Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА II

(РИМАН-СТИЛТЕЈСОВ ИНТЕГРАЛ.
МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ)

Скопје, 2011

Рецензенти:
Проф. д-р Весна Манова Ераковиќ, Природно-математички факултет, Скопје
Проф. д-р Алекса Малчески, Машински Факултет, Скопје

Компјутерска обработка: Ристо Малчески

Тираж: 150 примероци

Печати: АЛФА 94 МА, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР *vii*

VIII глава. РИМАН-СТИЛТЕЈСОВ ИНТЕГРАЛ

1. Монотони функции 1
2. Функции со ограничена варијација 6
3. Дефиниција на Риман-Стилтејсов интеграл. Основни својства 15
4. Класи функции интеграбилни по Стилтејс 24
5. Интеграл на Риман-Стилтејс во однос на функција со ограничена варијација 27
6. Граничен премин кај Риман-Стилтејсовиот интеграл 30
7. Пресметување на Риман-Стилтејсовиот интеграл 33
8. Теореми за средни вредности кај Риман-Стилтејсовиот интеграл 37
9. Неопределен Риман-Стилтејсов интеграл 42
10. Задачи 46

IX глава. МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

1. Поим за метрички простор. Основни својства 53
2. Примери на метрички простори 55
3. Низи во метрички простори 64
4. Растојание меѓу множества 72
5. Отворени топки 75
6. Точки на натрупување. Изводно множество 78
7. Отворени множества. Внатрешност на множество 81
8. Затворени множества 86
9. Атхерентни точки. Затворач на множество 90
10. Точки на натрупување на низа 96
11. Гранични точки. Граница на множество 98
12. Потпростор на метрички простор 101
13. База на метрички простор 104
14. Декартов производ на метрички простори 107
15. Задачи 111

X глава. ФУНКЦИИ НА МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

1. Граница на функција во точка 121
2. Непрекинати и рамномерно непрекинати функции 126
3. Карактеризација на непрекинатите функции 130
4. Отворени и затворени функции. Хомеоморфизми 134
5. Изометрички простори 137
6. Природни проекции 141
7. Еквивалентни метрики 146
8. Рамномерно еквивалентни метрики 150
9. Продолжување на непрекинати функции. Теорема на Теитз 154
10. Задачи 159

XI глава. СЕПАРАБИЛНОСТ

1. Густи множества 167
2. Сепарабилни метрички простори 169
3. Теореми на Линделеф 174
4. Непрекинатост и сепарабилност 175
5. Задачи 178

XII глава. КОМПЛЕТНОСТ

1. Кошиеви низи во метрички простори 181
2. Комплетни метрички простори 184
3. Теорема на Бер 195
4. Теорема на Банах 199
5. Комплетирање на метрички простор 203
6. Непрекинатост и комплетност 207
7. Теорема на Банах за фиксна точка 211
8. Примена на теоремата на Банах за фиксна точка 210
9. Задачи 220

XIII глава. КОМПАКТНОСТ

1. Компактни множества во метрички простори 227
2. Ограниченост и компактност. Теорема на Хауздорф 233
3. Теорема на Болцано-Ваерштрас 237
4. Непрекинатост и компактност 244
5. Карактеризација на компактните метрички простори 252
6. Компактни множества во просторите $(\mathbf{C}([a,b]),\rho_\infty)$ и l^p, $1 \le p < \infty$ 254
7. Задачи 261

XIV глава. СВРЗАНОСТ

1.	Сврзани множества во метрички простори	267
2.	Непрекинатост и сврзаност	271
3.	Компоненти на сврзаност. Квазикомпоненти	273
4.	Сврзаност и компактност. Континиум	277
5.	Сврзаност со патишта	281
6.	Должина на пат во метрички простор	286
7.	Хомотопни патишта	294
8.	Едноставно сврзани простори	301
9.	Задачи	302

