МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 49

Ристо Малчески

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД НАТПРЕВАРОТ КЕНГУР ЗА ШЕСТО И СЕДМО ОДДЕЛЕНИЕ

Скопје, 2024

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е збирка решени задачи од престижниот меѓународен натпревар *Кенгур без граници*, наменета за учениците од шесто и седмо одделение од основното образование. Збирката ги содржи сите задачи од оваа категорија од 2008 до 2024 година.

Задачите, кои ги има вкупно 614 се поделени во шест глави и тоа:

- Аритметика и алгебра,
- Текстуални задачи,
- Геометрија, и
- Логика и комбинаторика.

Понатаму, секоја глава е поделена на неколку параграфи, во кои задачите се групирани по сродност. Така, главата Геометрија и комбинаторика е поделена на осум параграфи и тоа:

- Логички главоболки,
- Патеки и лавиринти,
- Боење и покривања,
- Таспоредување букви, броеви и фигури,
- Пребројувања
- Расекување и составување фигури,
- Игри, и
- Дополнетелни задачи.

Во збиркава се дадени комплетни решенија на задачите, при што решението на секоја задача следи одма по формулацијата на истата. Сепак на читателот му препорачувам прво да се обиде самостојна да ја реши задачата која ја обработува, а потоа да го консултира понуденото решение. Освен тоа, за некои задачи се понудени по два начини за нивно решавање. Ова е особено важно за развојот на математичкото мислење, па затоа на читателот му препорачувам секаде каде што може задачата да ја реши и на друг начин од тој што е понуден.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за учество на натпреварот Кенгур без граници, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика. Меѓутоа, сметам дека голем дел од овие задачи може да се користат и во редовната настава, па затоа еден од мотивите за пишување на оваа збирка е токму тоа, но и убавината на задачите на натпреварот Кенгур без граници, кои никако не смее да подлежат на заборавот на времето.

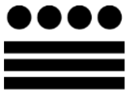
Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје   Авторот
31. декември, 2024 г.

I АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

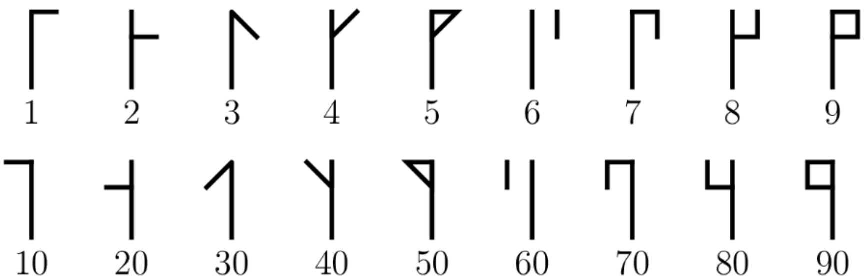
1. БРОЕВИ И ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Во цивилизацијата на Маите броевите се запишувале со помош на точки и црти. Една точка има вредност еден, а една црта има вредност 5. Како се запишува бројот 17?

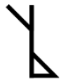
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **C).** Имаме $17 = 15 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1$, па затоа бројот 17 се запишува со три црти и две точки.

2. На почетокот на тринаесеттиот век се користеле таканаречените *цистериански броеви*. На долниот цртеж се прикажани записите на првите девет природни броеви и записите на првите девет цели десетки.



Двоцифрените броеви кои недостасуваат се претставуваат со дополнување од десно на знак (наречен *глиф*) од првиот ред до знакот од вториот ред. Ако глифовите на броевите 24, 81 и 93 се ,  и , со кој глиф е претставен бројот 45?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **D).** Бидејќи $45=40+5$, глифот за бројот 45 се добива со поврзување на глифовите на броевите 40 и 5, и се добива глифот .

3. Колку најмалку цифри треба да избришеме од бројот 12323314, за да преостанатите цифри, во дадениот редослед, формираат број кој и од лево и од десно исто се чита?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

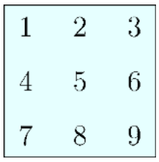
Решение. **C).** Бидејќи цифрата 4 е единствена и е крајна во дадениот број прво неа треба да ја избришеме. Така го добиваме бројот 1232331. Сега е јасно дека ако од последниот број избришеме една цифра, тогаш нема да добиеме број кој исто се чита и од лево и од десно. Меѓутоа со бришење на две цифри можеме да ги добиеме броевите 12321 и 13231 кои го задоволуваат условот на задачата. Значи, најмалку треба да избришеме три цифри.

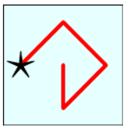
4. Митре запишал три последователни двоцифрени броја, при што цифрите ги заменил со симболи. Броевите во растечки редослед се ■♦, ♥▲ и ♥■. Кој е следниот број што треба да го запише Митре?

A) ■♥ B) ■■ C) ♥♥ D) ♦■ E) ♥♦

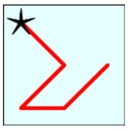
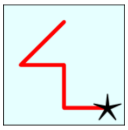
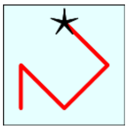
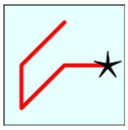
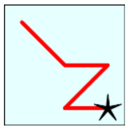
Решение. **B).** Бидејќи ■♦ и ♥▲ се два последователни броја, а цифрите на десетките се различни, заклучуваме дека ♦ = 9 и ▲ = 0. Според тоа, ■ = 1, односно првиот број е 19. Значи, трите броја се 19, 20 и 21, па ♥ = 2. Конечно, Митре треба да го запипе бројот 22, односно тој треба да запише ♥♥.

5. Во квадратот на цртежот десно се напишани цифрите од 1 до 9. Со овие цифри се задава број почнувајќи од цифрата на местото на ѕвездичката и до неа се запишуваат цифрите до кои се доаѓа движејќи се по црвената линија. На пример,





бројот 42685 е добиен движејќи се по црвената линија прикажана на цртежот лево. Со која од следниве линии е зададен најголем број?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **E).** *Прв начин*. Со линијата A) е зададен бројот 15786, со линијата B) е зададен бројот 98542, со линијата C) е зададен бројот 26847, со линијата D) е зададен бројот 65742 и со линијата E) е зададен бројот 98651 и тоа е најголемиот број.

Втор начин. Секоја линија минува низ пет цифри. Најголемиот број може да е прикажан со линиите B) и E), бидејќи имаат најголема цифра на десетилјадитите, т.е. 9. Потоа овие броеви имаат цифра на илјадитите 8, а поголем е бројот E) кој има цифра на стотките 6, додека бројот B) има цифра на стотките 5.

6. Ако A, B, C се различни цифри, тогаш најголемиот шестцифрен број запишан со 3 цифри A, 2 цифри B, и 1 цифра C не може да биде еднаков на:

A) AAABBC B) CAAABB C) BBAAAC

D) AAABCB E) AAACBB

Решение. **D).** Случајот под A) може ако $A > B > C$. Случајот под B) може ако $C > A > B$. Случајот под C) може ако $B > A > C$. Случајот под E) може ако $A > C > B$. Случајот под D) не може, бидејќи треба да е $A > B > C$ и $C > B$, што е противречност.

7. Димитар правел плаката на која го пишувал зборот КЕНГУРЧЕ. Тој секој ден цртал и боел по една буква. Почнал да работи во среда. Кој ден тој завршил со работа?

A) понеделник B) вторник C) среда D) четврток E) петок

Решение. C). Зборот КЕНГУРЧЕ содржи 8 букви. Значи, почнувајќи од среда тој ќе пишува 8 дена. Според тоа, последната буква ќе ја запише во СРЕДА.

8. Васил го бои слоганот VIVAT KANGAROO на ѕид. Тој сака различни букви да се обоени со различни бои, и исти букви со исти бои. Колку различни бои тој ќе употреби.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 13

Решение. C). Различни букви во слоганот VIVAT KANGAROO се VIATKNGRO.

Според тоа Васил ќе употреби 9 различни бои.

9. Горјан во низа ги запишал сите броеви од 1 до 20 и го добил 31-цифрениот број

$$1234567891011121314151617181920.$$

Потоа избришал 24 од запишаните 31 цифра така што бројот кој останал е најголемиот можен број. Кој број го добил Горјан?

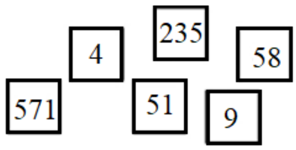
A) 9671819 B) 9567892 C) 9781920 D) 9912345 E) 9818192

Решение. C). За да се добие најголемиот можен број потребно е при бришењето од лево кон десно да останува најголемите можни цифри. Затоа, на почетокот треба да се избришат сите цифри до првата цифра 9. Тоа се 8 цифри и се добива бројот

$$91011121314151617181920.$$

Сега треба да бришеме цифри по цифрата 9. Ни останува да избришеме $24-8=16$ цифри. Повторно бришеме се до моментот во кој како втора цифра ни останува најголемата можна цифра. Меѓу цифрите 9 и 7 имаме 15 цифри, па ако нив ги избришеме го добиваме бројот 97181920. Останува да избришеме уште една цифра, што значи дека бараниот број е 9781920.

10. Кој е најмалиот дванаесетцифрен природен број, кој може да се формира со подредување една до друга на картичките прикажани на цртежот десно?



A) 495158235571 B) 235458515719 C) 235451585719

D) 235451571589 E) 235457151589

Решение. D). Прво ја ставаме картичката со најмала водечка цифра, па до неа картичката со најмала водечка цифра меѓу преостанатите картички и продолжуваме на ист начин. Во случај на картички кои имаат иста водечка цифра ја ставаме онаа картичка која има помала втора цифра итн. Така го добиваме бројот **235451571589.**

11. Матео ги реди дадените картички во ред една по друга така што го добил најмалиот можен дванаесетцифрен број.

$\boxed{4}$ $\boxed{69}$ $\boxed{113}$ $\boxed{9}$ $\boxed{51}$ $\boxed{5}$ $\boxed{67}$

Кои се последните три цифри на бројот кој го добил Матео?

A) 699 B) 113 C) 551 D) 967 E) 459

Решение. D). Прво ја ставаме картичката со најмала водечка цифра, па до неа картичката со најмала водечка цифра меѓу преостанатите картички и продолжуваме на ист начин. Во случај на картички кои имаат иста водечка цифра ја ставаме онаа картичка која има помала втора цифра итн. Така го добиваме бројот **113451567699**. Значи, бараниот трицифрен завршеток е 699.

12. Пабло ги реди дадените картички во ред една по друга така што го добил најголемиот можен дванаесетцифрен број.

$\boxed{4}\quad \boxed{69}\quad \boxed{113}\quad \boxed{9}\quad \boxed{51}\quad \boxed{5}\quad \boxed{67}$

Која е петтата по ред цифра одлево-надесно во бројот кој го добил Пабло?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Решение. D). За да го добиеме најголемиот можен број прво ја ставаме картичката со најголемата водечка цифра, па до неа картичката со најголемата водечка цифра меѓу преостанатите картички и продолжуваме на ист начин. Во случај на картички кои имаат иста водечка цифра ја ставаме онаа картичка која има поголема втора цифра итн. Така го добиваме бројот **969675514113**. Значи, бараната цифра е 7.

13. Дигитален часовник покажува дека е 20:19 часот. Колку часот ќе покажува часовникот следниот пат кога времето ќе биде претставено со истите цифри?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. C). Бројот покажан на дисплејот А) не е час, а на останатите дисплеи следното покажано време е 21:09.

14. Дадени се броевите

$$a=2-(-4),\quad b=(-2)\cdot(-3),\quad c=2-8,\quad d=0-(-6),\quad e=(-12):(-2).$$

Колку од нив не се еднакви на 6?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

Решение. B). Имаме

$$a = 2-(-4) = 2+4 = 6,$$
$$b = (-2)\cdot(-3) = 2\cdot 3 = 6,$$
$$c = 2-8 = -6,$$
$$d = 0-(-6)0+6 = 6,$$
$$e = (-12):(-2) = 12:2 = 6.$$

15. Кој од изразите има најголема вредност?

A) $20+22$ B) $202+2$ C) $202:2$ D) $202\cdot 2$ E) $20\cdot 22$

Решение. E). Имаме

$$20+22=42,\ 202+2=204,\ 202:2=101,\ 202\cdot 2=404,\ 20\cdot 22=440$$

и $42<101<204<404<440$.

16. Кој израз има најмала вредност?

A) $2+0+0+8$ B) $200:8$ C) $2\cdot 0\cdot 0\cdot 8$

D) $200-8$ E) $8+0+0-2$

Решение. C). Имаме

$$2+0+0+8=10,$$
$$200:8=25,$$
$$2\cdot 0\cdot 0\cdot 8=0,$$
$$200-8=192,$$
$$8+0+0-2=6.$$

17. Кој од броевите е парен:

A) 2009 B) $2+0+0+9$ C) $200-9$ D) $200\cdot 9$ E) $200+9$.

Решение. D). Бројот 2009 е непарен, потоа $2+0+0+9=11$ е непарен, $200-9=191$ е непарен, $200+9=209$ е непарен и $200\cdot 9=1800$ е парен број.

18. Кој израз има вредност различна од вредностите на другите четири изрази:

A) $20\cdot10+20\cdot10$ B) $20:10\cdot20\cdot10$ C) $20\cdot10\cdot20:10$

D) $20\cdot10+10\cdot20$ E) $20\cdot10+20+10$.

Решение. E). Имаме

$20\cdot10+20\cdot10=200+200=400$,

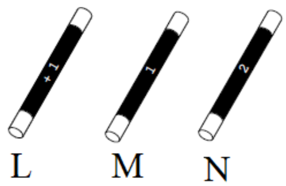
$20:10\cdot20\cdot10=2\cdot20\cdot10=40\cdot10=400$,

$20\cdot10\cdot20:10=200\cdot20:10=4000:10=400$,

$20\cdot10+10\cdot20=200+200=400$,

$20:10\cdot20+10=2\cdot20+10=40+10=50$.

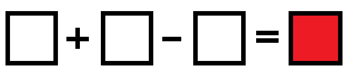
19. Влатко има одредена сума на пари и 3 магични стапчиња кои може да ги користи само еднаш. Стапчето L додава 1 евро, стапчето M одзема 1 евро, а стапчето N ја удвојува сумата пари. Во кој редослед Влатко треба да ги искористи магичните стапчиња така што на крајот ќе добие најголема можна сума на пари?



A) NLM B) LMN C) NML D) LNM E) MLN

Решение. D). Нека почетната сума е x. Ако прво или на крајот последователно во некој редослед ги примениме стапчињата L и M, тогаш добиената сума е $2x$. Ако редоследот MLN тогаш добиената сума е $2(x-1)+1=2x-1$, а ако редоследот е LNM тогаш добиената сума е $2(x+1)-1=2x+1$. Значи, редоследот е LNM.

20. Пабло запишувал четири од броевите 2, 3, 4, 5 и 6 во квадратчињата на шемата десно така што добивал точни равенства. Колку различни броеви можел Пабло да запише во црвеното квадратче?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **E).** Имаме

$$3+5-6=2,$$
$$2+6-5=3,$$
$$2+5-3=4,$$
$$2+6-3=5,$$
$$3+5-2=6.$$

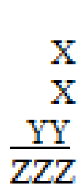
Значи, во црвеното квадратче Пабло можел да го запише секој од дадените броеви, т.е. пет броја.

21. Анита одзела два двоцифрени броја, а потоа избришала по една цифра од секој од двата броја, како што е прикажано на цртежот десно. Колку изнесува збирот на избришаните цифри?

A) 8 B) 9 C) 12 D) 13 E) 15

Решение. **D).** Цифрата на единиците на намаленикот треба да е еднаква на цифрата на единиците на збирот на намалителот и разликата. Со бројот 5 единствено бројот 8 дава збир чија цифра на единиците е 3. Според тоа, намалителот е 28. Значи, намаленикот е $25+28=53$. Конечно, збирот на цифрите кои недостасуваат е еднаков на $5+8=13$.

22. Во записот на цртежот десно, исти букви означуваат исти цифри, а различни букви, различни цифри. Која цифра е означена со буквата X?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **E).** Збир на два едноцифрени и еден двоцифрен број е помал од 200, па затоа $Z=1$, т.е. збирот на броевите е 111. Бидејќи збир на два еднакви едноцифрени броја е парен број, а 111 е непарен број двоцифрениот собирок е непарен број, па затоа $\overline{YY}=99$. Според тоа, $X=(111-99):2=6$.

23. Производот на цифрите на еден двоцифрен број е 21. Колку е збирот на цифрите на овој број?

A) 21 B) 12 C) 10 D) 8 E) 3

Решение. C). Имаме $21=3\cdot 7$, што значи дека цифрите на бројот се 3 и 7 во некој редослед. Значи, збирот на цифрите се $3+7=10$.

24. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$-|-3,2|-16:|(-|-2|).$$

A) $-11,3$ B) $-4,8$ C) $4,8$ D) 5 E) $11,3$

Решение. C). Имаме

$$-|-3,2|-16:|(-|-2|)=-3,2-16:(-2)=-3,2+8=4,8.$$

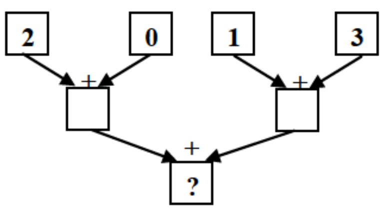
25. Пресметај 2% од 2% од 2% од 6250000.

A) 375000 B) 37500 C) 7500 D) 600 E) 50

Решение. E). Бараниот број е еднаков на

$$0,02\cdot 0,02\cdot 0,02\cdot 6250000=0,000008\cdot 6250000=8\cdot 6,25=50.$$

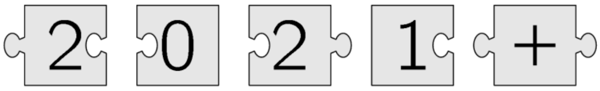
26. Во „машината за собирање“ се ставени броевите 2, 0, 1 и 3, цртеж десно. Кој број ќе се добие во квадратчето со прашалникот?



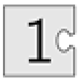
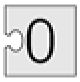
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

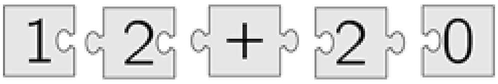
Решение. E). Во квадратчињата на вториот ред ќе бидат запишани броевите $2+0=2$ и $1+3=4$. Значи. На местото на прашалникот ќе биде запишан бројот $2+4=6$.

27. Кога петте делови прикажани на цртежот десно правилно ќе се поврзат се добива правоаголник на кој е прикажан броен израз. Која е вредноста на овој броен израз?



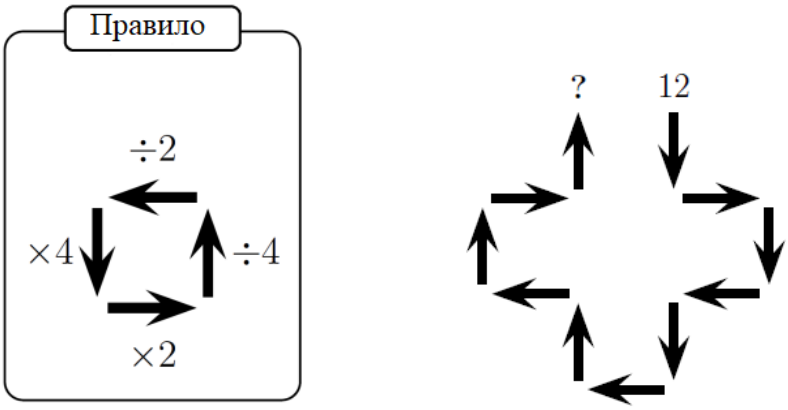
A) 22   B) 32   C) 41   D) 122   E) 203

Решение. **B).** Очигледно  и  се првиот и последниот дел од сложувалката. Според тоа, единствен можен распоред е



Затоа вредноста на бројниот израз е $12+22=32$.

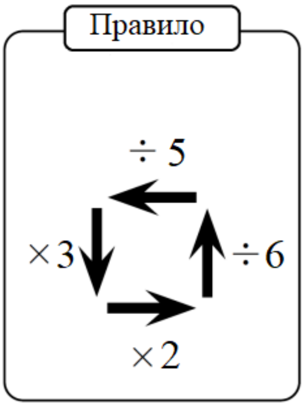
28. Матео почнал со бројот 12 и пресметувал според стреличките почитувајќи го правилото прикажано на левиот цртеж. Кој број го запишал на местото на прашалникот?

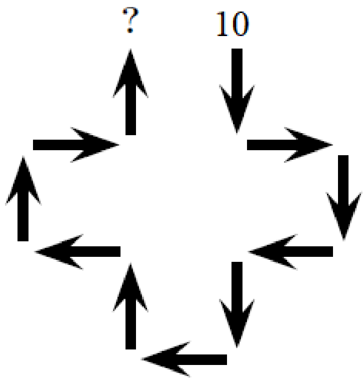


A) 3   B) 6   C) 12   D) 24   E) 48

Решение. **B).** Секоја стрелка која покажува надолу го зголемува бројот четири пати, а секоја која покажува надолу го намалува бројот четири пати. Имаме по три стрелки нагори и надолу, па затоа тие не ја менуваат вредноста на бројот. Секоја стрелка која покажува десно го зголемува бројот два пати, а секоја која покажува лево го намалува бројот два пати. Имаме две стрелки во десно, и три стрелки во лево, па затоа бројот ќе се промени за една стрелка во лево, односно ќе се намали за два пати. Конечно, Матео ќе го добие бројот $12:2=6$.

29. Андреј почнал со бројот 10 и пресметувал според стреличките почитувајќи го правилото прикажано на левиот цртеж. Кој број го запишал на местото на прашалникот?





A) 0,04 B) 0,5 C) 1,04 D) 2,04 E) 4,2

Решение. A). *Прв начин.* Последователно добиваме:

$$(...(10\cdot 3)\cdot 2)\cdot 3):5)\cdot 3):5):6):5):6)\cdot 2):6)=\frac{10\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 5\cdot 6\cdot 5\cdot 6\cdot 6}=\frac{10}{250}=0,04.$$

Втор начин. На десниот цртеж имаме три стрелки нагоре и три стрелки налево, па затоа делиме со $6\cdot 6\cdot 6$ и со $5\cdot 5\cdot 5$. Потоа имаме три стрелки надолу и две стрелки надесно, па затоа множиме со $3\cdot 3\cdot 3$ и со $2\cdot 2$. Значи, Андреј на местото на прашалникот го запишал бројот $\frac{10\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 6\cdot 6\cdot 6}=\frac{10}{250}=0,04$.

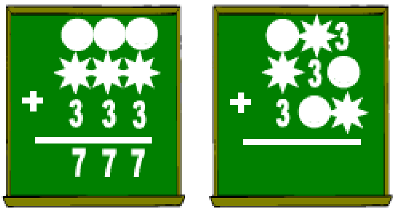
30. На бројот 6 додаваме 3. Добиениот резултат го множиме со 2, а потоа додаваме 1. Тогаш крајниот резултат ќе биде ист како вредноста на бројниот израз:

A) $(6+3\cdot 2)+1$ B) $6+3\cdot 2+1$ C) $(6+3)\cdot(2+1)$

D) $(6+3)\cdot 2+1$ E) $6+3\cdot(2+1)$

Решение. **D).** Според условите од задачата прво $6+3$, потоа имаме $(6+3)\cdot 2$ и на крајот го добиваме изразот $(6+3)\cdot 2+1$.

31. Пресметај го вториот збир прикажан на цртежот десно.



A) 333 B) 777 C) 373
D) 737 E) друг одговор

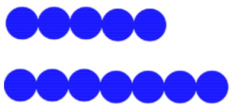
Решение. **B).** Во двата збира цифрата 3 и цифрите кои се покриени со ѕвездата и со кругот во собирците се јавуваат точно по еднаш на местата на единиците, десетките и стотките. Значи, двата збира се еднакви, па затоа бараниот збир е 777.

32. Колку е разликата помеѓу најмалиот петцифрен број и најголемиот четирицифрен број?

A) 1 B) 10 C) 1111 D) 9000 E) 9900

Решение. **A).** Најмалиот петцифрен број е 10000, а најголемиот четирицифрен број е 9999. Значи, бараната разлика е $10000-9999=1$.

33. Горјан има неколку синџири со должина 5 алки и со должина 7 алки. Со поврзување на синџирите еден по друг, Горјан може да направи синџири со различни должини. Која од овие должини е невозможно да ја направи?



A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Решение. **C).** Имаме $10=5+5$; $12=7+5$; $14=7+7$; $15=5+5+5$ и $13=5+5+3=5+7+1$. Според тоа, само синџир со должина 13 не може да се направи.

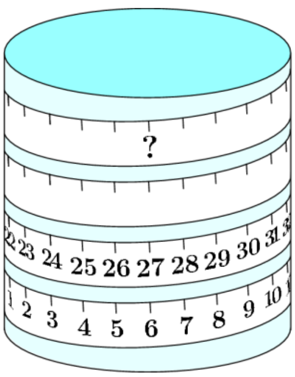
34. Шесте најмали непарни броеви се запишани на ѕидовите на една коцка. Тони ја фрла коцката три пати и ги собира броевите што се

паднале на горната страна од неа. Кој од следниве броеви не би можел да биде збирот што го добил Тони?

A) 21 B) 31 C) 20 D) 19 E) 29

Решение. C). Шесте најмали непарни броеви се: 1, 3, 5, 7, 9 и 11. Имаме: $21=1+9+11$, $31=9+11+11$, $19=3+7+9$ и $29=7+11+11$. Од друга страна, бројот 20 е парен, па како збирот на три непарни броеви е непарен број, истиот не може да се запише како збир на три броја кои паднале при фрлање на коцката.

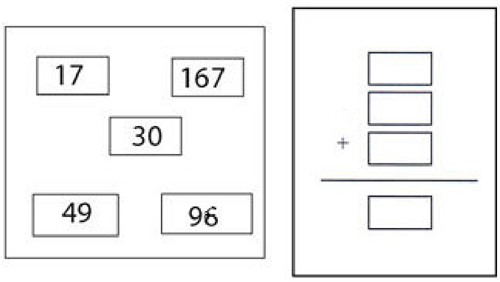
35. Трака за мерење е завиткана околу цилиндар како на цртежот. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?



A) 53 B) 60 C) 69 D) 77 E) 81

Решение. C). Бројот кој треба да е запишан на местото на прашалникот има положба која соодветствува на броевите 6 и 27. Бидејќи овие броеви се разликуваат за $27-6=21$, а до прашалникот имаме два круга добиваме дека на негово место треба да е бројот $27+21+21=69$.

36. Четири од петте броја запишани во правоаголниците од левата страна на цртежот се преместени на десната страна, така да собирањето е точно. Кој број ќе остане непреместен?



A) 17 B) 30 C) 49 D) 96 E) 167

Решение. E). Бројот 167 е најголем меѓу дадените броеви. Бидејќи

$30+49+96=175>167,\qquad 17+30+96=143<167,$

$17+49+96=162<167,\qquad 17+30+49=96,$

заклучуваме дека непреместен ќе биде бројот 167.

37. Употребувајќи ги само цифрите 4, 5, 6 и 7 се формирани два броја (секоја цифра е употребена само еднаш) со најголем производ. Колку е тој производ?

A) 4524 B) 4578 C) 4810 D) 4800 E) друг одговор

Решение. C). За да производот е најголем мора цифрите со најголем местна вредност да се најголеми. Така ги имаме следниве случаи:

$$754\cdot 6=4524, \qquad 654\cdot 7=4578,$$
$$65\cdot 74=4810, \qquad 64\cdot 75=4800.$$

38. Павел знае дека $1111\cdot 1111=1234321$. Колку е $1111\cdot 2222$?

A) 3456543 B) 2345432 C) 2234322

D) 2468642 E) 4321234

Решение. D). Имаме

$$\begin{aligned}1111\cdot 2222&=1111\cdot(2\cdot 1111)=2\cdot(1111\cdot 1111)\\&=2\cdot 1234321=2468642.\end{aligned}$$

39. Кенгурчето  треба да се замени на соодветните места, за да се добие точно равенство. Со што треба да се замени кенгурчето?

 x  = 2 x 2 x 3 x 3

A) 2 B) 3 C) 2×3 D) 2×2 E) 3×3

Решение. C). Имаме, $2\times 2\times 3\times 3=2\times 3\times 2\times 3$, па затоа кенгурчето треба да се замени со 2×3.

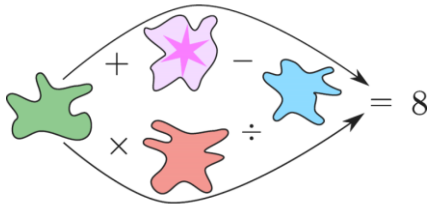
40. Колку е $3030{,}303:1{,}5$?

A) 2020,02 B) 20202,02 C) 220,22 D) 22,22 E) 22,022

Решение. А). Имаме

$$3030,303:1,5=30303,03:15=(30300+3,03):15=30300:15+3,03:15$$
$$=2020+0,202=2020,202.$$

41. Со секоја од четирите дамки на цртежот десно е покриен некој од броевите 1, 2, 3, 4 или 5, при што пресметувањата се точни. Кој број е покриен со дамката на која се наоѓа ѕвездата?



