот простор (X,ρ). Ако множеството $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ и самото е алгебра, тогаш ќе велиме дека $\mathcal{B}$ е *подалгебра* од $\mathcal{A}$.

За подалгебрата $\mathcal{B}$ од алгебрата $\mathcal{A}$ ќе велиме дека е *затворена* во $\mathcal{A}$ ако множеството $\mathcal{B}$ е затворено во просторот $(\mathcal{A},\rho_\infty)$.

За алгебрата $\mathcal{A}$ ќе велиме дека е *комплетна* ако метричкиот простор $(\mathcal{A},\rho_\infty)$ е комплетен.

6.3. Дефиниција. Нека $\mathcal{A}\subseteq\mathbf{C}(X)$, $\mathcal{A}$ е алгебра. За алгебрата $\mathcal{A}$ ќе велиме дека ги *разделува* точките на X, ако за секои $x,y\in X$, $x\neq y$ постои $f\in\mathcal{A}$ таков, што $f(x)\neq f(y)$.

6.4. Теорема (Стоун-Ваерштрас). Нека (X,d) е компактен метрички простор, $\mathbf{C}(X)$ е просторот непрекинати функции на X со рамномерна метрика (1) и $\mathcal{A}\subseteq\mathbf{C}(X)$. Ако

а) $\mathcal{A}$ е алгебра,

б) $\mathcal{A}$ ги разделува точките на множеството X и

в) функцијата $f(x)=1,\ \ x\in X$ припаѓа на $\mathcal{A}$,

тогаш множеството $\mathcal{A}$ е секаде густо во просторот $(\mathbf{C}(X),\rho_\infty)$.

Доказ. Прво да забележиме дека бидејќи $\mathcal{A}$ е алгебра, од в) и дефиниција 6.2 следува дека $\mathcal{A}$ ги содржи сите константни функции. Ќе докажеме дека $\overline{\mathcal{A}} = \mathbf{C}(X)$. Доказот ќе го спроведеме во неколку чекори.

Чекор 1. Функцијата $|f|$ е определена со формулата

$$|f|(x) = |f(x)|, x \in X,$$

па затоа $|f| \in \mathbf{C}(X)$. Нека $f \in \mathcal{A}$. Ако

$$\rho(f,0) = \max_{x \in X} |f(x)| = 0,$$

тогаш $f(x) = 0$, за секој $x \in X$, па затоа $|f| = f \in \mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Нека

$$\rho(f,0) = \max_{x \in X} |f(x)| > 0.$$

Бидејќи $\mathcal{A}$ е алгебра, од $f \in \mathcal{A}$ следува $\frac{f}{\rho(f,0)} \in \mathcal{A}$, па затоа $\frac{f^2}{\rho^2(f,0)} \in \mathcal{A}$, што значи дека за секој полином p важи $\rho(f,0) \bullet p(\frac{f^2}{\rho^2(f,0)}) \in \mathcal{A}$. Согласно теоремата на Ваерштрас, за функцијата $g(t) = \sqrt{t}, t \in [0,1]$, за секој $\varepsilon > 0$ постои полином $p(t)$ таков што

$$|\sqrt{t} - p(t)| < \frac{\varepsilon}{\rho(f,0)}, \text{ за секој } t \in [0,1].$$

Понатаму, $\frac{f^2(x)}{\rho^2(f,0)} \in [0,1]$, за секој $x \in X$ и ако замениме во претходното неравенство добиваме

$$\left| \frac{|f(x)|}{\rho(f,0)} - p(\frac{f^2(x)}{\rho^2(f,0)}) \right| = \left| \sqrt{\frac{f^2(x)}{\rho^2(f,0)}} - p(\frac{f^2(x)}{\rho^2(f,0)}) \right| < \frac{\varepsilon}{\rho(f,0)}, \text{ за секој } x \in X,$$

односно

$$\left| |f(x)| - \rho(f,0) \bullet p(\frac{f^2(x)}{\rho^2(f,0)}) \right| < \varepsilon, \text{ за секој } x \in X.$$

Според тоа, за секој $\varepsilon > 0$ постои $\rho(f,0) \bullet p(\frac{f^2}{\rho^2(f,0)}) \in \mathcal{A}$ таков, што

$$\rho_\infty(|f|, \rho(f,0) \bullet p(\frac{f^2}{\rho^2(f,0)})) < \varepsilon,$$

што според дефиниција IX 9.1 значи $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.

Чекор 2. Бидејќи за секои $a, b \in \mathbf{R}$ важи

$$\max\{a,b\} = \tfrac{1}{2}(a + b + |a - b|) \text{ и } \min\{a,b\} = \tfrac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

од чекор 1 и од дефиниција 6.2 следува дека за секои $f, g \in \mathcal{A}$, функциите

$$x \to \max\{f(x), g(x)\} \text{ и } x \to \min\{f(x), g(x)\}, \text{ за секој } x \in X$$

припаѓаат на $\overline{A}$.

Чекор 3. Нека $x, y \in X$, $x \neq y$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Тогаш, постои $f \in A$ таков што $f(x) = \alpha$ и $f(y) = \beta$. Навистина, од условот следува дека постои $g \in A$ таков што $g(x) \neq g(y)$ и ако ставиме

$$f(z) = \alpha + \tfrac{\beta-\alpha}{g(y)-g(x)}(g(z) - g(x)), \quad z \in X$$

добиваме $f(x) = \alpha$ и $f(y) = \beta$.

Чекор 4. Нека сега $f \in \mathbf{C}(X)$ и $\varepsilon > 0$ е дадено. Фиксираме $x \in X$ и за $z \in X$ ставаме $f(x) = \alpha$ и $f(z) = \beta$. Од чекор 3 следува дека постои $h_z \in A$ таков, што

$$h_z(x) = f(x) = \alpha \text{ и } h_z(z) = f(z) = \beta. \tag{2}$$

Но, $h_z - f \in \mathbf{C}(X)$, па затоа дека постои $r(z) > 0$ таков што за секој $y \in B(z; r(z))$ важи

$$h_z(y) \leq f(y) + \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Фамилијата $\{B(z; r(z)) \mid z \in X\}$ е отворена покривка на компактното множество X и затоа содржи конечна потпокривка, т.е.

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(z_k; r(z_k)). \tag{4}$$

Дефинираме функција g_x:

$$g_x(y) = \min_{1 \leq k \leq n} h_{z_k}(y), \quad y \in X. \tag{5}$$

Понатаму, бидејќи $h_{z_k} \in A$, $k = 1, ..., n$, од чекор 2, принципот на математичка индукција и од (5) следува $g_x \in \overline{A}$, од (2) и (5) следува $g_x(x) = f(x)$ и од (3), (4) и (5) следува

$$g_x(y) \leq f(y) + \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ за секој } y \in X. \tag{6}$$

Слично, бидејќи $g_x - f \in \mathbf{C}(X)$, добиваме дека постои $s(x) > 0$ таков што за секој $y \in B(x; s(x))$ важи

$$g_x(y) \geq f(y) - \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Фамилијата $\{B(x; s(x)) \mid x \in X\}$ е отворена покривка на компактното множество X и затоа содржи конечна потпокривка, т.е.

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k; s(x_k)). \tag{8}$$

Дефинираме функција $h(y)$:

$$h(y) = \max_{1\le k\le N} g_{x_k}(y),\ y \in X\ . \tag{9}$$

Понатаму, бидејќи $g_{x_k} \in \overline{A}$, $k = 1,...,n$, од чекор 2, принципот на математичка индукција и од (9) следува $h \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$, и од (6), (7), (8) и (9) следува

$$f(y) - \tfrac{\varepsilon}{2} \le h(y) \le f(y) + \tfrac{\varepsilon}{2}\ , \text{ за секој } y \in X\ .$$

Значи, за секој $f \in \mathbf{C}(X)$ и за секој $\varepsilon > 0$ постои $h \in \overline{A}$ таков, што

$$\rho_\infty(f,h) \le \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ ,$$

што значи $\overline{A} = \overline{\overline{A}} = \mathbf{C}(X)$, т.е. множеството A е секаде густо во просторот $(\mathbf{C}(X),\rho_\infty)$. ♦

6.5. Последица (теорема на Ваерштрас). За секој природен број m и за секое компактно подмножество X во $(\mathbf{R}^m,\rho)$ множеството $\mathbf{P}(X)$ од сите полиноми од m променливи разгледувани на X е секаде густо во $\mathbf{C}(X)$.

Доказ. Јасно, $\mathbf{P}(X) \subseteq \mathbf{C}(X)$, множеството $\mathbf{P}(X)$ е алгебра и функцијата $f(x) = 1$, $x \in X$ припаѓа на $\mathbf{P}(X)$. Ако $\mathbf{a} = (a_1,...,a_m)$ и $\mathbf{b} = (b_1,...,b_m)$ се две различни точки од X , тогаш постои $i \in \{1,2,...,m\}$ таков, што $a_i \ne b_i$. Но, тогаш за полиномот $p(\mathbf{x}) = p(x_1,...,x_m) = x_i$ важи $p(\mathbf{a}) = a_i \ne b_i = p(\mathbf{b})$, т.е. алгебрата $\mathbf{P}(X)$ ги разделува точките на множеството X .

Според тоа, за множеството $\mathbf{P}(X) \subseteq \mathbf{C}(X)$ исполнети се условите од теоремата на Стоун-Ваерштрас, па затоа $\mathbf{P}(X)$ е секаде густо во просторот $(\mathbf{C}(X),\rho_\infty)$. ♦

6.6. Теорема. Нека (X,ρ) и (Y,d) се компактни метрички постори и $h \in \mathbf{C}(X \times Y)$. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постојат $f_1,...,f_n \in \mathbf{C}(X)$ и $g_1,...,g_n \in \mathbf{C}(Y)$ такви што

$$| h(x,y) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) | < \varepsilon\ ,\ (x,y) \in X \times Y\ . \tag{10}$$

Доказ. Со A да го означиме множеството од сите функции

$$(x,y) \to \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)\ ,$$

каде $f_1,...,f_n \in \mathbf{C}(X)$, $g_1,...,g_n \in \mathbf{C}(Y)$, $n \in \mathbf{N}$. Очигледно $A \subseteq \mathbf{C}(X \times Y)$, A е алгебра и функцијата $h(x,y) = 1$, за секој $(x,y) \in X \times Y$ припаѓа на A . Ќе докажеме дека A ги разделува точките од $X \times Y$. Навистина, ако $(x_1,y_1) \ne (x_2,y_2)$, тогаш без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 \ne x_2$.

Множествата $A=\{x_1\}$ и $B=\{x_2\}$ се непразни затворени дисјунктни подмножества од X, па од лемата на Урисон (лема X 2.13) следува дека постои $f\in\mathbf{C}(X)$ таков, што $f(x_1)=0\neq 1=f(x_2)$. Очигледно, функцијата $h(x,y)=f(x)\bullet 1$ припаѓа на алгебрата $\mathcal{A}$ и таа ги разделува точките на $X\times Y$. Конечно, од теоремата на Стоун-Ваерштрас следува $\overline{\mathcal{A}}=\mathbf{C}(X\times Y)$, т.е. важи условот (10). ♦

6.7. Коментар. Претходната теорема важи за конечен број компактни метрички простори $(X_i,Y_i), i=1,...,m$. Овој резултат покажува дека приближното пресметување на вредностите на непрекината функција од повеќе променливи можеме да го сведиме на пресметување на вредности на неколку функции од една променлива.

7. АЛГЕБРАТА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ПОЛИНОМИ

7.1. Дефиниција. Нека $a_0,a_i,b_i\in\mathbf{R}, i=1,2,..,n$. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ зададена со формулата

$$f(x)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad x\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

ја нарекуваме *тригонометриски полином* од степен n.

7.2. Ако ги искористиме адиционите формули (забелешка III.13.17), лесно можеме да ги докажеме формулите

$$\sin x\cos y=\tfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$
$$\sin x\sin y=\tfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)$$
$$\cos x\cos y=\tfrac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],$$

од кои одма следува дека множеството тригонометриски полиноми е алгебра.