XV глава. ФУНКЦИОНАЛНИ ПРОСТОРИ

1.	Функционални низи на метрички простори.Теорема на Дини	307
2.	Теорема на Бер	310
3.	Функционални редови на метрички простори	313
4.	Просторот ограничени функции	315
5.	Теорема на Арцело-Асколи	320
6.	Теорема на Стоун-Ваерштрас	325
7.	Алгебрата тригонометриски полиноми	329
8.	Задачи	332

ДОДАТОК. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

1.	Полиноми со комплексни коефициенти	337
2.	Основна теорема на алгебрата	342
3.	Последици од основната теорема на алгебрата	346
4.	Задачи	349

Литература	351
Индекс на поими	357
Индекс на имиња	361
За авторот	365

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Оваа книга е продолжение на книгите *Основи на математичка анализа* и *Математичка анализа* 1**.** Книгата содржи целосен опфат на разработуваниот материјал кој е неопходен за натамошното изучување на математичката анализа. Материјалот е поделен на осум глави, и тоа:

1. Риман-Стилтејсов интеграл,
2. Метрички простори,
3. Функции на метрички простори,
4. Сепарабилност,
5. Комплетност,
6. Компактност,
7. Сврзаност и
8. Функционални простори.

Носечки дел на книгата се метричките простори и нивните својства кои се разработени во одделните глави. Притоа овие простори се разработуваат од гледна точка на математичката анализа, во што пристапот значително се разликува од соодветните разгледувања во користената литература. Имено, овие простори најчесто се проучуваат како примери на тополошки простори во рамките на бројните монографии од областа на топологијата. Токму затоа, повеќето од бројните теореми, леми и последици се класично докажани и истите можат да се најдат во повеќето книги од користената литература. Последното е од посебна важност, бидејќи совладувањето на изложените содржини може да послужи како добра основа за изучувањето како на топологијата, така и на функционалната анализа.

На крајот од книгава, во посебен додаток, е разработена основната теорема на алгебрата. При доказот на оваа фундаментална теорема користени се само претходно усвоените знаења за полиномите со реални коефициенти, комплексните броеви и метричките простори, па така читателот кој сака да го усвои доказот на оваа теорема нема потреба дополнително да усвојува содржини од комплексната анализа.

Изучувањето на математичката анализа, како и на секоја математичка дисциплина, не е можно без систематско самостојно решавање на задачи. Токму затоа, при изложувањето на материјалот се разработени 108 примери со кои се појаснуваат воведените поими и презентираните тврдења и на крајот од секоја глава се дадени задачи, вкупно 324. Дел од примерите и задачите содржат и по неколку подзадачи, па така бројот на истите е значително поголем. Примерите и задачите се така избрани, што дел од нив се во функција на усвојување на презентираниот материјал, дел се наменети за утврдување на усвоените знаења, но има и задачи кои се од истражувачки карактер. Покрај тоа, да спомeнеме дека во примерите повеќето класични метрички простори, како што се: $(\mathbf{R}^n, \rho_p)$, $1 \le p \le \infty$, l^p, $1 \le p \le \infty$, c, s, c_0, $(\mathbf{C}([a,b]), \rho_p)$, $1 \le p \le \infty$ и слично, се детално разработени. Притоа, посебно внимание е посветено на разгледувањето на комплетноста, сепарабилноста и компактноста на овие простори.

На крајот од книгата е даден индекс на користените поими, листа на знаменити математичари, како и список на користената литература, кој е доста обемен и ја содржи литературата која е користена при пишувањето на сите делови од едицијата *Математичка анализа*.

Пријатна должност и особено задоволство ми е да им искажам благодарност на рецензентите проф. д-р Алекса Малчески и проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ кои со своите забелешки и сугестии допринесоа за подобрување на содржината на оваа книга. Исто така сакам да му се заблагодарам и на колегите Вера Малческа и Самоил Малчески кои внимателно го прочитаа ракописот, со што допринесоа значително да се намалат грешките кои неминовно го пратат издавањето на секоја книга. Секако, за појавувањето на оваа книга од посебно значење е постојаната несебична подршка на мојата сопруга Цветанка Малческа, за што посебно и благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, па затоа сум однапред благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија.