А) 1 В) 2 С) 3 D) 4 Е) 5

Решение. Е). Од дадените броеви збирот на два броја е најголем ако тоа се броевите 4 и 5. За да горните пресметувања се точни треба да е $5+4-1=8$. Значи, во сината дамка е бројот 1. Од дадените броеви производот на два броја е 8, ако тоа се броевите 2 и 4. Според тоа во долните пресметувања имаме $2\cdot 4:1=8$. Според тоа, во зелената дамка е бројот 4, па затоа во црвената дамка е бројот 2, а во дамката во која е ѕвездичката е бројот 5.

42. Бројот 5021972970 е запишан на парче хартија. Филип го исекол парчето хартија на две места, со што добил три броја. Кој е најмалиот збир што може да го добие Филип ако собере броеви добиени на опишаниот начин?

А) 3244 В) 3444 С) 5172 D) 5217 Е) 5444

Решение. В). Бидејќи дадениот број е десетцифрен, најмалиот збир се добива ако хартијата се пресече така што ќе се добијат еден четирицифрен и два трицифрени броја. Понатаму, најмалиот можен збир се добива ако четирицифрениот број е најмал можен. Во случајов можеме да ги добиеме четирицифрените броеви 5021, 1972 и 2970, што значи дека најмалиот можен збир е кога сечењето е такво да ги добиваме броевите 502, 1972 и 970. Притоа збирот е

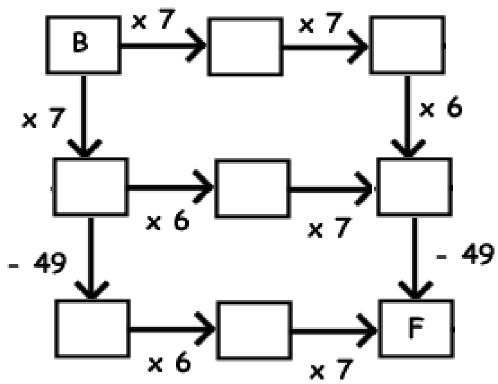
$$502+1972+970=3444.$$

43. Бројот 2581953764 е запишан на парче хартија во форма на лента. Марко ја пресекол лентата два пати така што бројот 2581953764 го поделил на 3 броја. Потоа, Марко ги собрал добиените броеви. Кој е најмалиот збир што може да го добие Марко?

A) 2675 B) 2975 C) 2978 D) 4217 E) 4298

Решение. **B).** Дадениот број има 10 цифри. При поделбата на три броја најмал збир ќе се добие ако се добиени два трицифрени и еден четирицифрен број, а четирицифрениот број треба да е најмал можен. При ваквата поделба најмалиот четирицифрен број кој може да се добие е бројот 1953, а трицифрените броеви се 258 и 764. Бараниот збир е $258+1953+764=2975$.

44. Андреј замислил природен број B и движејќи се по некои патеки во дадената шема ги направил потребните пресметувања, по што кога стигнал во полето F. Дали Андреј може да го добие бројот 2009 кога ќе стигне во полето F?



A) Да, движејќи се по било кој од трите патишта.

B) Да, движејќи се по два пата, при што замислил еден ист број.

C) Да, движејќи се по два пата, при што за секој од нив замислил различен број.

D) Да движејќи се по точно еден од трите можни патишта.

E) Не, тоа не е можно.

Решение. B). Одејќи одназад нанапред за трите патишта добиваме:

$B = (((2009+49):6):7):7 = ((2058:6):7):7 = (343:7):7 = 49:7 = 7,$

$B = (((2009+49):7):6):7 = ((2058:7):6):7 = (294:6):7 = 49:7 = 7,$

$B = (((2009:7):6)-49):7 = ((287:6)-49):7 = \frac{287-294}{6}:7 = -\frac{1}{6}.$

Од претходните пресметувања добиваме дека Андреј може да го добие бројот 2009 движејќи се по два пата, при што замислил еден ист број.

45. Која од дадените тројки броеви е таква што точките, кои ги претставуваат на бројната оска, се такви што едната точка е на еднакво растојание од другите две точки?

A) $\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}$ B) $12;21;32$ C) $0,3;0,7;1,3$

D) $\frac{1}{10};\frac{9}{80};\frac{1}{8}$ E) $24;48;64$

Решение. D). Јасно, втората по големина точка треба да е на еднакво растојание од другите две. Имаме:

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\neq\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ $\quad$ $21-12=9\neq 11=32-21$

$0,7-0,3=0,4\neq 0,6=1,3-0,7$ $\quad$ $\frac{9}{80}-\frac{1}{10}=\frac{1}{80}=\frac{1}{8}-\frac{9}{80}$

$48-24=24\neq 16=64-48.$

Значи, бараната тројка е $\frac{1}{10};\frac{9}{80};\frac{1}{8}$.

46. Андреј собирал три трицифрени броја при што заборавил да ги запише цифрите на десетките (види цртеж), а го запишал точниот резултат. Колку е збирот на незапишаните цифри?

$$\begin{array}{r} \mathbf{1{*}2} \\ +\ \mathbf{1{*}3} \\ \underline{\mathbf{1{*}4}} \\ \mathbf{309} \end{array}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 10

Решение. А). *Прв начин*. Збирот на единиците на трицифрените броеви е 9, а збирот на стотките е 3. Затоа збирот на десетките е 0.

Втор начин. Имаме,

$$\overline{1a2}+\overline{1b3}+\overline{1c4}=309,$$
$$100+10a+2+100+10b+3+100+10c+4=309,$$
$$10(a+b+c)=0,$$
$$a+b+c=0.$$

47. На кои два броја треба Пабло да ги замени местата ако сака збирот на броевите во белите квадратчиња да е еднаков на збирот на броевите во сивите квадратчиња?

1	3	5	2	13
7	4	6	8	11

А) 1 и 11 В) 2 и 8 С) 3 и 7 D) 4 и 13 Е) 7 и 13

Решение. А). Збирот на сите броеви во белите квадратчиња е еднаков на $3+5+13+8+11=40$, а во сивите е $1+2+7+4+6=20$. Ако сакаме збировите да се еднакви, тогаш тие треба да бидат $(40+20):2=30$. Значи, збирот на броевите во сивите квадратчиња треба да се зголеми за 10, а во белите да се намали за 10. Единствен пар кој е во различно обоени квадратчиња и кај кој разликата на двата броја е 10 се броевите 1 и 11. По замената се добива табелата прикажана на цртежот десно.

11	3	5	2	13
7	4	6	8	1

48. На два трицифрени броја сите 6 цифри им се различни. Првата цифра на вториот број е два пати поголема од последната цифра на првиот број. Кој е најмалиот можен збир на два такви броја?

А) 552 В) 546 С) 301 D) 535 Е) 537

Решение. Е). Нека трицифрените броеви се $\overline{xyz}$ и $\overline{abc}$, при што важи $a=2z$. Најмалиот можен збир се добива ако се употребени цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Јасно, $a \neq 0, x \neq 0$, па затоа $z \neq 0$. Ако $z = 1$, тогаш броевите се $\overline{xy1}$ и $\overline{2bc}$, па затоа во овој случај најмал збир се добиваме ако $x = 3$, цифрите на десетките се 0 и 4, и $c = 5$. Тоа се броевите 301 и 245, или броевите 341 и 205, при што во двата случаја се добива збир 546. Ако $z = 2$, тогаш броевите се $\overline{xy2}$ и $\overline{4bc}$, па затоа во овој случај најмал збир се добиваме ако $x = 1$, цифрите на десетките се 0 и 4, и $c = 5$. Тоа се броевите 102 и 435, или броевите 132 и 405, при што во двата случаја се добива збир 537.

Конечно, најмалиот можен збир е 537.

49. Во четирицифрен број $\overline{ABCD}$, цифрите A, B, C и D се во растечки редослед од лево на десно. Која е најголемата можна разлика $\overline{BD} - \overline{AC}$ меѓу двоцифрените броеви $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$?

A) 86 B) 61 C) 56 D) 50 E) 16

Решение. **B).** Најголемата можна разлика се добива ако A е најмалата можна цифра, а B, C и D се најголемите можни цифри. Значи, $A = 1, B = 7, C = 8$ и $D = 9$. Имаме $\overline{ABCD} = 1789$ и бараната разлика е $79 - 18 = 61$.

2. РАВЕНСТВА, РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

1. Со кој број треба да се замени триаголникот ▲ за да е точно равенството

$$▲+▲+6=▲+▲+▲+▲.$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Ако од двете страни на равенството отстраниме по два ▲, добиваме дека збирот на два ▲ е еднаков на 6. Значи, знакот ▲ треба да се замени со бројот 3.

2. Што треба да се стави на местото на буквата a за да равенството $1+1a1-2=100$ е точно?

A) + B) − C) × D) 0 E) 1

Решение. D). Од $1+1a1-2=100$ добиваме $1a1=100+2-1$, односно $1a1=101$. Значи, на местото на буквата a треба да се стави цифрата 0.

3. Кој број треба да се запише на местото на буквата a за да се добие точно равенство?

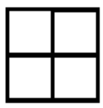
$$3\cdot 2023=2021+a+2025$$

A) 2021 B) 2022 C) 2023 D) 2024 E) 2025

Решение. C). Од даденот равенство следува

$$a=3\cdot 2023-2021-2025=6069-4046=2023\ .$$

4. Броевите 2, 3 и 4, како и еден непознат број се сместени во четирите полиња на прикажаната 2×2 табела. Познато е дека збировите на броевите во редиците на табелата се еднакви на 6 и 9. Кој е непознатиот број?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

Решение. B). Збирот на четирите броја е еднаков на збирот на збировите на броевите во двете редици. Затоа, ако непознатиот број е a, добиваме $2+3+4+a=6+9$, од каде наоѓаме $a=6$.

5. Борис избрал еден број, кој го поделил со 7, па на добиениот резултат му додал 7 и на крајот го помножил со 7. Така го добил бројот 777. Кој број го избрал Борис?

A) 7 B) 111 C) 722 D) 567 E) 728

Решение. E). *Прв начин.* Пред да помножи со 7 Борис добил $777:7=111$. Пред да го додаде бројот 7, тој добил $111-7=104$. Според тоа, Борис на почетокот го избрал бројот $104\cdot 7=728$.

Втор начин. Нека Борис го избрал бројот a. Тогаш

$$((a:7)+7)\cdot 7=777,$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned}&((a:7)+7)\cdot 7=777,\\&(a:7)+7=777:7,\\&a:7=111-7,\\&a=104\cdot 7,\\&a=728.\end{aligned}$$

6. Јован го составил бројниот ребус во кој на различните букви *A*, *B*, *C* и *D* им соодветствуваат различни цифри, а на исти букви им соодветствуваат исти цифри. Која цифра соодветствува на букавата *B*?

$$\begin{array}{r}A\,B\,C\\+\;C\,B\,A\\\hline D\,D\,D\,D\end{array}$$

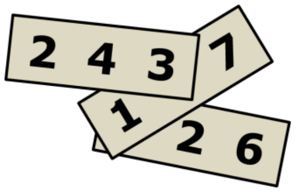
A) 0 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. A). Збир на два тицифрени броја е помал од 2000, па затоа $D=1$. Понатаму, збирот на два едноцифрени броја дава цифра на единиците 1 ако тој збир е 11. Значи, $A+C=11$. Според тоа,

$$100A+10B+C+100C+10B+A=1111,$$

$$101(A+C)+20B=1111,$$
$$101\cdot 11+20B=1111,$$
$$20B=0,$$
$$B=0.$$

7. На секое од трите картончиња е запишан по еден трицифрен број. Збирот на трите броја е еднаков на 826. Две цифри со кои се запишани броевите се покриени. Колку изнесува збирот на двете покриени цифри?



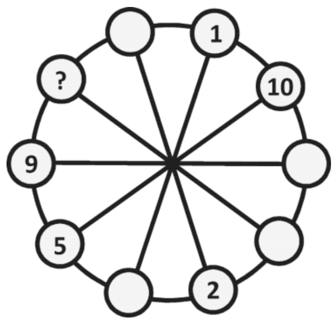
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 1

Решение. C). Ако покриените цифри се x и y, тогаш

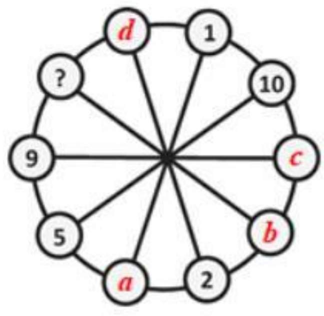
$$243+\overline{x26}+\overline{1y7}=826,$$
$$243+(100x+26)+(100+10y+7)=826,$$
$$100x+10y=450,$$
$$x=4,\ y=5.$$

што значи збирот на двете покриени цифри е 9.

8. Броевите од 1 до 10 треба да се ставаат во малите кругчиња, во секое кругче по еден број. Броевите во две соседни кругчиња, мора да имаат ист збир како двата броеви што се наоѓаат во дијагонално спротивните кругчиња. Некои од броевите се веќе ставени. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?

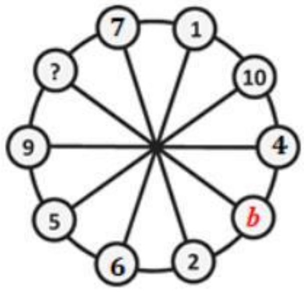


A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8



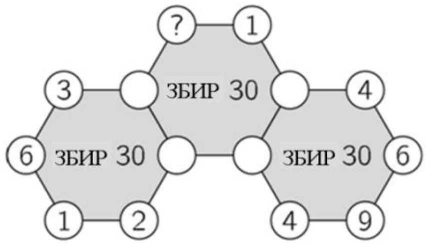
Решение. A). Со a,b,c,d да ги означиме броевите кои недостасуваат. Сега $5+a=1+10$, па е $a=6$. Понатаму, $1+d=2+6$ па е $d=7$, а како

$10+c=9+5$ добиваме $c=4$.



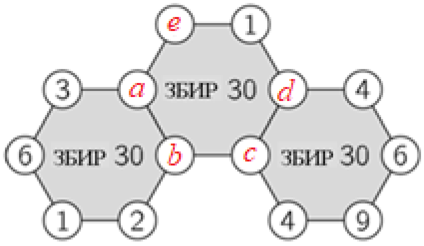
Конечно, запишани се броевите 1, 2, 4, 5, 6, 9 и 10, па затоа важи $2+b=?+7$. Бидејќи треба уште да се запишат броевите 3 и 8, очигледно е дека на местото на прашалникот треба да е бројот 3.

9. Дијаграмот на цртежот лево покажува три шестаголници со броеви на секое теме, при што некои броеви се невидливи. Збирот на шесте броја на темињата во секој шестаголник е 30. Кој број треба да стои на местото на прашалникот?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. B). Да ги воведеме ознаките како на цртежот десно. Тогаш



$$a+b=30-(3+6+2+1)=18,$$
$$c+d=30-(4+9+6+4)=7,$$

па затоа

$$e=30-1-a-b-c-d=30-1-18-7=4.$$

Според тоа, на местото на прашалникот треба да стои бројот 4.

10. Во првиот ред на една табела се запишани два броја. Во секој следен ред се запишува збирот и разликата на броевите од претходниот ред. Почнувајќи од некои два броја, во седмиот ред на една ваква табела се добиени броевите 128 и 32. Колку е збирот на броевите во првиот ред на оваа табела?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 20 E) 24

Решение. **D).** Ако од броевите a и b се добиено броевите x и y, тогаш $x=a+b,\ y=a-b$. Од последните две равенства ги изразуваме a и b, при што добиваме $a=\frac{x+y}{2}, b=\frac{x-y}{2}$.

Од претходно изнесеното следува дека ако во седмиот ред се броевите 128 и 32, тогаш во шестиот ред се броевите $\frac{128+32}{2}=80$ и $\frac{128-32}{2}=48$. Сега, во петтиот ред се запипани броевите $\frac{80+48}{2}=64$ и $\frac{80-48}{2}=16$, па во четвртиот ред се броевите $\frac{64+16}{2}=40$ и $\frac{64-16}{2}=24$, во третиот ред се броевите $\frac{40+24}{2}=32$ и $\frac{40-24}{2}=8$, во вториот се броевите $\frac{32+8}{2}=20$ и $\frac{32-8}{2}=12$. Конечно во првиот ред се броевите $\frac{20+12}{2}=16$ и $\frac{20-12}{2}=4$, па бараниот збир е $16+4=20$.

11. Во 2×2 табела се запишани броевите a,b,c,d, а потоа се собрани броевите запишани во секоја редица и секоја колона (види цртеж десно). Кое тврдење е точно?

$$\begin{array}{|c|c|l} \hline a & b & \rightarrow 2 \\ \hline c & d & \rightarrow 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \\ \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{4} & \end{array}$$

A) a е еднаков на d B) b е еднаков на c C) a е поголем од d

D) a е помал од d E) c е поголем од b

Решение. D). Од условот на задачата следува

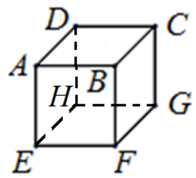
$$a+b=2, \qquad c+d=3,$$
$$a+c=1, \qquad b+d=4.$$

Ако од од првата равенка ја одземеме третата и од втората ја одземеме третата, добиваме:

$$b-c=1, \qquad d-a=2.$$

Од претпоследното равенство следува дека тврдењата B) и E) не се точни, а од последното равенство следува дека тврдењата A) и C) не се точни, а е точно тврдењето D).

12. Матеа запишува по еден број на секој ѕид од коцката. Потоа, на секое теме го придружува збирот на броевите кои се запишани на ѕидовите на кои тоа теме им припаѓа (на пример, на темето B го придружува збирот на броевите од ѕидовите $BCDA$, $BAEF$ и $BFGC$). Броевите кои Матеа ги придружила на темињата C, D и E се 14, 16 и 24, соодветно. Кој број го придружила на темето F?



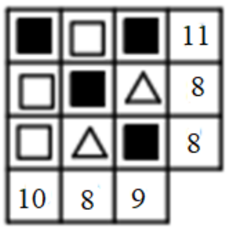
A) 15 B) 19 C) 22 D) 24 E) 26

Решение. C). Нека на ѕидовите $ABCD, ABEF, ADHE, BCGF, CDHG$ и $EFGH$ се придружени броевите x, y, z, t, u и v, соодветно. Тогаш имаме

$$x+t+u=14,$$
$$x+z+u=16,$$
$$y+z+v=24.$$

Ако ги собереме правата и третата равенка и ја одземеме втората равенка, добиваме $t+y+v=22$, што значи дека на темето F е придружен бројот 22.

13. Во квадратната шема на цртежот десно даден е збирот во секој ред и секоја колона. Колку е вредноста на изразот ■ + □ − △ ?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

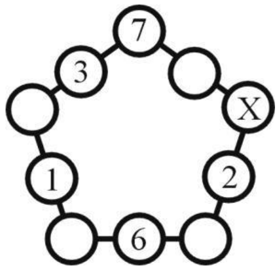
Решение. C). Ако црното квадратче, белото квадратче, триаголникот соодветно ги означиме со x, y, z, од дадената табела имаме

$$\begin{cases} 2x+y=11, \\ x+2y=10 \\ x+y+z=8. \end{cases}$$

Ако ги собереме првите две равенки, добиваме $3x+3y=21$, од каде наоѓаме $x+y=7$. Конечно, вредноста на бараниот израз е

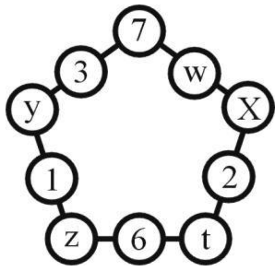
$$x+y-z=2(x+y)-(x+y+z)=14-8=6.$$

14. Во фигурата на цртежот десно Матео запишал броеви во пет од десетте кругчиња. Тој сака да запише броеви и во преостанатите пет кругчиња така што збирот на трите броја на секоја од страните на петаголникот да биде ист. Кој број треба да го запише во кругчето означено со X?



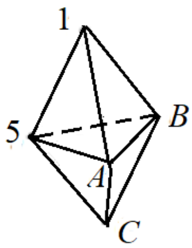
A) 7 B) 8 C) 11 D) 13 E) 15

Решение. **D).** При ознаки како на цртежот десно имаме:



$$7+3+y=y+1+z=z+6+t=t+2+X=X+w+7$$
$$10+y=y+1+z \Rightarrow z=9,$$
$$z+6+t=t+2+X \Rightarrow X=13.$$

15. Телото прикажано на цртежот десно е формирано од шест триаголници. Во секое негово теме е запишан по еден број. За секој ѕид на телото е пресметан збирот на запишаните броеви кои се во неговите темиња. Се покажало дека сите добиени збирови се еднакви. Колку е збирот на сите запишани броеви?



A) 9 B) 12 C) 17 D) 18 E) 24

Решение. **C).** Нека во темињата A,B,C се запипнаи броевите x,y,z, соодветно. Тогаш

$$\begin{cases}1+x+y=1+5+y,\\1+x+y=1+5+x,\\1+x+y=x+y+z,\end{cases}$$

од каде добиваме $x=5,\ y=5, z=1$. Според тоа, збирот на сите запишани броеви е $1+5+5+5+1=17$.

16. На цртежите десно се прикажани два дела од таблицата за множење. Кој број треба да е запишан во полето во кое е прашалникот?

×	4	3
5	20	15
7	28	21

×		
	35	63
	30	?

A) 54 B) 56 C) 65 D) 36 E) 42

Решение. A). Заеднички делител на броевите 35 и 63 е бројот 7, што значи дека во првиот ред недпостасува бројот 7. Заеднички делител на броевите 35 и 30 е бројот 5, што значи дека во првата колона недостасува бројот 5. Според тоа, во првото поле на вториот ред е бројот $30:5=6$, а во првото поле на втората колона е бројот $63:7=9$. Значи, на местото на прашалникот е бројот $6\cdot 9=54$.

17. Определи го збирот на природните броеви x,y,z ако $\frac{44}{37}=1+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 9 E) друг одговор

Решение. A). Имаме:

$$\frac{44}{37}=\frac{37+7}{37}=1+\frac{7}{37}=1+\frac{1}{\frac{37}{7}}=1+\frac{1}{\frac{35+2}{7}}=1+\frac{1}{5+\frac{2}{7}}$$
$$=1+\frac{1}{5+\frac{1}{\frac{7}{2}}}=1+\frac{1}{5+\frac{1}{\frac{6+1}{2}}}=1+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}.$$

Според тоа, $x=5, y=3, z=2$, па затоа $x+y+z=10$.

18. Во производот $\overline{PPQ}\cdot Q=\overline{RQ5Q}$ на буквите P,Q,R им соодветствуваат различни цифри. Колку е $P+Q+R$?

A) 13 B) 15 C) 16 D) 17 E) 20

Решение. D). Производот на два едноцифрени броја е број кој завршува на истата цифра ако бројот е 0, 1, 5 или 6. Случајот $Q=0$ отпаѓа бидејќи тогаш $\overline{R050}=0$, што не е можно. Случајот $Q=1$ исто така отпаѓа, бидеји тогаш $\overline{PP1}=\overline{R151}$, што не е можно бидејќи едниот е трицифрен, а другиот е четирицифрен број. Ако $Q=5$, тогаш $\overline{PP5}\cdot 5=\overline{R555}$, што не е можно бидејќи ако цифрата на првиот множител е парна, тогаш втората цифра на производот е 5, а ако цифрата на првиот множител е непарна, тогаш втората цифра на производот е 7. Ако $Q=6$, тогаш $\overline{PP6}\cdot 6=\overline{R656}$, од каде добиваме $\overline{PP0}\cdot 6=\overline{R620}$, т.е. односно $\overline{PP}\cdot 6=\overline{R62}$. Сега е јасно дека $P=7$ и $R=4$. Значи, $P+Q+R=7+6+4=17$.

19. Во бројниот ребус на различните букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{1ABCDE}\cdot 3=\overline{ABCDE1}.$$

Која цифра соодветствува на цифрата А?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). При множење со 3 единствено 7 дава цифра на единиците 1. Значи, $\overline{1ABCD7}\cdot 3=\overline{ABCD71}$. Сега за цифрата на десетките во производот имаме пренос 2, па затоа $3\cdot D$ има цифра на единиците 5, од каде следува $D=5$. Значи, $\overline{1ABC57}\cdot 3=\overline{ABC571}$. Тоа значи дека за цифрата на стотките во производот имаме пренос 1, па затоа $3\cdot C$ има цифра на единиците 4, од каде следува $C=8$. Според тоа, $\overline{1AB857}\cdot 3=\overline{AB8571}$. Според тоа, за цифрата на илјадитите имаме пренос 2, па затоа $3\cdot B$ има цифра на единиците 6, од каде следува $B=2$. Сега, $\overline{1A2857}\cdot 3=\overline{A28571}$, па затоа $A=4$ и бараниот производ е $142857\cdot 3=428571$.

20. Колку природни броеви има меѓу 19,03 и 2,009?

A) 16 B) 17 C) 14 D) 15 E) Повеќе од 17

Решение. **B).** Бидејќи $2,009 < 19,03$, тоа се броевите: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 и 19. Значи, меѓу 19,03 и 2,009 има 17 б роеви.

21. Која од следниве дропки е помала од 2?

A) $\frac{19}{8}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{21}{10}$ D) $\frac{22}{11}$ E) $\frac{23}{12}$

Решение. **E).** Имаме

$$19 > 2\cdot 8,\ \ 20 > 2\cdot 9,\ \ 21 > 2\cdot 10,\ \ 22 = 2\cdot 11,\ 23 < 2\cdot 12,$$

што значи дека дропката $\frac{23}{12}$ е помала од 2.

22. Дадени се четири позитивни броеви *a, b, c* и *d*, такви да $a < b < c < d$. Кој од броевите треба да се зголеми за 1, така да производот на броевите по зголемувањето биде најмал?

A) a B) b C) c D) d E) b или c

Решение. D). Имаме четири можности за зголемување за единица и тоа

1° $a+1, b, c, d$ 2° $a, b+1, c, d$

3° $a, b, c+1, d$ 4° $a, b, c, d+1$

Ако ги пресметаме соодветните производи добиваме

$$(a+1)bcd = abcd + bcd, \qquad a(b+1)cd = abcd + acd,$$

$$ab(c+1)d = abcd + abd, \qquad abc(d+1) = abcd + abc$$

Бидејќи $a < b < c < d$, имаме $abc < abd < acd < bcd$. Значи, производот е најмал ако бројот d го зголемиме за 1.

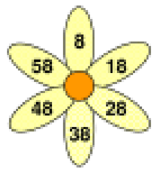
3. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Определи ја разликата меѓу збирот на најголемиот и најмалиот двоцифрен број деливи со 3, и збирот на најголемиот и најмалиот двоцифрен број кои не се деливи со 3.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Најголемиот и најмалиот број деливи со 3 се 99 и 12, а најголемиот и најмалиот број кои не се деливи со 3 се 98 и 10. Разликата на низните збирови е $99+12-(98+10)=3$.

2. Алиса во Земјата на чудата нашла „броен цвет“. Таа ги скинала сите ливчиња на кои бројот кој е запишан на нив при делење со 6 дава остаток 2. Колку е збирот на броевите на скинатите ливчиња?



A) 46 B) 66 C) 84 D) 86 E) 114

Решение. A). Имаме

$$8=6\cdot1+2,\quad 18=6\cdot3,\quad 28=6\cdot4+4,$$
$$38=6\cdot6+2,\quad 48=6\cdot8,\quad 58=6\cdot9+4.$$

Значи, Алиса ги скинала ливчињата со броевите 8 и 38 и нивниот збир е $8+38=46$.

3. Бројот 100 е помножен или со 2 или со 3, па резултатот е зголемен или за 1 или за 2. Понатаму, добиениот број се дели или со 3 или со 4, при што се добива природен број. Кој од следните броеви може да се добие?

A) 50 B) 51 C) 67 D) 68

E) Задачата има повеќе решенија

Решение. C). Имаме $100\to200$ или 300, потоа

1) $200 \to 201$ или 202, па $201:3=67$, а 202 не е делив ниту со 3 ниту со 4,

2) $300 \to 301$ или 302, па 301 и 302 не се деливи ниту со 3 ниту со 4.

Според тоа, единствено може да е добиен бројот 67.

4. Во зборот BENJAMIN на секоја буква и соодветствува една од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7, при што на различни букви соодветствуваат различни цифри. Бројот BENJAMIN е непарен и е делив со 3. Кој цифра и соодветствува на буквата N?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Решение. D). Бројот BENJAMI има седум различни букви, па затоа тоа се 7 различни цифри. Нивниот збир е $1+2+3+4+5+6+7=28$. Бидејќи бројот е непарен последната цифра N е непарна, па тоа е една од цифрите 1, 3, 5 или 7. Но, бројот е делив со 3, па затоа збирот на неговите цифри е делив со 3. Од збировите $28+1=29$, $28+3=31$, $28+5=33$ и $28+7=35$ единствено бројот 33 е делив со 3, што значи дека на буквата N соодветствува цифрата 5.