Понатаму, од периодичноста на функциите sin и cos следува $f(0)=f(2\pi)$, за секој тригонометриски полином f, па затоа тригонометриските полиноми не ги разделуваат точките 0 и 2π и тоа се единствените точки на $[0,2\pi]$ со ова својство. Навистина, функцијата $p:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$ определена со формулата

$$p(t)=(\cos t,\sin t),\ x\in[0,2\pi] \tag{2}$$

е инјекција на $[0,2\pi)$, што значи дека функцијата p ги разделува точките на $[0,2\pi)$.

Според тоа, ако ги идентификуваме точките 0 и 2π, тогаш ќе можеме да ја примениме теоремата на Стоун-Ваерштрас и на алгебрата тригонометриски полиноми. Ваква идентификација дава фунцијата p определена со (2) и притоа важи

$$p([0,2\pi]) = S(0;1) = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 = 1\},$$

т.е. $p([0,2\pi])$ е единечната кружница во $\mathbf{R}^2$. Јасно, $p([0,2\pi)) = S(0;1)$ и како p е инјекција добиваме дека $p:[0,2\pi) \to S(0;1)$ е биекција. Со $\mathbf{C}_0([0,2\pi])$ да го означиме множеството непрекинати функции $f:[0,2\pi] \to \mathbf{R}$ со својство $f(0) = f(2\pi)$. Очигледно $\mathbf{C}_0([0,2\pi])$ е подмножество од алгебрата $\mathbf{C}([0,2\pi])$ и самото тоа е алгебра. Понатаму, за секоја непрекината функција $f:[0,2\pi] \to \mathbf{R}$ со својство $f(0) = f(2\pi)$ со $f_0 = f \circ p^{-1}$ дефинираме функција $f_0 : S(0;1) \to \mathbf{R}$ и притоа важи $f_0 \circ p = f$. Функцијата f_0 е непрекината, т.е. $f_0 \in \mathbf{C}(S(0;1))$. Навистина, нека U е отворено множесто во $\mathbf{R}$ и нека $V = f_0^{-1}(U)$. Тогаш, од $f^{-1} = p^{-1} \circ f_0^{-1}$ следува

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(f_0^{-1}(U)) = (p^{-1} \circ f_0^{-1})(U) = f^{-1}(U).$$

Множеството U е отворено и како функцијата f е непрекината од теорема X 3.2 следува дека множеството $p^{-1}(V) = f^{-1}(U)$ е отворено множество во $[0,2\pi]$. Сега од лема IX 8.4 следува дека множеството $[0,2\pi] \setminus p^{-1}(V)$ е затворено, што според последица XIII 2.10, теорема на Хајне-Борел, значи дека тоа е компактно. Но, функцијата p е непрекината, па од теорема XIII 4.2 а) следува дека множеството

$$p([0,2\pi] \setminus p^{-1}(V)) = p([0,2\pi]) \setminus p(p^{-1}(V)) = S(0;1) \setminus V$$

е компактно. Сега од последица XIII 1.11 следува дека множеството $S(0;1) \setminus V$ е затворено, па затоа множеството V е отворено. Конечно, од теорема X 3.2 следува дека функцијата f_0 е непрекината.

Ќе докажеме дека функцијата $F : \mathbf{C}_0([0,2\pi]) \to \mathbf{C}(S(0;1))$ определена со

$$F(f) = f_0 = f \circ p^{-1}, \text{ за секој } f \in \mathbf{C}_0([0,2\pi])$$

е изометрија. Јасно, функцијата F е биекција, (проверете!). Понатаму, ако $F(f) = f_0$ и $F(g) = g_0$, тогаш бидејќи $p:[0,2\pi] \to S(0;1)$ е сурјекција добиваме

$$\begin{aligned}\rho_\infty(F(f),F(g)) = \rho_\infty(f_0,g_0) &= \sup\{|f_0(u) - g_0(u)| \mid u \in S(0;1)\}\\ &= \sup\{|f_0(p(t)) - g_0(p(t))| \mid t \in [0,2\pi]\}\\ &= \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0,2\pi]\} = \rho_\infty(f,g),\end{aligned}$$

што значи F е изометрија од алгебрата $\mathbf{C}_0([0,2\pi])$ на алгебрата $\mathbf{C}(S(0;1))$.

Понатаму, со A да ја означиме алгебрата од рестрикциите на тригонометриските полиноми на интервалот $[0,2\pi]$. Јасно, $A \subseteq \mathbf{C}_0([0,2\pi])$, па затоа

$$A_0 = F(A) \subseteq F(\mathbf{C}_0([0,2\pi])) = \mathbf{C}(S(0;1)) .$$

Ако $f_0, g_0 \in A_0$, тогаш постојат $f, g \in A$ такви што $f_0 \circ p = f$ и $g_0 \circ p = g$. Но, A е алгебра, па затоа $(f_0 + g_0) \circ p = f + g \in A$. Според тоа, за функцијата $f + g \in A$ важи $F(f+g) = f_0 + g_0$, т.е. $f_0 + g_0 \in A_0$. Аналогно се докажува дека $f_0 g_0 \in A_0$ и $\alpha f_0 \in A_0$, за секој $\alpha \in \mathbf{R}$, што значи A_0 е алгебра. Понатаму, функцијата $e(t) = 1,\ t \in [0,2\pi]$ припаѓа на алгебрата A. Ставаме $e_0 = F(e)$ и добиваме дека $e_0 \in A_0$ и за секој $u \in S(0;1)$ важи

$$e_0(u) = (e \circ p^{-1})(u) = e(p^{-1}(u)) = 1 ,$$

т.е. A_0 ја содржи функцијата $e_0(u) = 1$, $u \in S(0;1)$. Ќе докажеме дека алгебрата A_0 ги разделува точките на $S(0;1)$. Навистина, ако $u \neq u'$, $u, u' \in S(0;1)$, тогаш бидејќи p е биекција постојат $t, t' \in [0,2\pi]$ такви, што

$$p(t) = u,\ p(t') = u', t \neq t' .$$

Јасно, $\{t, t'\} \neq \{0, 2\pi\}$, па затоа постои тригонометриски полином $f \in A$ таков, што $f(t) \neq f(t')$. Функцијата $f_0 = F(f)$ припаѓа на алгебрата A_0 и притоа важи

$$\begin{aligned} f_0(u) &= f_0(p(t)) = (f_0 \circ p)(t) = f(t) \neq f(t') \\ &= (f_0 \circ p)(t') = f_0(p(t')) = f_0(u'), \end{aligned}$$

т.е. алгебрата A_0 ги разделува точките на $S(0;1)$. Конечно, од теоремата на Стоун-Ваерштрас следува дека множеството A_0 е густо во просторот $\mathbf{C}(S(0;1))$. Но, F е изометрија, па од теорема XI 11.7 следува дека множеството A е густо во просторот $\mathbf{C}_0([0,2\pi])$.

Од претходно изнесеното следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Нека функцијата $g : [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ е непрекината и притоа важи $g(0) = g(2\pi)$. Тогаш, за секој $\varepsilon > 0$ постои тригонометриски полином (1) таков, што

$$| g(t) - f(t) | < \varepsilon \text{, за секој } t \in [0,2\pi] . \ \blacklozenge \qquad (3)$$

7.3. Последица. Ако $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е периодична функција со период 2π, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои тригонометриски полином $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ таков, што

$$| g(t) - f(t) | < \varepsilon \text{, за секој } t \in \mathbf{R} . \qquad (4)$$

Доказ. Доволно е да забележиме дека заради периодичноста на функциите f и g од неравенството (3) следува неравенството (4). ♦

7.4. Забелешка. а) Ако имаме функција со период ω_0, тогаш вршиме апроксимација со тригонометриски полиноми од видот

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos\frac{2k\pi}{\omega_0}x+b_k\sin\frac{2k\pi}{\omega_0}x)\,. \tag{14}$$

б) Условот б) од теоремата на Стоун-Ваерштрас не може да се изостави. Навистина, ако алгебрата $\mathcal{A}\subseteq \mathbf{C}(X)$ не ги раздвојува точките на метричкиот простор (X,ρ), т.е. ако постојат точки $t_0,t_1\in X$, $t_0\neq t_1$ и за секоја функција $f\in\mathcal{A}$ важи $f(t_0)=f(t_1)$, тогаш очигледно $g(t_0)=g(t_1)$, за секоја функција $g\in\overline{\mathcal{A}}$. Последното противречи на лемата на Урисон, според која за точките $t_0,t_1\in X$, $t_0\neq t_1$ постои функција $g\in\mathbf{C}(X)$ таква што $g(t_0)=0\neq 1=g(t_1)$.

8. ЗАДАЧИ

1. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во множеството $\mathbf{C}^{(2)}([0,1])$ таква што $x_n(0)=x_n'(0)=0$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и да претпоставиме дека $|x_n''(t)|\leq 1$, за секој $n\in\mathbf{N}$ и за секој $t\in[0,1]$. Докажете, дека постои подниза од $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ која рамномерно конвергира на $[0,1]$.

2. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа од Риман интеграбилни функции од $[0,1]$ на $\mathbf{R}$ такви што $|x_n(t)|\leq 1$, за секој $t\in[0,1]$. Дефинираме $y_n(t)=\int\limits_0^t x_n(s)ds$, за $n=1,2,\dots$.

   Докажете, дека постои подниза од $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ која рамномерно конвергира на $[0,1]$.

3. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа од непрекинати функции од $[0,1]$ на $\mathbf{R}$ такви што $\int\limits_0^1 (x_n(t))^2\,dt\leq 5$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Дефинираме $y_n:[0,1]\to\mathbf{R}$ со

   $$y_n(t)=\int\limits_0^1\sqrt{t+s}\,x_n(s)ds\,,\text{ за } n=1,2,\dots\,.$$

   а) Најдете константа M таква што $|y_n(t)|\leq M$, за $n=1,2,\dots$.

   б) Докажете, дека постои подниза од $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ која рамномерно конвергира на $[0,1]$.

4. Конструирајте пример на низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f_n:T\to\mathbf{R}$ и функција $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ кој покажува дека ниту еден услов во теоремата на Дини не може да се изостави.

5. Нека T е произволно множество и $f_n, g_n, f, g : T \to \mathbf{R}$, за $n = 1, 2, \ldots$ се реални функции такви што низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата f и низата $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата g. Докажете:
   1) За секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ низата $\{\alpha f_n + \beta g_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $\alpha f + \beta g$.
   2) Ако функциите f и g се ограничени, тогаш низата $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата fg

6. Нека T е произволно множество и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа реални функции $f_n : T \to \mathbf{R}$, за $i = 1, 2, \ldots$. Докажете:
   1) Ако низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата f, тогаш за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секои $m, n > n_0$ и за секој $x \in T$ важи
   $$| f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon .$$
   2) Ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за секои $m, n > n_0$ и за секој $x \in T$ важи $| f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon$, тогаш постои функција f кон која низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира.

7. Нека T е произволно множество и $T_1, T_2 \subseteq T$ се такви што $T_1 \cup T_2 = T$. Ако $f_n, f : T \to \mathbf{R}$, за $n = 1, 2, \ldots$ се реални функции такви што низата $\{f_{n|T_i}\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата $f_{|T_i}$ на T_i, $i = 1, 2$, соодветно, тогаш низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон функцијата f на T.

8. Нека T е произволно множество и $\mathbf{R}^T$ е множеството од сите реални функции $f : T \to \mathbf{R}$. Докажете, дека
   1) функцијата $\rho(\mathbf{R}^T, \mathbf{R}^T) \to \mathbf{R}$ определена со
   $$\rho(f, g) = \sup\{\tfrac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|} \mid t \in T\}, \;\; f, g \in \mathbf{R}^T$$
   е метрика на $\mathbf{R}^T$,
   2) низата функции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ од $\mathbf{R}^T$ рамномерно конвергира кон функцијата $f \in \mathbf{R}^T$ ако и само ако низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон f во смисла на метриката ρ.