Септември, 2011 Авторот
Скопје

VIII ГЛАВА

РИМАН-СТИЛТЕЈСОВ ИНТЕГРАЛ

Во глава V го проучивме Римановиот интеграл и критериумите за интеграбилност по Риман. Во оваа глава ќе се осврнеме на неговото обопштување познато како Риман-Стилтејсов интеграл. За таа цел прво ќе се навратиме на монотоните функции и на таканаречените функции со ограничена варијација.

1. МОНОТОНИ ФУНКЦИИ

1.1. Во овој параграф ќе разгледаме дополнителни својства на монотоно неопаѓачките функции кои ги разгледавме во III 4.5. Во теорема III 6.6 докажавме дека секоја монотоно растечка и непрекината функција $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ таква што

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=c \text{ и } \lim_{x\to b^-} f(x)=d$$

има инверзна функција $g:(c,d)\to\mathbf{R}$ која е непрекината и монотоно растечка. Понатаму, во теорема III 9.5. докажавме дека монотона функција $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ има само точки на прекин од прв ред и тоа најмногу пребројливо многу, а во параграф IV 13 ја разгледавме монотоноста на диференцијабилните функции.

Јасно, за монотоно неопаѓачка функција $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ во секоја точка на прекин $x_0\in(a,b)$ левата и десната граница $f(x_0^-)$ и $f(x_0^+)$ постојат и се конечни, што значи бројот $f(x_0^+)-f(x_0^-)$ постои. Понатаму, ако x_0 е точка на прекин од втор ред на f и ако таа е прекината, на пример од десно во x_0, тогаш десниот извод во таа точка не постои и

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty ,$$

во зависност од тоа дали функцијата f расте или опаѓа. Меѓутоа, извод на монотона функција не мора да постои дури и во одделни точки во кои функцијата е непрекината, што може да се види од следниов пример.

Пример. Да ја разгледаме функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{за } x<0 \\ \frac{1}{2^{2k-1}}, & \text{за } x\in[\frac{1}{2^{2k}},\frac{1}{2^{2k-1}}],\ k=1,2,3,... \\ 3x-\frac{1}{2^{2k-2}}, & \text{за } x\in[\frac{1}{2^{2k-1}},\frac{1}{2^{2k-2}}],\ k=1,2,3,... \\ 2, & \text{за } x\geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Функцијата f е непрекината на целата реална права, таа е монотоно неопаѓачка и истата нема извод во $x=0$ и во секоја точка $x_i = \frac{1}{2^i}$, $i=0,1,\ldots$. Притоа, во точката $x=0$ оваа функција нема десен извод.

Бидејќи функцијата (1) нема десен извод во точката $x=0$, добиваме дека функцијата $f(x-c)$ нема десен извод во точката $x=c$. Според тоа, функцијата $g(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i f(x-c_i)$ нема десен извод во произволно избрани точки $c_i, i=1,2,\ldots,n$ и ако $a_i>0$, тогаш $g(x)$ монотоно не опаѓа.

Понатаму, нека $c_i, i=1,2,\ldots$ е множеството рационални броеви и да ја разгледаме функционалната низа $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, определена со: $g_i(x)=\frac{1}{i^2} f(x-c_i)$, $i=1,2,\ldots$. Притоа, $|g_i(x)| \le \frac{2}{i^2}$, за секој $i=1,2,\ldots$ и како бројниот ред $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i^2}$ конвергира од теорема VII 3.9 (Ваерштрас) следува дека редот $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} f(x-c_i)$ рамномерно конвергира, а од теорема VII 4.1 следува дека граничната функција $h(x)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} f(x-c_i)$ е непрекината. Јасно, функцијата $h(x)$ е монотона и за ниту еден рационален број оваа функција нема десен извод. ♦

1.2. Дефиниција. Нека $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ е монотоно неопаѓачка функција. Ако за точката $x_0 \in [a,b]$ важи $f(x_0^+)-f(x_0^-)>0$, тогаш бројот $f(x_0^+)-f(x_0^-)$ го нарекуваме *скок на функцијата* f во точката x_0.