5. Во равенството $\overline{KAN}+\overline{GA}=\overline{ROO}$ на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Пресметај ја разликата $\overline{RN}-\overline{KG}$.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 21 E) 22

Решение. B). Бидејќи $K \neq R$, при собирање на трицифрен со двоцифрен број се добива поголем трицифрен број. Затоа цифрата на стотките на збирот мора да е за 1 поголема од цифрата на стотките на трицифрениот собирок. Значи, $R=K+1$. Сега, со замена во даденото равенство, по средувањето добиваме

$$N-G-1=11(9+O-G-A).$$

Левата страна на последното равенство е едноцифрен број, па како таа е делива со 11, заклучуваме дека таа мора да е еднаква на 0 од каде следува $N = G + 1$. Според тоа,

$$\overline{RN} - \overline{KG} = 10R + N - (10K + G) = 10(K+1) + G + 1 - 10K - G = 11.$$

6. Петте симболи @,*,#,&,^ претставуваат пет различни ненулти цифри. Ако

$$@ + @ + @ = *, \quad \# + \# + \# = \&, \quad * + \& = \wedge,$$

колку е ^?

A) 0 B) 2 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. E). Имаме $3@ = *$, $3\# = \&$, па затоа $\wedge = 3\cdot(@ + \#)$. Според тоа, *,& и ^ се различни едноцифрени природни броеви деливи со 3. Значи, *,& и ^ се броевите 3, 6 и 9, во некој редослед. Но, ^ е поголем од * и &, што значи дека $\wedge = 9$.

7. Со помош на цифрите a, b, c се запишани трицифрените броеви $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ чиј производ е делив со 100. Определи го збирот на сите можни различни вредности на производот abc.

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 800

Решение. D). Јасно, цифрите a и c се различни од нула, што значи дека еден од броевите е делив со 4, а другиот е делив со 25, но не е делив со 10. Ако ги запишеме трицифрените броеви $\overline{abc}$ кои се деливи со 25, но не се деливи со 10 и придружените броеви $\overline{cba}$ ги добиваме паровите:

(125, 521), (175, 571), (225, 522), **(275, 572),** (325, 723), (375, 573), **(425, 524),** (475, 574), (525, 525), (575, 575), (625, 526), **(675, 576),** (725, 527), (775, 5777), **(825, 528),** (875, 578).

Од деливоста со 4 следува дека меѓу придружените броеви само четири се деливи со 4 (соодветните парови се болдирани и обоени со црвено). Притоа, производот abc ги прима вредностите:

$$2\cdot 7\cdot 5=70,\ 4\cdot 2\cdot 5=40,\ 6\cdot 7\cdot 5=210 \text{ и } 8\cdot 2\cdot 5=80$$

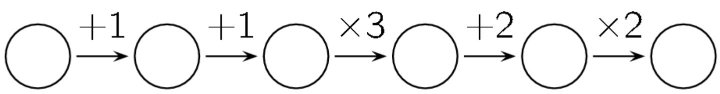
и нивниот збир е $40+70+80+210=400$.

8. Горјан на таблата запишал трицифрен број. Потоа Андрј допишал една цифра од десно, со што бројот се зголемил за 2024. Која цифра ја допишал Андреј?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 9

Решение. D). Горјан го запишал бројот $\overline{abc}$, а кога Андреј допишал цифра се добил бројот $\overline{abcd}$. Значи, $\overline{abcd}-\overline{abc}=2024$. Тоа значи дека $1000a+100b+10c+d-100a-10b-c=2024$, од каде добиваме $9(100a+10b+c)=2024-d$. Во последното равенство левата страна е делива со 9, па затоа и десната страна треба да е делива со 9. Тоа е можно ако и само ако $d=8$.

9. Дени запишува еден број во првиот круг на шемата прикажана на цртежот десно, а потоа следејќи ги дадените инструкции ги пополнува другите пет кругови .



Колку од шесте броеви запишани во круговите се деливи со 3?

A) 1 број B) можно е 1 или 2 броја

C) 2 броја D) можно е 2 или 3 броја

E) можно е 3 или 4 броја

Решение. C). Во зависност од првиот напишан број, се добиваат останатите, а бидејќи се бараат броеви деливи со 3, ќе разгледаме три случаи и тоа: кога во првиот круг е напишан број делив со три, потоа број кој при делење со три дава остаток 1 и на крајот број кој при делење со три дава остаток 2. За броевите во круговите имаме:

I случај: $3k \to 3k+1 \to 3k+2 \to 3(3k+2) \to 9k+8 \to 18k+16$

II случај: $3k+1 \to 3k+2 \to 3k+3 \to 3(3k+3) \to 9k+11 \to 18k+22$

III случај: $3k+2 \to 3k+3 \to 3k+4 \to 3(3k+4) \to 9k+14 \to 18k+28$

Во првиот случај, деливи со 3 се броевите $3k, 3(3k+2)$, во вториот случај броевите $3k+3, 3(3k+3)$, а во третиот случај тоа се броевите $3k+3, 3(3k+4)$. Значи, во секој случај ќе има точно 2 броја деливи со 3.

10. Колку броеви може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 употребувајќи ја секоја цифра само по еднаш, така што првата цифра е делива со 1, првите две цифри формираат број кој е делив со 2, првите три цифри образуваат број кој е делив со 3, првите четири цифри формираат број кој е делив со 4, а петцифрениот број е делив со 5?

A) тоа не е можно B) 1 C) 2 D) 5 E) 10

Решение. A). За да бројот е делив со 5, потребно е цифрата на единиците да е 5. Понатаму, за да бројот формиран од првите две цифри е парен, а бројот формиран од првите четири цифри е делив со 4 потребно е втората и четврата цифри да се 2 и 4, во некој редослед. Значи, бараните броеви се од видот $\overline{*2*45}$ иили $\overline{*4*25}$. Во првиот случај за да бројот формиран од првите четири цифри е делив со 4, мора да е неговиот двоцифрен завршеток делив со 4, т.е. $\overline{*4}$ да е делив со 4. Но, ниту еден од броевите 14 и 34 не е делив со 4. Во вториот случај за да бројот формиран од првите три цифри е делив со 3, треба да е збирот на неговите цифри делив со 3. Но, збирот на цифрите на броевите 143 и 314 е еднаков на 8, па затоа и овој случај не е можен. Конечно, одговорот е А).

11. Бројот 36 ја има својство да е делив со својата цифра на единици, бидејќи 36 е делив со 6. На пример бројот 38 го нема тоа својство. Колку броеви меѓу 20 и 30 го имаат тоа својство?

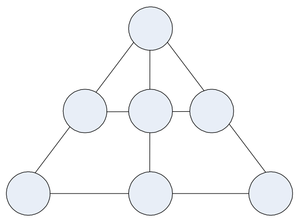
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). Броеви меѓу 20 и 30 се: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 и 29. Бидејќи

$$21=1\cdot 21 \qquad 22=2\cdot 11 \qquad 23=3\cdot 7+2$$
$$24=4\cdot 6 \qquad 25=5\cdot 5 \qquad 26=6\cdot 4+2$$
$$27=7\cdot 3+6 \qquad 28=8\cdot 3+4 \qquad 29=9\cdot 3+2$$

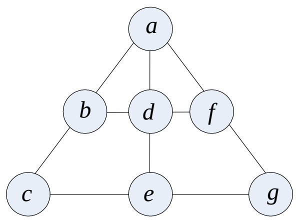
Бараното својство го имаат 4 броја.

12. Броевите од 1 до 7 се запишани во кругчињата од дадената фигура (секој број во едно кругче). Збировите на броевите во кругчињата кои лежат на една права се исти. Кој број е запишан на врвот од триаголникот?



A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C) Нека распоредот на броевите во фигурата даден како на цртежот. Тогаш имаме



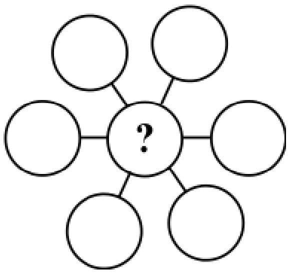
$$\begin{aligned} x &= a+b+c=a+d+e=a+f+g \\ &= b+d+f=c+e+g, \end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned} 5x &= a+b+c+a+d+e+a+f+g+b+d+f+c+e+g \\ &= 3a+2b+2c+2d+2e+2f+2g \\ &= a+2(a+b+c+d+e+f+g) \\ &= a+2\cdot(1+2+3+4+5+6+7)=a+56. \end{aligned}$$

Бидејќи $5|5x$, од последното равенство следува $5|a+56$, па како $a \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ единствена можност е $a = 4$.

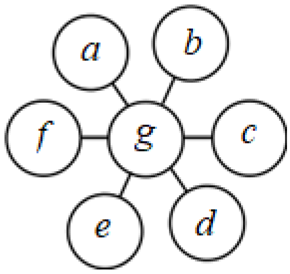
13. Запиши ги броевите 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 во седумте кружчиња прикажани на цртежот десно, по еден број во секое кружче и различни броеви во различни кружчиња, но така што збирот на броевите запишани во кружчињата распоредени на секоја од трите прави е еднаков.



Колку изнесува збирот на сите можни броеви кои може да се запишат во кружчето во кое се наоѓа прашалникот?

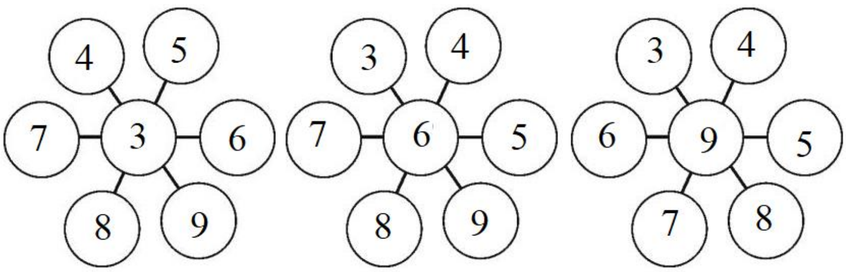
A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

Решение. **E).** Нека збирот на броевите запишани во кругчињата кои се наоѓаат на иста права е S. Тога, при ознаки како на цртежот десно, имаме



$$\begin{aligned} 3S &= (a+g+d)+(b+g+d)+(c+g+f) \\ &= (a+b+c+d+e+f+g)+2g \\ &= (3+4+5+6+7+8+9)+2g \\ &= 42+2g. \end{aligned}$$

Понатаму, бидеји $3|3S$, $3|42$ и $\mathrm{NZD}(2,3)=1$ од добиеното равенство следува $3|g$. Значи, на местото на прашалникот може да е некој дод броевите 3, 6 и 9. На долните цртежи се дадени разпореди на дадените броеви за секоја од трите можности.



Според тоа, бараниот збир е $3+=6+9=18$.

14. Симболите ○,□ и △ претставуваат три различни цифри. Ако се соберат цифрите на трицифрениот број ○□○ се добива двоцифрениот број □△. Ако се соберат цифрите на двоцифрениот број □△, се добива едноцифрениот број □.. Која цифра е претставена со ○?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. **E).** Нека цифрите кои ги претставуваатсимболите ○,□ и △ се x,y,z, соодветно. Од условот на задачата имаме

$$2x+y=10y+z \text{ и } y+z=y.$$

Од втората равенка добиваме $z=0$. Со замена во првата равенка добиваме $2x=9y$. Но, $\text{NZD}(2,9)=1$, па од последната равенка следува $x=9,\ y=2$. Значи, на симболот ○ соодветствува цифрата 9.

15. Дадена е низата $\frac{1}{2021},1,\frac{1}{2020},2,\frac{1}{2019},3,\frac{1}{2018},4,...,\frac{1}{1},2021$. За колку вредности на природниот број n $(n\leq 2021)$ производот на двата броја од низата кои се непосредно по дропката $\frac{1}{n}$ е природен број?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **D).** Броевите кои се непосредно по дропката $\frac{1}{n}$ се $2022-n$ и $\frac{1}{n-1}$. Според тоа, треба да ги определиме сите природни броеви n за кои $(2022-n)\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{2022-2022n+2021n}{n-1}=2022+\frac{2021n}{n-1}$ е природен број. Но, за секој природен број n важи $\text{NZD}(n,n-1)=1$, па затоа $2022+\frac{2021n}{n-1}$ е природен број ако и само ако $n-1\,|\,2021$. Сега, од $2021=43\cdot 47$, добиваме дека можни се следниве случаи:

а) $n-1=1$, т.е. $n=2$,

б) $n-1=43$, т.е. $n=44$,

в) $n-1=47$, т.е. $n=48$,

г) $n-1=2021$, т.е. $n=2022$,

па како $n\leq 2021$, заклучуваме дека бараниот број природни броеви е 3.

16. Горјан сакал да расече една трака на 12 еднакви делови и со цртички ги обележал места на кои требало да сече. Андреј сакал да ја расече истата лента на 16 еднакви делови и со цртички ги обележал местата на кои требало да сече. Без да знае за намерите на Горјан и Андреј, Филип ја пресекла лентата по сите обележани цртички. Колку делови добил Андреј?

A) 24 B) 25 C) 27 D) 28 E) 29

Решение. **A).** За расекување на лентата на 12 еднакви делови Горјан означил 11 места, а за расекување на лентата на 16 еднакви делови Андреј означил 15 места. Сега бидејќи $\text{NZD}(12,16)=4$, заклучуваме дека $12:4=3$ делови на Горјан се еднакви на $16:4=4$ делови на Андреј, што значи дека 3, 6 и 9 цртичка на Горјан се совпаѓаат со 4, 8 и 12 цртичка на Андреј.

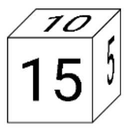
Значи, на лентата се означени $11+15-3=23$ цртички, па затоа Филип лентата ја расекол на $23+1=24$ делови.

17. Најмалиот заеднички содржател на 84 и природниот број a е 504. Која е најголемата можна вредност на бројот a?

A) 504 B) 168 C) 252 D) 126 E) 72

Решение. **A).** Имаме $504=84\cdot 6$, па затоа најголемата можна вредност на бројот a е 504.

18. На секој ѕид на коцката прикажана на цртежот десно е запишан по еден природен број. Производите на секои два



броја што се запишани на спротивни ѕидови на коцката се еднакви. Кој е најмалиот можен збир на шесте броеви запишани на ѕидовите на коцката?

A) 36 B) 37 C) 41 D) 44 E) 60

Решение. **C).** За бараниот збир да е најмал, на ѕидовите кои не се гледаат мора да има броеви x, y, z што се најмали можни и треба да важи $15x = 10y = 5z$. Бидејќи $\text{NZS}(5,10,15) = 30$, најмалите броеви на останатите три ѕида се добиваат за $15x = 10y = 5z = 30$. Според тоа, $x = 2, y = 3, z = 6$, па бараниот збир е $15 + 2 + 10 + 3 + 5 + 6 = 41$.

19. Мирјана на маса имала купче од камења. Ако таа ги дели на купчиња од по 3 камчиња, на крајот ќе и преостанат две камчиња. Ако пак таа ги дели на купчиња од по пет камчиња, на крајот ќе и преостанат повторно две камчиња. Кој е најмалиот број на камчиња што таа треба да ги додаде на купчето, за да може добиеното купче да го раздели на купчиња од по три камчиња, без да и преостанат камчиња, и исто така да може да го раздели на купчиња од по пет камчиња без да и преостанат камчиња.

A) 3 B) 1 C) 4 D) 10 E) 13

Решение. **E).** Ако од купчето камчиња одземеме 2 камчиња, тогаш преостанатиот број камчиња ќе биде делив и со 3 и со 5. Но, броевите 3 и 5 се заемно прости, па значи дека преостанатиот број камчиња ќе биде дели со 15. Според тоа, Мирјана во купчето има $15a + 2$ камчиња. Сега бројот на камчиња кои ќе ги додаме на купчето мора да е делив со 3 и со 5, односно со 15. Најмалиот број кој е поголем од $15a + 2$ и е делив со 15 е бројот $15(a+1)$, па затоа треба да додадеме $15(a+1) - (15a + 2) = 13$ камчиња.

20. Дрва растат само на десната страна на ПАРК АВЕНИЈА. Засадени се вкупно 60 дрва. Секое второ дрво е јавор, а секое трето е или јавор или липа. Останатите дрва се брези. Колку брези се засадени?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 24 E) 30

Решение. **C).** *Прв начин*. Бидејќи $60:2=30$ имаме 30 броеви деливи со 2. Понатаму, од $60:3=20$ следува дека имаме 20 броеви деливи со 3. Бидејќи 2 и 3 се замено прости, еден број е делив со 2 и со 3 ако и само ако е делив со 6. Тоа значи дека меѓу овие 30 и 20 броеви деливи со 2 и 3 се и броевите деливи со 6. Нив ги има $60:6=10$, па затоа во дрворедот има $30+20-10=40$ јавори или липи. Конечно, во дрворедот има $60-40=20$ брези.

Втор начин. Од низата броеви од 1 до 60 прво ќе ги избришеме броевите деливи со 2, а потоа и броевите деливи со 3. На местата на броевите кои ќе останат се наоаѓаат брези. По бришењето на броевите деливи со 2 остануваат непарните броеви, т.е. броевите

$$1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,$$
$$33,35,37,39,41,43,45,47,49,51,53,55,57,59.$$

Кога од преостанатите броеви ќе ги избришеме броевите деливи со 3, ни остануваат броевите:

$$1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47,49,53,55,59.$$

Последната низа има 20 членови, што значи дека во дрворедот има 20 брези.

21. На секој ѕид на специјална коцка е запишан по еден број. Збировите на броевите запишани на спротивните ѕидови на коцката се еднакви. Пет од запишаните броеви се 5, 6, 9, 11 и 14. Кој е шестиот број?

A) 4 B) 7 C) 8 D) 13 E) 15

Решение. **E).** Бидејќи збировите на спротивните ѕидови на коцката се еднакви, вкупниот збир мора да е делив со 3. Збирот на познатите пет броја е $5+6+9+11+14=45$ и тој е делив со 3. Според тоа, и последниот број треба да е делив со 3. Понатаму,

$$5=3\cdot1+2,\quad 6=3\cdot2,\quad 9=3\cdot3,$$

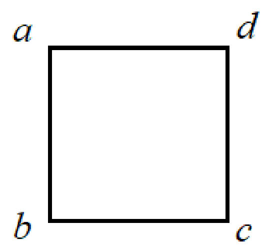
$$11=3\cdot2+2,\ \ 14=3\cdot4+2 \text{ и } x=3a.$$

Сега, бидејќи збировите на два по два броја се еднакви, тие мора да даваат и еднаков остаток при делење со 3. Имаме три броја деливи со 3 и три броја кои при делење со 3 даваат остаток 2, па затоа на спротивните ѕидови се запишани по еден број делив со 3 и еден број кој при делење со 3 дава остаток 2. Два пара кои имаат еднакви збирови, а еден е од броевите 5, 11, 14 и еден од броевите 6, 9 се (11, 9) и (14, 6), а збирот е $9+11=6+14=20$. Конечно, шестиот број е $20-5=15$.

22. Во темињата на квадрат се запишани четири природни броја. Секои два броја кои се поврзани со страна се такви што еден од нив е делив со другиот. Секои два броја кои се поврзани со дијагонала се такви што ниту еден од нив не е делител на другиот број. Кој е најмалиот миожен збир на запишаните броеви?

A) 265 B) 30 C) 35 D) 45 E) 55

Решение. **C).** Нека во темињата на квадратот се запишани броевите a,b,c,d (цртеж десно). Без ограничување на општоста можеме Да земеме дека $a\,|\,b$. Сега бидејќи ниту еден од броевите b и



d не е делив на другиот мора да важи $a\,|\,d$. Навистина, во спротивно добиваме $d\,|\,a$ и $a\,|\,b$, па ќе следува $d\,|\,b$, што шротивречи на условот на задачата. На потполно ист начин заклучуваме дека $c\,|\,d$ $c\,|\,b$. Понатаму, ниту еден од броевите a и c не е делител на другиот, па за да збирот $a+b+c+d$ биде најмал доволно е за броевите

a и c да ги избереме најмалите можни заемно прости природни броеви. Според тоа, треба да земеме $a=2$ и $c=3$. Сега имаме $2|d$ и $3|d$, па затоа $6|d$. На потполно ист начин добиваме дека $6|b$. Значи, b и d се содржатели на бројот 6, па како ниту еден од нив не е делител на другиот, а збирот $2+b+3+d$ треба да е најмал добиваме дека $b=12, d=18$. Конечно, бараниот збир е $2+12+3+18=35$.

23. Кој број треба да се запише на местото на едноцифрениот број за да множењето биде точно? $\bigcirc\bigcirc\cdot\bigcirc=176$

A) 6 B) 4 C) 7 D) 9 E) 8

Решение. B). Имаме, $176=4\cdot4\cdot11$. Значи, бројот 176 како производ на едноцифрен и двоцифрен број може да се запише на единствен начин и тоа: $176=4\cdot44$. Конечно, бараниот едноцифрен број е 4.

24. Производот на цифрите на еден трицифрен природен број е 135. Колку е збирот на цифрите на овој број?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

Решение. D). Имаме $135=3\cdot3\cdot3\cdot5$. Единствена можност од дадение множители да се состави трицифрен број е тоа да се цифрите 3, 5 и 9. Нивниот збир е 17.

25. Колку е производот на простите делители на бројот 2200?

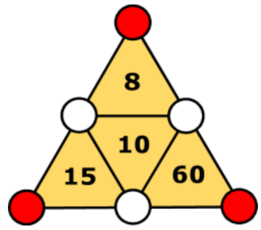
A) 110 B) 330 C) 500 D) 1000 E) 2200

Решение. A). Имаме:

$$\begin{aligned}2200&=2\cdot1100=2\cdot11\cdot100=2\cdot11\cdot2\cdot50\\&=2\cdot11\cdot2\cdot2\cdot25=2\cdot11\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5.\end{aligned}$$

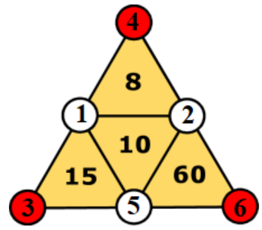
Значи, прости делители на бројот 2200 се 2, 5 и 11 и нивниот производ е $2\cdot5\cdot11=110$.

26. Броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 се запишани во шесте кругчиња на цртежот десно. Бројот кој е запишан во секој од четирите мали триаголници е еднаков на производот на броевите запишани во кругчињата на неговите темиња. Колку е збирот на броевите запишани во кругччињата во темињата на големиот триаголник?



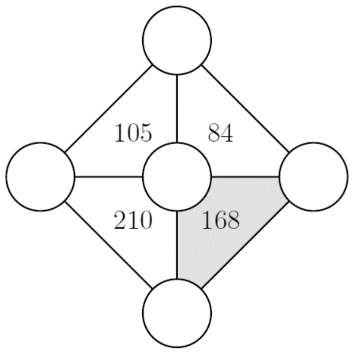
A) 8 B) 11 C) 12 D) 13 E) 4

Решение. **D).** Бидејќи $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$ во белите кругчиња се запишани броевите 1, 2 и 5. Значи во црвените кругчиња се запишани броевите 3, 4 и 6 и нивниот збир е $3 + 4 + 6 = 13$.



Целосниот распоред на броевите е прикажан на цртежот десно.

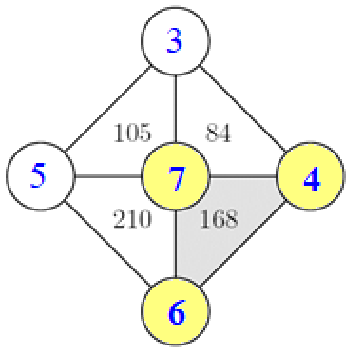
27. Броевите 2, 4, 5, 6 и 7 треба да се запишат во кругчињата во фигурата прикажана на цртежот десно така што бројот запишан во секој триаголник е еднаков на производот на броевите запишани во кругчињата во неговите темињата темиња. Колку е збирот на броевите запишани во темињата на засенчениот триаголник?



A) 12 B) 14 C) 15 D) 17 E) 18

Решение. **D).** Единствен заеднички делител поголем од 1 на броевите 105, 84, 210 и 168 е бројот 7. Притоа имаме

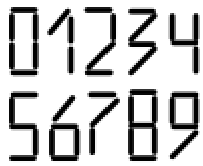
$$105 = 7 \cdot 3 \cdot 5, \quad 84 = 7 \cdot 3 \cdot 4,$$
$$210 = 7 \cdot 5 \cdot 6, \quad 168 = 7 \cdot 6 \cdot 4.$$



Соодветните броеви се запишани во фигурата прикажана на цртежот десно, а бараниот збир е $4 + 6 + 7 = 17$.

4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Со користење на идентични стапчиња се направени цифрите од 0 до 9 (цртеж десно). За еден број негова тежина ќе го наречеме бројот на стапчињата од кои е направен. Колкава е најголема тежина кај двоцифрените броеви?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Решение. **E).** Од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, цифрата 8 има најголема тежина и таа е еднаква на 7. Значи, од двоцифрените броеви најголема тежина има бројот запишан со две цифри 8, т.е. бројот 88 и таа е еднаква на $7+7=14$.

2. Од броевите 3, 5, 2, 6, 1, 4, 7 Маја избрала три различни броеви чиј збир е еднаков на 8. Од истите броеви Дорка избрала три различни броеи чиј збир е еднаков на 7.

Колку заеднички броеви избрале Маја и Дорка?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) не е можно да се определи

Решение. **C).** Единствени три броја чиј збир е еднаков на 7 се броевите 1, 2 и 4, па овие броеви ги избрала Дорка.

Три броја лиј збир е еднаков на 8 се: 1, 2, 5 или 1, 3, 4. Значи, Маја избрала некоја од овие тројки броеви. Јасно, и в о двата случаја таа со Дорка изграла два заедничка броја.

3. Во Лудоград, куќите од десната страна на улицата имаат непарни броеви. Жителите на Лудоград се суеверни и не ги употребуваат броевите кои ја содржат цифрата 3. Првата куќа на десната страна на улицата има број 1. Кој е бројот на петнаесеттата куќа од десната страна на улицата?

A) 29 B) 41 C) 43 D) 45 E) 47

Решение. **E).** Според условите од задачата на десната страна од улицата куќите се означени со броевите:

1, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 41, 45, 47, 49, ...

Значи бројот на петнаесеттата куќа е 47.

4. Сите четирицифрени броеви, составени од истите цифри како и бројот 2011 (една двојка, две единици и една нула) се подредени во опаѓачки редослед. Колку е разликата меѓу двата броја соседни на 2011?

A) 890 B) 891 C) 900 D) 909 E) 990

Решение. **B).** Четирицифренитге броеви запишани со цифрите 2, 0, 1, 1 подредени во опаѓачки редослед се

$$2110,\ 2101,\ 2011,\ 1210,\ 1201,\ 1120,\ 1102,\ 1021,\ 1012.$$

Соседни броеви на 2011 се 2101 и 1210, а нивната разлика е $2101-1210=891$.

5. Илина си играла со својот калкулатор. Таа почнала со бројот 12, па 60 пати по ред множела или делела со 2 или со 3, при што резултатот секогаш бил природен број. Кој од следниве резултати не може да се добие на опишаниот начин?

A) 12 B) 18 C) 36 D) 72 E) 108

Решение. **C).** Бројот 12 може да се добие ако ист број пати се множи и дели со 2 и ист број пати се множи и дели со3.

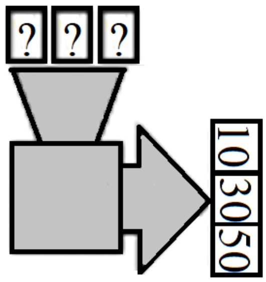
Бројот 18 може да се добие ако прво се дели со 2, па се множи со 3, а потоа ист број пати се множи и дели со 2 и ист број пати се множи и дели со 3.

Бројот 72 може да се добие ако прво се множи со 2, па се множи со 3, а потоа ист број пати се множи и дели со 2 и ист број пати се множи и дели со 3.

Бројот 108 може да се добие ако прво двапати се множи со 3, а потоа ист број пати се множи и дели со 2 и ист број пати се множи и дели со 3.

Имаме $36 = 3 \cdot 12$, што значи дека бројот на множењата со 3 мора да е за еден поголем од бројот на делењата со 3. Тоа значи дека имаме непарен број множења и делења со 3. Но 60 е парен број, па затоа ќе имаме непарен број множења и делења со 2, при што резултатот треба да биде 1. Последното не е можно, бидејќи од $2^k : 2^m = 1$ следува $k = m$, што значи дека треба да имаме $k + m = 2k$ множења и делења со 2, т.е. парен број множења и делења со 2.

6. Филип направил машина во која кога се пушта картичка со број и од неа излегува картичка со друг број. Ако се пушти непарен број, бројот кој излегува е два пати поголем. Ако се пушти парен број, бројот кој излегува е два пати помал.



Кои од понудените тројки броеви се пуштени во машината, ако излезените броеви се 10, 30 и 50 не задолжително во овој редослед?