9. Нека T е произволно множество и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ е ред ограничени реални функции, т.е. $f_n \in \mathbf{B}(T)$. Докажете дека низата парцијални суми $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n$ е

Кошиева во $\mathbf{B}(T)$ ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $k_0 \in \mathbf{N}$ таков, што за секои $m, k > k_0$, $k > m$ важи $|\sum\limits_{n=m+1}^{k} f_n(x)| < \varepsilon$, за секој $x \in T$.

10. Нека T е произволно множество и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ се две низи реални функции определени на T. Докажете дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ рамномерно конвергира на T ако се исполнети условите:
    1) низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа на T,
    2) низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рамномерно конвергира кон 0 и
    3) парцијалните суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ се рамномерно ограничени.

11. Нека (X, d) е метрички простор и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа функции $f_n : X \to \mathbf{R}$ која рамномерно конвергира кон функцијата $f : X \to \mathbf{R}$. Докажете, ако секоја од функциите $f_n : X \to \mathbf{R}$ е рамномерно непрекината, тогаш и функцијата $f : X \to \mathbf{R}$ е рамномерно непрекината.

12. Нека T е произволно множество и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ се две низи реални функции определени на T. Докажете, дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ рамномерно конвергира на T ако се исполнети условите:
    1) низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона и рамномерно ограничена, и
    2) редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ рамномерно конвергира.

13. Нека X и Y се компактни метрички простори. Со $\mathcal{A}$ да ја означиме алгебрата од сите функции $h \in \mathbf{C}(X \times Y)$, кои можат да се запишат во видот
$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y),$$
за некој природен број n и функции $f_1, ..., f_n \in \mathbf{C}(X)$ и $g_1, ..., g_n \in \mathbf{C}(Y)$. Докажете, дека алгебрата $\mathcal{A}$ е секаде густа во $\mathbf{C}(X \times Y)$.

14. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа функции во $\mathbf{C}([a, b])$ која ги разделува точките на $[a, b]$. Докажете, дека за секоја функција $f \in \mathbf{C}([a, b])$ и за секој $\varepsilon > 0$ постои $m \in \mathbf{N}$ и постои $F \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^m)$ такви, што
$$| f(x) - F(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) | < \varepsilon, \text{ за секој } x \in [a, b].$$

15. Нека $[a,b]\subset[0,+\infty)$ и $\mathcal{A}$ е фамилијата од сите конечни линеарни комбинации на функциите $f_n(x)=x^{2n}, x\in[a,b], n\geq 0$. Применете ја теоремата на Стоун-Ваерштрас на множеството $\mathcal{A}$ во просторот $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_\infty)$.

16. За функциите $f(x)=1$ и $g(x)=x$, $x\in[a,b]$, кои ги разделуваат точките на $[a,b]$, конструирајте алгебра на функции која ги содржи f и g.

17. Нека е даден интервалот $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$. Докажете, дека секоја непрекината функција $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ може доволно добро да се апроксимира со функции од видот:

    1) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k e^{kt}$, $\lambda_k\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$.

    2) $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k e^{-kt}$, $\lambda_k\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$.

18. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор. Докажете дека алгебрата $\mathbf{C}(X)$ е сепарабилна.

19. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и $\mathcal{A}\subseteq\mathbf{C}(X)$ е алгебра која ги разделува точките на X и има својство да за секој $x\in X$ постои функција $f_x\in\mathcal{A}$ таков што $f_x(x)\neq 0$. Докажете, дека за секои $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$ и за секои $a_1,a_2\in\mathbf{R}$ постои $f\in\mathcal{A}$ таков што $f(x_1)=a_1$ и $f(x_2)=a_2$.

20. Нека $f:X\to\mathbf{R}$ е реална функција дефинирана на метричкиот простор (X,ρ). *Носач на функцијата* f е затворачот на множеството $\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}$. Нека (X,ρ) е компактен метрички простор и $\mathcal{A}\subseteq\mathbf{C}(X)$ е затворена подалгебра таква што $\mathcal{A}$ ги разделува точките на X. Докажете дека $\mathcal{A}=\mathbf{C}(X)$ или постои точка $x_0\in X$ таква што
$$\mathcal{A}=\{f\in\mathbf{C}(X)\mid f(x_0)=0\}.$$

21. Нека (X,ρ) е локално компактен метрички простор и $\mathbf{C}_c(X)$ е множеството од сите непрекинати реални функции $f:X\to\mathbf{R}$ со *компактен носач*. Докажете:

    1) $\mathbf{C}_c(X)$ е подалгебра од алгебрата $\mathbf{BC}(X)$ од сите непрекинати и ограничени функции $f:X\to\mathbf{R}$.

    2) Ако $X=\mathbf{R}$, тогаш алгебрата $\mathbf{C}_c(X)$ не е комплетна.

22. Нека (X,ρ) е локално компактен метрички простор и $\mathbf{C}_0(X)$ е множеството од сите непрекинати реални функции $f:X\to\mathbf{R}$ со својство за секој $\varepsilon>0$ постои компактно множество $F\subseteq X$ такво, што $|f(x)|<\varepsilon$ за $x\in X\setminus F$. Докажете:

1) $\mathbf{C}_0(X)$ е подалгебра од алгебрата $\mathbf{BC}(X)$ од сите непрекинати и ограничени функции $f : X \to \mathbf{R}$.
2) Алгебрата $\mathbf{C}_c(X)$ непрекинати функции со компактен носач е подалгебра од алгебрата $\mathbf{C}_0(X)$.

23. Нека (X, ρ) е локално компактен метрички простор и $A \subseteq \mathbf{C}_0(X)$ е затворена подалгебра со својство A ги раздвојува точките на X. Докажете дека $A = \mathbf{C}_0(X)$ или постои точка $x_0 \in X$ таква, што

$$A = \{f \in \mathbf{C}_0(X) \mid f(x_0) = 0\}.$$

24. Нека (X, ρ) е компактен метрички простор и $(\mathbf{C}(X), \rho_\infty)$ е алгебрата непрекинати реални функции. Докажете дека множеството $A \subseteq \mathbf{C}(X)$ е релативно компактно ако и само ако се исполнети следниве својства:
1) множеството A е ограничено,
2) за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков, што за секоја функција $f \in A$ и за секои $x, y \in A$ за кои $\rho(x, y) < \delta$ важи $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

ДОДАТОК 1

ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

1. ПОЛИНОМИ СО КОМПЛЕКСНИ КОЕФИЦИЕНТИ

1.1. Во точка III 10 ги разгледавме полиномите со реални коефициенти. Притоа, како што рековме, при изучувањето на овие полиноми од посебна важност е основната теорема на алгебрата (теорема III 10.8), според која секој неконстантен полином со реални коефициенти има барем една комплексна нула. Доказот на оваа фундаментална теорема најчесто е предмет на изучување на комплексната анализа, меѓутоа, во овој додаток истата ќе ја докажеме користејќи ја непрекинатоста на функција дефинирана на метрички простор. Притоа, ќе бидат докажани неколку тврдења кои се аналогни на тврдењата од точка III 10, меѓутоа доказите нема да бидат аналогни на претходно презентираните докази. Ваквиот пристап е прифатен сè со цел да се покаже како содржини од еден ист вид можат да се обработуваат со различни теоретски и методски пристапи.

Пред да преминеме на натамошните разгледувања, да забележиме дека функцијата $\rho : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ определена со

$$\rho(z, w) = |z - w|, \text{ за секои } z, w \in \mathbf{C},$$

е метрика на множеството комплексни броеви $\mathbf{C}$. Притоа, точноста на аксиомите за метрика непосредно следува од теоремите I 30.10 и 31.10.

Овде, уште ќе забележиме дека функцијата $f : (\mathbf{R}^2, \rho_2) \to (\mathbf{C}, \rho)$ определена со $f((a,b)) = a + ib$ е изометрија (проверете!). Понатаму, од лемите IX 12.7 и 12.10 следува дека f е непрекината функција. Сега од последица IX 10.15 и забелешка IX 14.2 следува дека за секој $r > 0$ множеството $\overline{B}(0; r)$ е компактно во $\mathbf{C}$.

1.2. Дефиниција. Нека $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0,1,...,n$. Функцијата $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ дефинирана со

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

ја нарекуваме *полином со комплексни коефициенти* $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0,1,...,n$.

Полиномот $P(z)=a$, за секој $z\in\mathbf{C}$ го нарекуваме *константен полином,* а константниот полиномот $P(z)=0$, за секој $z\in\mathbf{C}$ го нарекуваме *нулти полином*.

1.3. Забелешка. Некои од коефициентите $a_i\in\mathbf{C}$, $i=0,1,...,n$ на полиномот $P(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz^i$ или сите коефициенти можат да бидат еднакви на нула. Затоа, ако го додадеме собирокот

$$0\cdot z^{n+1}+0\cdot z^{n+2}+...+0\cdot z^m,\ m>n\,,$$

ја добиваме истата функција која само е запишана со поголем број собирци.

1.4. Лема. Полиномите

$$P(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i \ \text{ и } \ Q(z)=\sum_{i=0}^{m}b_iz^i$$

се еднакви ако и само ако $m=n$ и $a_i=b_i,\ i=0,1,2,...,n$.

Доказ. $\Leftarrow$. Нека $m=n$ и $a_i=b_i,\ i=0,1,2,...,n$. Тогаш, $P(z)=Q(z)$, за секој $z\in\mathbf{C}$, што значи дека полиномите се еднакви.

$\Rightarrow$. Нека $P(z)=Q(z)$, за секој $z\in\mathbf{C}$. Согласно со забелешка 1.3 можеме да сметаме дека и двата полинома имаат ист број собирци, т.е. дека $m=n$. Ставаме $z=0$ и добиваме $a_0=b_0$. Заменуваме во равенството $P(z)=Q(z)$ и добиваме

$$a_0+\sum_{i=1}^{n}a_iz^i=a_0+\sum_{i=1}^{n}b_iz^i\ \text{, т.е. }\ \sum_{i=1}^{n}a_iz^i=\sum_{i=1}^{n}b_iz^i\,.$$

Според тоа, $z(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iz^{i-1})=z(\sum\limits_{i=1}^{n}b_iz^{i-1})$, за секој $z\in\mathbf{C}$, па од теорема I 30.13 следува дека

$$\sum_{i=1}^{n}a_iz^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}b_iz^{i-1}\,.$$

Ако во последното равенство ставиме $z=0$, добиваме $a_1=b_1$. Продолжувајќи ја постапката, на потполно аналоген начин добиваме дека $a_i=b_i,\ i=2,...,n$. Конечно, $a_i=b_i,\ i=0,1,2,...,n$, што и требаше да се докаже. ♦

1.5. Дефиниција. Записот на полиномот $P(z)$ во видот

$$P(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i\ ,\ a_n\neq 0$$

го нарекуваме *нормален запис*, бројот $n = \deg P$ во овој случај го нарекуваме *степен на полиномот,* собирокот $a_n z^n$ го нарекуваме *водечки член,* а коефициентите a_n и a_0 ги нарекуваме *водечки коефициент* и *слободен член*, соодветно.

1.6. Дефиниција. Нека се дадени полиномите $P(z)$ и $G(z)$ со степенени $\deg P = n$ и $\deg G = s$, $s \le n$, соодветно, т.е.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \ , \tag{1}$$

$$G(z) = \sum_{i=0}^{s} b_i z^i \ . \tag{2}$$

Полиномот

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i z^i \ ,$$

каде $c_i = a_i + b_i$, за $i \le s$ и $c_i = a_i$, за $i > s$ го нарекуваме *збир* на полиномите $P(z)$ и $G(z)$. Притоа ја користиме ознаката $F(z) = P(z) + G(z)$.