1.3. Лема. Нека $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ е монотоно неопаѓачка функција и $x_k \in [a,b]$, $k=1,2,\ldots,n$ се такви, што $x_i \ne x_j$ за $i \ne j$. Тогаш,

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k^+)-f(x_k^-)] \le f(b)-f(a).$$

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Тогаш

$$f(a)\le f(x_1^+),\ f(x_n^+)\le f(b) \ \text{ и } \ f(\tfrac{x_{k-1}+x_k}{2}) \le f(x_k^-) \le f(x_k^+) \le f(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2}),$$

за $2 \le k \le n-1$, па затоа

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^+)-f(x_k^-)] &\le \sum_{k=2}^{n-1}[f(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2})-f(\tfrac{x_{k-1}+x_k}{2})]+f(\tfrac{x_1+x_2}{2})-f(x_1^-)+f(x_n^+)-f(\tfrac{x_{n-1}+x_n}{2})\\ &= f(x_n^+)-f(x_1^-) \le f(b)-f(a),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

1.4. Последица. Нека $\{x_n \mid n \geq 1\}$ е множеството од сите точки на скок на монотоно неопаѓачката функција $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. Тогаш,

$$\sum_{k \geq 1} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] \leq f(b) - f(a). \tag{2}$$

Доказ. Непосредно следува од лема 1.3. ♦

1.5. Забелешка. Функцијата f може да биде непрекината на $[a,b]$. Тогаш, множеството точки на скок на функцијата е празно и во овој случај сметаме дека левата страна на неравенството (2) е еднаква на нула и истата, воопшто говорено, е ред со ненегативни членови.

1.6. Дефиниција. Нека $\{x_n \mid n \geq 1\}$ е множеството од сите точки на скок на функцијата f на $[a,b]$. Ако

$$\sum_{k \geq 1} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] = f(b) - f(a),$$

тогаш функцијата f ја нарекуваме *функција на скок.*

1.7. Теорема (теорема за разложување). Нека f е монотоно неопаѓачка функција на $[a,b]$. Тогаш

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad x \in [a,b]$$

каде g е функција на скок, која има скокови во истите точки и со иста големина, како и функцијата f, а h е монотоно неопаѓачка непрекината функција на $[a,b]$.

Доказ. Нека $\{x_n \mid n \geq 1\}$ се сите точки на скок на функцијата f. Ставаме

$$g(a) = 0,$$
$$g(x) = \sum_{n:\, x_n < x} [f(x_n^+) - f(x_n^-)] + f(x) - f(x^-), \quad a < x \leq b,$$
$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [a,b].$$

Ако $a \leq x' < x'' \leq b$, тогаш

$$g(x'') - g(x') = f(x'^+) - f(x') + \sum_{n:\, x' < x_n < x''} [f(x_n^+) - f(x_n^-)] + f(x'') - f(x''^-) \tag{3}$$

Сега од лема 1.3 следува дека

$$0 \leq g(x'') - g(x') \leq f(x'') - f(x') \tag{4}$$

и

$$f(x') - g(x') \leq f(x'') - g(x''),$$

од што следува дека g и h се монотоно неопаѓачки функции на $[a,b]$. Од равенството (3) добиваме

$$g(x'') - g(x') \geq f(x'^{+}) - f(x') . \tag{5}$$

Сега, од неравенствата (4) и (5), кога $x'' \to x'$ наоѓаме

$$g(x'^{+}) - g(x') \leq f(x'^{+}) - f(x') \text{ и } g(x'^{+}) - g(x') \geq f(x'^{+}) - f(x')$$