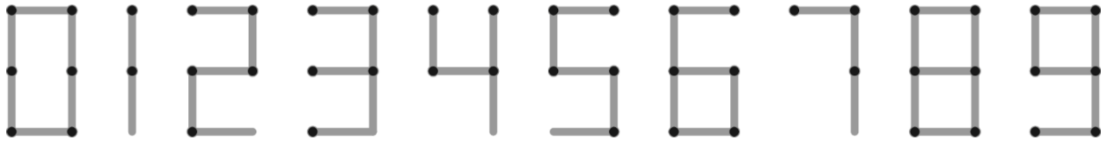
A) 5, 10, 15 B) 10, 15, 20 C) 10, 20, 30

D) 25, 30, 40 E) 15, 20, 25

Решение. **E).** Бројот 10 може да се добие од броевите 5 и 20, бројот 30 може да се добие од броевите 15 и 60, а бројот 50 може да се добие од броевите 25 и 100. Понатаму, 100 не е во ниту една тројка, па бројот 50 е добиен од бројот 25, што значи тројките A), B) и C) отпаѓаат. Во тројката D) е бројот 40, од кој се добиваат броевите 20 и 80, па затоа останува тројката E).

7. На долните цртежи е прикажано како со кибритени чкорчиња може да се формираат цифрите од 0 до 9. За цифрата 8 и бројот 15 се

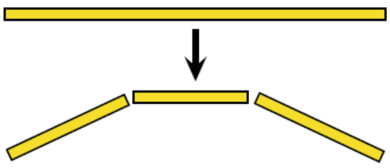
потребни еднаков број чкорчиња. Кој е најголемиот природен број кој може да се формира од 7 чкорчиња?



А) 31 В) 51 С) 74 D) 711 Е) 800

Решение. **D).** За да го определиме најголемиот природен број кој може да се формира со 7 чкорчиња, потребно е да најдеме колку најмногу цифри може да се формираат, а потоа истите да ги подредиме во опаѓачки редослед. Со две чкорчиња може да се формира само цифрата 1, па ако формираме две единици, ни остануваат три чкорчиња со кои може да се формира цифрата 7. Значи, најголемиот природен број кој може да се формира со 7 чкорчиња е бројот 711.

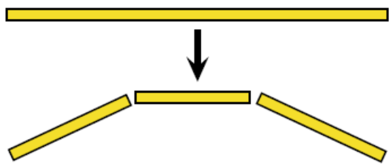
8. Филип има долго јаже од кое сака да добие повеќе пократки јажиња. Прво јажето го поделил на три дела. Потоа избрал еден од добиените делови и го поделил на три дела. Филип продолжува на истиот начин при што секогаш избраниот дел го дели на три дела. Кој од понудените броеви не може да е бројот на парчињата јажиња, добиени од Филип по неколку чекори?



А) 13 В) 17 С) 20 D) 23 Е) 25

Решение. **С).** Филип почнал од 1 јаже и во секој чекор тој 1 јаже дели на 3 дела, што значи дека бројот на јажињата се зголемува за $3-1=2$. Значи, во чекорите Филип последователно ги добива непарните броеви: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, ... Бидејќи само бројот 20 е парен, тој не може да добие само 20 јажиња.

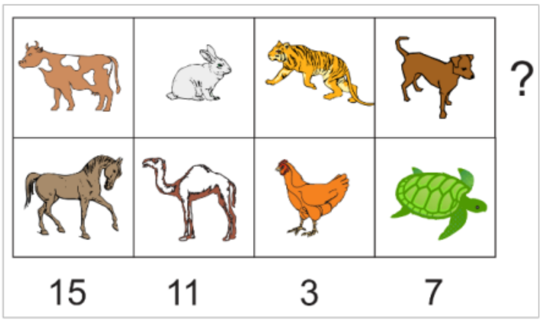
9. Филип има долго јаже од кое сака да добие повеќе пократки јажиња. Прво јажето го поделил на три дела. Потоа избрал еден од добиените делови и го поделил на три дела. Филип продолжува на истиот начин при што секогаш избраниот дел го дели на три дела. Колку од броевите 35, 70, 105, 140 и 175 не може да се бројот на парчињата јажиња, добиени од Филип по неколку чекори?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **B).** На потполно ист начин како во претходната задача заклучуваме дека тоа се парните броеви 70 и 140.

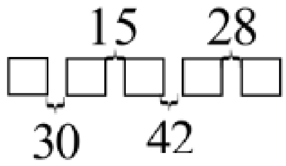
10. Во табелата прикажана на цртежот десно зад секое животно се крие по еден природен број. Под различните животни се различни броеви, а бројот под секоја колона е еднаков на збирот на броевите во таа колона. Колку најмногу може да биде збирот на броевите во првиот ред?



A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

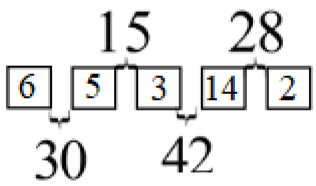
Решение. **C).** Збир на два природни броја е еднаков на 3 ако тие броеви се 1 и 2, па тоа се броевите во третата колона. Понатаму, збир на два природни броја поголеми од 2 е еднаков на 7 ако тие броеви се 3 и 4, па тоа се броевите во четвртата колона. Аналогно се добива дека броевите во втората колона се 5 и 6, а броевите во првата колона се 7 и 8. Сега, за да збирот на броевите во првиот ред е најголем во него треба да се запишани броевите 2, 4, 6 и 8, па тој збир е $2+4+6+8=20$.

11. Во цртежот десно пополни ги празните квадратчиња со природни броеви, така што производот на броевите запишани во секои две соседни квадратчиња ќе биде еднаков на посочените вредности. Колку е збирот на броевиse запишани во квадратчињата?



А) 24 В) 30 С) 36 D) 40 Е) 42

Решение. **B).** Имаме $15=3\cdot 5$ и $42=3\cdot 14$, што значи дека во заедничкото квадратче на овие два производа мора да е бројот 3. Лево и десно од него се броевите 5 и 14. Сега, во првото квадратче е бројот $30:5=6$, а во последното е бројот $28:14=2$. Конечно, бараниот збир е $6+5+3+14+2=30$.



12. Во бројниот ребус $\overline{KA}+\overline{NG}+\overline{AR}+\overline{OO}$ на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Колку е најмалата можна вредност на овој збир?

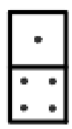
А) 122 В)112 С) 108 D) 98 Е) 118

Решение. **C).** Имаме

$$\begin{aligned}\overline{KA}+\overline{NG}+\overline{AR}+\overline{OO}&=10K+A+10N+G+10A+R+10O+O\\&=11O+11A+10K+10N+G+R.\end{aligned}$$

Јасно, за да збирот биде најмал мора буквите O,A да соодветствуваат во некој редослед на цифрите 1, 2, буквите K,N да соодветствуваат во некој редослед на цифрите 3, 4, а буквите G,R да соодветсвуваат во некој редослед на цифрите 0, 5. Значи, најмалиот можен збир е $11\cdot 1+11\cdot 2+10\cdot 3+10\cdot 4+0+5=108$.

13. На 28 домино плочки се наоѓаат сите можни комбинации на два броја составен од 0 до 6 точки (види цртеж), вклучувајќи



ги и домината со еднакви броеви точки. Колку точки има на сите домино плочки?

A) 84 B) 105 C) 126 D) 147 E) 168

Решение. E). Домино плочките ќе ги групираме во седум групи:

(0,0),(0,1),(0,2), (0,3) (0,4), (0,5), (0,6), со збир на точки: 21,

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), со збир на точки: 27,

(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), со збир на точки: 30,

(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), со збир на точки: 30,

(4,4), (4,5), (4,6), со збир на точки: 27

(5,5), (5,6), со збир на точки: 21, и

(6,6), со збир на точки: 12.

Според тоа, на сите домино плочки има:

$$21+27+30+30+27+21+12=168 \text{ точки.}$$

14. Марко сече пица на четири еднакви парчиња. Потоа, секое од добиените парчиња го сече на три еднакви делови. Кој дел од целата пица претставува едно од добиените парчиња пица?

A) третина B) четвртина C) седмина

D) осмина E) дванаесетина

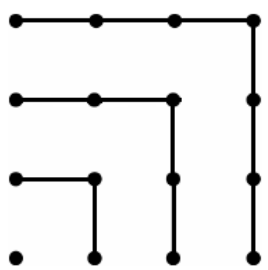
Решение. E). По првото сечење Марко добил 4 еднакви парчиња. По второто сечење тој добил $4 \cdot 3 = 12$ еднакви парчиња. Значи едно од добиените парчиња е дванаесеттина од пицата.

15. Од фигурата прикажана на цртежот десно заклучуваме дека $1+3+5+7=4\cdot 4$. Колку е

$$S=1+3+5+7+9+11+13+15+17?$$

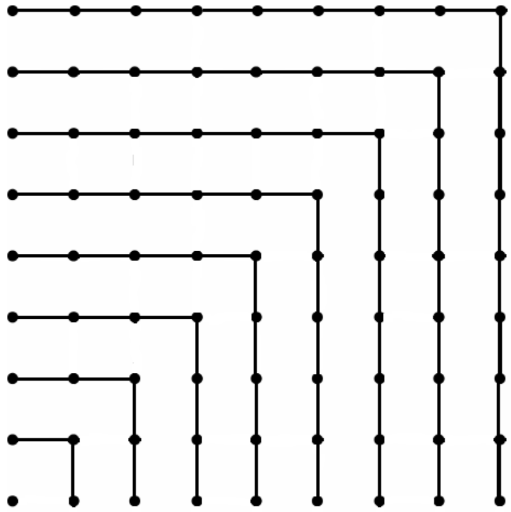
A) $14\cdot 14$ B) $9\cdot 9$ C) $4\cdot 4\cdot 4$

D) $16\cdot 16$ E) $4\cdot 9$



Решение. B). Од цртежот гледаме дека збирот $1+3+5+7$ е еднаков на бројот на темињата на единичните квадрати на кои е разделен квадратот со должина на страна $3=\frac{7-1}{2}$.

Бараниот збир е аналоген на дадениот и како $\frac{17-1}{2}=8$ добиваме дека истиот е еднаков на бројот на темињата на единичните квадрати на кои е разделен квадрат со должина на страна 8 (види цртеж). Оттука следува дека



$$S=1+3+5+7+9+11+13+15+17$$
$$=(8+1)\cdot(8+1)=9\cdot 9.$$

16. На секој двоцифрен број од цифрата на десетките ја одземаме цифрата на единиците. Колку е збирот на добиените разлики?

A) 90 B) 100 C) 55 D) 45 E) 30

Решение. D). Десет двоцифрени броеви заполнуваат со 1, десет со 2, ..., десет со 9. Според тоа, збирот на цифрите на десетките е $10\cdot(1+2+...+9)=450$. Збирот на цифрите на единиците на броевите чија цифра на единиците 1 е $0+1+2+...+9=45$. Овој збир и ист и за броевите чија цифри на десетките се 2, 3, ..., 9. Според тоа, збирот на цифрите на единиците на сите двоцифрени броеви е $9\cdot 45=405$. Конечно, бараниот збир е еднаков на $450-405=45$.

17. Колку најмногу цифри треба да се избришат од 1000-цифрениот број 200820082008...2008 така што збирот на цифрите на бројот кој ќе се добие е 2008?

A) 260 B) 510 C) 746 D) 1020 E) 130

Решение. C). Имаме, $1000:4=250$, што значи дека групата цифри се повторува 250 пати. Јасно, ги бришеме сите нули бидејќи тие не учествуваат во промена на збирот. Тоа се $250\cdot 2=500$ цифри. Понатаму, од $2008=250\cdot 8+4\cdot 2$, добиваме дека најмногу цифри ќе избришеме ако ги оставиме сите цифри 8 и уште четири цифри 2. Значи, треба да избришеме 246 цифри 2. Значи, најголемиот број избришани цифри е $500+246=746$.

18. Јован множи со 3, Петар додава 2 и Никола одзема 1. По кој редослед тие треба да ги извршат своите операции, секој по еднаш, за да од бројот 3 се добие бројот 14?

A) Јован, Петар, Никола

B) Петар, Јован, Никола

C) Јован, Никола Петар

D) Никола, Јован, Петар

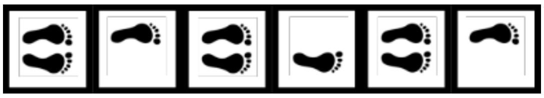
E) Петар, Никола, Јован

Решение. B). Бројот 14 не е делив со 3, па затоа Јован не може да е последен.

Ако Петар е последен, тогаш пред него е добиен бројот 12. Сега, ако Никола е втор, тогаш пред него е добиен бројот 13, кој не е делив со 3, па затоа овој случај отпаѓа. Ако Јован е втор, тогаш пред него е добиен бројот 4, кој собран со 1 дава 5, па затоа овој случај отпаѓа.

Значи, Никола е последен, па пред него е добиен бројот 15. Сега е јасно дека Јован е втор и пред него е добиен бројот 5, а Петар: $(3+2)\cdot 3-1=14$.

19. Играта скокање во квадрати се игра така што играчот скока по еднаш во секој квадрат, менувајќи две нозе-лева нога-две нозе-десна нога-две нозе-лева нога итн (види цртеж).

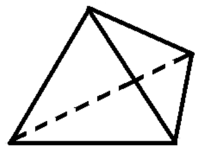


Андријана играта ја почнала со двете нозе па скокнала на левата нога итн. Во кој од следните квадрати Андријана ќе скокне на десната нога?

А) 110. В) 115. С) 120. D) 122. Е) 123.

Решение. **С).** Според редоследот на скокање Андријана само на десната нога ќе скокне во квадратите со редни броеви 4., 8., 12., ... т.е. на квадратите чии редни броеви се деливи со 4. Од броевите 110, 115, 120, 122 и 123 само бројот 120 е делив со 4. Значи Андријана ќе скокне на квадратот со реден број 120.

20. Четирите ѕида на една тристрана пирамида (цртеж десно) се нумерирани со броевите 1, 2, 3 и 4. Во секое теме на пирамидата е запишан производот од броевите на ѕидовите, за кои тоа теме е заедничко. Колку различни вредности има збирот од четирите производи?



А) 1 В) 2 С) 3 D) 4 Е) 5

Решение. **А).** Секое теме е заедничко за три ѕида, што значи дека во секое теме е запишан производот на три од броевите 1, 2, 3 и 4. Бидејќи три од дадени четири броја може да се изберат на четири начини и пирамидата има четири темиња, заклучуваме дека во темињата во некој редослед се запишани броевите

$$1\cdot 2\cdot 3=6, 1\cdot 2\cdot 4=8, 1\cdot 3\cdot 4=12 \text{ и } 2\cdot 3\cdot 4=24,$$

што значи дека збирот на четирите производи има една вредност.

21. Марко, Марин и Мирко се тројка (браќа родени во ист ден), а нивниот брат Горјан е 3 години помал. Кој од следниве броеви може да биде збирот на годините на четирите браќа?

A) 53 B) 54 C) 56 D) 59 E) 60

Решение. **A).** Ако со a ги означиме годините на Марко, Марин и Мирко, тогаш Горјан има $a-3$ години. Значи, збирот на годините на четворицата браќа ќе биде $a+a+a+a-3=4a-3$. Последното зна-чи дека збирот на годините на браќата собран со 3 е делив со 4. Има-ме

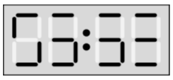
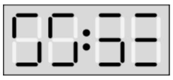
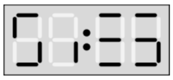
$$53+3=56=4\cdot 14,$$
$$54+3=57=4\cdot 14+1,$$
$$56+3=59=4\cdot 14+3,$$
$$59+3=62=4\cdot 15+2,$$
$$60+3=63=4\cdot 15+3,$$

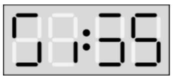
што значи дека од понудените броеви збирот на годините на браќата може да биде само бројот 53. Притоа тројцата браќа имаат по 14, а најмалиот брат има 11 години.

II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

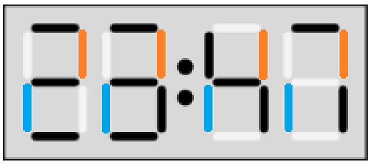
1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

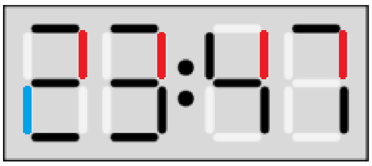
1. Секој цифра на мојот дигитален часовник  е составена од најмногу 7 делови, како што е прикажано на цртежот десно. За жал, во секоја група од 7 делови истите два дела не работат. Сега мојот часовник покажува . Што ќе покаже часовникот по 3 часа и 45 минути?

A)  B)  C) 

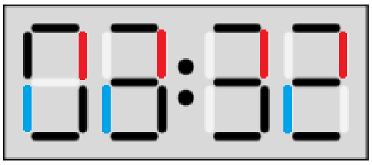
D)  E) 

Решение. A). Бидејќи на секоја цифра не работат точно два дела, за да имаме четири цифри единствена можност е да не работат





деловите кои на цртежот десно се означени со црвена и сина боја. Тоа значи дека часовникот во моментот покажува 23:47, (цртеж лево). По 3 часа и 45 минути часовникот ќе биде 03:32. Ова време го покажува часовникот A).



2. За да се направи еден примерок на весник од 60 страници се печатат 15 листа хартија, се ставаат еден врз друг и потоа се превиткуваат на половина. Страната нумерирана со бројот 7 недостасува. Кои други страници недостасуваат?

A) 8, 9, 10　　B) 8, 42, 43　　C) 8, 48, 49
D) 8, 52, 53　　E) 8, 53, 54

Решение. E). На листот на кој е првата страница се броевите 1, 2, 59 и 60. На листот на кој е третата страница се броевите 3, 4, 57 и 58. На листот на кој е петтата страница се броевите 5, 6, 55, 56. На листот на кој е седмата страница се броевите 7, 8, 53 и 54, и овој лист недостасува.

3. Хотелските соби во еден хотел се нумерирани последователно со природните броеви 1, 2, 3 итн. Во нумерацијата на собите цифрата 2 се среќава 14 пати, а цифрата 5 се среќава 5 пати. Колку најмногу соби може да има овој хотел?

A) 25　　B) 26　　C) 34　　D) 35　　E) 41

Решение. C). Со четиринаесет цифри 2 може да се нумерират собите 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 и 32. Првиот следен број кој ја содржи цифрата 2 е 42. Со три цифри 5 може да се нумерираат собите 5, 15 и 25. Првиот следен број кој ја содржи цифрата 5 е 35. Значи, во хотелот нема соба со број 35, а како броевите 33 и 34 не ја содржат и цифрата 2, во хотелот има 34 соби.

4. Хотелските соби во еден хотел се нумерирани последователно со природните броеви 1, 2, 3 итн. Во нумерацијата на собите цифрата 3 се среќава 15 пати, а цифрата 6 се среќава 4 пати. Колку најмногу соби може да има овој хотел?

A) 44　　B) 45　　C) 49　　D) 53　　E) 55

Решение. B). Со петнаесет цифри 3 може да се нумерираат собите 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 , 39 и 43. Првиот следн број кој ја содржи цифрата 3 е 53. Со четири цифри 6 може да се нумерираат собите 6, 16, 26 и 36. Првиот следен број кој ја содржи цифрата 6 е 45. Значи, во хотелот нема соба со број 46, а како бро-евите 44 и 45 не ја содржат цифрата3, во хотелот има 45 соби.

5. На страната на улицата на Стојан, десно од куќата во која живее Стојан има 57 куќи, а лево од неа има 33 други куќи. Куќата во која живее Калина е точно на средната куќа од страната на улицата на која живее Стојан. Колку куќи има меѓу куќите на Стојан и Калина?

А) 10 В)11 С) 12 D) 13 Е) 14

Решение. **В).** На страната на улицата на Стојан има $57+33+1=91$ куќа. Куќата на Калина е точно на средната куќа од овие 91 куќа, што значи дека Калина живее во 46-тата куќа. Значи, меѓу куќите на Стојан и Калина има $57-46=11$ куќи.

6. Еден хотел има пет ката и неговите соби се нумерирани со трицифрени броеви. Собите на првиот кат се нумерирани со броевите од 101 до 135, од вториот кат со броевите од 201 до 235, и на ист начин нумерацијата е направена за секој следен кат. Колку пати во нумерирањето на собите се појавува цифрата 2?

А) 60 В) 65 С) 95 D) 100 Е) 105

Решение. **Е).** При нумерирањето на собите на првиот кат цифрата 2 се појавува во броевите:

102, 112, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 132.

Значи таа се појавува 14 пати. При нумерирањето на собите на вториот кат цифрата 2 се појавува на истите места на единиците и десетките како и кај првиот кат и се појавува 35 пати на местата на стотките. Значи, на вториот кат цифрата 2 се пјавува $14+35=49$ пати. На третиот, четвртиот и петтиот кат цифрата 2 се појавува по 14 пати. Значи, во нумерирањето на собите цифрата 2 се појавува $4\cdot 14+49=105$ пати.

7. Павле сакал еден цел број да го помножи со 301, но ја заборавил нулата и го помножил целиот број со бројот 31. Резултатот што го добил е 372. Кој резултат ќе го добиеше Павле ако не згрешеше?

A) 3010 B) 3612 C) 3792 D) 3720 E) 30720

Решение. B). Целиот број кој го множел Павле е $372:31=12$. Според тоа, бараниот број е $12\cdot 301=3612$.

8. Во еден авион редиците се означени со броевите од 1 до 25, но не постои ред со број 13. Редот со бројот 15 има само 4 патнички седишта, а сите преостанати редови имаат по 6 патнички седишта. Колку патнички седишта има во авионот?

A) 120 B) 138 C) 142 D) 144 E) 150

Решение. C). *Прв начин*. Во 25 редици кои имаат по 6 патнички седишта има вкупно $25\cdot 6=150$ седишта. Во авионот нема 13-та редица и во 15-тата редица има 2 седишта помалку. Според тоа, во авионот има $150-6-2=142$ патнички седишта.

Втор начин. Авионот има $25-2=23$ редици со по 6 седишта и 1 редица со 4 седишта. Според тоа, во авионот има $23\cdot 6+4=142$ седишта.

9. Збирот на броевите на три последователни страницина една книга е 126. Колку од овие броеви се прости броеви?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) не може да се определи

Решение. C). Нека страниците се означени со броевите $a-1, a, a+1$. Тогаш $a-1+a+a+1=126$, од каде добиваме $a=42$. Значи, броевите се 41, 42 и 43. Меѓу овие три броја прости се броевите 41 и 43.

10. Трите куќи, мојата и куќите на моите пријатели имаат броеви кои се составени од цифрите a,b и c, и тоа: $\overline{abc}$, $\overline{bc}$ и c. Колку е b ако знаеме дека нивниот збир е 912?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 0

Решение. **C).** Од условот на задачата имаме $\overline{abc}+\overline{bc}+c=912$, т.е.

$$100a+20b+3c=912$$

Според тоа, c е парен број, т.е. $c=2k$ и $3c$ е број кој завршува на 2. Бидејќи $3\cdot 2=6, 3\cdot 4=12, 3\cdot 6=18, 3\cdot 8=24$ добиваме дека c има една единствена вредност $c=4$. Но, тогаш $100a+20b=900$, односно $10a+2b=90$, па јасно е дека $b=5$ и $a=8$ ($\overline{0c}$ не може да е број на куќа; во тој случај $\overline{0c}$ и c е еден ист број на куќа).

11. Броевите од 1 до 10 се запишани на 10 карти (по еден број на секоја карта). Пет ученици земаат по две од тие карти. Збировите на броевите на картите на учениците се: 11, 4, 17, 15 и 8. Колку од учениците имаат карти на кои се запишани два последователни броја?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **A).** Бројот 4 како збир на два природни различни броја може да се запише на единствен начин: $1+3=4$. Сега, бидејќи броевите 1 и 3 се употребени, бројот 8 како збир на два ос преостанатите броеви може да се запише на единствен начин: $2+6=8$. Понатаму, со преостанатите броеви бројот 11 како збир на два броја може да се запише на единствен начин: $4+7=11$. Конечно $5+10=15$ и $8+9=17$, па само бројот 17 е збир на два последователни броја.

12. Производот на три природни броја е 12 (множителите може да се еднакви). Кој од следниве броеви не може да е нивниот збир?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 12 E) 14

Решение. D). Да го запишеме бројот 12 како производ на три броја и да гоопределиме збирот на множителите. Имаме:

$$12=1\cdot 1\cdot 12,\quad 12=1\cdot 2\cdot 6,\quad 12=1\cdot 3\cdot 4,\quad 12=2\cdot 2\cdot 3$$
$$1+1+12=14,\ 1+2+6=9,\ 1+3+4=8,\ 2+2+3=7.$$

Според тоа, од дадените броеви само бројот 12 не може да е збир на трите множители чиј производ е 12.

13. На табла се запишани три едноцифрени броеви. Калина ги собрала и добила 15. Потоа, избришала еден од нив и на негово место го запишала бројот 3. Производот на трите броеви, кои Јане на крај ги помножил е 36. Кој број го избришала Калина?

A) или 6 или 7 B) или 7 или 8 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. B). Нека трите запишани броја се x, y, z и нека бројот кој го избришала Калина е z. Имаме $x+y+z=15$ и $3xy=36$. Според тоа, $x+y+z=15$ и $xy=12$. Бројот 12 како производ на два едноцифрен броја може да се запише на еден од следниве два начина $2\cdot 6=12$ или $3\cdot 4=12$. Значи, за бројот z имаме две можности и тоа или $z=15-(2+6)=7$ или $z=15-(3+4)=8$. Значи, бројот кој го избришала Калина е или 7 или 8.

14. Цифрата на стотките на еден трицифрен број е a, цифрата на десетките е b и цифрата на единиците е c. Ако ја пречкртаме цифрата a добиваме двоцифрен број, а ако ја пречкртаме и цифрата b добиваме едноцифрен број. Збирот на трите броја е 912. Определи ја цифрата b.

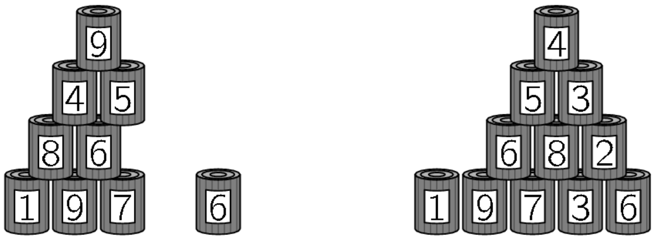
A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 0

Решение. C). Трите броја се $\overline{abc}, \overline{bc}$ и c. Имаме:

$$100a + 10b + c + 10b + c + c = 912,$$
$$100a + 20b + 3c = 912.$$

Бидејќи само при множење на 4 со 3 се добива цифра на единиците, заклучуваме дека $c = 4$. Заменуваме во последната равенка и по средувањето добиваме $5a + b = 45$. Ако a е парен број, тогаш $b = 5$, а ако a е непарен добиваме $b = 0$. Но, при бришење на цифрата a се добива двоцифрен број па затоа $b \neq 0$, што значи дека $b = 5$.

15. Јана и Коста гаѓаат со топки врз две идентични пирамиди направени од по 15 лименки. Јана турнала 6 лименки и освоила вкупно 25 поени. Коста турнал 4 лименки. Колку поени освоил Коста?



по фрлањето на Јуле   по фрлањето на Коста

A) 22   B) 23   C) 25   D) 26   E) 28

Решение. **D).** Јана ги турнала лименките со броевите 3, 8, 2, 3, 4 и една лименка на врвот на пирамидата. Коста ги турнал лименките со броевите 8, 4, 9 и една лименка на врвот на пирамидата.

Јана вкупно освоила 25 бода, што значи дека лименката на врвот на пирамидата носи $25 - (3 + 8 + 2 + 3 + 4) = 5$ поени. Значи, Виктор освоил $8 + 4 + 9 + 5 = 26$ поени.

16. Горјан на лист ги запишал броевите од 1 до 15 и потоа ги распоредил во 5 групи со по 3 броја. Збировите на броевите во првите 4 групи соодветно биле 25, 27, 30 и 31. Во која група бил бројот 4?

1	**2**	**3**	**4**	**5**
6	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**

А) прва В) втора С) трета D) четврта Е) петта

Решение. **Е).** Збирот на сите запишани броеви е:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=120.$$

Збирот на сите броеви кои се во првите четири груши е еднаков на $25+27+30+31=113$. Значи, збирот на броевите во петтата група е $120-113=7$. Од броевите од 1 до 15 три броја кои даваат збир 7 се само броевите 1, 2 и 4. Значи бројот 4 е во петтата група.

Дека поделбата која ја направил Горјан е можна покажува следниов пример: $\{1,2,4\}$, $\{7,8,10\}$, $\{3,11,13\}$, $\{6,9,15\}$, $\{5,12,14\}$.

2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

1. Ако во Лондон е 16 часот, во Мадрид е 17 часот, а во Сан Франциско е 8 часот наутро истиот ден. Маријана си легнала во 21 часот во Сан франциско. Колку е часот во Мадрид во тој момент?