Полиномот

$$T(z) = \sum_{i=1}^{n+s} d_i z^i$$

каде $d_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l$, за $i = 0,1,...,n+s$ го нарекуваме *производ на полиномите* $P(z)$ и $G(z)$. Притоа ја користиме ознаката $T(z) = P(z)G(z)$.

1.7. Забелешка. а) Степенот на збирот на полиномите (1) и (2) е еднаков на n ако $n > s$, но ако $n = s$, тогаш тој може да биде и помал од n во случај кога $b_n - a_n = 0$.

б) Кај производот на полиномите (1) и (2), ако тие се ненулти, имаме $d_{n+s} = a_n b_s \ne 0$, па затоа степенот на ненулти полиноми е еднаков на збирот на степените на множителите.

в) Парцијален случај на производ на полиноми е *производот* $\alpha P(z)$ *на полиномот* $P(z)$ *со комплексниот број* α , бидејќи секој комплексен број всушност е константен полином.

1.8. Теорема. Нека се дадени полиномите $P(z)$ и $G(z)$, $G(z) \ne 0$. Тогаш постојат единствени полиноми $Q(z)$ и $R(z)$ такви, што

$$P(z) = G(z)Q(z) + R(z) \ , \tag{3}$$

при што степенот на $R(z)$ е помал од степенот на $G(z)$ или $R(z) = 0$.

Доказ. Нека полиномите $P(z)$ и $G(z)$ имаат степени n и s, соодветно. Ако $n < s$ или $P(z) = 0$, тогаш во разложувањето (3) можеме да ставиме $Q(z) = 0$, $R(z) = P(z)$. Затоа нека претпоставиме, дека $n \geq s$.

Да ги запишеме нормалните видови (1) и (2) на полиномите $P(z)$ и $Q(z)$ и да ставиме

$$P(z) - \frac{a_n}{b_s} z^{n-s} G(z) = P_1(z). \tag{4}$$

Нека степенот на полиномот $P_1(z)$ е еднаков на n_1 и нека неговиот водечки коефициент е еднаков на $a_{n_1}^{(1)}$. Јасно, $n_1 < n$. Ако $n_1 \geq s$, тогаш ставаме

$$P_1(z) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_s} z^{n_1-s} G(z) = P_2(z). \tag{5}$$

Нека степенот на полиномот $P_2(z)$ е еднаков на n_2 и нека неговиот водечки коефициент е еднаков на $a_{n_2}^{(2)}$. Јасно, $n_2 < n_1$. Ако $n_2 \geq s$, тогаш ставаме

$$P_2(z) - \frac{a_{n_2}^{(2)}}{b_s} z^{n_2-s} G(z) = P_3(z) \tag{6}$$

итн.

Степените на полиномите $P_1(z)$, $P_2(z)$, $P_3(z),\ldots$ опаѓаат. Затоа после конечен број чекори ќе добиеме равенство

$$P_{k-1}(z) - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_s} z^{n_{k-1}-s} G(z) = P_k(z) \tag{7}$$

во кое или $P_k(z)$ е нулти полином или неговиот степен n_k е помал од s, при што постапката застанува. Сега од равенствата (4) - (7) добиваме

$$P(z) - (\frac{a_n}{b_s} z^{n-s} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_s} z^{n_1-s} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_s} z^{n_1-s} + \ldots + \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_s} z^{n_{k-1}-s}) G(z) = P_k(z).$$

Последното значи дека полиномите

$$Q(z) = \frac{a_n}{b_s} z^{n-s} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_s} z^{n_1-s} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_s} z^{n_1-s} + \ldots + \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_s} z^{n_{k-1}-s},$$
$$R(z) = P_k(z),$$

го задоволуваат равенството (3), при што степенот на $R(z)$ е помал од степенот на $G(z)$ или $R(z) = 0$.

Останува да ја докажеме единственоста на полиномите $Q(z)$ и $R(z)$. Нека претпоставиме дека постојат полиноми $Q'(z)$ и $R'(z)$, за кои

$$P(z) = G(z)Q'(z) + R'(z),$$

при што степенот на $R'(z)$ е помал од степенот на $G(z)$ или $R'(z) = 0$. Тогаш

$$G(z)[Q(z)-Q'(z)] = R'(z)-R(z)\,. \qquad (8)$$

Полиномот на десната страна или е нулти полином или неговиот степен е помал од степенот на полиномот $G(z)$. Полиномот пак на левата страна, при

$$Q(z)-Q'(z) \neq 0\,,$$

има степен кој не е помал од степенот на $G(z)$. Затоа равенството (8) е можно ако и само ако

$$Q(z) = Q'(z)\,,\ R(z) = R'(z)\,,$$

од што следува единственоста на претставувањето (3). ♦

1.9. Дефиниција. Полиномот $Q(z)$ од разложувањето (3) го нарекуваме *количник* од делењето на полиномите $P(z)$ и $G(z)$, полиномот $R(z)$ го нарекуваме *остаток* од делењето на $P(z)$ и $G(z)$, а полиномите $P(z)$ и $G(z)$ ги нарекуваме *деленик* и *делител*, соодветно.

Ако во равенството (3) важи $R(z)=0$, тогаш ќе велиме дека *полиномот* $P(z)$ *се дели* со полиномот $G(z)$ и ќе пишуваме $G(z)\,|\,P(z)$.

1.10. Дефиниција. Комплексниот број a го нарекуваме *нула* (*корен*) *на полиномот* $P(z)$ ако $P(a)=0$.

1.11. Да го разгледаме делењето на произволен неконстантен полином $P(z)$ со полиномот од прва степен $z-a$. Имаме

$$P(z) = (z-a)Q(z) + R(z)\,. \qquad (9)$$

Бидејќи степенот на полиномот $R(z)$ мора да биде помал од степенот на полиномот $z-a$, добиваме дека $R(z)$ е полином од нулта степен, т.е. тој е константен полином. За да ја определиме оваа константа, во равенството (9) ќе ставиме $z=a$ и добиваме $R(a)=P(a)$, што значи дека

$$P(z) = (z-a)Q(z) + P(a)\,. \qquad (9)$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема. Полиномот $P(z)$ се дели со полиномот $z-a$ ако и само ако $P(a)=0$. ♦

1.12. Лема. Нека $a \in \mathbf{C}$. Секој полином $P_n(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_n \neq 0$ на единствен начин може да се претстави во следниов вид

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i (z-a)^i\,,\ A_n \neq 0\,, \qquad (10)$$

каде $A_i \in \mathbf{C}$, $i = 0,1,2,...,n$.

Доказ. Ако го поделиме полиномот $P_n(z)$ со полиномот $z-a$, тогаш согласно со теорема 1.8 добиваме количник $Q_1(z)$ и остаток A_0, за кои важи равенството

$$P(z) = (z-a)Q_1(z) + A_0. \tag{11}$$

Ако $Q_1(z)$ е константен полином, тогаш разложувањето (10) е добиено. Ако $Q_1(z)$ е неконстантен полином, тогаш го делиме $Q_1(z)$ со $z-a$ и добиваме

$$Q_1(z) = (z-a)Q_2(z) + A_1. \tag{12}$$

Од (11) и (12) следува

$$P_n(z) = (z-a)^2 Q_2(z) + A_1(z-a) + A_0.$$

Ако $Q_2(z)$ е константен полином, тогаш е добиено бараното разложување, а ако не е тогаш постапката ја продолжуваме. Бидејќи степените на полиномите $Q_1(z)$, $Q_2(z)$, ... во секој чекор се намалуваат за еден, после n чекори постапката ќе заврши и ќе го добиеме разложувањето (10).

Единственоста на претставувањето (10) следува од теорема 1.8, според која во секој чекор од првиот дел од доказот константата A_i и полиномот Q_{i+1}, $i = 0,1,...,n-1$ се единствени. ♦

2. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

2.1. Теорема. Секој полином $P:\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ е непрекината функција од метричкиот простор $(\mathbf{C},\rho)$ во метричкиот простор $(\mathbf{C},\rho)$.

Доказ. Нека е даден полиномот

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \tag{1}$$

и нека $z_0 \in \mathbf{C}$ и $\varepsilon > 0$ е произволно. Треба да докажеме дека постои $\delta > 0$ таков, што од $\rho(z,z_0) < \delta$ следува $\rho(P(z),P(z_0)) < \varepsilon$.

Согласно лема 1.12 полиномот (1) можеме да го запишеме во видот

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i (z-z_0)^i. \tag{2}$$

Понатаму, ако во (2) ставиме $z = z_0$, добиваме $A_0 = P(z_0)$, па затоа од (2) добиваме

$$P(z) - P(z_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i (z-z_0)^i,$$

и ако во последното равенство ставиме $h = z - z_0$ добиваме

$$P(z) - P(z_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i h^i \ . \tag{3}$$

Од равенството (3) и од својствата на комплексните броеви следува

$$\rho(P(z), P(z_0)) = | P(z) - P(z_0) | = | \sum_{i=1}^{n} A_i h^i | \le \sum_{i=1}^{n} | A_i | \bullet | h |^i \ . \tag{4}$$

Функцијата $A(| h |) = \sum_{i=1}^{n} | A_i | \bullet | h |^i$ е полином со реални коефициенти $| A_i |, i = 1, ..., n$ и реална променлива $| h |$, па од теорема III 10.28 следува дека таа е непрекината на целата реална права, што значи е непрекината и во нулата. Според тоа, за даденото $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што $| h | < \delta$ следува

$$A(| h |) = | A(| h |) - A(| 0 |) | < \varepsilon \ . \tag{5}$$

Конечно, од (4) и (5) следува дека за даденото $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што од $\rho(z, z_0) = | h | < \delta$ следува

$$\rho(P(z), P(z_0)) \le A(| h |) < \varepsilon \ ,$$

т.е. полиномот $P(z)$ е непрекинат во точката z_0. Сега тврдењето следува од произволноста на $z_0 \in \mathbf{C}$. ♦

2.2. Последица. За секој полином $P(z)$ функцијата $| P | : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ е непрекината на целиот простор $(\mathbf{C}, \rho)$.

Доказ. Непосредно следува од претходната теорема и неравенството

$$|| P(z) | - | P(z_0) || \le | P(z) - P(z_0) | \ .$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2.3. Последица. Ако низата комплексни броеви $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира кон комплексниот број z_0, тогаш за секој полином $P(z)$ важи

$$\lim_{k \to \infty} P(z_k) = P(z_0) \ .$$

Доказ. Непосредно следува од забелешка X 2.4 б) и од теоремата X 11.3. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

2.4. Лема. Нека за полиномот $P(z), \deg P > 0$ важи $P(z_0) \ne 0$. Тогаш постои $h \in \mathbf{C}$ таков што

$$| P(z_0 + h) | < | P(z_0) | \ .$$

Доказ. Нека во разложувањето (3), меѓу коефициентите $A_i, i = 1, 2, ..., n$ првиот различен од нула е коефициентот A_k. Земаме

$$h = t\sqrt[k]{-\frac{P(z_0)}{A_k}}\ , \tag{6}$$

при што во за $k-$от корен било која од можните k вредности и $t \in [0,1]$. Да ставиме

$$B_i = A_i(\sqrt[k]{-\frac{P(z_0)}{A_k}})^i\ ,\ i = k+1,...,n\ .$$

Тогаш од (6) следува

$$A_k h^k = A_k h^k = A_k t^k (\sqrt[k]{-\frac{P(z_0)}{A_k}})^k = -P(z_0)t^k$$

и

$$A_i h^i = A_i t^i (\sqrt[k]{-\frac{P(z_0)}{A_k}})^i = t^i B_i\ , \text{ за } i = k+1,...,n$$