што значи

$$g(x'^{+}) - g(x') = f(x'^{+}) - f(x') \text{, т.е. } h(x'^{+}) = h(x') .$$

Аналогно се докажува дека $h(x'^{-}) = h(x')$, што значи дека $h \in \mathbf{C}([a,b])$ (непрекинатоста во точката b се докажува аналогно). ♦

1.8. Лема. а) Нека $\{f_n\}$ е низа функции дефинирани на $[a,b]$ такви што функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира за секој $x \in [a,b]$ и нека

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) .$$

Ако, за секој $n = 1,2,...$ функцијата $f_n(x)$ не опаѓа (не расте) на $[a,b]$, тогаш и функцијата $f(x)$ не опаѓа (не расте) на $[a,b]$.

б) Ако функцијата f монотоно расте и е непрекината на $[a,b]$, $a > 0$, тогаш функцијата $F(x) = \frac{1}{x}\int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$ строго монотоно расте.

Доказ. а) Нека за секој $n = 1,2,...$ функцијата $f_n(x)$ не опаѓа на $[a,b]$. Тогаш, за секои $x_1, x_2 \in [a,b]$ такви, што $x_1 < x_2$ важи

$$f_n(x_1) \leq f_n(x_2) \text{ , за секој } n = 1,2,...$$

што значи $\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x_1) \leq \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x_2)$, од што следува $f(x_1) \leq f(x_2)$.

б) Од теорема V 11.5 следува дека $f \in \mathbf{R}([a,b])$, а од теорема V 16.2 следува дека функцијата

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ , } x \in [a,b]$$

е диференцијабилна во секоја точка од $[a,b]$ и притоа важи $H'(x) = f(x)$, за секој $x \in [a,b]$.

Од монотоноста на функцијата f следува $f(t) \leq f(x)$, за секој $t \in [a,x]$, па од последица V 14.7 следува

$$\int_a^x f(t)dt \le \int_a^x f(x)dt = (x-a)f(x) < xf(x) .$$

Понатаму, за диференцијабилната функција $F(x) = \frac{1}{x}H(x)$ важи

$$F'(x) = [\tfrac{1}{x}H(x)]' = -\tfrac{1}{x^2}H(x) + \tfrac{1}{x}H'(x) = \tfrac{1}{x^2}[xf(x) - \int_a^x f(t)dt] > 0 .$$

Конечно, од теорема IV 13.2 следува дека функцијата $F(x)$ строго монотоно расте на $[a,b]$. ♦

1.9. Забелешка. Ако во лема 1.8 само една од функциите $f_n(x)$ монотоно расте (монотоно опаѓа), тогаш и функцијата $f(x)$ монотоно расте (монотоно опаѓа). Меѓутоа, ако е дадена низа функции $\{g_n\}$, дефинирани на $[a,b]$ и ако

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \text{, за секој } x \in [a,b]$$

и ако сите функции монотоно растат, тогаш функцијата $g(x)$ не мора монотоно да расте, бидејќи при $x_1 < x_2$ од $g_n(x_1) < g_n(x_2)$, за секој $n = 1,2,...$ следува само

$$g(x_1) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_1) \le \lim_{n\to\infty} g_n(x_2) = g(x_2) .$$

Понатаму, ако ненегативната функција $f(x)$ не опаѓа на $[a,b]$ и $\lambda > 0$, тогаш и функцијата $[f(x)]^{\lambda}$ не опаѓа на $[a,b]$, а функцијата $[f(x)]^{-\lambda}$ не расте на $[a,b]$. Исто така, ако функциите g и f не опаѓаат, тогаш и функцијата $g(f(x))$ не опаѓа, а ако функцијата g не расте, а функцијата f не опаѓа, тогаш функцијата $f(g(x))$ не расте. Точноста на претходно искажаните тврдења непосредно следува од својствата на степенската фунција и дефиницијата на монотоните функции.