A) 6 часот вчера на утро B) 18 часот вчера C) вчера напладне
D) полноќ E) 6 часот ова утро

Решение. **E).** Кога во Сан Франциско е 8 часот наутро, во Мадрид е 17 часот, што значи дека Мадрид времето е $17-8=9$ часа понапред. Ако Маријана си легнала во Сан Франциско во 21 часот, тогаш во Мадрид, бидејќи $21+9=(21+3)+6=24+6$ ќе биде 6 часот ова утро.

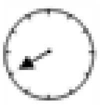
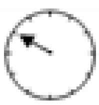
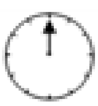
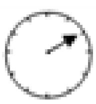
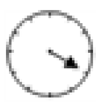
2. Максим мора да зема таблета на секои 15 минути. Првата таблета ја испил во $11:05$. Во колку часот Максим ја испил четвртата таблета?

A) $11:40$ B) $11:50$ C) $11:55$ D) $12:00$ E) $12:05$

Решение. **B).** Максим таблетите ги пие во: 11:05, 11:20, 11:35, 11:50, 12:05 ... Значи, четвртата таблета ја испил во 11:50.

3. Мајда во попладневните часови се возела со својот велосипед со постојана брзина. Таа го погледнала својот часовник на почетокот на возењето и на крајот на возењето, како што е прикажано на цртежот.

На кој часовник е прикажана стрелката што покажува минути, во моментот кога таа поминала една третина од вкуниот пат?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. D). Целиот пат Мајда го извозила за 2 часа, односно за 120 минути. Третина од патит таа поминала за $120:3=40$ минути. За 30 минути минутната стрелка ќе биде во вертикална положба свртена нагоре и остануваат уште 10 минути. Затоа нејзината положба е прикажана на цртежот D)

4. Хари Потер учествува на натпревар во летање со метла, при што се летаат пет круга. Времето кога Хари ја поминува почетната (стартната) точка е прикажан во табелата.

	време
старт	09:55
по прв круг	10:26
по втор круг	10:54
по трет круг	11:28
по четврт круг	12:03
по петти круг	12:32

Кој круг тој го поминал за најкратко време?

A) првиот B) вториот C) третиот

D) четвртиот E) петтиот

Решение. B). Првиот круг Хари го летал $10:26-9:55=31\,\text{min}$, вториот $10:54-10:26=28\,\text{min}$, третиот $11:28-10:54=34\,\text{min}$, четвртиот $12:03-11:28=35\,\text{min}$ и шеттиот $12:32-12:03=29\,\text{min}$. Значи, најкратко време постигнал во вториот круг.

5. Кога лилјакот Лилко излегол од пештерата дигиталниот часовник покажувал 20:20. Кога Лилко се вратил и си ја зазел својата положба со главата на долу, во таква положба го погледнал часовникот и пак здогледал 20:20. Колку долго Лилко бил излезен во лов надвор од пештерата?

A) 3 часа и 28 минути B) 3 часа и 40 минути

C) 3 часа и 42 минути D) 4 часа и 18 минути

E) 5 часа и 42 минути

Решение. **E).** Кога се вратил Лилко, го видел часовникот наопачки, бидејќи висел со главата на долу. Всушност, часовникот покажувал реално 02:02 часот. Па од 20:20 до 00:00 поминале 3 часа и 20 минути, а од 00:00 до 02:02 поминале 2 часа и 2 минути. Значи, Лилко во лов бил 5 часа и 42 минути.

6. Дискџокејот на радио пуштал пет песни и тоа: песната A која трае 3 min, песната B која трае $2\text{ min }30\text{ sec}$, песната C која трае 2 min, песната D која трае $1\text{ min }30\text{ sec}$ и песната E која трае 4 min. Тој ги пуштал во редослед A, B, C, D, E последователно без прекин. Кога Катерина излегла од дома на радио почнала песната C. Таа точно еден час била во трговски центар и се вратила дома. Која песна била на радио во тој момент?

A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. **A).** Сите песни траат

$$3\text{ min}+2\text{ min }30s+2\text{ min}+1\text{ min }30s+4\text{ min}=13\text{ min}.$$

Бидејќи $60=4\cdot 13+8$, а песните C, D, E вкупно траат

$$2\text{ min}+1\text{ min }30s+4\text{ min}=7\text{ min }30s,$$

песната која следува е песната A.

7. На цртежот десно е прикажан чуден часовник, кај кој стрелките се движат со истата брзина како и кај правилен часовник, минутната стрелка се врти во обратна насока, а часовната стрелка се врти правилно. Горјан утрото се разбудил и погледнал во часовникот. Во колку часот се разбудил Горјан?

A) 7:33 B) 5:35 C) 5:25 D) 6:25 E) 6:35

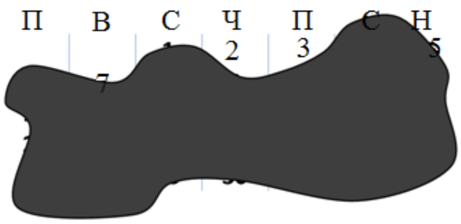
Решение. E). Часовната стрелка во моментот кога се разбудил Горјан е во положба која ја покажува и вистински часовник, а додека минутната стрелка е во положба симетрична во однос на правата која минува низ цртичките кај броевите 12 и 6. Значи, Горјан се разбудил во 6:35.

8. Маја, Ана и Нада работат во градинка. Секој ден, од понеделник до петок, на работа доаѓаат точно две од нив. Маја работи 3 дена во седмицата, а Ана работи 4 дена во неделата. Колку дена во седмицата работи Нада?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Трите заедно работат $2\cdot5=10$ дена. Значи, Нада работи $10-(3+4)=3$ дена.

9. На цртежот десно е прикажан календар од некој месец. За жал, на поголемиот дел од календарот е истурено мастило. Кој ден е 25-ти во тој месец?



A) Понеделник B) Среда C) Четврток

D) Сабота E) Недела

Решение. D). Петок е 3., 10., 17. и 24. во месецот. Според тоа, 25-ти во овој месец е во сабота.

10. Секој ден Пабло ги запишува денот и месецот од датата и ги собира запишаните цифри. На пример на 19-ти март, тој запишал 19.03 и пресметал $1+9+0+3=13$. Кој е најголемиот збир кој Пабло го добил во текот на годината?

A) 7 B) 13 C) 14 D) 16 E) 20

Решение. **Е).** При собирање на цифрите кои го означуваат денот Пабло може да добие најмногу $2+9=11$, а при собирање на цифрите кои го означуваат месецот Пабло може да добие најмногу $0+9=9$. Значи, најголемиот збир го добил на 29.09 и тој е $2+9+0+9=20$.

11. Филип и неговата мајка се родени во јануари. Денес, на 19 март 2015, Филип ги собрал годината кога тој се родил, годината кога се родила неговата мајка, неговите години и годините на неговата мајка. Кој број го добил Филип?

A) 4028 B) 4029 C) 4030 D) 4031 E) 4032

Решение. **C).** Ако Филип има x години, тогаш тогаш годината на неговото раѓање е $2015-x$. Слично, ако мајката на Филип има y години, тогаш годината на нејзиното раќање е $2015-y$. Значи, Филип го добил бројот $x+2015-x+y+2015-y=4030$.

12. Сестрите Илина, Ивана и Ирена се родени во ист ден и вкупно имаат 33 години. Колку е збирот на години кога следниот пат тој може да се запише со две исти цифри?

A) 44 B) 55 C) 66 D) 77 E) 88

Решение. **C).** Бројот 33 е делив со 3, па како по a години сестрите вкупно ќе имаат $33+3a=3(11+a)$ години заклучуваме дека бараниот број е првиот број поголем од 33 кој е запишан со исти цифри и е делив со 3. Јасно, тоа е бројот 66.

13. Годината 2022 е специјална, бидејќи во записот на истата има три исти цифри. Три години од животот на Доротеј се специјални години. Колку полни години најмалку ќе има Доротеј на крајот од 2022 година?

А) 18 В) 20 С) 22 D) 23 Е) 134

Решение. **D).** Последните три специјални години се 2022, 2000 и 1999 година. Значи Доротеј е роден во 1999 година или пред тоа. До крајот на 2022 година Доротеј ќе има најмалку $2022-1999=23$ полни години.

14. Збирот на годините на Аница, Бојан и Христина е 31 година. Колку ќе биде збирот на нивните години по три години?

А) 32 В) 34 С) 35 D) 37 Е) 40

Решение. **Е).** Секое дете ќе биде три години постаро. Значи, збирот на нивните години ќе се зголеми за $3\cdot3=9$, па тие заедно ќе имаат $31+9=40$ години.

15. Збирот на годините на една група ученици е 36 години. По две години овој збир ќе биде 60 години. Колку ученици има во групата?

А) 10 В) 12 С) 15 D) 20 Е) 24

Решение. **В).** Секое од децата ќе биде постаро по две години Ако имаме a деца, тогаш бројот на годините ќе се зголеми за $2a$. Според тоа, $36+2a=60$ од каде добиваме $a=(60-36):2=12$.

16. Збирот на годините на Кате и нејзината мајка е 36, а збирот на годините на мајката и бабата на Кате е 81. Колку години имала бабата кога се родила Кате?

А) 28 В) 38 С) 45 D) 53 Е) 56

Решение. **С).** Од условот на задачата следува $B+M=81$ и $K+M=36$. Ако од првата ја одземеме втората равенка добиваме $B-K=81-36$, односно $B-K=45$. Кога Кате се родила таа имала $K=0$ и со замена во последната равенка добиваме дека $B=45$.

17. Матеј изјавил: „По две години мојот син ќе биде двапати постар отколку што беше пред три години, а по три години мојата ќерка ќе биде трипати постара отколку што беше пред три години.“ Кое од следниве тврдења е точно?

A) Момчето е 1 година постаро од девојчето.

B) Девојчето е 1 година постаро од момчето.

C) Децата се близнаци.

D) Момчето е 2 години постаро од девојчето.

E) Девојчето е две години постаро од момчето.

Решение. C). Нека момчето има x години, а девојчето има y години. Тогаш $x+2=2(x-2)$ и $y+3=3(y-3)$, од каде добиваме $x=6$ и $y=6$. Значи, децата се близнаци.

18. Таткото живее со своите три деца. Тие секоја одлука ја носат со гласање и секој член на семејството има онолку гласови колку што е неговата возраст. Таткото има 36 години, а децата имаат 13, 6 и 4 години, па таткото секогаш победува. По колку години децата ќе победуваат на секое гласање ако тие секогаш се согласни?

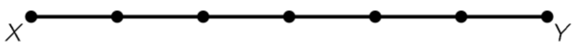
A) 5 B) 6 C) 7 D) 13 E) 14

Решение. C). Нека по x години децата секогаш победуваат. Тогаш таткото ќе има $36+x$ години, а децата ќе имаат $13+x, 6+x, 4+x$ години, па затоа важи $36+x<13+x+6+x+4+x$ од каде добиваме $3x>13$, односно $x>6,5$. Значи, по 7 години децата секогаш ќе победуваат.

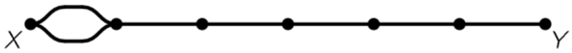
19. На еден роденден имало 12 деца. Децата биле на возраст 6, 7, 8, 9 и 10 години. Четири од нив биле на возраст од 6 години. Најголема е групата на осумгодишници. Која е просечната возраст на децата?

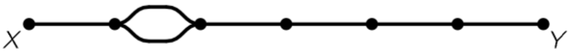
A) 6 B) 6,5 C) 7 D) 7,5 E) 8

Решение. **D).** Ако најчеста возраст е 8 години, тогаш најмалку 5 деца имаат 8 години. Според тоа, најмалку 9 деца ја имаат возраста 6 или 8 години. Бидејќи вкупниот број на деца е 12, а има деца од секоја од возрастите 6, 7, 8, 9 и 10 години, добиваме дека 4 деца се на возраст од 6 години, 5 деца се на возраст од 8 години, 1 дете е на возраст од 7 години, 1 дете е на возраст од 9 години и 1 дете е на возраст од 10 години. Според тоа, просечната возраст на децата е $\frac{4\cdot6+5\cdot8+7+9+10}{12}=\frac{90}{12}=7,5$ години.

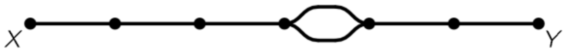
20. Меѓу местата X и Y има еди- 

нечна пруга по која се движи воз (цртеж десно). Компанијата чии возови сообраќаат на оваа линија сака секој ден еден воз да тргнува од X кон Y и еден воз да тргнува од Y кон X во исто време. Движејќи се со константни брзини, на секој возот му се потребни 180 минути да стигне од X во Y, а 60 минути од Y во X. Компанијата сака да воведе дупла линија  за да го избегне сударот на двата воза. Каде треба да се постави дуплата линија?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. **B).** Возовите да ги означиме со XY и YX. Вкупниот пат е поделен на 6 еднакви делници. Возот XY за $180:6=30$ минути поминува една делница, а возот YX една делница минува за $60:6=10$ минути. Според тоа, ако возо- 

вите тргнат истовремено, тогаш по 30 минути возот XY ќе биде во точката 1, а додека возот YX ќе биде во точката 3. Во следните 10 минути YX ќе ја помине делницата $\overline{32}$, па во следните 10 минути ќе биде на делницата $\overline{21}$. Во текот на овие $10+10=20$ минути возот XY ќе се наоѓа на делницата $\overline{12}$. Значи, за да не дојде до судар на возовите доплата линија  треба да се изгради на делницата $\overline{12}$.

21. Баба Цвета имала 10 внуци. Горјан бил најстар. Еден ден таа забележала дека нејзините внуци имаат различен број на години, ако збирот на годините на нејзините внуци е 180. Кој е најмалиот број на години што Горјан може да ги има.

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

Решение. **E).** Најмалиот број години шро горјан може да ги има се добива ако разликата на годините на Горјан и најмладиот внук на баба Цвета е најмала. Тоа е можно ако годините на внуците се последователни броеви или две групи од последователни броеви. Нека најмалиот внук има x години. Тогаш годините на внуците се последователни броеви тие имаат x, $x+1$, ..., $x+9$ години и од условот дека збирот на годините е 180 следува дека

$$\begin{aligned}&10x+45\le 180,\\&10x\le 135,\\&x\le 13,5.\end{aligned}$$

Но, x е природен број и затоа $x=13$, од каде добиваме дека $10x+45=175$. Сега, за да збирот на годините биде 180, а Горјан да има најмал можен број години потребно и доволно е разликата од $180-175=5$ години да ја разпределиме по една година на петте најстари внуци. Така добиваме дека внуците на баба Цвета имаат 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22 и 23 години.

Значи, најмалиот можен број години на Горјан е 23.

22. Зајачето Ушко во текот на еден ден јаде или 9 моркови, или 2 зелки, или 1 зелка и 4 моркови. Некои денови Ушко е на диета и затоа јаде само трева. Во текот на десет дена тоа изело 30 моркови и 9 зелки. Во текот на тие десет дена, колку дена тоа јадело само трева?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **C).** Нека Ушко x денови јаде само моркови и y јаде зелка и моркови. Тогаш $9x+4y=30$. Последната равенка во множеството природни броеви има единствено решение $x=2, y=3$. За трите дена кога Ушко јадел зелка и моркови тој изел 3 зелки, па затоа $9-3=6$ зелки изел кога јадел само зелки. Притоа, тој јадел 2 зелки на ден, што значи дека само зелка јадел $6:2=3$ дена. Конечно, Ѕшко бил на диета, т.е. јадел само трева $10-2-3-3=2$ дена.

23. Жана од продавница купила храна за нејзините четири мачки, со која мачките може да ги храни 12 дена. На враќање, таа нашла две бездомни мачки и истите ги однела дома. Ако Жана секоја мачка ја храни подеднакво, за колку денови ќе се потроши купената храна?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Решение. **A).** Жана има 4 мачки, па како со купената храна може да ги храни 12 дена, таа една мачка може да храни $4 \cdot 12 = 48$ дена. Кога зела уште две мачки, таа имала $4+2=6$ мачки. Затоа со купената храна таа може да ги храни $48:6=8$ дена.

24. Во една играорна група има 39 момчиња и 23 девојчиња. Секоја седмица бројот на момчињата се зголемува за 6, а бројот на девојчињата се зголемува за 8. По неколку седмици во групата има ед-

наков број момчиња и девојчиња. Колку членови има групата во тој момент?

A) 144 B) 154 C) 164 D) 174 E) 184

Решение. **D).** *Прв начин.* Во групата има $39-23=16$ момчиња повеќе. Бидејќи секоја седмица во групата доаѓаат $8-6=2$ девојчиња повеќе, бројот на девојчињата че биде еднаков на бројот на момчињата по $16:2=8$ седмици. Тогаш групата ќе има

$$39+23+8\cdot(8+6)=174 \text{ членови.}$$

Втор начин. Нека x е бројот на седмиците по кои во групата ќе има еднаков број момчиња и девојчиња. Тогаш $39+6x=23+8x$, од каде добиваме $x=8$. Значи, по 8 седмици во групата ќе има еднаков број момчиња и девојчиња и групата во тој момент ќе има

$$39+6\cdot8+23+8\cdot8=174 \text{ членови.}$$

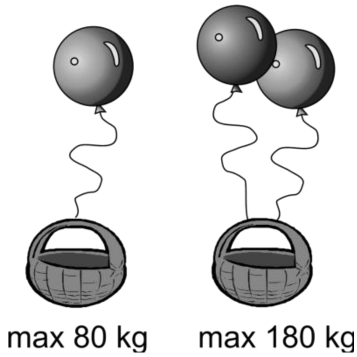
25. Книга која имала 290 страници, Матео почнал да ја чита во недела. Секој ден освен недела, тој читал по 4 страници, а во недела читал по 25 страници. Колку денови последователно ја читал книгата?

A) 50 B) 46 C) 40 D) 35 E) 41

Решение. **E).** Првите седум дена Матео прочитал $25+6\cdot4=49$ страници. Бидејќи $290=5\cdot49+45$ Матео читал цели 5 седмици, по што му преостанале 45 страници. Сега, од $45=25+5\cdot4$ следува дека последните 45 страници тој ги прочитал за 6 дена. Значи, Матео книгата ја прочитал за $5\cdot7+6=41$ ден

3. МЕРИМЕ И СПОРЕДУВАМЕ МАСИ И ВОЛУМЕНИ

1. Еден балон може да подигне една кошница со најмногу 80 килограми овошје. Два такви балони може да подигнат најмногу 180 килограми овошје. Колкава е масата на кошницата?



A) 10 kg B) 20 kg C) 30 kg D) 40 kg E) 50 kg

Решение. B). Еден балон може да подигне $180-80=100$ kg овошје кое не е ставено во кошница. Бидејќи првиот пат балонот подигнал 100 kg од кои 80 kg е овошје, добиваме дека масата на кошницата е $100-80=20$ kg.

2. Торта со маса 900 g Димитар ја поделил на четири дела. Најголемото парче има маса колку останатите три парчиња заедно. Колкава е масата на најголемото парче?

A) 250 g B) 300 g C) 400g D) 450 g E) 600 g

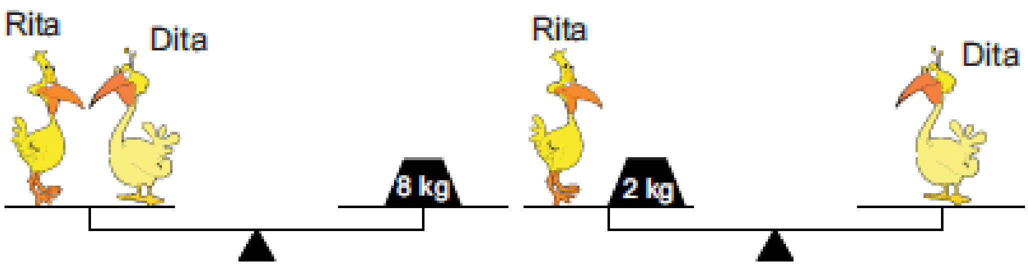
Решение. D). Масата на најголемото парче е еднаква на масата на преостанатите три парчиња, што значи дека неговата маса е еднаква на половина од масата на тортата. Според тоа, маста на најголемото парче е $900:2=450$ g.

3. Михаела има девет привезоци со маси: $1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6g, 7g, 8g, 9g$. На четири гердани таа ставила по два привезоци така што вкупната маса на привезоците на првиот ѓердан била 17 g, на вториот 13 g, на третиот 7 g и на четвртиот 5 g. Колкава е масата на привезокот кој преостанал?

A) $1\,g$ B) $2\,g$ C) $3\,g$ D) $4\,g$ E) $5\,g$

Решение. **C).** Привезоците кои Михаела ги употребила имаат маса $17+13+7+5=42\,g$. Вкупната маса на сите привезоци е еднаква на $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45g$. Значи, масата на привезокот кој преостанал е $45-42=3\,g$.

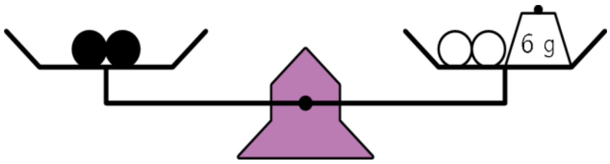
4. Разгледај ги цртежите и одговори: Колку килограми има Дита?

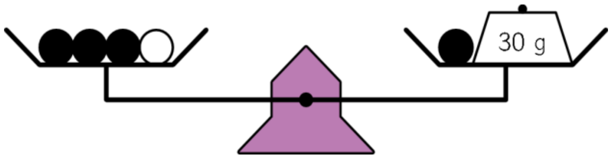


A) $2\,kg$ B) $3\,kg$ C) $4\,kg$ D) $5\,kg$ E) $6\,kg$

Решение. **D).** Нека со R ја означиме масата на Рита, а со D ја означиме масата на Дита. Тогаш $R+D=8, R+2=D$, од каде добиваме $R+R+2=8$, па затоа $R=3$. Според тоа, $D=3+2=5\,kg$.

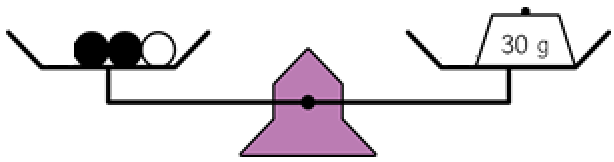
5. Шест идентични црни топчиња и три идентични бели топчиња се поставени на ваги како што е прикажано на цртежите десно. Колкава е вкупната маса на овие девет топчиња?





A) $100\,g$ B) $99\,g$ C) $96\,g$ D) 94 g E) 90 g

Решение. **E).** Ако од втората вага од двете страни извадиме по едно црно топче, ја до-



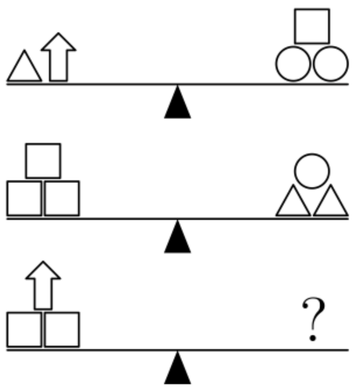
биваме вагата прикажана на цртежот десно.

Значи, 2 црни е 1 бело топче имаат маса $30\ g$. Три групи од по 2 црни и 1 бело топче имаат три пати поголема маса. Значи, $3\cdot 2=6$ црни и $3\cdot 1=3$ бели топчиња имаат маса $3\cdot 30=90\ g$.

Забелешка. Како што можеме да видиме при решавањето на задачата воопшто не го искористивме условот даден со првата вага. Тоа значи дека задачата е предефинирана, т.е. има повеќе услови отколку што е потребно за нејзино решавање.

.

6. Која од следните понудени опции ќе биде потребна за да се одржи рамнотежа на третата вага?



A) △△△△□ B) △△△○

C) △○○○ D) △□□□□

E) ○○□

Решение. **C).** *Прв начин.* Нека масите на еден триаголник, стрелка, квадрат и круг ги означиме со x,y,z,t, соодветно. Тогаш од првите два цртежи на кои вагите се во рамнотежа следува:

$$x+y=z+2t \quad t+2x=3z,$$

а се бара на што би било еднакво $y+2z=?$. Имаме:

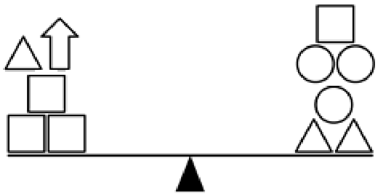
$$\begin{cases} y=z+2t-x \\ 2z=t+2x-z \end{cases}$$

па затоа

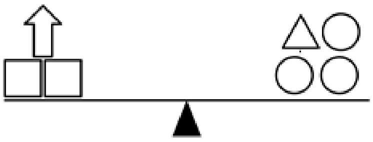
$$y+2z=z+2t-x+t+2x-z=x+3t$$

што значи дека на вагата треба да има еден триаголник и три круга.

Втор начин. Да ги преместиме сите објекти од првата вага на втората вага на следниот начин:



Тогаш вагата е во рамнотежа и ако од двата таса извадиме по еден триаголник и еден квадрат, тогаш вагата останува во рамнотежа и добиваме:



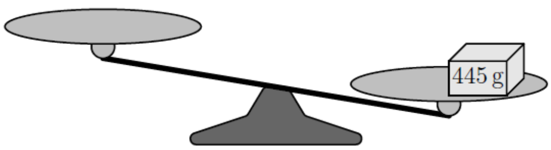
што значи дека на вагата треба да има еден триаголник и три круга.

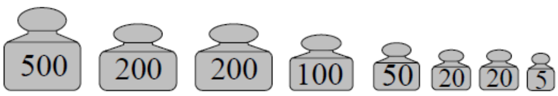
7. Лилјана едниот тас на вага со два таса ставила диња , а на другата тегови во грамови од покажаните на долниот цртеж. Се покажало дека масата на дињата е $348\,g$. Колку тегови употребила Лилјана?

A) 6 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Решение. **C).** Имаме $348=300+40+8=200+100+20+20+5+2+1$, што значи дека страна ставила 7 тегови.

8. На вага е поставен пакет кој има маса $445\,g$ (цртеж десно). Дадени теговите кои се прикажани на цртежот лево.



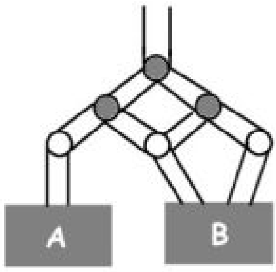


Со колку најмалку од дадените тегови може вагата да се доведе во состојба на рамнотежа?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

Решение. D). Бидејќи $500 = 445 + 50 + 5$, заклучуваме дека за да вагата се доведе во состојба на рамнотежа доволни ни се три тега. На левиот тас ставаме тег од $500\,g$, а на десниот тас ставаме тегови од $50\,g$ и $5\,g$.

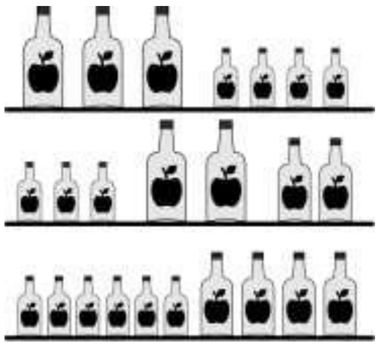
9. Во цевката се тураме 1000 литри вода. На секое гранање на цевката водата се дели на два еднакви дела. Колку литри ќе се налеат во садот B?



A) 800 B) 750 C) 666,67 D) 660 E) 500

Решение. B). На првото гранање водата се дели лево 500 литри и десно 500 литри. Водата од десната гранка целосно оди во садот B, а од левата гранка половина оди во садот A, а половина во садот B. Значи, во садот B ќе има $250 + 500 = 750\,l$.

10. Секоја полица на цртежот десно содржи вкупно 64 децилитри јаболков сок. На полиците има шишиња во три големини: големо, средно и мало шише. Колку децилитри јаболков сок содржи средното по големина шише?



A) 3 B) 6 C) 8 D) 10 E) 14

Решение. D). Волумените на големото, средното, малото шише да ги означиме со g, s, m, соодветно. Од условот на задачата следува

$$3g + 4m = 64,$$
$$2g + 2s + 3m = 64,$$
$$4s + 6m = 64.$$

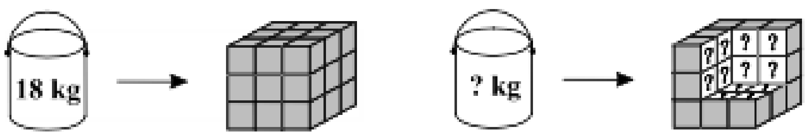
Од последната равенка следува $2s+3m=32$, па ако замениме во средната равенка добиваме $2g+32=64$, од каде наоѓаме $g=16$. Сега, од првата равенка следува $48+4m=64$, односно $m=4$. Конечно, со замена во $2s+3m=32$ добиваме $2s+12=32$, т.е. $s=10$.

11. Ако мачката Лиза само одмара цел ден, тогаш пие 60 *ml* млеко. Ако лови глувчиња, тогаш пие една третина повеќе млеко. Во тек на последниве две недели, Лиза лови глувчиња секој втор ден. Колку млеко испила таа во последниве две недели?