и ако замениме во (3), имајќи предвид дека $t \in [0,1]$, добиваме

$$\begin{aligned} |P(z_0+h)| &= |P(z_0) + A_k h^k + A_{k+1}h^{k+1} + ... + A_n h^n| \\ &= |P(z_0) - P(z_0)t^k + B_{k+1}t^{k+1} + ... + B_n t^n| \\ &= |P(z_0)(1-t^k) + B_{k+1}t^{k+1} + ... + B_n t^n| \\ &\le |P(z_0)|(1-t^k) + |B_{k+1}|t^{k+1} + ... + |B_n|t^n \\ &= |P(z_0)| + t^k(-|P(z_0)| + |B_{k+1}|t + ... + |B_n|t^{n-k}) \\ &= |P(z_0)| + t^k B(t) \end{aligned}$$

односно

$$|P(z_0+h)| \le |P(z_0)| + t^k B(t)\ . \tag{7}$$

Функцијата $B(t)$ е полином со реални коефициенти и реален аргумент t. Таа е непрекината функција и важи $B(0) = -|P(z_0)| < 0$, па затоа од теорема III 2.2 следува дека постои $t_0 \in (0,1]$ таков што $B(t_0) < 0$. Конечно, од неравенството (7) добиваме дека за комплексниот број $h_0 = t_0\sqrt[k]{-\frac{P(z_0)}{A_k}}$ важи

$$|P(z_0+h_0)| \le |P(z_0)| + t_0^k B(t_0) < |P(z_0)|\ . \ ♦$$

2.5. Лема. Нека $P(z), \deg P > 0$ полином и нека множеството вредности на низата $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ е неограничено. Тогаш постои подниза $\{z_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ на низата $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ таква што

$$\lim_{i\to\infty} |P(z_{k_i})| = +\infty\ .$$

Доказ. Од неограничeноста на низата $\{z_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ следува дека за секој $i \in \mathbf{N}$ постои z_{k_i} таков што $|z_{k_i}| = \rho(z_{k_i}, 0) > i$. Според тоа, за поднизата $\{z_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ важи

$$\lim_{i\to\infty} |z_{k_i}| = +\infty .$$

Нека е даден полиномот $P(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p$. Тогаш

$$|a_n| \bullet |z|^n = |a_n z^n| = |P(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p| \le |P(z)| + \sum_{p=0}^{n-1} |a_p| \bullet |z|^p$$

па затоа

$$|a_n| \bullet |z|^n \ (1 - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{|a_n|} \bullet |z|^{-n+p}) \le |P(z)| . \tag{8}$$

Левата страна на неравенството (8) е реална функција и како

$$\lim_{i\to\infty} |z_{k_i}| = +\infty \ \text{ и } \ \lim_{i\to\infty} (1 - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{|a_n|} \bullet |z_{k_i}|^{-n+p}) = 1$$

добиваме

$$\begin{aligned} +\infty &= \lim_{i\to\infty} |a_n| \bullet |z_{k_i}|^n \bullet \lim_{i\to\infty} (1 - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{|a_n|} \bullet |z_{k_i}|^{-n+p}) \\ &= \lim_{i\to\infty} [|a_n| \bullet |z_{k_i}|^n \ (1 - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{|a_n|} \bullet |z_{k_i}|^{-n+p})] \le \lim_{i\to\infty} |P(z_{k_i})| \end{aligned}$$

односно

$$\lim_{i\to\infty} |P(z_{k_i})| = +\infty . \ \blacklozenge$$

2.6. Теорема (основна теорема на алгебрата). Секој полином со комплексни коефициенти $P(z)$, $\deg P > 0$ има барем еден комплексен корен.

Доказ. Да го разгледаме множеството

$$A = \{|P(z)| \mid z \in \mathbf{C}\} .$$

Од $|P(z)| \ge 0$, за секој $z \in \mathbf{C}$ следува дека A е од долу ограничено множество реални броеви. Според теорема I 18.1 непразното ограничено од долу множество $A \subseteq \mathbf{R}$ има инфимум и нека $a = \inf A = \inf\{|P(z)| \mid z \in \mathbf{C}\}$. Последното значи, дека за секој $k \in \mathbf{N}$ постои $z_k \in \mathbf{C}$ таков што $0 \le |P(z_k)| - a < 2^{-k}$, па затоа

$$\lim_{k\to\infty} |P(z_k)| = a . \tag{9}$$

Нека претпоставиме дека множеството вредности на низата $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ е неограничено. Но, тогаш од лема 2.5 следува дека постои подниза $\{z_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ на низата $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ таква што $\lim_{i\to\infty} |P(z_{k_i})| = +\infty$, што противречи на (9). Според тоа, множеството вредности на низата $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничено, т.е. постои $r > 0$ таков што

$z_k \in \overline{B}(0;r)$, за $k = 1,2,\dots$. Но, $\overline{B}(0;r)$ е компактно множество, па од теоремата на Болцано-Ваерштрас (теорема XIII 3.1) следува дека низата $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ содржи конвергентна подниза $\{z_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Нека $\lim\limits_{i\to\infty} z_{k_i} = z_0$. Сега од последица 2.2 следува дека

$$\lim_{i\to\infty} |P(z_{k_i})| = |P(z_0)| = a .$$

Ако $a \neq 0$, тогаш од лема 2.4 следува дека постои комплексен број z_1 таков што $|P(z_1)| < |P(z_0)| = a$, што противречи на $a = \inf A = \inf\{|P(z)| \mid z \in \mathbf{C}\}$. Конечно, од добиената противречност следува дека $a = 0$, што значи дека постои комплексен број z_0 таков што $|P(z_0)| = 0$, односно $P(z_0) = 0$. Последното значи дека z_0 е корен на полиномот $P(z)$, што и требаше да се докаже. ♦

2.7. Како што видовме корените на полином со реални коефициенти не мора да се реални броеви, но според теорема 2.6 полином со комплексни коефициенти има барем еден комплексен корен. Јасно, ова е суштинска разлика меѓу реалните и комплексните корени и во таа смисла ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Полето $\mathbf{K}$ го нарекуваме *алгебарски затворено*, ако секој полином P, $\deg P > 0$ со коефициенти од $\mathbf{K}$ има барем еден корен од $\mathbf{K}$.

2.8. Забелешка. Од претходно изнесеното следува, дека полето реални броеви $\mathbf{R}$ не е алгебарски затворено, а додека полето комплексни броеви $\mathbf{C}$ е алгебарски затворено.

3. ПОСЛЕДИЦИ ОД ОСНОВНАТА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

3.1. Според теорема 2.6 полином $P(z)$, $\deg P = n > 0$ со комплексни коефициенти има барем еден корен z_1. Според лема 1.11 имаме $(z - z_1) \mid P(z)$, односно

$$P(z) = (z - z_1)Q(z) , \tag{1}$$

при што $Q(z)$ е полином со комплексни коефициенти и $\deg Q = n - 1$. Аналогно како во претходниот случај, ако $n \geq 2$ добиваме, дека полиномот $Q(z)$ има корен z_2 и притоа важи

$$Q(z) = (z - z_2)G(z) . \tag{2}$$

Сега од (1) и (2) следува

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)G(z) .$$

Продолжувајќи ја постапката, за полиномот $P(z)$ го добиваме следново разложување на линеарни множители

$$P(z)=b(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$$

каде $b\in\mathbf{C}$. Ако се ослободиме од заградите во последното равенство и ги спореДиме добиените коефициенти пред соодветните степени со коефициентите a_i на полиномот $P(z)$, добиваме дека $b=a_n$.

Меѓу броевите $z_1,z_2,...,z_n$ може да има еднакви меѓу себе. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $z_1,z_2,...,z_r$ се по парови различни, а секој од броевите $z_{r+1},z_{r+2},...,z_n$ е еднаков на некој од првите r броеви. Тогаш полиномот $P(z)$ може да се запише во видот

$$P(z)=a_n(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}...(z-z_r)^{n_r}, \tag{3}$$

каде $z_i\neq z_k$, за $i\neq k$ и $n_1+n_2+...+n_k=n$.

Дефиниција. Разложувањето (3) го нарекуваме *канонично разложување на полиномот* $P(z)$ на множители.

3.2. Лема. Каноничното разложување на полиномот $P(z)$ на множители е единствено до точност на редослед на множителите.

Доказ. Нека претпоставиме дека освен каноничното разложување (3) за полиномот $P(z)$ имаме уште едно канонично разложување

$$P(z)=a_n(z-w_1)^{k_1}(z-w_2)^{k_2}...(z-w_m)^{k_m}.$$

Тогаш точно е равенството

$$(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}...(z-z_r)^{n_r}=(z-w_1)^{k_1}(z-w_2)^{k_2}...(z-w_m)^{k_m}. \tag{4}$$

Нека претпоставиме дека $z_i\notin\{w_1,w_2,...,w_m\}$, за некој $i=1,2,...,r$. Ако во (4) замениме $z=z_i$, тогаш левата страна на (4) ќе биде еднаква нула, а десната страна ќе биде еднаква на комплексен број, различен од нула, што не е можно. Според тоа, за секој $i=1,2,...,r$ имаме $z_i\in\{w_1,w_2,...,w_m\}$. Аналогно се добива дека за секој $j=1,2,...,m$ важи $w_j\in\{z_1,z_2,...,z_r\}$. Од досега изнесеното следува дека, ако постојат две канонични разложувања на полиномот $P(z)$, тогаш равенството (4) мора да биде од видот

$$(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}...(z-z_r)^{n_r}=(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}...(z-z_r)^{k_r}. \tag{5}$$

Нека претпоставиме дека $n_1\neq k_1$ и нека заради определеност $n_1>k_1$. Ако двете страни на равенството (5) ги поделиме со $(z-z_1)^{k_1}$, го добиваме равенството

$$(z-z_1)^{n_1-k_1}(z-z_2)^{n_2}...(z-z_r)^{n_r}=(z-z_2)^{k_2}...(z-z_r)^{k_r}.$$

Понатаму, во последното равенство заменуваме $z=z_1$ и добиваме дека неговата лева страна ќе биде еднаква на нула, а десната страна ќе биде еднаква на комплексен број различен од нула, што е противречност. Од добиената противречност следува $n_1 = k_1$. Од наполно исти причини следува дека $n_i = k_i$, за $i = 2,3,...,r$, што значи дека каноничното разложување на полиномот $P(z)$ е единствено. ♦

3.3. Дефиниција. Ако во каноничното разложување (3) на полиномот $P(z)$ важи $n_i = 1$, тогаш за z_i ќе велиме дека е *прост корен на полиномот* $P(z)$, а ако $n_i > 1$, тогаш за z_i ќе велиме дека е *повеќекратен корен на полиномот* $P(z)$.

Во каноничното разложување (3) природниот број n_i го нарекуваме *кратност на коренот* .

3.4. Лема. Секој полином со комплексни коефициенти $P(z), \deg P = n > 0$ има точно n корени, ако секој од корените го броиме онолку пати колку што е неговата кратност.

Доказ. Непосредно следува од претходните разгледувања. ♦

3.5. Овде, уште ќе забележиме дека за полиномите со комплексни коефициенти важат аналогни тврдења на дел од тврдењата кои важат за полиномите со реални коефициенти. Имено, на потполно аналоген начин, како и во случајот на полиноми со реални коефициенти, може да се докажат следниве тврдења.