1.10. Пример. а) Да ги разгледаме функциите $f(x) = x$ и $g(x) = x^3$, $x \in [-2,3]$ кои монотоно растат на разгледуваниот интервал. Меѓутоа, функцијата $f(x)g(x) = x^4$ не е монотона на овој интервал.

б) Во пример 1.1 ја конструиравме функцијата $h(x)$ која е непрекината, монотона и за ниту еден рационален број оваа функција нема десен извод. Овде ќе дадеме пример на монотоно растечка функција која е прекината во секоја рационална точка, а е непрекината во секоја ирационална точка.

Нека $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ е низата од сите рационални броеви од интервалот $[0,1]$. Понатаму, нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ е конвергентен ред со позитивни членови. Дефинираме функција

$$f(x)=\sum_{q_n<x} a_n\ ,\ x\in[0,1]\,, \tag{6}$$

каде се собираат само оние членови на редот a_n за чиј индекс важи $q_n < x$.

Ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1 < x_2$, тогаш постои q_m таков што $x_1 < q_m < x_2$, па затоа $f(x_2) - f(x_1) \ge a_m > 0$, што значи дека f монотоно расте на $[0,1]$.

Нека $x \in [0,1]$ е рационален број и $x = q_p$. Тогаш

$$f(x+h) - f(x) \ge a_p \text{, за секој } h > 0\,,$$

па затоа

$$f(x^+) - f(x) \ge a_p > 0\,,$$

односно f е прекината од десно во x. Аналогно се докажува дека f е прекината од лево во x.

Нека $x \in [0,1]$ е ирационален број, а n_0 е таков, што

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n < \varepsilon\,.$$

Земаме h таков, што во интервалот $[x, x+h]$ не се содржи ниеден од броевите $q_1, q_2, ..., q_{n_0}$. Тогаш,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{x \le q_n < x+h} a_n < \varepsilon\,,$$

од што следува дека функцијата f е непрекината од десно. Непрекинатоста од лево се докажува аналогно. ♦

2. ФУНКЦИИ СО ОГРАНИЧЕНА ВАРИЈАЦИЈА

2.1. Дефиниција. Функцијата $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ ја нарекуваме *функција со ограничена варијација* на интервалот $[a,b]$, ако постои $M \in \mathbf{R}$ таков што за секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ важи

$$\sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | \le M\,.$$

Множеството од сите функции со ограничена варијација на $[a,b]$ го означуваме со $\mathbf{BV}([a,b])$. Ако $f \in \mathbf{BV}([a,b])$, тогаш бројот

$$V(f,[a,b]) = \sup_{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) |\,,$$

каде супремумот се зема по сите можни поделби $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$, го нарекуваме *варијација на функцијата* f *на* $[a,b]$.

Ако $V(f,[a,b]) = +\infty$, тогаш за f велиме дека *нема ограничена варијација на* $[a,b]$.

2.2. Пример. а) Нека f е монотона функција на $[a,b]$. Тогаш $f \in \mathbf{BV}([a,b])$ и $V(f,[a,b]) = |f(b) - f(a)|$.

Навистина, нека f монотоно не опаѓа на $[a,b]$. За секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ имаме

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = f(x_n) - f(x_0)$$
$$= f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$$

Аналогно се разгледува случајот кога f монотоно не расте на $[a,b]$.