A) 840 *ml* B) 980 *ml* C) 1050 *ml* D) 1120 *ml* E) 1960 *ml*

Решение. **B).** Бидејќи мачката Лиза ловела глувци преку еден ден, таа седум дена пиела по 60 *ml* млеко, а седум дена пиела по 80 *ml*. Значи, за тие 14 дена таа испила $7\cdot 60+7\cdot 80=420+560=98ml$ млеко.

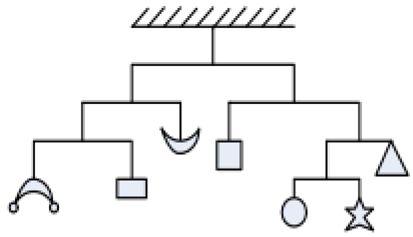
12. За боење на коцката прикажана на цртежот се потребни $18\,kg$ боја. Колку килограми боја се потребни за боење на видливите делови на десниот цртеж, означени со знакот прашалник?



A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{6}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{12}{3}$

Решение. **E).** Површината на коцката е составена од 6 ѕида и на секој ѕид има по $3\cdot 3=9$ мали квадрати. Значи, за $6\cdot 9=54$ мали квадрати се потребни $18\,kg$ боја. Според тоа, за еден мал квадрат е потребно $\frac{18}{54}=\frac{1}{3}\,kg$ боја. Белата површина на цртежот десно е составена од $3\cdot 4=12$ квадрати кои се еднакви со малите квадрати на ѕидовите на коцката. Значи, за нивно боење се потребни $12 \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{3}\ kg$ боја.

13. На цртежот е прикажана конструкција која е во рамнотежа. Масата на хоризонталните прачки и вертикалните конци е занемарлива. Вкупната маса на предметите кои ги мериме е 112 грама. Кокава е масата на ѕвездата?



A) $6\ g$ B) $7\ g$ C) $12\ g$ D) $16\ g$

E) не може да се определи

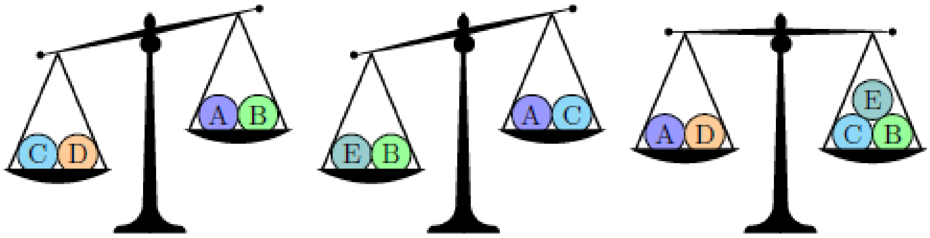
Решение. **B).** Масата на десниот на секој дел кој се наоѓа на најгорната прачка е $112:2=56\ g$. Понатаму, масата на квадратот е еднаква на масата на триаголникот, кругот и ѕвездата и таа е еднаква на $56:2=28\ g$. Сега, масата на триаголникот еднаква на масата на кругот и ѕвездата, т.е. еднаква на $28:2=14\ g$. Конечно, масата на ѕвездата е $14:2=7\ g$.

14. Бојо има четири кучиња. Масата на секое куче е природен број изразен во килограми. Никои две кучиња немаат иста маса, а нивната вкупна маса е $60\ kg$. Второто по големина куче, сметајќи од најголемото, има маса $28\ kg$. Колкава е масата на третото по големина куче, сметајќи од најголемото?

A) $2\ kg$ B) $3\ kg$ C) $4\ kg$ D) $5\ kg$ E) $6\ kg$

Решение. **A).** Масата на најголемото куче е еднаква на $29\ kg$, бидејќи ако масата е $30\ kg$ или поголема тогаш две најголеми кучиња заедно ќе имаат најмалку $58\ kg$, па бидејќи $60-58=2\ kg$, не е можно другите две кучиња да имаат различни маси изразени во цел број килограми. Значи, двете кучиња со најмала маса заедно имаат $60-(29+28)=3\,kg$ и како $1+2=3\,kg$ заклучуваме дека масата на третото по големина куче е $2\,kg$.

15. Пет топки имаат маси 30 g, 50 g, 50 g, 50 g и 80 g. Овие топки се трипати ставени на ваги како што е прикажано на долните цртежи. Која топка има маса 30 g?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. C). Од третата вага добиваме $A+D=B+C+E$, од каде следува $80+50=30+50+50$. Во долната табела се запишани сите можности за масите на петте топчиња. Во последната колона е дадено дали ваквиот распоред соодветствува на положбите на првата и втората вага.

A	D		B	E	C		Соодветство со првата и втората вага
80	50		30	50	50		Не со првата и не со втората вага.
80	50		50	30	50		Не со првата и не со втората вага.
80	50		50	50	30		Не со првата и не со втората вага.
50	80		30	50	50		Да со првата и не со втората вага.
50	80		50	30	50		Да со првата и не со втората вага.
50	80		50	50	30		Да со првата и да со втората вага.

Како што можеме да видиме последниот ред на табелата соодветствува на положбата ба првата и втората вага, па одговорот е топчето C.

16. Едно јаболко и еден лимон имаат иста маса колку една круша и една праска. Едно јаболко и една круша имаат помала маса отколку еден лимон и една праска, а една круша и еден лимон имаат помала маса од едно јаболко и една праска. Кое парче овошје има најголема маса?

A) јаболко B) лимон C) праска D) круша

E) невозможно е да се определи

Решение. **C).** Да ги означиме масите на јаболкото, лимонот, праската, крушата со J, L, P, K, соодветно. Според условите на задачата добиваме

$$J+L=P+K,$$
$$J+K<L+P,$$
$$K+L<J+P.$$

Ги собираме равенството $J+L=P+K$ и неравенството $J+K<L+P$ и добиваме

$$J+L+J+K<L+P+P+K,$$

од каде по средувањето наоаме $2J<2P$, т.е. $J<P$. Ги собираме равенството $J+L=P+K$ и неравенството $K+L<J+P$ и добиваме

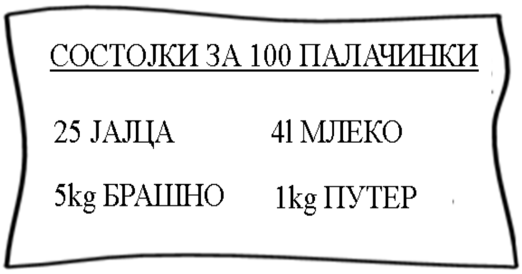
$$K+L+J+L<J+P+P+K$$

и по средувањето добиваме $2L<2P$, т.е. $L<P$. Сега,

$$P+K=J+L<P+P,$$

па затоа $K<P$. Според тоа, најголема маса има праската.

17. Мартин го добил од готвачот во ресторанот рецептот за неговите палачинки (цртеж десно). Мартин има 6 јајца, 400 g брашно, 0,5 литри млеко и 200 g путер. Кој е



најголемиот број палачинки кој може да го направи Мартин користејќи го овој рецепт?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

Решение. **B).** За 100 палачинки се потребни 25 јајца, па затоа со 1 јаце може да се направат $100:25=4$ палачинки, а со 6 јајца $6\cdot 4=24$ палачинки.

За 100 палачинки се потребни $5\,kg$ брашно, па затоа за една палачинка се потребни $5000:100=50\,g$ брашно. Значи, со 400 g може да се направата $400:50=8$ палачинки.

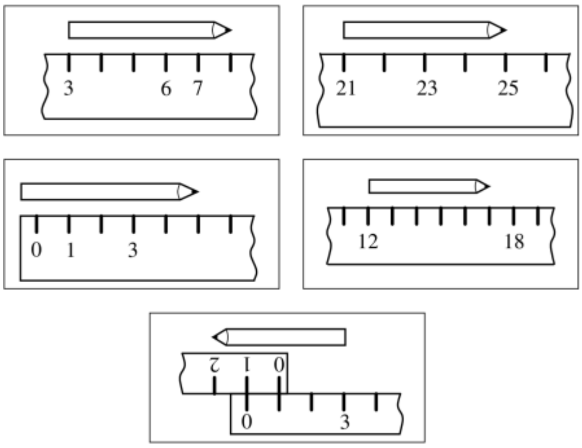
Бидејќи за 100 палачинки се потребни 4 литри млеко, за една палачинка е потребно $4:100=0,04$ литри млеко. Сега, $0,5:0,04=12,5$ и затоа со 0,5 литри млеко може да се направат најмногу 12 палачинки.

Бидејќи за 100 палачинки е потребно $1\,kg$ путер, за една палачинка е потребно $1000:100=10\,g$ путер. Значи, со 200 g путер може да се направата $200:10=20$ палачинки.

Од броевите 24, 8, 12 и 24 најмал е бројот 8, па затоа со состојките кои ги има Мартин според дадениот рецепт може да направи најмногу 8 палачинки.

4. МЕРИМЕ И СПОРЕДУВАМЕ ДОЛЖИНИ

1. На цртежите десно се прикажани снимки од мерење на пет моливи. Единечната мерка на секоја линејка е $1\,cm$. Колку од моливите се со должина $5\,cm$?

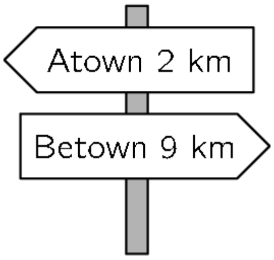


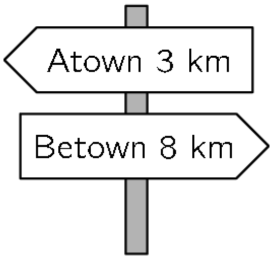
A) 1 B) 2 C) 3

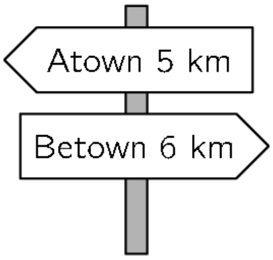
D) 4 E) 5

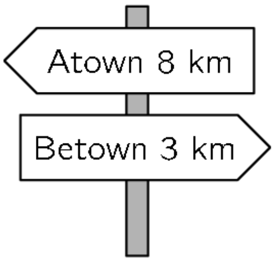
Решение. B). Десниот молив во првиот ред и моливот во третиот ред се со должина $4\,cm$, а левиот молив во вториот ред е подолг од $5\,cm$. Другите два молива се со должина $5\,cm$.

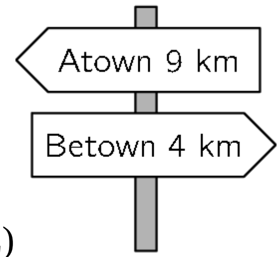
2. Патувајќи од Atown кон Betown, Анита поминува покрај пет патокази како што се прикажаните. Еден од нив не е точен. Кој?

A) 

B) 

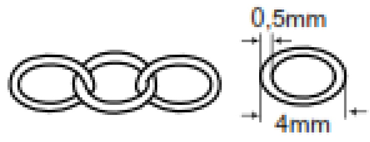
C) 

D) 

E) 

Решение. E). Патоказите од A до D покажуваат растојание меѓу двата градови од 11 *km*, а патоказот E покажува растојание 13 *km*. Според тоа, не е точен патоказот E).

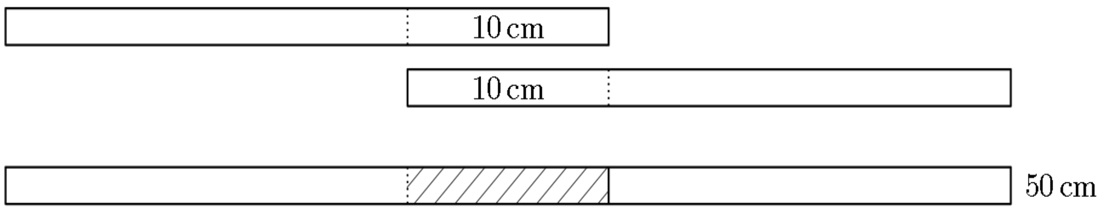
3. Златар прави ланче така што поврзува пет исти алки во низа (цртеж десно). Димензиите на една алка се прикажани на цртежот. Колку е долго ланчето?



A) $20\,mm$ B) $19\,mm$ C) $17,5\,mm$ D) $16\,mm$ E) $15\,mm$

Решение. D). Почнуваме со една алка која има должина $4\,mm$. При додавање на секоја следна алка должината на ланчето се зголемува за $4-0,5-0,5=3\,mm$. Бидејќи ланчето е составено од 5 алки, додаваме 4 алки и неговата должина ќе биде $4+4\cdot 3=16\,mm$.

4. Магде има 4 ленти од хартија со иста должина (види цртеж). Со преклопување од $10\,cm$ залепила две од лентите и добила лента која е долга $50\,cm$.

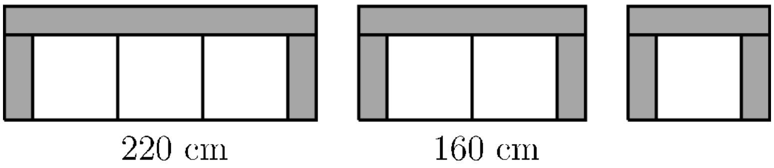


Со другите две ленти Магде сака да добие лента која ќе биде долга $56\,cm$. Колку треба да биде преклопувањето на тие две ленти?

A) $4\,cm$ B) $6\,cm$ C) $8\,cm$ D) $10\,cm$ E) $12\,cm$

Решение. A). Должината на една трака е $(50+10):2=30\,cm$. За да добие трака од $56\,cm$ магде треба траките да ги преклопи $2\cdot 30-56=4\,cm$.

5. Продавница за модерен мебел продава троседи, двоседи и фотељи направени од исти модуларни делови, како што е прикажано на цртежот. Вклучувајќи ги наслоните за раце, ширината на троседот е 220 *cm*, а ширината на двоседот е 160 *cm*.

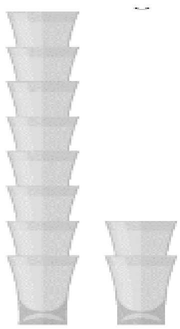


Колку е широка фотелјата?

A) 60 cm B) 80 cm C) 90 cm D) 100 cm E) 120 cm

Решение. **D).** Разликата меѓу троседот и двоседот е еднаква на еден бел дел за седење. Според тоа, белиот дел за седење е еднаков на $220-160=60\,cm$. Разликата меѓу двоседот и фотељата исто така е еден бел дел за седење, па затоа ширината на фотељата е еднаква на $160-60=100\,cm$.

6. Кога еднакви чаши се наредени во височина, една во друга, група од 8 чаши е висок $42\,cm$, а група од 2 чаши е висок $18\,cm$. Колку е висока група од 6 чаши?



A) $22\,cm$ B) $24\,cm$ C) $28\,cm$

D) $34\,cm$ E) $40\,cm$

Решение. **D).** Разликата на височините на двете групи е еднаква на $42-18=24\,cm$. Според тоа, со додавање на една чаша на малата група височината пораснува за $24:6=4\,cm$. Затоа со додавање на 4 чаши таа ќе се зголеми за $4\cdot 4=16\,cm$. Конечно, височината на група од 6 чаши е $18+16=34\,cm$.

7. Стојан бил на планинарење 5 дена. Тој тргнал во понеделник, а се вратил во петок. Секој ден Стојан пешачел 2 km повеќе од претходниот ден. Во текот на планинарењето Стојан вкупно поминал 70 km. Колку километри Стојан поминал во четвртокот?

A) 12 km B) 13 km C) 14 km D) 15 km E) 16 km

Решение. **Е).** Ако Стојан во понеделникот поминал $x\,km$, тогаш тој следните четири дена поминувал по $x+2\,km, x+4\,km, x+6\,km$ и $x+8\,km$. Тоа значи дека $x+x+2+x+4+x+6+x+8=70$, од каде добиваме $5x=50$, т.е. $x=10\,km$. Значи, во четвртокот Стојан поминал $x+6=16\,km$.

8. Четири села A,B,C,D се наоѓаат на еден пат во дадениот редослед. Должината на патот меѓу секои две соседни села е $10\,km$. Во селата A,B,C,D живеат соодветно 10, 20, 30, 40 ученици. Жителите на селата се договориле да изградат ново училиште и тоа да биде сместено во едно од селата, но така што патот кој сите ученици ќе го поминуваат биде најкраткиот можен пат. Во кое село треба да се изгради училиштето?

A) во A B) во B C) во C D) во D

E) во било кое село

Решение. **C).** Ако училиштето биде изградено во селото A, тогаш вкупниот пат кој ќе го поминуваат сите учениците ќе биде

$$10\cdot 0+20\cdot 10+30\cdot 20+40\cdot 30=2000\,km.$$

Ако училиштето биде изградено во селото B, тогаш вкупниот пат кој ќе го поминуваат сите учениците ќе биде

$$10\cdot 10+20\cdot 0+30\cdot 10+40\cdot 20=1200\,km.$$

Ако училиштето биде изградено во селото C, тогаш вкупниот пат кој ќе го поминуваат сите учениците ќе биде

$$10\cdot 20+20\cdot 10+30\cdot 0+40\cdot 10=800\,km.$$

Ако училиштето биде изградено во селото D, тогаш вкупниот пат кој ќе го поминуваат сите учениците ќе биде

$$10\cdot 30+20\cdot 20+30\cdot 10+40\cdot 0=1000\,km.$$

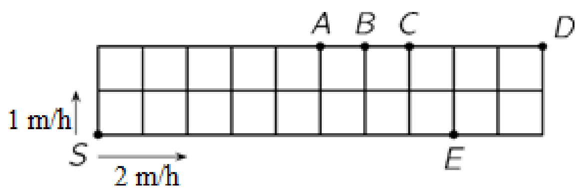
Значи, училиштето треба да биде изградено во селото C.

9. Еден моторциклист растојанието од $28km$ го минува за $30\min$. Колку е неговата просечна брзина на движење изразена во km/h?

A) 28 B) 36 C) 56 D) 58 E) 62

Решение. C). Ако за $30\min$ моторциклистот минува $28km$, тогаш за $1h = 60\min$, т.е. за два пати подолго време ќе помине двапати подолг пат, односно ќе помине 56 километри. Според тоа, неговата просечна брзина е $56\,km/h$.

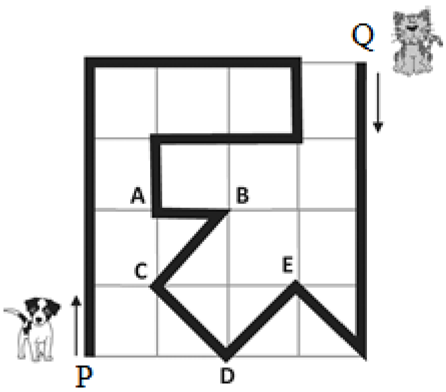
10. Една градина е поделена на идентични квадрати (цртеж десно). Брз и бавен полжав, почнувајќи од точката S, во различни правци се движат по страните на градината. Брзиот полжав се движи со брзина од 2 метри на час ($2\,m/h$), а бавниот полжав се движи со брзина од 1 метар на час ($1\,m/h$). Во која точка ќе се сретнат полжавите?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. B). Брзиот полжав се движи со брзина $2\,m/h$, а бавниот се движи со брзина $1\,m/h$. Тоа значи дека додека бавниот полжав поминува страна на едно квадратче, брзиот полжав поминува страна на две квадратчиња. Значи, за исто време тие заедно поминуваат $1+2=3$ страни на квадратчињата од кои е составен правоаголникот. Периметарот на правоаголникот се состои од должините на страните на $2\cdot(2+10)=24$ квадратчиња. Според тоа, до средбата бавниот полжав треба да помине $24:3=8$ по страните на 8 квадратчиња, а брзиот полжаб в по страните на $24-8=16$ квадратчиња. Значи, тие ќе се сретнат во точката B.

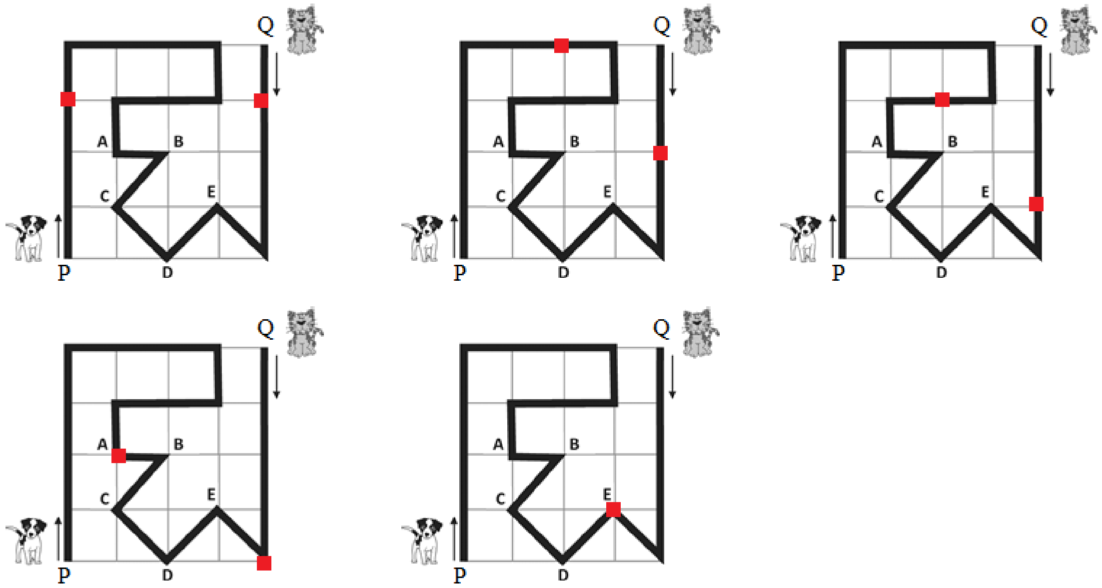
11. Куче и маче се шетаат низ парк долж означената патека со црна линија. Во исто време кучето тргнува од точката P, а мачето од точката Q. Ако кучето оди три пати побрзо од мачето, во која точка тие ќе се сретнат?



A) во A B) во B C) во C

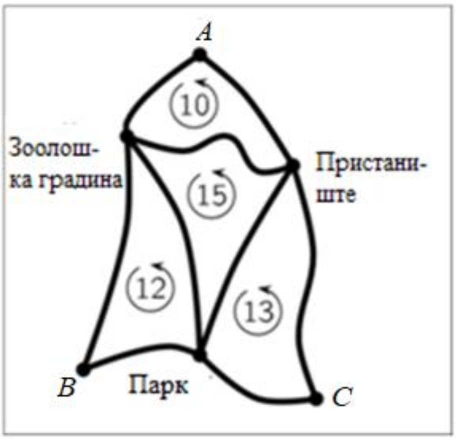
D) во D E) во E

Решение. **E).** На една помината должина на мачето, му соодветствуваат три такви должини на кучето. На долните цртежи се прикажани положбите на кучето и мачето по секој чекор на мачето.



Според тоа, кучето и мачето ќе се сретнат во точката E.

12. Мапата на сликата покажува три автобуски станици во точките *A*, *B* и *C*. Патот од станицата A, преку зоолошката градина и пристаништето, па назад до станицата A е долг 10 *km*. Патот од станицата B,



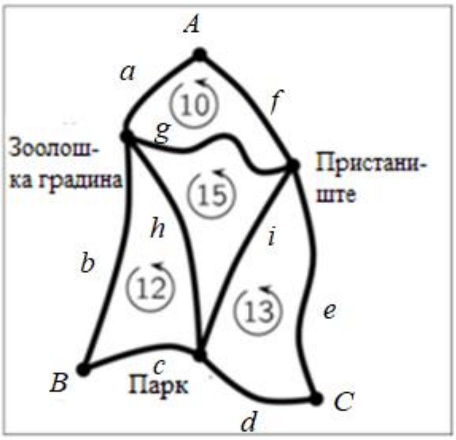
преку паркот и зоолошката градина, па назад до станицата В е долг 12 *km*. Патот од станицата С, преку пристаништето и паркот, па назад до станицата С е долг 13 *km*. Патот од зоолошката градина преку паркот и пристаништето, па назад до зоолошката градина е долг 15 *km*. Колку е долг патот од А преку В и С па пак до А?

A) 18 *km* B) 20 *km*

C) 25 *km* D) 35 *km*

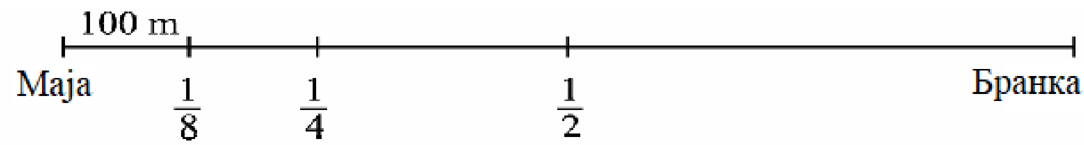
E) 50 *km*

Решение. B). При ознаки како на цртежот десно за бараното растојание добиваме:



$$
\begin{aligned}
L &= a+b+c+d+e+f \\
&= (a+g+f)+(b+c+h)+ \\
&\quad +(d+e+i)-(g+h+i) \\
&= 10+12+13-15 \\
&= 20\ km.
\end{aligned}
$$

13. Според податоците на цртежот определи го растојанието помеѓу Маја и нејзината другарка Бранка



A) 300 *m* B) 400 *m* C) 800 *m* D) 1 *km* E) 700 *m*

Решение. C). Една осмина од растојанието е $100\,m$, па затоа целото растојание меѓу нив е $8 \cdot 100 = 800\,m$.

14. Гумена топка паѓа од покрив на куќа, од висина $10\ m$. По секој удар од земја таа се враќа нагоре на $\frac{4}{5}$ од висината од која паднала. Колку пати таа ќе се појави пред прозорецот чиј долен раб е на висина $5\ m$, а горниот раб е на висина $6\ m$ од земјата?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Решение. D). По првиот удар во земјата таа ќе се искачи на висина од $\frac{4}{5}10\ m = 8\ m$. По вториот удар таа ќе се искачи на висина од $6,4\ m = \frac{4}{5}\cdot 8\ m$. По третиот удар во земјата таа ќе се искачи на висина од $\frac{4}{5}\cdot 6,4\ m = 5,12\ m$. По четвртиот удар во земјата таа ќе се искачи на висина од $\frac{4}{5}\cdot 5,12\ m = 4,096\ m$ и повеќе не се појавува пред прозорецот.

По првиот удар до вториот удар таа ќе се појави 2 пати пред прозорецот. По вториот удар до третиот удар таа ќе се појави 2 пати пред прозорецот. По третиот удар до четвртиот удар таа ќе се појави 1 пат пред прозорецот. Според тоа, топката од моментот на паѓање од кровот пред прозорецот ќе се појави точно 6 пати.

15. Еден мост е изграден преку река која е широка $120\ m$. Една четвртина од мостот е над левиот брег на реката, а една четвртина од мостот е над десниот дел од реката. Колку е долг мостот?

A) $150\ m$ B) $180\ m$ C) $210\ m$ D) $240\ m$ E) $270\ m$

Решение. D). *Прв начин.* Бидејќи една четвртина од мостот е над левиот брег на реката, а една четвртина од мостот е над десниот дел од реката, добиваме дека $2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ не е над реката. Според тоа, над реката е $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ од мостот.

Значи, мостот е двапати подолг од ширината на реката, т.е. тој е широк $2\cdot 120=240\,m$.

Втор начин. Нека со x ја означиме должината на мостот. Тогаш $\frac{1}{4}x$ е должината на мостот над левиот брег и $\frac{1}{4}x$ е должината на мостот над десниот брег. Значи, ширината на реката е $x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}x$. Според тоа, $\frac{1}{2}x=120\,m$, па затоа $x=2\cdot 120=240\,m$.

16. Кралот и неговата свита патувале од Летниот дворец кон Зимскиот дворец движејќи се со брзина од $5\,km/h$. Секој час кралот испраќал гласник назад кон Летниот дворец кој се движел со брзина од $10\,km/h$. Кој е временскиот интервал меѓу било кои два последователни гласници кои пристигнувале во Летниот дворец?

A) 30 min B) 60 min C) 90 min D) 75 min E) 120 min

Решение. **C).** Од испраќањето на една до друга порака минува $1\,h$. За тоа време свитата изминува нови $5\,km$. Затоа на гласникот му се потребни дополнителни $30\min$ за да ја предаде пораката отколку што е времето кое на претходниот гласник му е потребно да ја однесе пораката.

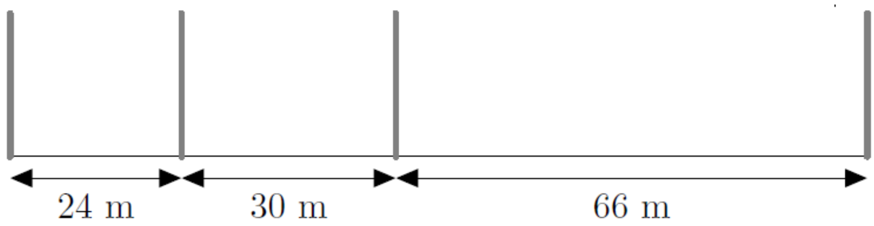
Значи, меѓу секои две пораки минуваат $1\,h\,30\min=90\min$.