Теорема. Полином $P(x), \deg P = n > 0$, не може да се анулира за повеќе од n различни комплексни броеви. ♦

Последица. Дадени се полиномите $P(x)$ и $Q(x), \deg P = \deg Q = n > 0$. Ако постојат комплексни броеви $z_i, i = 1,2,3,...,n+1$ такви, што $z_i \neq z_j$, за $i \neq j$ и $P(x_i) = Q(x_i)$, за секој $i = 1,2,3,...,n+1$, тогаш $P(x) \equiv Q(x)$, т.е. полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се идентични. ♦

3.6. Интерполационен полином на Лагранж. Според теорема 3.5 секој полином $P(x), \deg P \leq n > 0$ е наполно определен со своите вредности при секои $n+1$ вредности на аргументот. Последното ни овозможува да го определеиме полиномот ако ги знаеме овие вредности. Навистина, нека полиномот $P(z)$ за вредностите на аргументот $\alpha_i, i = 1,2,...,n+1$ прима вредности $P(\alpha_i), i = 1,2,...,n+1$. Полиномот

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{n+1} P(\alpha_i) \frac{(z-\alpha_1)...(z-\alpha_{i-1})(z-\alpha_{i+1})...(z-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)...(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})...(\alpha_i-\alpha_{n+1})}$$

за вредностите на аргументот $\alpha_i, i = 1,2,...,n+1$ прима вредности $P(\alpha_i), i = 1,...,n+1$, па од теорема 3.5 следува дека $P(z) = Q(z)$, т.е.

$$P(z) = \sum_{i=1}^{n+1} P(\alpha_i) \frac{(z-\alpha_1)...(z-\alpha_{i-1})(z-\alpha_{i+1})...(z-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)...(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})...(\alpha_i-\alpha_{n+1})}.$$

Вака најдениот вид за полиномот $P(z)$ го нарекуваме *интерполационен полином на Лагранж* за полиномот $P(z)$.

3.7. Виетови формули. Да го разгледаме полиномот

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \ , \ a_n \neq 0 \tag{6}$$

и нека $z_1, z_2, ..., z_n$ се неговите корени, запишани онолку пати колку што е нивната кратност. Тогаш

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) . \tag{7}$$

Ако во (7) се ослободиме од заградите и после сведувањето на сличните членови ги споредиме коефициентите со (7) ги добиваме равенствата

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(z_1 + z_2 + ... + z_n) \\
&\frac{a_{n-2}}{a_n} = +(z_1 z_2 + z_1 z_3 + ... + z_1 z_n + z_2 z_3 + ... + z_2 z_n + ... + z_{n-1} z_n) \\
&\frac{a_{n-3}}{a_n} = +(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + ... + z_1 z_2 z_n + ... + z_{n-2} z_{n-1} z_n) \\
&\text{...} \\
&\frac{a_1}{a_n} = (-1)^{n-1} (z_1 z_2 ... z_{n-1} + z_1 ... z_{n-2} z_n + ... + z_2 z_3 ... z_n) \\
&\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n z_1 z_2 ... z_n ,
\end{aligned} \tag{8}$$

со чија помош ги изразуваме коефициентите $a_i, i = 0,1,2,...,n$ на полиномот $P(z)$ преку неговите корени $z_i, i = 1,2,...,n$.

Равенствата (8) во литературата се познати како *Виетови формули*.

4. ЗАДАЧИ

1. Нека за полиномите $P(z), G(z)$ и $T(z)$ важи $P(z)T(z) = G(z)T(z)$. Докажете, дека ако $T(z) \neq 0$, тогаш $P(z) = G(z)$.

2. Докажете, дека ако за ненултите полиноми $P(z)$ и $Q(z)$ важи $P(z) \mid Q(z)$ и $Q(z) \mid P(z)$, тогаш $P(z) = \alpha Q(z)$, за некој $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$.

3. Нека за полиномите $P_1(z), P_2(z), ..., P_k(z)$ и $Q(z)$ важи $Q(z) \mid P_i(z)$, $i = 1,...,k$.

   Докажете, дека за секои полиноми $G_i(z), i = 1,2,...,k$ важи $Q(z) \mid \sum_{i=1}^{k} P_i(z) G_i(z)$.

4. Докажете, дека во разложувањата (1) и (10) за полиномот $P(z)$ коефициентите a_n и A_n се еднакви.

5. Докажете, дека низата комплексни броеви $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена ако и само ако постои барем еден полином $P(z), \deg P > 0$ таков што низата $\{P(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена.

6. Докажете дека за секој полином $P(z), \deg P > 0$ и секој комплексен број z_0 постои комплексен број h таков, што $|P(z_0 + h)| > |P(z_0)|$.

7. Докажете дека сите корени на полиномот $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ се наоѓаат во множеството

$$A = \{z \mid z \in \mathbf{C},\ (1 + \max_{k>0} \frac{|a_k|}{|a_0|})^{-1} \leq |z| \leq 1 + \max_{k<n} \frac{|a_k|}{|a_n|}\} .$$

8. Каква е врската меѓу корените на полиномите $P(z)$ и $P(z-a)$, $a \in \mathbf{C}$?

9. Нека полиномот $P(z), \deg P \leq n$ прима една иста вредност за $n+1$ различни комплексни вредности на аргументот. Докажете, дека $\deg P = 0$.

10. Докажете, дека полиномот $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_n \neq 0$ има најмалку по еден корен во секое од множествата

$$A = \{z \mid\ z \in \mathbf{C},\ |z| \leq \sqrt[n]{\frac{|a_0|}{|a_n|}}\} \text{ и } B = \{z \mid\ z \in \mathbf{C}, |z| \geq \sqrt[n]{\frac{|a_0|}{|a_n|}}\} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Adams, M.; Guillemin, V.:** *Measure Theory and Probability,* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1996
2. **Adnadjević, S., Kadelburg, Z.:** *Matematička analiza* I, II, Nauka, Beograd, 1993
3. **Aljančić, S.:** *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu,* Građevinska knjiga, Beograd, 1968
4. **Anderson, J. A.; Lewis, J.; Saylor, O. D.:** *Discrete Mathematics with Combinatorics,* Pearson Education, Inc., 2004
5. **Apostol, T. M.:** *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974
6. **Axler, S.:** *Linear Algebra Done Right*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1999
7. **Beals, R.:** *Advanced Mathematical Analysis,* Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1973
8. **Beauzamy, B.:** *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, 1988
9. **Berge, C.:** *Principles of Combinatorics*, Academic Press, New York, 1971
10. **Birkhoff, G.; Mac Lane, S.:** *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan Co., New York, 1953
11. **Burrill, C. W.:** *Foundations of Real Numbers*, Mc Graw-Hill, New York, 1967
12. **Čerin, Z.:** *Metrički prostori,* PMF-Matematički oddel, Sveučilišta u Zagrebu, 2005
13. **Chakrabarti, A.:** *Elements of Ordinary Differential Equations and Special Functions*, New Age International Limited, New Delhi, 1996
14. **Cohen, L. W.; Ehrlich, G.:** *The Structure of the Real Number Sustem*, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1963
15. **Cohen, P. J.:** *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966
16. **Conway, J. B.:** *A Course in Functional Analysis*, Springer - Verlag, New York - Berlin – Heidelberg - Tokyo, 1985
17. **Conway, J. B.:** *Function of One Complex Variable*, Springer - Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1991
18. **Conway, J. B.:** *Subnormal Operators*, Pitnam Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne, 1981
19. **Conway, J. B.:** *The Theory of Subnormal Operators*, American Mathematical Society, Newe York, 1991
20. **De Souza, P. N.; Silva, J. N.:** *Berkeley Problems in Mathematics,* Springer, 1998
21. **Devide, V.:** *Zadaci iz apstraktne algebre*, Naučna knjiga, Beograd, 1968
22. **Dunkel, O.:** *Избранные задачи из журнала American mahematical monthly,* Мир, Москва, 1977
23. **Engelking, R.:** *General Topology*, Polish Sci. Publ., Warszawa, 1977
24. **Ferrar, W. L.:** *Finite matrices,* Oxford, 1960
25. **Fischer, G.:** *Lineare Algebra*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbade, 2005
26. **Foster, O.:** *Analysis* 1, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbade, 1976
27. **Foster, O.:** *Analysis* 3, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbade, 1981
28. **Franklin, J. N.:** *Matrix Theory,* Prentice-Hall, New Jersey, 1968
29. **Friedman, A.:** *Foundations of Modern Analysis*, Dover Publications, Inc. New York, 1970
30. **Friedrichs, K. O.:** *Spectral Theory of Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York - Berlin -Heidelberg-Tokyo, 1985
31. **Gilbert, J.; Gilbert, L.:** *Elements of Modern Algebra,* PWS, Boston, 1995
32. **Greub, W. H.:** *Linear Algebra,* Springer-Verlag, New York, 1967
33. **Halmos, P. R.:** *A Hilbert Space Problem Book,* D. Van Nostram Company, Princeton-New Jersey-Toronto-London, 1967

34. **Halmos, P. R.:** *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1956
35. **Halmos, P. R.:** *Naive Set Theory,* Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960
36. **Halmos, P. R.; Sunder, V. S.:** *Bounded Integral Operators on L^2 Spaces,* Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1978
37. **Hu, S. T.:** *Elements of Real Analysis*, Holden Day, San Francisco, 1967
38. **Hu, S. T.:** *Introduction to General Topology,* Holden Day, San Francisco, 1966
39. **Istrățescu, V. I.:** *Strict Convexity and Complex Strict Convexity,* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1984
40. **Jain, P. K.; Ahuja, O. P.; Khali, A.:** *Functional Analysis,* New Age International Limited, New Delhi, 1995
41. **Jänich, K.:** *Topologie*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005
42. **Jonson, L. W.; Riess, R. D.; Arnold, J. T.:** *Introduction to Linear Algebra,* Addison-Wesley, New York, 1989
43. **Kato, T.:** *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966
44. **Knopp, K.:** *Theory and Apllication of Infinite Series*, Blackie and Son, London, 1951
45. **Kuiper, N. H.:** *Linear Algebra and Geometry,* North-Holand, Amsterdam, 1965
46. **Kuratowski, K.; Mostowski, A.:** *Set theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967
47. **Kurepa, Đ.:** *Viša algebra*, I, II, Školska knjiga, Zagreb, 1965
48. **Kurepa, S.:** *Funkcionalna analiza,* Školska knjiga, Zagreb, 1981
49. **Kurepa, S.:** *Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967
50. **Kurepa, S.:** *Matematička analiza* 1, 2, 3, Tehnička knjiga, Zagreb, 1981, 1979, 1975
51. **Kurepa, S.:** *Uvod u linearnu algebra,* Školska knjiga, Zagreb, 1975
52. **Kurepa, S.:** *Uvod u matematiku – Skupovi, strukture i brojevi,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1969
53. **Lang, S.:** *Analysis,* I, II, Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1968, 1969
54. **Lang, S.:** *Linear Algebra*, Springer Verlag, 1987
55. **Limaye, B. V.:** *Functional Analysis*, New Age International Limited, New Delhi, 1996
56. **Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.:** *Classical Banach Spaces* I *and* II, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977
57. **Lipschutz, S.:** *General Topology*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965
58. **Lipschutz, S.:** *Theory and Problems of Linear Algebra,* McGraw-Hill Book Company, 1968
59. **Maddox, I. J.:** *Elements of Functional Analysis,* Cambridge at the University press, 1970
60. **Malik, S. C.:** *Principles of Real Analysis*, New Age International Limited, New Delhi, 1982
61. **Marcus, M.; Minc, H.:** *Introduction to Linear Algebra*, Macmillan, London, 1965
62. **Mardešić, S.:** *Matematička analiza u n-dimenzionalnom relanom prostoru*, I, 1991, II, 1989, Školska knjiga, Zagreb
63. **Marjanović, M.:** *Matematička analiza* I, Naučna knjiga, Beograd, 1983
64. **Marjanović, M.:** *Metrički prostori, Stiltejsov i Lebesguevov integral,* Naučna knjiga, Beograd, 1968
65. **Maron, I. A.:** *Problems in Calculus of One Variable*, Mir, Moscow, 1988
66. **Marshall, H. Jr.:** *The Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company, 1976
67. **Mendelson, B.:** *Introduction to Topology*, Dover Publications, New York, 1990
68. **Mendelson, E.:** *Introduction to Mathematical Logic,* Van Nostrand, Princeton, N. J., 1964
69. **Mircea, M.; Putinar, M.:** *Lectures on Hyponormal Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1989
70. **Mitrinović, D. S.; Đoković, D. Ž.:** *Polinomi i matrice,* Naučna kniga, Beograd, 1991