б) Ако функцијата f на $[a,b]$ има ограничен извод, т.е. ако постои $M > 0$ таков што $|f'(x)| \le M$, за секој $x \in [a,b]$, тогаш

$$f \in \mathbf{BV}([a,b]) \text{ и } V(f,[a,b]) \le M(b-a)\,.$$

Навистина, од теоремата на Лагранж следува дека за секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ постојат точки $c_i \in (x_i, x_{i+1}),\ i = 0,1,\dots,n-1$ такви, што

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_i)\,, \text{ за } i = 0,1,\dots,n-1\,,$$

па затоа

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)| \le \sum_{i=0}^{n-1} M\,|x_{i+1} - x_i| = M(b-a)\,.$$

в) Функцијата f може да има конечен и определен извод во секоја точка од дефиниционата област, но притоа да не биде функција со ограничена варијација. Во случајов изводот на функцијата е неограничен.

Навистина, да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = x^2 \cos \pi x^{-2}, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f(0) = 0\,.$$

Очигледно, изводот на оваа функција постои за секој $x \in [0,1]$ и притоа важи

$$f'(x) = 2x \cos \pi x^{-2} + \tfrac{2\pi}{x} \sin \pi x^{-2}\,, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f'(0) = 0\,.$$

Меѓутоа, функцијата f не е со ограничена варијација на $[0,1]$. Имено, ако јаземеме поделбата

$$x_0 = 0\,,\ x_i = \tfrac{1}{\sqrt{n+1-i}}\,, \text{ за } i = 1,2,\dots,n$$

добиваме

$$\sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i+1} \to \infty, \text{ кога } n \to \infty .$$

г) Очигледно, за да функцијата f, која има определен извод во секоја точка од интервалот $[a,b]$, не е функција со ограничена варијација на овој интервал потребно е таа на овој интервал да има бесконечно многу минимуми и максимуми и уште повеќе нејзиниот извод да не е ограничен на $[a,b]$. Меѓутоа, овие услови не се доволни, што може да се види ако ја разгледаме функцијата

$$f(x) = x^2 \cos \pi x^{-4/3}, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f(0) = 0 .$$

Оваа функција има бесконечно многу максимуми и минимуми на $[0,1]$ и во секоја точка $[0,1]$ има определен извод

$$f\,'(x) = 2x\cos \pi x^{-4/3} + \tfrac{4\pi}{3} x^{-1/3} \sin \pi x^{-4/3}, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f\,'(0) = 0$$

кој не е ограничен на $[0,1]$, но сепак таа е со ограничена варијација. Имено, функцијата на секој интервал $[(2k+1)^{-3/4},(2k)^{-3/4}]$, $k = 1,2,...$ има по еден минимум во точка $x_k^{'}$, кој е негативен и по апсолутна вредност помал од $(2k)^{-3/2}$, а на секој интервал $[(2k)^{-3/4},(2k-1)^{-3/4}]$, $k = 1,2,...$ има по еден максимум во точка $x_k^{''}$, кој е позитивен и помал од $(2k-1)^{-3/2}$. Сега, за секоја поделба $\lambda = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ имаме

$$\sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | < \sum_{k=1}^{\infty} | f(x_k^{''}) - f(x_k^{'}) | < \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^{3/2}} < +\infty,$$

што значи дека функцијата е со ограничена варијација.

д) Класата непрекинати функции и класата функции со ограничена варијација се меѓусебно неспоредливи. Имено, од една страна според а) монотоните функции се функции со ограничена варијација, но како што знаеме монотона функција не мора да биде непрекината. Од друга страна, функцијата

$$f(x) = x\cos \tfrac{\pi}{2x}, \text{ за } x \in (0,1] \text{ и } f(0) = 0$$

е непрекината на интервалот $[0,1]$, но таа не е функција со ограничена варијација. Навистина, за поделбата $\lambda = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, ..., \frac{1}{2}, 1\}$ добиваме

$$\sum_{i=0}^{2n-1} | f(x_{i+1}) - f(x_i) | = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \to +\infty, \text{ кога } n \to \infty . \ \blacklozenge$$

2.3. Лема. а) $V(f,[a,b]) \geq 0$.

б) $| f(b) - f(a) | \leq V(f,[a,b])$.