17. Јаже со должина $15\,m$ треба да се подели на најголемиот број можни делови, чии должини изразени во метри се различни природни броеви. На колку места треба да се пресече јажето?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 15

Решение. **B).** Бројот 15 како збир на најголем број различни природни броеви може да се запише ако собирците се најмалите можни природни броеви. Сега, бидејќи $15=1+2+3+4+5$, добиваме дека јажето треба да се подели на 5 дела, па затоа тоа треба да се пресече на 4 места.

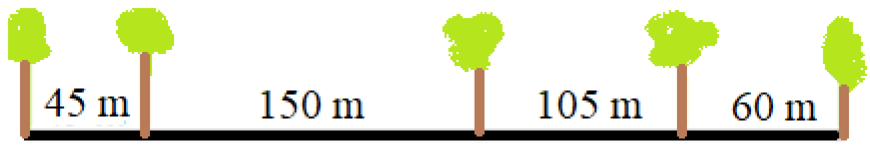
18. Четири столбови се поставен по должината на $120\,m$ долга патека, како што е прикажано на долниот цртеж. Колку најмногу столбови треба да се додадат така што патеката ќе биде поделена на еднакви делови?



A) 12 B) 15 C) 17 D) 20 E) 37

Решение. C). За да бројот на столбовите биде најмал потребно е растојанието меѓу столбовите да е најголемо можно. Најголемиот заеднички делител на броевите 24, 30 и 66 е бројот 6. Тоа значи дека столбовите треба да се поставaт на растојание од $6\,m$. Од $120:6=20$ добиваме дека треба да има 21 столб (на почетокот има столб, а потоа на секои $6\,m$). Веќе има 4 столбови, што значи дека треба да се поставaт уште $21-4=17$ столбови.

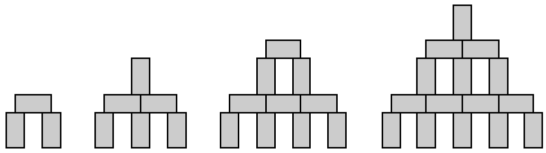
19. На праволиниска алеа се засадени 5 девца, растојанијата меѓу кои се означени на долниот цртеж. Кој е најмалиот број дрвца што треба дополнително да се засадат во алеата, така што растојанијата меѓу последователните дрвца изразени во цел број метри да се еднакви?



A) 13 B) 16 C) 16 D) 19 E) 20

Решение. **C).** За да бројот на дрвцата биде најмал потребно е растојанието меѓу дрвцата да е најголемо можно. Најголемиот заеднички делител на броевите 45, 150, 105 и 60 е бројот 15. Тоа значи дека дрвцата треба да се засадат на растојание од $15\,m$. Растојанието меѓу првото и последното дрвце е $45+150+105+60=360\,m$. Од $360:15=24$ добиваме дека треба да има 25 дрвца (на почетокот има дрвца, а потоа на секои $15\,m$). Веќе има 5 дрвца, што значи дека треба да се постават уште $25-5=20$ дрвца.

20. Со блокови со димензии $1\,cm \times 1\,cm \times 2\,cm$ последователно се прават кули како што е прикажано на цртежот десно. Колку ќе биде висока кулата која што е направена со помош на 28 блокови?



A) $9\,cm$ B) $11\,cm$ C) $12\,cm$ D) $14\,cm$ E) $17\,cm$

Решение. **B).** *Прв начин*. Првата кула е направена од 3 блока. Втората е добиена од првата со додавање на 3 блока, па таа има $3+4=6$ блока. Третата е добиена од втората со додавање на 4 блока, па таа има $6+4=10$ блока. Четвртата е добиена од третата со додавање на 5 блока, па таа има $10+5=15$ блока. Петтата е добиена од четвртата со додавање на 6 блока, па таа има $15+6=21$ блока. Шестата е добиена од петтата со додавање на 7 блока, па таа има $21+7=28$ блока. Значи, треба да ја определиме височината на шестата кула. Блоковите се поставуваат така што втората кула е $2\,cm$ повисока од првата, третата е $1cm$ повисока од втората, четврата е $2\,cm$ повисока од третата итн. Првата кула е висока $3cm$, па затоа шестата кула е висока

$$3+2+1+2+1+2=11\,cm.$$

Втор начин. Сите кули се изградени така што на највисокото ниво има 1 блок, а под секое следно ниво има еден блок повеќе. Значи, редоследно почнувајќи одгоре надолу кулата која е изградена од 28 блокови по нивоа има 1, 2, 3, 4, 5, ... блокови. Бидејќи

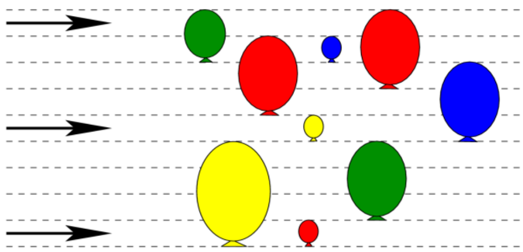
$$1+2+3+4+5+6+7=28$$

кулата има седум нивоа. Првото ниво е високо $2\,cm$, второто $1\,cm$, третото $2\,cm$ итн. Според тоа, кулата е висока

$$2+1+2+1+2+1+2=11\,cm.$$

5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. На цртежот десно се прикажани 3 стрели кои летаат хоризонтално и 9 балони кои постојано се наоѓаат на иста висина. Ако стрелата погоди балон тој пука, а стрелата продолжува да лета во ист правец. Колку балони нема да бидат погодени од ниту една стрела?



A) 3 B) 2 C) 6 D) 5 E) 4

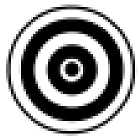
Решение. **A).** На цртежот се прикажани 9 балони. Имаме 3 стрелички и секоја од нив погодува по 2 балони. Според тоа, од ниту една стрела нема да бидат погодени $9-3\cdot 2=3$ балони.

2. Дијана изиграла три игри пикадо, при што во секоја игра фрлала по две стрелични. Нејзините погодоци во секоја од трите игри се прикажани на цртежот десно. Во првата игра освоила 14, а во втората 16 поени. Колку поени освоила Дијана во третата игра?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 22

Решение. **B).** Во првата игра двете стрелички го погодиле малиот прстен и Дијана освоила 14 поени. Значи, погодокот во малиот прстен носи $14:2=7$ поени. Во втората игра едната стреличка го погодила малиот прстен, а другата кругот и Дијана освоила 16 поени. Значи, погодокот во кругот носи $16-7=9$ поени. Во третата игра Дијана два пати го погодила кругот, што значи дека освоила $2\cdot 9=18$ поени.

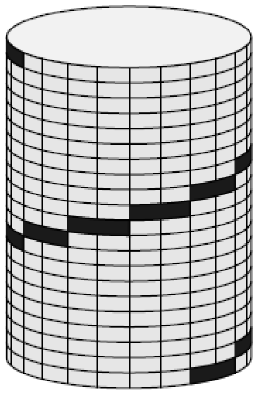
3. Кирил гаѓа мета со стрелички. На почетокот тој имал 10 стрелички, но при секое погодување на центарот на метата Кирил добивал по 2 нови стрелички. Колку пати го погодил центарот, ако по 22 фрлања не му останала ниту една стреличка?



А) 6 В) 8 С) 10 D) 12 Е) 22

Решение. **А).** Заради погодоците во центарот на метата Кирил добил $22-10=12$ стрелички. Бидејќи за секој погодок тој добивал по 2 нови стрелички, заклучуваме дека Кирил $12:2=6$ пати го погодил центарот на метата.

4. Зоја се качува од долу кон врвот на цилиндрична кула. Сите скалила се со еднаква големина. Ако се видливи девет скалила, колку скалила по кои се качува Зоја не се видливи?



А) 9 В) 10 С) 11 D) 12 Е) 18

Решение. **D).** Кулата има 21 кружни нивоа. Со едно скалило Зоја се поместува за едно ниво. Значи $21-9=12$ скалила не се видливи.

5. Една стоногалка има 25 пара чевли. На стоногалката и треба по еден чевел за секое од нејзините 100 стопала. Уште колку чевли треба да докупи стоногалката за да се обуе?

А) 15 В) 20 С) 35 D) 50 Е) 75

Решение. **D).** Стоногалката има $2\cdot 25=50$ чевли. За да се обуе и тре баат 100 чевли, па затоа треба да купи уште $100-50=50$ чевли.

6. Мила сака да испече 24 колачи за забавата по повод нејзиниот роденден. За да испече 6 колачиња, потребни ѝ се 2 јајца. Јајцата се

продаваат во кутии во кои се спакувани по шест јајца во кутија. Колку кутии јајца треба да купи Мила?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

Решение. B). Во 24 колачи имаме 4 групи од по 6 колачи. За секоја група требаат по 2 јајца, значи на Мила му требаат 8 јајца. Но, $8=6+2$, што значи дека таа треба да купи 2 кутии.

7. На изборот за MISS CAT 2013 се пријавиле 66 мачки. Во првиот круг на изборот отпаднале 21 мачка бидејќи не фатиле глувче. Од оние што останале 27 имале шари, а 32 имале едно црно око. Сите мачки со шари и едно црно око се пласирале во финале. Кој е минималниот број на мачки кои се пласирале во финалето?

A) 5 B) 7 C) 13 D) 14 E) 17

Решение. D). По првиот круг останале $66-21=45$ мачки. Ако ги собереме мачките со шари и мачките со едно црно око, добиваме $27+32=59$. Разликата $59-45=14$ е бројот на мачките кои се шарени и со едно црно око.

8. Во една градинка има 14 девојчиња и 12 момчиња. Ако половината од децата отишле на прошетка, колку најмалку од нив се девојчиња?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Решение. E). Во радинката вкупно има $14+12=26$ деца. На прошетка отишле $26:2=13$ деца. Најмалку девојчиња се на прошетка ако на прошетка отишле сите момчиња, т.е. 12 момчиња. Значи, на прошетка е најмалку едно девојче.

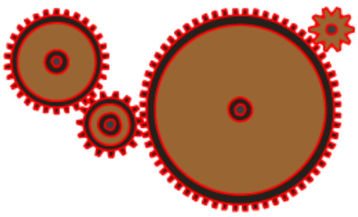
9. Во едно училиште за танцување има 10 ученици. Нивната учителка-ментор има 80 гумени бомбони. Таа на девојчињата им поделила по

еднаков број на бомбони и ѝ останале три бомбони. Колку момчиња има во училиштето?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Решение. **C).** Учителката поделила $80-3=77$ бомбони. Бидејќи $77=7\cdot 11$ имало 11 девојчиња кои добиле по 7 бомбони, или имало 7 девојчиња кои добиле 11 бомбони. Бидејќи вкупно биле 10 ученици, во групата биле 7 девојчиња и 3 момчиња.

10. Дадени се четири запчаници поставени еден до друг (види цртеж). Првиот има 30 запци, вториот има 15 запци, третиот има 60 запци, а последниот има 10 запци. Кога првиот запчаник ќе направи еден круг, колку кругови ќе направи четвртиот запчаник?



A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. **A).** Кога првиот запчаник ќе направи еден круг, се завртиле 30 запци. Тоа значи, дека кај секој запчаник, па и кај четвртиот ќе се завртат 30 запци. Сега, бидејќи четвртиот запчаник има 10 запци, тој ќе направи $30:10=3$ круга.

11. Четири кошници содржат 1, 4, 6 и 9 јаболка соодветно. Колку јаболка треба да се префрлат од една во друга кошница, за да во секоја кошница има еднаков број на јаболка?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Во сите 4 кошници има вкупно $1+4+6+9=20$ јаболка. Значи, во секоја кошница треба да има по $20:4=5$ јаболка. Сега, ако од четвртата во првата префрлиме 4 јаболка, а од третата во втората кошница префрлиме 1 јаболко, тогаш во секоја кошница ќе има по 5 јаболка.

12. Во еден летен камп, 7 ученици јадат сладолед секој ден, 9 ученици јадат сладолед секој втор ден, а остантите ученици не јадат сладолед. Вчера 13 ученици јаделе сладолед. Колку ученици денеска ќе јадат сладолед?

A) 7 B) 8 C) 7 D) 10

E) не може да се определи

Решение. **D).** Прв начин. Бидејќи 7 деца секој ден јадат сладочед, ако вчера 13 деца јаделе сладолед, добиваме дека $13-7=6$ деца кои вчера јаделе сладолед се од групата кои јадат сладолед секој втор ден. Тоа значи, дека денес $9-6=3$ деца се од оние кои сладолед јадат секој втор ден. Конечно, $7+3=10$ деца јаделе сладолед.

Втор начин. Нека земеме дека секое дете јаде по еден сладолед. Тогаш секои два последователни дена бројот на изедените сладоледи е $2\cdot 7+9=23$. Бидејќи вчера се изедени 13 сладоледи, денес се изедени $23-13=10$ следоледи. Значи, денес сладолед јаделе 10 деца.

13. Една скала има 12 скалила. Никола и Марко ги бројат скалилата, Никола оддолу, а Марко одгоре. Броејќи тие се сретнале на слалилото кое е 10-то за Никола. Колку скалила избројал Марко?

A) 13 B) 14 C) 11 D) 12 E) 10

Решение. **D).** По 10-тото скалило кое го избројал Никола останале $21-10=11$ скалила. Марко ги избројал овие скалила и скалилото на кое се сретнале. Значи, Марко избројал $11+1=12$ скалила.

14. Пред борбата со снежни топки, Павел направил неколку топки. Во текот на борната тој направил уште 17 топки и фрлил 21 топка. По борната му останале 15 топки. Колку топки направил Павел пред борбата?

A) 53 B) 33 C) 23 D) 19 E) 18

Решение. D). Павел искористил 21 топка и му преостанале 15 топки. Значи, тој вкупно направил $21+15=36$ топки. Бидејќи во текот на борбата тој направил 17 топки, добиваме дека пред борбата направил $36-17=19$ топки.

15. Во ред една до друга се наредени 60 исти плочки. Андреј ја отстранува секоја шеста плочка, по него Пабло од преостанатите плочки ја отстранува секоја петта плочка, а по него Филип минува од преостанатите плочки ја отстранува секоја четврта плочка. На крајот Матео ги собрал преостантите плочки. Колку плочки собрал Матео?

A) 0 B) 10 C) 30 D) 40 E) 50

Решение. C). Андреј отстранил $60:6=10$ плочки, по што останале $60-10=50$ плочки. Пабло отстранил $50:5=10$ плочки, по што останале $50-10=40$ плочки. Филип остранил $40:4=10$ плочки, по што останале $40-10=30$ плочки, кои ги собрал Матео.

16. Стефан и Марко учествуваат на натпреварот „Кенгур“. За исто време Стефан решава 2 задачи, а Марко решава 3 задачи. Двајцата заедно решиле 30 задачи. Колку повеќе задачи решил Марко од Стефан?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. B). За исто време двајцата заедно решавале група од по $2+3=5$ задачи. Значи, тие решиле $30:5=6$ групи од по 5 задачи. Во секоја група Марко решава $3-2=1$ задача повеќе од Стефан. Конечно, Марко решил $6\cdot1=6$ задачи повеќе од Стефан.

17. Во зградата на Марионка има 7 стана во кои живеат вкупно 25 луѓе. Во секој стан живеат тројца или четворица. Во колку станови живеат точно тројца?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Ако во сите станови живеат по тројца, тогаш во зградата ќе има $7 \cdot 3 = 21$ човек. Но, во зградата има 25 луѓе, што е $25 - 21 = 4$ повеќе. Овие четворица живеат во становите во кои 4 луѓе, и тоа во секој стан по еден од нив. Значи, во зградата 4 стана во кои живеат по четворица и 3 стана во кои живеат по тројца.

18. Во еден ресторан има 16 маси, а секоја маса има 3, 4 или 6 столици. На масите на кои има 3 и 4 столици седат точно 36 гости. Во ресторанот може да седнат вкупно 72 гости. Колку има маси со по 3 столици?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. A). На масите со по 6 столици има $72 - 36 = 36$ столици. Според тоа, бројот на овие маси е $36 : 6 = 6$. Значи, во ресторанот има $16 - 6 = 10$ маси со по 3 и 4 столици. Ако сите маси се со по 4столици, тогаш на нив може да седнат $10 \cdot 4 = 40$ гости. Тоа се $40 - 36 = 4$ гости повеќе отколку што вкупно може да седнат на масите со по 3 и 4 столоци. Последното значи дека имаме 4 маси со по 3 столици.

Забелешка. Задачата може да се реши и со помош на систем равенки. Обиди се тоа самостојно да го направиш.

19. Пабло успеал да ги подели сите џамлии на групи од по три џамлии (тројки), а потоа видел дека може да ги подели и на групи од по две џамлии (парови). Ако тројките се 7 помалку од двојките, колку џамлии има Пабло?

A) 30 B) 36 C) 42 D) 48 E) 54

Решение. C). Од две тројки Пабло составува 3 пара, т.е. еден пар повеќе. Пабло има 7 парови повеќе, па затоа тој има $7 \cdot 2 = 14$ тројки. Значи, Пабло има $3 \cdot 14 = 42$ џамлии.

20. Магде ги редела своите музички дискови во една голема кутија, но и останале една третина од дисковите. Таа преостанатите дискови ги наредила во три помали кутии, и тоа по седум во секоја кутија, по што и останале уште два диска. Колку музички дискови има Магде?

A) 63 B) 61 C) 60 D) 69 E) 64

Решение. **D).** Магде во помалите кутии наредила $3\cdot 7=21$ дискови. Тоа значи дека $\frac{1}{3}$ од дисковите на Магде е еднаква на $21+2=23$ дискови. Значи, Магде имала $3\cdot 23=69$ дискови.

21. Мувата има 6 нозе, а пајакот има 8 нозе. Заедно, 3 муви и 2 пајаци имаат нозе колку што заедно имаат нозе 9 кокошки и неколку мачки. Колкав е бројот на мачките? .

A) 2 мачки B) 3 мачки C) 4 мачки D) 5 мачки E) 6 мачки

Решение. **C).** Три муви и два пајаци заедно имаат $3\cdot 6+2\cdot 8=34$ нозе. Девет кокошки имаат $9\cdot 2=18$ нозе. Значи, мачките имаат $34-18=16$ нозе, па како секоја мачка има по 4 нозе, бројот на мачките е $16:4=4$.

22. Мувата има 6 нозе, а пајакот има 8 нозе. Заедно, 2 муви и 3 пајаци имаат нозе колку што заедно имаат нозе 10 кокошки и неколку мачки. Колкав е бројот на мачките? .

A) 2 мачки B) 3 мачки C) 4 мачки D) 5 мачки E) 6 мачки

Решение. **C).** Две муви и три пајаци заедно имаат $2\cdot 6+3\cdot 8=36$ нозе. Десет кокошки имаат $10\cdot 2=20$ нозе. Значи, мачките имаат $36-20=16$ нозе, па како секоја мачка има по 4 нозе, бројот на мачките е $16:4=4$.

23. Од 10 пајки, 5 од нив снесуваат по едно јајце секој ден, а останатите 5 пајки снесуваат по едно јајце на секои два дена. Колку јајца ќе снесат десетте пајки во период од 10 дена?

A) 75 B) 60 C) 50 D) 25 E) 10

Решение. **A).** Пајките кои несат јајца секој ден за 10 дена снесле $5 \cdot 10 = 50$ јајца. Паткитe кои несат јајце секој втор дена за 10 дена снесле $(10:2) \cdot 5 = 25$ јајца. Значи, сите десет пајки вкупно снесле $50 + 25 = 75$ јајца.

24. Секое растение во градината на Павел има или 5 листа или 2 листа и еден цвет. Вкупно, во градината има 6 цвета и 32 листа. Колку растенија има во градината на Павел?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

Решение. **A).** Имаме 6 цвета, па затоа има 6 растенија кои заедно имаат $6 \cdot 2 = 12$ листови. Останатите $32 - 12 = 20$ листови се на растенијата кои имаат по 5 листови, па затоа такви растенија има $20:5 = 4$. Значи, во градината на Павел има $6 + 4 = 10$ растенија.

25. Ефтимија купила 3 играчки. За првата играчка таа дала половина од своите пари и уште 1 евро. За втората играчка платила половина од преостанатите пари и уште 2 евра. За третата играчка ги дала половина од преостанатите пари и уште 3 евра и со тоа ги потрошила сите пари. Колку пари имала Ефтимија на почетокот?

A) 36 евра B) 45 евра C) 34 евра D) 65 евра E) 100 евра

Решение. **C).** Последните 3 евра се половина од парите кои Ефтимија ги имала пред да ја купи третата играчка. Значи, пред да ја купи третата играчка таа имала $3 + 3 = 6$ евра. Понатаму, $6 + 2 = 8$ евра се половина од парите пред Ефтимија да ја купи втората играчка, што значи дека пред купувањето на втората играчка Ефтимија имала $8+8=16$ евра. Сега, $16+1=17$ евра се полвина од парите кои Ефтимија ги имала на почетокот, т.е. таа имала $17+17=34$ евра.

26. Во една продавница два шешира се продаваат по иста цена како пет сукњи, три сукњи се продаваат по иста цена како осум маици, а две маици се продаваат по иста цена како три капи. Која од наведените колекции е најскапа?

A) шешир и пет сукњи B) шешир, три сукњи и капа

C) осум сукњи и шест маици D) триедет и седум капи

E) три сукњи и три капи

Решение. C). Имаме:

- 2 маици чинат колку 3 капи,
- 3 сукњи чинат колку 8 маици, односно колку $4\cdot3=12$ капи, што значи дека 1 сукња чини колку 4 капи,
- 2 шешири чинат колку 5 сукњи, односно колку $5\cdot4=20$ капи, што значи дека 1 шешир чини колку 10 капи.

Сега, секоја колекција ќе ја изразиме со бројот на капите:

A) $1\cdot10+5\cdot4=30$ капи B) $1\cdot10+3\cdot4+1=23$ капи

C) $8\cdot4+3\cdot3=41$ капа D) 37 капи

E) $3\cdot4+3=15$ капи.

Значи највредна е колекцијата C).

27. Киро и Рампо заедно имаат 24 евра, Рампо и Матеј заедно имаат 25 евра, Матеј и Наум заедно имаат 26 евра, Наум и Томе заедно имаат 27 евра, Томе и Киро заедно имаат 28 евра. Колку евра има Томе?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Решение. E). Според условот на задачата во заедничките суми секој од петте луѓе се јавува двапати. Оттука следува дека сите заедно имаат $\frac{24+25+26+27+28}{2}=65$ евра. Понатаму, Киро, Рампо, Матеј и Наум заедно имаат $24+26=50$ евра. Значи, Томе има $65-50=15$ евра.

28. Џамлиите се продаваат во пакетчиња од по 25, 10 и 5 џамлии. Пабло купил точно 95 џамлии. Колку најмалку пакетчиња морал да купи Пабло?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

Решение. B). За да купи најмал број пакетчиња, Пабло треба да купи најголем можен број пакетчиња со 25 џамлии, па потоа најголем можен број пакетчиња со 10 џамлии и на кракот ако е потребно да купи пакетчиња со по 5 џамлии. Бидејќи $95=3\cdot 25+2\cdot 10$ заклучуваме дека најмалиот можен број пакетчиња е 5.

29. Клара сака да ги обои ѕидовите во нејзината соба со зелена боја. Зелената боја што ја има е многу темна, па решила да ја измеша со бела боја. Пробала различни смеси.

Која од следниве смеси ќе даде најтемна зелена боја?

A) 1 дел зелена + 3 дела бела B) 2 дела зелена + 6 дела бела

C) 3 дела зелена + 9 дела бела D) 4 дела зелена + 12 дела бела

E) Сите тие ќе имаат иста нијанса.

Решение. E). Односот на белата и зелената боја во мешавините A), B), C) и D) ќе биде $3:1=3, 6:2=3, 9:3=3$ и $12:4=3$. Бидејќи сите четири односи се еднакви, сите мешавини ќе имаат иста нијанса.

30. Четири играчи постигнале голови на еден ракометен натпревар. Секој од нив постигнал различен број на голови. Меѓу нив Кристијан е тој што постигнал најмалку голови. Останатите три ракометари

постигнале вкупно 20 гола. Кој е најголемиот број на голови што Кристијан може да ги постигне?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). Најголемиот можен број голови кој Кристијан може да ги постигне се добива кога од останатите тројца играчот кој постигнал најмалку голови постигнува најголем можен број голови. Бидејќи сите постигнале различен број голови, а

$$20 = 8+7+5 = 9+6+5 \text{ и } 6+7+8 = 21 > 20,$$

најголемиот број голови што Кристијан може да ги постигне е 4.

31. Во улицата „Скок“ има 9 куќи во еден ред. Во секој куќа живее најмалку по едно лице. Секои две соседни куќи заедно се населени со најмногу шест лица. Кој е најголемиот број на луѓе кои би можеле да живеат во оваа улица?

A) 23 B) 25 C) 27 D) 29 E) 31

Решение. D) За да во улицата живеат најголем број луѓу прво е потребно во секои две соседни куќи да живеат по точно 6 луе. Ако во првата куќа живеат a луѓе, тогаш во втората ќе живеат $6-a$, во третата a итн. Значи, имаме низа

$$a, 6-a, a, 6-a, a, 6-a, a, 6-a, a$$

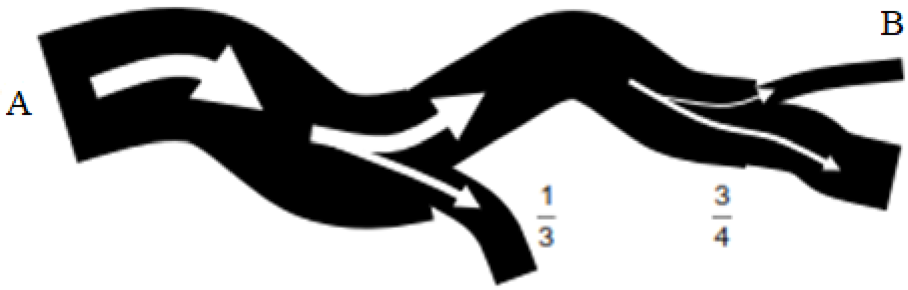
и треба да го определиме бројот a така што збирот на членовите на оваа низа е најголем можен. Збирот на членовите на низата е $A = 24 + a$ и како $1 \le a \le 5$ овој збир е најголем за $a = 5$. Значи, во куќите редоследно живеат 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5 или вкупно 29 луѓе.

32. Во една кутија има 2023 сини и црвени хемиски панкала, од кои $\frac{67}{119}$ се црвени. Колку сини пенкала има во кутијата?

A) 52 B) 364 C) 714 D) 884 E) 1904

Решение. **D).** Во кутијата има $1-\frac{67}{119}=\frac{119-67}{119}=\frac{52}{119}$ сини пенкала. Нивниот број е $\frac{52}{119}\cdot 2023=884$.

33. Река тече во точката А. Понатаму реката се дели на два потока и во едниот тече $\frac{1}{3}$ од водата, а во вториот останатото количество вода (види цртеж). Покасно вториот поток се дели на два нови потока и во едниот тече $\frac{3}{4}$ од водата. Колкав дел од почетното количество вода минува низ точката В?



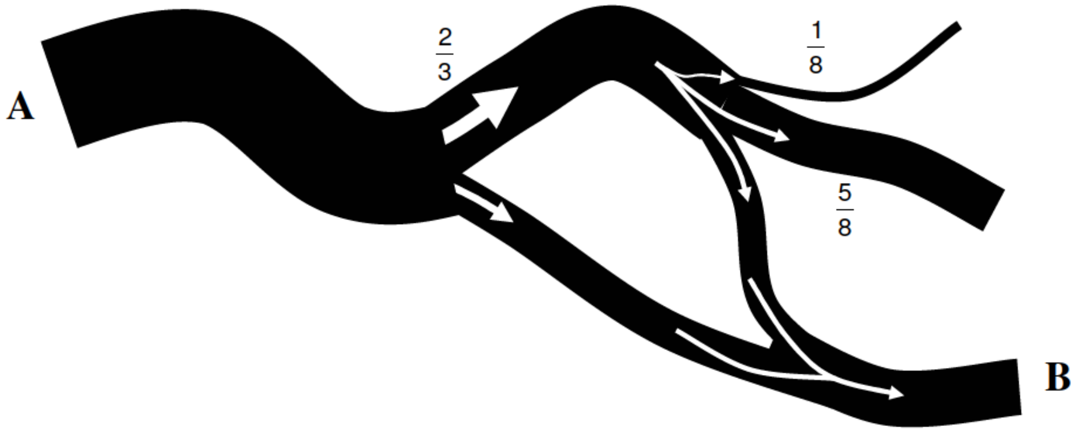
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{11}{12}$ D) $\frac{1}{6}$

E) не може да се определи

Решение. **D).** При првото делење во вториот крак тече $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ од почетното количество вода. При второто делење низ точката В минува $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ од водата која тече во вториот поток. Значи, низ точката В минува $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ од почетното количество вода.