71. **Nipp, K.; Stoffer, D.:** *Lineare Algebra*, ETH, Zürich, 1994
72. **Niven, I.; Zuckerman, H. S.:** *An introduction to the Theory of Numbers,* John Wiley & Sons, Inc., New York - London, 1962
73. **Olmsted, J. M. H.:** *The Real Number System,* Appleton-Century-Crofts, New York, 1962
74. **Radjavi, H.; Rosenthal, P.:** *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1973
75. **Rao, D. K. M.; Gustafson, K. E.:** *Numerical Range*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1996
76. **Rickart, C. E.:** *Banach Algebras*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1960
77. **Riesz, F.; Sz.-Nagy, B.:** *Functional Analysis,* Dover Publications, Inc., New York, 1990
78. **Rockafellar, R. T.:** *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton, 1970
79. **Rosenblum, M.; Rovnyak, J.:** *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford University Press, New York, 1985
80. **Royden, H. L.:** *Real Analysis,* Macmillan, New York, 1963
81. **Rudin, W.:** *Functional Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1991
82. **Rudin, W.:** *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964
83. **Rudin, W.:** *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1970
84. **Sarapa, N.:** *Teorija Vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002
85. **Shephard, G. C.:** *Vector Spaces of Finite Dimension,* Oliver&Boyd, New York, 1966
86. **Shoup, V.:** *A Compuaitional to Number Theory and Algebra,* Cambridge University Press, 2005
87. **Spivak, M.:** *Calculus on Manifolds,* W. A. Benjamin, New York, 1965
88. **Stanković, B.:** *Osnovi funkcionalne analize,* Naučna knjiga, Beograd, 1975
89. **Stojaković, Z.; Herceg, D.:** *Numeričke metode linearne algebra* (*zbirka zadataka*), Građevinska knjiga, Beograd, 1983
90. **Strang, G.:** *Linear Algebra and its Applications,* MIT, Academic Pres, 1976
91. **Tasković, M.; Aranđelković, D.:** *Teorija funkcija i funkcionalna analiza*, Književne novine, Beograd, 1981
92. **Taylor, S. J.:** *Introduction to Measure and Integration*, Cambridge University Press, London, 1973
93. **Uščumlić, M. P., Miličić, P. M.:** *Zbirka zadataka iz više matematike* I, II, Nauka, Beograd, 1994
94. **Valentine, F. A.:** *Convex Sets,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1964
95. **Vrabec, J.:** *Metrični prostori,* DMFAS, Ljubljana, 1993
96. **Vujčić, V.; Ašić, M.; Miličić, N.:** *Matematičko programiranje,* Matematički institut, Beograd, 1980
97. **Walter, W.:** *Analysis* 1,2, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2002, 2000
98. **Wilcox, H. J.; Myers, D. L.:** *An Introduction to Lebesque Integration and Fourier Series,* Dover Publications, INC., New York, 1978
99. **Zhu, K.:** *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York – Basel, 1990
100. **Акилов, Г. П.; Дятлов, В. Н.:** *Основы математического анализа,* Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1980
101. **Антоневич, А. Б.:** *Линейные функциональные уравнения*, Минск, 1988
102. **Архангельский, А. В.; Пономарев, В. И.:** *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, Москва, 1974
103. **Беллман, Р.:** *Введение в теорию матриц,* Наука, Москва, 1969
104. **Берман, Г. Н.:** *Сборник задач по курсу математического анализа,* Наука, Москва, 1969
105. **Боревич, З. И.; Шафаревич, И. Р.:** *Теория чисел,* Наука, Москва, 1964
106. **Брудно, А. Л.:** *Теория функций действительного переменного*, Наука, Москва, 1971

107. **Бурбаки, Н.:** *Функции действительного переменного* (*элементарная теория*), Наука, Москва, 1965
108. **Вейль, А.:** *Основы теории чисел*, Мир, Москва, 1972
109. **Воеводин, В. В.:** *Линейная алгебра,* Наука, Москва, 1974
110. **Вулих, Б. З.:** *Введение в функциональный анализ,* Физматгиз, Москва, 1958
111. **Вулих, Б. З.:** *Краткий курс теории функций вещественной переменной*, Наука, Москва, 1973
112. **Гантмахер, Ф. Р.:** *Теорияя матриц,* Москва, 1988
113. **Гелбаум, Б.; Олмстед, Дж.:** *Контрпримеры в анализе*, Мир, Москва, 1964
114. **Гелъфанд, И. М.:** *Лекции по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1966
115. **Гофман, К.:** *Банаховы пространства аналитических функций*, Наука, Москва, 1963
116. **Гохберг, И. Ц.; Крейн, М. Г.:** *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва, 1965
117. **Давидов, Л.:** *Конкурсите ПЬАТНАМ*, СМБ, София, 1998
118. **Данфорд, Н.; Шварц, Дж.:** *Линейные операторы,* I, II, III, Мир, Москва, 1962, 1966, 1974
119. **Демидович, Б. П.:** *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* Наука, Москва, 1984
120. **Дирихле, П. Г. Л.:** *Лекции по теория на числата,* Наука и изкуство, София, 1980
121. **Дойчинов, Д.:** *Математически анализ,* Наука и изкуство, София, 1983
122. **Дороговцев, А. Я.:** *Математическиӣ анализ,* Вища школа, Киев, 1985
123. **Дьедонне, Ж.:** *Линейная алгебра и элементарная геометрия,* Наука, Москва, 1972
124. **Дьедонне, Ж.:** *Основы современного анализа*, Мир, Москва, 1964
125. **Ефимов, Н. В.:** *Краткий курс аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1975
126. **Зорич, В. А.:** *Математический анализ,* I, 1981, II, 1984, Наука, Москва,
127. **Ивановски, Н.:** *Реална анализа,* Просветно дело, Скопје, 1997
128. **Ивановски, Н.:** *Решени задачи по анализа* III*,* Унив. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1993
129. **Ивановски, Н.:** *Функционална анализа*, Природно-математички факултет, Скопје, 2003
130. **Ильин, В. А.; Позняк, Э. Г.:** *Основы математического анализа,* Наука, Москва, I 1971, II 1980
131. **Иосида, К.:** *Функциональпый анализ,* Мир, Москва, 1988
132. **Камке, Э.:** *Интеграл Лебега-Стилтьеса,* Наука, Москва, 1959
133. **Канатников, А. Н.; Крищенко, А. П.:** *Линейная алгебра*, Издательство МГТУ, Москва, 2002
134. **Канторович, Л. В.; Акилов, Г. П.:** *Функциональпый анализ*, Наука, Москва, 1969
135. **Карамата, Ј.:** *Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла*, Српска академија наука, Београд, 1949
136. **Карманов, В., Г.:** *Математическое программирование*, Наука, Москва, 1975
137. **Карташев, А. П., Рождественский, Б. Л.:** *Математический анализ,* Наука, Москва, 1984
138. **Карчиска, Д.:** *Конечно димензионални векторски простори,* Уни. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1985
139. **Келли, Дж. Л.:** *Общая топология*, Наука, Москва, 1981
140. **Кирилов, А. А; Гвишиани, А. Д.:** *Теоремы и задачи функционального анализа,* Наука, Москва, 1988
141. **Князев, П. Н.:** *Функциональпый анализ,* Вышэйшая школа, Минск, 1985
142. **Колмогоров, А. Н.; Фомин, С. В.:** *Элементы теории функций и функционального анализа,* Наука, Москва, 1989
143. **Кудреватов, Г. А.:** *Сборник задач по теории чисел*, Просвещение, Москва, 1970

144. **Кудрявцев, Л. Д.:** *Курс математического анализа,* I, II, III, Высшая школа, Москва, 1988
145. **Курант, Р.:** *Курс диференцијалног и интегралног рачуна,* Београд
146. **Курош, А. Г.:** *Курс высшей алгебры,* Физматгиз, Москва, 1962
147. **Курош, А. Г.:** *Лекции по общей алгебре,* Наука, Москва, 1973
148. **Кутателадзе, С. С.:** *Основы функционального анализа,* Наука, Новосибирск, 1983
149. **Любенова, Е., Недевски, П., Николов, К., Николова, Л., Попов, В.:** *Ръководство по математически анализ,* I, II, Унив. изд. "Св. Климент Охридски", София, 1991
150. **Люстерник, Л. А.; Соболев, В. И.:** *Элементы функционального анализа,* Наука, Москва, 1965
151. **Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., Головач, Г. П.:** *Спровочное пособие по математическому анализу,* I, II, Вища школа, Киев, 1983
152. **Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., Калайда, А. Ф.:** *Математический анализ,* I, II, Вища школа, Киев, 1983
153. **Ляшко, И. И., Емельянов, В. Ф.; Боярчук, А. К.:** *Основы классического и современного математического анализа*, Вища школа, Киев, 1988
154. **Макаров, И. П.:** *Дополнительные главы математического анализа,* Просвещение, Москва, 1968
155. **Мальцев, А. И.:** *Основы линейноы алгебры,* Наука, Москва, 1970
156. **Манолов, С.; Петрова-Данева, А.; Генов, А.; Шополов, Н.:** *Висша математика,* I, II, III, Техника, София, 1977
157. **Михелович, Ш. Х.:** *Теория чисел,* Вісшая школа, Москва, 1967
158. **Младеновиќ, П.:** *Вероватноћа и статистика*, Веста - Математички Факултет, Београд, 1995
159. **Морен, К.:** *Методы гильбертова пространства,* Мир, Москва, 1965
160. **Нагел, Т.:** *Увод в теорията на числата,* Наука и изкуство, София, 1971
161. **Наймарк, М. А.:** *Нормированные кольца*, Государственное издательство *технико-*теоретической литературы, Москва, 1956
162. **Натансон, И.:** *Теория функций вещественой переменной,* Наука, Москва, 1949
163. **Никольский, С. М.:** *Курс математического анализа*, I, II, Наука, Москва, 1983
164. **Полиа, Г.; Сеге, Г.:** *Задачи и теоремы из анализа,* I, II, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956
165. **Проскуряков, И. В.:** *Сборник задач по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1974
166. **Райков, Д. А.:** *Векторные пространства,* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962
167. **Рудин, У.:** *Теория функций в поликруге*, Мир, Москва, 1974
168. **Самарџиски, А.; Целакоски, Н.:** *Збирка задачи по алгебра, множества,* Уни. "Св. Кирил и Методиј", Скопје, 1996
169. **Смирнов, В. И.:** *Курс высшей математики* I, II, III, IV, V*,* Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961
170. **Соболев, В. И.:** *Лекции по дополнительным главам математического анализа*, Наука, Москва, 1968
171. **Талдыкин, А.Т.:** *Элементы прикладного функционального анализа,* Высшая школа, 1982
172. **Толстов, Г.П.:** *Курс математического анализа*, I, II, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1957
173. **Тонков, Т. Т.:** *Студентски състезания по математика*, Издателска фирма "Тонко Тонков", София, 2000
174. **Треногин, В. А.; Писаревский, Б. М.; Соболева, Т. С.:** *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Наука, Москва, 1984
175. **Трибель, Х.:** *Теория функциональныц пространств*, Мир, Москва, 1986

176. **Трпеновски, Б.; Целакоски, Н.; Чупона, Ѓ.:** *Виша математика*, 1,2,3,4, Просветно дело, Скопје, 1995
177. **Тышкевич, Р. И.; Феденко, А. С.:** *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, Вышэйшая школа, Минск, 1968
178. **Улчар, Ј.:** *Аналитичка геометрија со векторска алгебра,* Нумерус, Скопје, 1995
179. **Фадеев, Д. К.; Фадеева, В. Н.:** *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, Москва, 1963
180. **Федерер, Г.:** *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва, 1987
181. **Фихтенгольц, Г. М.:** *Курс дифференциального и интегрального исчисления,* I, II, III, Наука, Москва, 1969
182. **Халмош, П. Р.:** *Конечномерные векторниые пространства*, Физматгиз, Москва, 1963
183. **Целакоски, Н.:** *Задачи по линеарна алгебра*, Прооcветно дело, Скопје, 1996
184. **Цубербиллер, О. Н.:** *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1966
185. **Чупона, Ѓ.:** *Алгебарски структури и реални броеви,* Просветно дело, Скопје, 1976
186. **Чупона, Ѓ.; Трпеновски, Б.:** *Алгебра*, Унив. Св. Кирил и Методиј, Скопје
187. **Шварц, Л.:** *Анализ,* I, II, Мир, Москва, 1972
188. **Шефер, Х.:** *Топологические векторные пространства*, Мир, Москва, 1971
189. **Шилов, Г. Е.:** *Математический анализ (функции нескольких вещественныцх переменныцх),* I, II Наука, Москва, 1969
190. **Шилов, Г. Е.:** *Математический анализ (функции одного переменного),* I, II, III Наука, Москва, 1969
191. **Шилов, Г. Е.:** *Математическиы анализ (конечномерные линейные пространства),* Наука, Москва, 1969
192. **Шилов, Г. Е.; Гуревич, Б. Л.:** *Интеграл, мера и производная*, Наука, Москва, 1964
193. **Ширяев, А. Н.:** *Вероятность,* Наука, Москва, 1989
194. **Эдвардс, Р.:** *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1969

ИНДЕКС НА ПОИМИ

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

Ф

Х

ИНДЕКС НА ИМИЊА

Егоров Дмитрий Федорович (1869-1931), руски математичар
Eratosten (274-194 пне.), антички математичар
Erdös Paul (1913-1996), унгарски математичар
Euklid (IV-III пне), антички математичар
Euler Leónhard (1707-1783), швајцарски математичар

Fatou Pierre Joseph Louis (1878-1929), француски математичар
Fejér Leopold (1880-1959), унгарски математичар
Fibonacci Leonardo Pisano (1170-1250), италијански математичар
Fischer Ernst (1875-1956), австриски математичар
Fourier Jean-Baptiste Joseph (1768-1830), француски математичар
Fredholm Ivar (1866-1927), шведски математичар
Frenet J. F. (1816-1900), француски математичар
Fresnel A. J. (1788-1827), француски физичар и математичар
Фреше М. Р. (1878-1973), француски математичар
Frobenius Georg (1849-1917), германски математичар
Fubini Guido Ghirin (1879-1943), италијански математичар

Galois Évariste (1811-1832), француски математичар
Gauss Carl Friedrich (1777-1855), германски математичар, физичар и астроном
Gram Jørgen Pedersen (1850-1916), дански математичар
Green George (1793-1841), англиски математичар

Hadamard Jacques (1865-1963), француски математичар
Hahn Hans (1879-1934), австриски математичар
Hamilton William Rowan (1805-1865), ирски математичар и астроном
Hardy Godfrey Harold (1877-1947), англиски математичар
Hausdorff Felix (1868-1942), германски математичар
Heine Eduard (1821-1884), германски математичар
Helli Eduard (1884-1943), австриски математичар
Hermite Charles (1822-1901), француски математичар
Hilbert David (1862-1943) германски математичар
Hölder Otto Ludwig (1859-1937), германски математичар

Jacobi Karl Gustav Jacob (1804-1851), германски математичар
Jenssen Johan Ludwig (1859-1925), дански математичар
Jordan Camille (1838-1922), француски математичар

Kahane Jean-Pierre, француски математичар
Katznelson Yitzhak, израелски математичар
Кавалиери Д. (1598-1677), италијански математичар
Knuth Donald (1938-), американски математичар
Koch Helge von (1870-1924), шведски математичар
Колмогоров Андрей Николаевич (1903-1987), руски математичар
Ковалевская С. В. (1850-1891), руска математичарка
Kronecker Leopold (1823-1891), германски математичар
Kummer Ernst Eduard (1810-1893), германски математичар

l'Hôpital G. H. (1661-1704), француски математичар

Lagrange Joseph Louis (1736-1813), француски математичар
Laplace Pierre Simon (1749-1827), француски математичар, физичар и филозоф
Лаврентьев М. А. (1900-1980), руски математичар
Lebesgue Henri Leon (1875-1941), француски математичар
Legendre Andrien-Marie (1752-1833), француски математичар
Lehmer Derrick (1905-1991), американски математичар
Leibniz Gottfried Wilhelm (1646-1716), германски математичар и филозоф
Levi Beppo (1875-1961), италијански математичар
Lindelöf Ernst Leonhard (1870-1946), шведски математичар
Liouville J. (1809-1882), француски математичар
Lipschitz Rudolf Otto Sigismund (1832-1903), германски математичар
Littlewood John Edensor (1885-1977), англиски математичар
Лобачевский Н. И. (1792-1856), руски математичар
Lucas François Edouard (1842-1891), француски математичар
Лузин Николай Николаевич (1883-1950), руски математичар
Ляпунов Л. М. (1857-1918), руски математичар

Maclaurin Colin (1698-1746), шкотски математичар
Mazur Stanislav (1905-1981), полски математичар
Марков А. А. (1856-1922), руски математичар
Meray Charles (1835-1911), француски математичар
Mersenne Marin (1588-1648), француски монах, филозоф и математичар
Mertens Franz Karl Joseph (1840-1927), австриски математичар
Meusnier J. B. M. (1754-1793), француски математичар
Minkowski Hermann (1864-1909), германски математичар и физичар
Möbius Augustus Ferdinand (1790-1868), германски математичар

Napier John (1550-1617), шкотски математичар
Newton Isaac (1643-1727), англиски математичар и физичар
Nikodym Otton Martin (1887-1974), американски математичар со полско потекло

Остроградский Махаил Васильевич (1801-1862), руски математичар

Parseval Marc Antoine (1755-1836), француски математичар
Pascal B. (1623-1662), француски математичар и филозоф
Peano Giuseppe (1858-1932), италијански математичар и логичар
Петровский Г. И. (1901-1973), руски математичар
Picard Emile (1856-1941), француски математичар
Pitagora (V век пне.), антички математичар
Poisson Simeon Denis (1781-1840), француски математичар и физичар
Пуанкаре Анри (1854-1912), француски математичар

Raabe Joseph Ludwig (1801-1859), швајцарски математичар
Radón Johann (1887-1956), австриски математичар
Reymond P. Du Bois (1831-1889), германски математичар
Riemann Bernhard (1826-1866), германски математичар
Riesz Frigyes (1880-1956), унгарски математичар
Rolle M. (1652-1719), француски математичар

Schanon Claude (1916-2001), американски математичар
Schmidt Erhard (1876-1959), германски математичар
Schur I. (1875-1941), германски математичар
Schwarz Karl Hermann Amandus (1843-1921), германски математичар
Sorgenfrey Robert Henry (1915-), американски математичар
Стеклов В. А. (1864-1926), руски математичар
Steinhaus Hugo (1879-1934), полски математичар
Stieltjes Thomas-Jan (1856-1894), холандски астроном и математичар
Stirling James (1692-1770), шкотски математичар
Stokes G. G. (1819-1903), англиски математичар
Stolz Otto (1842-1905), австриски математичар
Stone Arthur Harold (1916-?), англиско-американски математичар
Stone Marshall Harvey (1903-1989), американски математичар
Sylvester D. D. (1814-1897), англиски математичар
Суслин Михайл Яаковлевич (1894-1919), руски математичар

Teitze Heinrich (1880-1964), австриски математичар
Teoplitz Otto (1881-1940), германски математичар
Teylor Brook (1685-1731), англиски математичар
Тихонов Андрей Николаевич (1906-?), руски математичар
Tonelli Leonida (1885-1946), италијански математичар
Turing Alan (1912-1954), американски математичар

Ulam Stanislav (1909-1984), полско-американски математичар
Урысон Павел Самуилович (1898-1924), руски математичар

van der Waerden B. L. (1903-?), холандски математичар
Vandermonde A. T. (1735-1796), француски математичар
Viviani V. (1622-1703), италијански математичар и физичар
Виноградов И. М. (1891-1983), руски математичар
Volterra Vito (1860-1940), италијански математичар и физичар
von Koch Helge (1870-1924), шведски математичар
von Neumcann John (1903-1957), американски математичар со унгарско потекло

Weierstrass Karl Theodor Wilhelm (1815-1897), германски математичар

Zermelo Ernst (1871-1953), германски математичар

Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894), руски математичар

ЗА АВТОРОТ

Ристо Малчески е роден на 9.8.1957 година во Р. Србија. Основно образование заврши во Прилеп, средно во Скопје и во 1980 година како најдобар студент во генерацијата, дипломираше на Математичкиот факултет во Скопје и за постигнатиот успех во текот на студирањето беше награден од Ректорот на Универзитетот "Св. Кирил и Методиј". Магистрираше и докторираше на теми од областа на функционалната анализа, која му претставува основна научна преокупација. По докторирањето беше избран за доцент по математичка анализа на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет во Скопје, на кој реализираше настава по наставни дисциплини од областите: математичка анализа, методика на наставата по математика, веројатност и статистика, а беше ангажиран и во реализирањето на последипломските студии. Во учебната 2003/04 година, со формирањето на Факултетот за општествени науки во Скопје, премина на истиот во звање вонреден професор и ги предаваше наставните дисциплини: Математика за бизнис и Статистика за бизнис. Од учебната 2006/07 година е редовен професор, во кое звање е и сега како професор од областа на математичките науки на ФОН универзитетот, каде во моментот е проректор за настава.

Проф. Малчески е автор и коавтор на осумдесеттина математички книги, меѓу кои:

- Математика 1,
- Математика 2,
- Математика 3,
- Математика 4,
- Основи на математичка анализа,
- Математичка анализа I,
- Математичка анализа II,
- Методика на наставата по математика (општ дел),
- Методика на наставата по аритметика и алгебра во основното образование
- Математика за бизнис,
- Основи на финансиската математика,
- Операциони истражувања,
- Статистика за бизнис и
- Теорија на веројатност.

Автор е и на 44 научни трудови од функционална анализа, 9 научни трудови од применета математика, 41 труд од методика на наставата по математика и на над 73 стручни статии. Во изминатите години учествуваше на десетина научни собири, како од национален, така и од меѓународен карактер.

Во периодот од 1987 до 2004 година активно работеше во Сојузот на математичарите на Македонија, чиј претседател беше од 1999 до 2004 година. Во овој период, покрај работата со надарените ученици за математика, учествуваше во организацијата и како главен координатор на тимот за оценување на Балканските математички олимпијади кои во нашата држава се одржаа во 1999, 2000 и 2008 година, на Вториот когрес конгрес на СММ и на третиот конгрес на МАСС

ЕЕ кои се одржаа во 2000 и 2009 година. Почнувајќи од 2012 година прод. Малчески повторно активно работеше во СММ се до 2019 година и во овој перидо покрај во организацијата на двата конгреси на СММ учествуваше како главен координатор и претседател на комисија за селекција на задачи на ЈБМО и БМО, како и на двете студентски олипијади во организација на МАССЕЕ. Дел од активностите на СММ е издавањето на списанијата “Нумерус” и “Сигма”, наменети за учениците од основното и средното образование, соодветно, со кои проф. Малчески активно соработува, а неколку години беше и главен и одговорен уредник на споменатите списанија, период во кој ја формираше библиотеката на списанието “Сигма”. Проф. Малчески триесетина години учествува во организацијата на натпреварите по математика во нашата држава, подготовките на нашите ученици за учество на меѓународните натпревари и во повеќе наврати, како водач и заменик водач на Македонската екипа, има учествувано на Меѓународните и на Балканските математички олимпијади, кои се одржуваа надвор од нашата држава. Исто така Ристо Малчески од 2014 до 2019 година бил ѕредник на Математичкиот билтен, период кога списанието кое до огаш нередовно излегуваше е стабилизирано и е поставено на неколку значајни научни бази, при што во воие пет години Математичкиот билтен излегуваше два пати годишно.