34. Река тече во точката А. Понатаму реката се дели на два потока и во едниот тече $\frac{2}{3}$ од водата, а во вториот останатото количество вода (види цртеж). Покасно првиот поток се дели на три нови потока и во едниот тече $\frac{1}{8}$ од водата, низ вториот тече $\frac{5}{8}$ од водата и низ третиот

преостанатото количество од водата. Последното количество вода се слива во првиот поток, како на цртежот. Колкав дел од почетното количество вода минува низ точката B?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

Решение. D). Низ вториот поток тече $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ од почетното количество вода. Понатаму, низ третиот поток од второто делење минува $\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{1}{8}-\frac{5}{8})=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{6}$ од почетното количество вода. Конечно, низ точката B минува $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ од почетното количество вода.

35. На еден паркинг има 400 места за паркирање, од кои $\frac{2}{5}$ се за камиони. Еден ден $\frac{3}{4}$ од местата биле зафатени. Ако 60% од местата за паркирање камиони се зафатени, колку слободни места има за автомобили?

A) 4 B) 36 C) 40 D) 76 E) 100

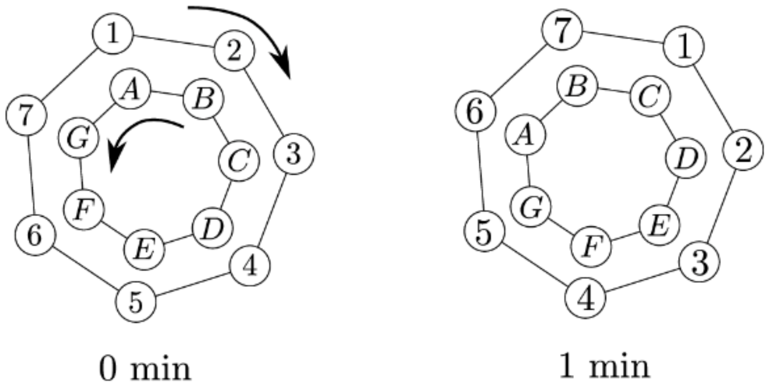
Решение. B). За паркирање камиони вкупно има $\frac{2}{5}\cdot 400=160$ места, па затоа за паркирање автомобили има $400-160=240$ места. Бидејќи 60% од местата за паркирање камиони биле зафатени, на паркингот се паркирани $160\cdot 0,6=96$ камиони. Понатаму, сите зафатени места се $\frac{3}{4}\cdot 400=300$, па затоа на паркингот има $300-96=204$ автомобили. Конечно, на паркингот има $240-204=36$ слободни места за паркирање автомобили.

36. Во едно одделение учат момчиња и девојчиња. За нова година секој ученик од одделението му испратил на секој друг ученик по една честитка. Ако девојчињата вкупно добиле 351 честитка и нивниот број е двоцифрен, колку честитки добиле момчињата?

A) 351 B) 405 C) 225 D) 520 E) 375

Решение. **B).** Нека во одделението има m момчиња и d девојчиња. Бидејќи секој ученик од секој ученик добил по една честитка, секој ученик добил $m+d-1$ честитки. Значи, девојчињата вкупно добиле $(m+d-1)d$ честитки, па затоа $(m+d-1)d=351=3^3\cdot 13$. Сега, бидејќи бројот на девојчињата е двоцифрен број единствена можност е $m+d-1=3^3, d=13$, од каде добиваме $m=15, d=13$. Конечно, момчињата вкупно добиле $(m+d-1)m=27\cdot 15=405$ честитки.

37. Две вртелешки се поврзани и на секоја се означени по седум позиции. Вртелешките се вртат во спротивни правци и на секоја и требаат седум минути за да направи целосно свртување. На крајот од секоја минута секоја буква се наоѓа точно пред еден број. На долните цртежи се прикажани првите две положби на вртелешките од кои гледаме дека на почетокот буквата А е пред бројот 1, буквата В е пред бројот 2 и така по ред. Вртелешките се вртат цел број минути се додека буквата С не дојде пред бројот 2. Пред кој број ќе биде буквата F?



A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. C). *Прв начин*. Наместо двете вртелешки да се вртат, можеме да земеме дека поголемата вртелешка стои, а помалата се врти но не за едно место, туку во една минута за две места спротивно од насоката на движењето на стрелката на часовникот. Да го разгледаме полето C. Почнуваме од бројот 3. По првата минута тоа ќе биде пред бројот 1, по втората пред бројот 6, по третата пред бројот 4 и по четвртата пред бројот 2. Полето F по првата минута ќе биде пред бројот 4, по втората пред бројот 2, по третата пред бројот 7 и по четвртата пред бројот 5.

Втор начин. Како и во првиот начин можеме да земеме дека поголемата вртелешка стои. Нека по извесно време полето C се најде пред бројот 2. Бидејќи заемната положба на полињата при вртењето на втората вртелешка не се менува, како и на почетокот полето F ќе биде три броја во насока на стрелката на часовникот по полето C, а тоа е пред бројот 5.

38. Во градината на вештерката Жана има 30 животни: кучиња, мачиња и глувчиња. Вештерката претворила 6 кучиња во мачиња, а потоа претворила 5 мачиња во глувчиња. Сега во нејзината градина има еднаков број на кучиња, мачиња и глувчиња. Колку мачиња имало во градината на почетокот?

A) 4 B) 5 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. **C).** *Прв начин.* Ако со x, y, z го означиме бројот на кучињата, мачињата и глувчињата во градината на Жана соодветно, тогаш според условите на задачата добиваме дека во моментот кога се изедначил нивниот број, во градината имало вкупно $x-6$ кучиња, $y+6-5=y+1$ мачиња и $z+5$ глувчиња. Значи, имаме

$$x-6=y+1,\ y+1=z+5 \Rightarrow x=y+7,\ z=y-4.$$

Бидејќи во градината имало 30 животни, добиваме:

$$x+y+z=30 \Rightarrow y+7+y+y-4=30 \Rightarrow 3y=27 \Rightarrow y=9.$$

Значи, на почетокот имало 9 мачиња.

Втор начин. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Промените се дадени во табелата.

	Кучиња	Мачиња	Глувчиња
Втора пормена	10	10	10
Прва примена	10	15	5
На почеток	16	9	5

39. Жабата Буфа во еден ден јаде 5 пајаци. Кога Буфа е многу гладна, таа во еден ден јаде 10 пајаци. За 9 дена Буфа изела 60 пајаци.

Колку дена Буфа била многу гладна?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

Решение. **C).** Ако со x го означиме бројот на денови во кои Буфо јаде по 5 пајаци, тогаш $9-x$ е бројот на денови во кои Буфо е многу гладна и јаде по 10 пајаци, па од условите на задачата добиваме

$$\begin{aligned} &5x+10(9-x)=60,\\ &5x+90-10x=60,\\ &5x=30,\\ &x=6. \end{aligned}$$

Значи дека жабата 6 дена јадела по 5 пајаци, а 3 дена била многу гладна и јадела по 10 пајаци.

40. Маријана и Марко од нивната баба добиле јаболки и круши. Тие имале 25 парчиња овошје заедно. На пат кон дома Маријана изела една јаболка и три круши, а Марко изел три јаболка и две круши. Кога стасале дома, тие виделе дека донеле еднаков број на јаболка и круши. Колку круши тие добиле од својата баба?

A) 12 B) 13 C) 16 D) 20 E) 21

Решение. B). *Прв начин*. Нека x е бројот на круши, а y е бројот на јаболка кои тие ги добиле од својата баба. Тогаш $x+y=25$, а од друга страна, според условот од задачата $x-5=y-4$, односно $x=y+1$. Според тоа, $y+y+1=25$, $2y=24$, $y=12$.

Тие од својата баба добиле 12 јаболка и 13 круши.

Втор начин. Маријана изела $1+3=4$ парчиња овошје, а Марко изел $3+2=5$ парчиња овошје, по што им останале $25-(4+5)=16$ парчиња овошје. Бидејќи имало еднаков број јаболки и круши, добиваме дека имале по $16:2=8$ парчиња од секој вид. По пат изеле $3+2=5$ круши. Значи, од бабата добиле $8+5=13$ круши и $25-13=12$ јаболка.

41. Милена има 10 листови хартија. Неколку листови таа поделила на по пет делови. Потоа Милена имала вкупно 22 парчиња хартија. Колку листа таа поделила?

A) 3 B) 2 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. A). *Прв начин*. По сечењето бројот на парчињата хартија се зголемил за $22-10=12$. При секоја поделба на еден лист бројот на парчињата се зголемува за $5-1=4$.

Значи, Милена поделила $12:4=3$ листови.

Втор начин. Ако со x го означиме бројот на исечени листови, тогаш од условите имаме: $5x+10-x=22$, па затоа $4x=12$, односно $x=3$.

42. На еден шаховски турнир, Марко треба да игра 15 партии шах. Во одреден момент од турнирот, победил во половина од партиите шах, изгубил една третина, а две биле нерешени. Уште колку натпревари Марко има за играње на турнирот?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. B). Ако бројот на одиграни партии шах го означиме со x, тогаш му остануваат за играње уште $15-x$ партии шах. Од условот на задачата имаме:

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+2+15-x=15 \Rightarrow x=12$$

значи му останале $15-12=3$ партии шах за играње.

43. Бојан ловел риби. Ако уловел трипати повеќе риби, тој ќе имал 12 риби повеќе отколку што уловил. Колку риби уловил Бојан?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Решение. B). Со x да го означиме бројот на рибите кои ги уловил Бојан. Од условот следува дека $3x=x+12$, од каде добиваме $2x=12$, т.е. $x=6$.

44. Ласко започнал со работа во свој мал ресторан. Неговиот пријател Ѓорѓи му дал неколку квадратни маси и неколку столици. Ако Ласко ги искористи сите маси поединечно така што околу секоја маса ќе стави по 4 столици, ќе му требаат уште 6 столици. Ако тој ги искористи сите маси така што ќе ги поврзе по две и околу секои две маси

ќе стави по 6 столици, ќе му преостанат 4 столици. Колку маси Ласко добил од Ѓорѓи?

А) 8 В) 10 С) 12 D) 14 Е) 16

Решение. **В).** Со a да го означиме бројот на масите. Од условот на задачата следува: кога Ласко околу секоја маса поставува по 4 столици тој поставува $4a-6$ столици, а кога поврзува по две маси и околу секоја маса поставува по 6 столици тој поставува $6\cdot\frac{a}{2}+4$ столици. Значи, $4a-6=6\cdot\frac{a}{2}+4$, од каде добиваме $4a-6=3a+4$, односно $a=10$.

45. Во едно одделение има 30 ученици. Тие седат во парови така што секое момче седи со девојче и точно половина од девојчињата седат со момчиња. Колку момчиња има во училницата?

А) 25 В) 20 С) 15 D) 10 Е) 5

Решение. **D).** Ако со x го означиме бројот на момчињата, тогаш бројот на девојчињата е $2x$. Значи, $x+2x=30$, од каде добиваме $x=10$. Според тоа, во одделението има 10 момчиња.

46. Во три кутии со различна големина има вкупно 48 книги. Колку книги има во големата кутија, ако големата и малата кутија заедно содржат двапати повеќе книги од средната кутија, а бројот на книгите во малата кутија е половина од бројот на книгте во средната кутија?

А) 24 В) 20 С) 16 D) 12 Е) 8

Решение. **А).** Нека бројот на книгите во средната кутија е a. Тогаш во малата и големата курија има $2a$ книги. Значи, $a+2a=48$, од каде добиваме $a=16$. Според тоа, во малата кутија има $16:2=8$ книги, па затоа бројот на книгите во големата кутија е еднаков на $48-8-6=24$.

47. Во една соба има кучиња и мачиња. Бројот на шепите на мачињата е двапати поголем од бројот на носевите на кучињата. Бројот на мачињата е:

A) двапати поголем од бројот на кучињата

B) еднаков на бројот на кучињата

C) половина од бројот на кучињата

D) четвртина од бројот на кучињата

E) четири пати поголем од бројот на кучињата

Решение. **C).** Нека x е бројот на мачињата. Тие имаа $4x$ шепи и овој број е двапати поголем од бројот на носевите на кучињата. Значи, кучињата имаат $4x:2=2x$ носеви. Според тоа, во собата има $2x$ кучиња. Сега, од $2x:x=2$ заклучуваме дека има двапати повеќе кучиња од мачиња, т.е. бројот на мачињата е половина од бројот на кучињата.

48. Пет ученици учествувале во избор за претседател на класот и секој од нив добил различен број на гласови. Петте кандидати добиле вкупно 36 гласа, а првопласираниот добил 12 гласа. Кандидатот кој бил последен добил 4 гласа. Колку гласа добил кандидатот кој го освоил второто место?

A) 8 B) 8 или 9 C) 9 D) 9 или 10 E) 10

Решение. **B).** Нека бројот на гласови на третопласираниот кандидат е x, а бројот на гласови на четвртопласираниот кандидат е y. Од условот на задачата имаме $y\geq 5$ и $x\geq 6$.

Првопласираниот и последнопласираниот кандидат заедно добиле 16 гласа. Преостанатите кандидати добиле вкупно 20 гласа. Второпласираниот кандидат најмногу добил 11 гласа. Ќе разгледаме неколку можности.

а) Второпласираниот кандидат добил 11 гласа. Третопласираниот и четвртопласираниот кандидат заедно добиле 9 гласа. Но, тогаш $9 = x + y \geq 5 + 6 = 11$, што не е можно.

б) Второпласираниот кандидат добил 10 гласа. Третопласираниот и четвртопласираниот кандидат заедно добиле 10 гласа. Но, тогаш $10 = x + y \geq 5 + 6 = 11$, што повторно не е можно.

в) Второпласираниот кандидат добил 9 гласа. Третопласираниот и четвртопласираниот кандидат заедно добиле 11 гласа. Тоа е можно за $x = 6$ и $y = 5$.

г) Второпласираниот кандидат добил 8 гласа. Третопласираниот и четвртопласираниот кандидат заено добиле 12 гласа. Тоа е можно за $x = 7$ и $y = 5$.

49. Ѕвонко има две машини: едната разменува 1 бел жетон за 4 црвени жетони, додека другата разменува 1 црвен жетон за 3 бели жетони. Ѕвонко има 4 бели жетони. По точно 11 размени, тој има 31 жетон. Колку од нив се црвени?

A) 21 B) 17 C) 14 D) 27 E) 11

Решение. C). Нека во 11 промени на жетоните имаме n промени од бел во црвени жетони. Тогаш бројот на белите жетони се намалил за n, а бројот на црвените се зголемил за $4n$, па затоа имаме $3n$ жетони повеќе. Понатаму, имаме $11-n$ промени од црвен во бели жетони, при што бројот на црвените жетони се намалил за $11-n$, а бројот на белите жетони се зголемил за $3(11-n)$, па затоа имаме $2(11-n)$ жетони повеќе. На почетокот имаме 4 жетони, а на крајот 31 жетон, што значи дека $4+3n+2(11-n)=31$, од каде добиваме $n=5$.

Според тоа, во тие 11 промени имаме 5 промени на бели жетони во црвени, па бројот на црвените жетони се зголемил за 20. Но имаме 6 промени на црвени жетони, што значи дека бројот на црвените жетони се намалил за 6. Конечно, имаме $20-6=14$ црвени жетони.

50. Ема со нејзините 8 братучетки правела селфи фотографии. Секоја од осумте братучетки ја има на две или три фотографии, но сите не се јавуваат еднаков број пати на фотографиите. На секоја фотографија има точно по 5 братучетки. Колку селфи фотографии направила Ема?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** *Прв начин.* Ако со x, y ги означиме бројот на братучетки на Ема кои ги има на 2, односно на 3 фотографии, соодветно, тогаш можни се следниве случаи:

x	y	$2x$	$3y$	вкупно фотографии
0	8	0	24	24
1	7	2	21	23
2	6	4	18	22
3	5	6	15	21
4	4	8	12	**20**
5	3	10	9	19
6	2	12	6	18
7	1	14	3	17
8	0	16	0	16

Од добиените случаи, единствен број делив со 5 е бројот 20, па следува дека тие направиле 4 селфи фотографии.

Втор начин. Со x да го означиме бројот на фотографиите кои ги направила Ема. Тогаш на нив има вкупно $5x$ лица. Од друга страна, ако y е бројот на братучетките кои се на две фотографии, тогаш

$8-y$ е бројот на братучетките кои се на три фотографии. Затоа $2y+3(8-y)=5x$, од каде добиваме $5x+y=24$. Сега бидејќи x и y се природни броеви мора да важи $1\le x<5$ и јасно $y<8$.

За $x=1$ добиваме $y=19>8$, za $x=2$ добиваме $y=14>8$, za $x=3$ добиваме $y=9>8$ и за $x=4$ добиваме $y=4<8$. Значи Ема направила $x=4$ фотографии.

51. Во ресторанот „Вини”, во маринадата составена од оцет-вино-вода (специјален раствор) односот на оцетот и виното е 1 према 2. Односот пак на виното и водата е 3 спрема 1. Што е точно?

A) повеќе има оцет од вино

B) повеќе има вино од оцет и вода заедно

C) повеќе има оцет од вино и вода заедно

D) повеќе има вода од оцет и вино заедно

E) оцетот е содржан најмалку

Решение. **B).** Од условот на задачата имаме $y=2x$ и $y=3z$, каде x е количеството на оцет, y е количеството на вино, а z е количеството на вода. Но тогаш $z=\frac{y}{3}$ и

$$x+z=x+\frac{y}{3}=x+\frac{2x}{3}=x(1+\frac{2}{3})=\frac{5}{3}x<2x=y.$$

Значи, вино има повеќе од вода и оцет заедно.

52. Воз се состои од локомотива и вагони. Секој вагон има еднаков број кабини. Павел патува во третиот вагон во 18-тата кабина броејќи од локомотивата. Матеа патува во седмиот вагон во 50-тата кабина, повторно броејќи од локомотивата. По колку кабини има во секој вагон?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Решение. **В).** *Прв начин.* Ако x е бројот на кабините во еден вагон, тогаш $50=6x+z$, каде е редниот број на кабината во седмиот вагон во кој е Матеа. Јасно, z е помал или еднаков на x. Од добиената равенка следува $6x<50=6x+z\leq 7x$, од каде добиваме $x<\frac{50}{6}<9$ и $7<\frac{50}{7}\leq x$. Значи, $7<x<9$, од каде следува $x=8$. Според тоа, еден вагон има 8 кабиини, па како $18=2\cdot 8+2$ и $50=6\cdot 8+2$, добиваме дека Павел е во втората кабина на третиот вагон, а Матеа е во втората кабина на седмиот вагон.

Втор начин. Ако x е бројот на кабините во еден вагон, тогаш $18=2x+y$ и $50=6x+z$, каде y е редниот број на кабината во третиот вагон во која е Павел, а z е редниот број на кабината во седмиот вагон во кој е Матеа. Јасно, y и z се помали или еднакви на x. Од првата равенка следува $2x<18=2x+y\leq 3x$, од каде добиваме $x<9$ и $6\leq x$. Значи, $6\leq x<9$.

За $x=6$, добиваме $y=6, z=14>6=x$, што противречи на тоа дека z е помал или еднаков на x.

За $x=7$, добиваме $y=4, z=8>7=x$, што противречи на тоа дека z е помал или еднаков на x.

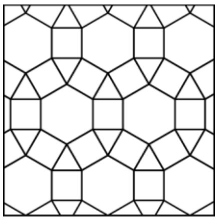
За $x=8$, добиваме $y=2, z=2$.

Значи, една вагон има 8 кабиини, Павел е во втората кабина на третиот вагон, а Матеа е во втората кабина на седмиот вагон.

Забелешка. Како што можеме да видиме во првиот начин, при решавањето на задачата воопшто не го искористивме условот дека Павел патува во третиот вагон во 18-тата кабина броејќи од локомотивата. Тоа значи, дека овој услов може да се изостави и задачата ќе остане добро дефинирана.

III ГЕОМЕТРИЈА

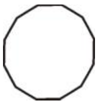
1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ



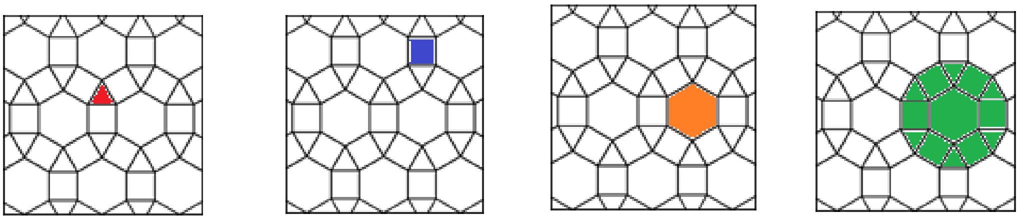
1. Која од следниве геометриски фигури ја нема на цртежот?

A) триаголник  B) квадрат 

C) правилен шестоаголник 

D) правилен осумаголник  E) правилен дванаесетаголник 

Решение. **D).** На цртежот се: триаголник, квадрат, правилен шестаголник и правилен дванаесетаголник.

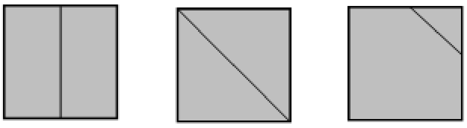


2. Лист хартија во облик на квадрат е поделен на два дела со повлекување на една линија. Која од следниве фигури не може да се добие со таквата поделба:

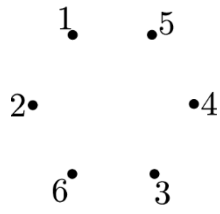
A) квадрат B) правоаголник C) правоаголен триаголник

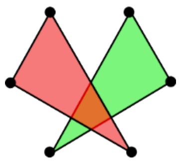
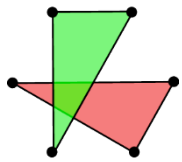
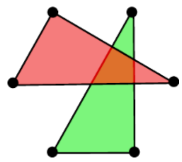
D) петаголник E) рамнокрак триаголник

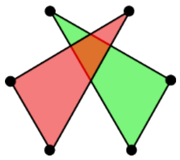
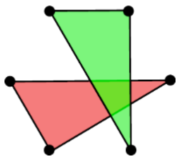
Решение. **A).** На цртежот десно се прикажани трите начини на кои права може да сече квадрат. Според тоа, не е можно да се добие само квадрат.



3. Шест точки се означени како на цртежот десно. Горјан нацртал два триаголника, така што ги поврзал точките означени со парни и точките означени со непарни броеви. Кој од долните цртежи е цртежот на Горјан?

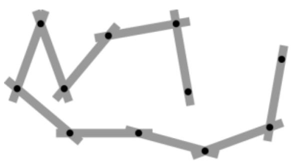


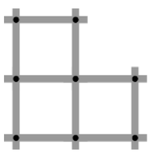
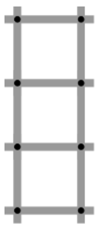
A)  B)  C) 

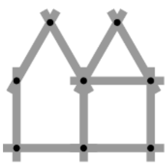
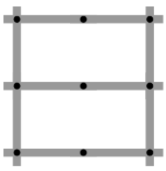
D)  E) 

Решение. **E).** Непарни броеви се 1, 3 и 5, а парни броеви се 2, 4 и 6. Поврзувајќи ги на опишаниот начин го добиваме цртежот E.

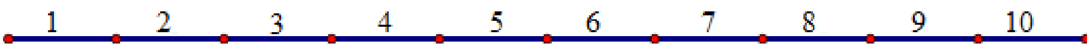
4. Петра игра со метро кое се состои од 10 еднакви поврзани стапчиња (цртеж десно). Која од следниве фигури Петра не може да ја направи со помош на метрото? (Стапчињата не се одделуваат.)



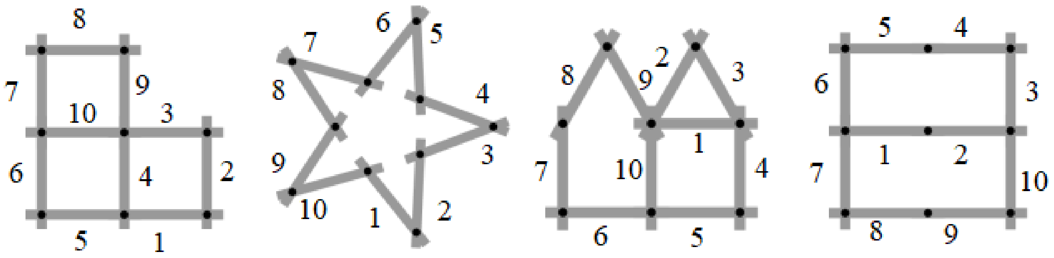
A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. **C).** Ако метрото го израмниме и деловите ги означиме редоследно од 1 до 10, добиваме:



Фигурите A), B), D) и E) можеме да ги составиме на следниве начини:



Фигурата C) не може да се направи на саканиот начин, бидејќи има четири темиња од кои излегуваат по три стапчиња, а при превиткувањето на метрото може да има само две такви темиња. Имено, метрото може да помине низ најмногу две темиња од кои излегуваат непарен број стапчиња, и тоа темињата од каде почнува и каде што завршува метрото.

5. Жица со должина 10 cm е свиткана како на цртежот десно. Потоа, жицата е пресечено на двете означени места, со што се добиени три пократки жици. Колкави се должините на пократките делови?

A) 3 *cm*, 5 *cm*, 2 *cm* B) 2 *cm*, 2 *cm*, 6 *cm* C) 1 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*
D) 1 *cm*, 3 *cm*, 6 *cm* E) 3 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*

Решение. A). Жицата е свиткана на 10 еднакви делови со должина 1 *cm*. Првиот пресечн дел има 3 дела, вториот има 5 дела и третиот има 2 дела. Значи, должините на деловите се 3 *cm*, 5 *cm*, 2 *cm*.

6. Отсечка со должина $28\,cm$ е поделена на три дела. Растојанието меѓу средините на двата крајни дела е $16\,cm$. Колку е долга средната отсечка?

A) $2\,cm$ B) $3\,cm$ C) $4\,cm$ D) $7\,cm$ E) $9\,cm$

Решение. C). Збирот на должните на двете полови на крајните отсечки е еднаков на $28-16=12\,cm$. Според тоа, збирот на должините на двете крајни отсечки е $12+12=24\,cm$.

Должината на средната отсечка е $28-24=4\,cm$.

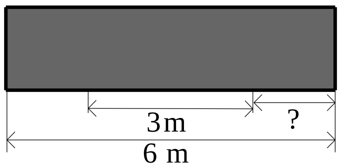
7. На права редоследно се означени точките A,B,C,D,E и F. Притоа $\overline{AF}=35$, $\overline{AC}=12$, $\overline{BD}=11$, $\overline{CE}=12$ и $\overline{DF}=16$. Колку е $\overline{BE}$?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Решение. D). Имаме $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=24$ и затоа $\overline{EF}=\overline{AF}-\overline{AC}=11$. Понатаму, $\overline{AB}=\overline{AF}-\overline{BD}-\overline{DF}=8$. Конечно,

$$\overline{BE}=\overline{AF}-(\overline{AB}+\overline{EF})=16.$$

8. Една табла е долга 6 m. Должината на средниот дел е 3m. Другите два дела се еднакво долги. Колку е долг десниот дел (види цртеж).



A) 1 m B) $1,25\text{ m}$ C) $1,5\text{ m}$ D) $1,75\text{ m}$ E) 2 m

Решение. C). Бидејќи левиот и десниот делбен дел имаат иста должина, добиваме $x+3+x=6$, односно $2x+3=6$, т.е. $x=\frac{3}{2}=1,5\text{ m}$. Значи, должината на десниот и левиот делбен дел е $1,5\text{ m}$.

9. Четири точки лежат на една права. Растојанијата меѓу нив, во растечки редослед се: 2, 3, k, 11, 12, 14. Колку е k?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. E). Нека на правата се распоредени точките A,B,C,D. (види цртеж).

Тогаш $\overline{AD}=14$. Понатаму $\overline{AC}=12$ и $\overline{BD}=11$, или пак $\overline{AC}=11$ и $\overline{BD}=12$. Оттука добиваме

$$2\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} + \overline{BD} - \overline{CD},$$
$$\overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD} - (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}),$$
$$\overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD} - \overline{AD},$$
$$\overline{BC} = 11 + 12 - 14 = 9.$$

Како што можеме да видиме во низата растојанија го нема бројот 9, па оттука заклучуваме дека $k = 9$.

10. На една права во некој редослед се распоредени точките A, B, C, D. Познато е дека $\overline{AB} = 13, \overline{BC} = 11, \overline{CD} = 14, \overline{DA} = 12$. Определи го растојанието меѓу двете најоддалечени една од друга точки.

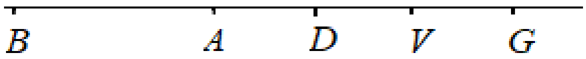
A) 14 B) 38 C) 50 D) 25 E) друг одговор

Решение. D). Да ги разгледаме точките A, B и D. Бидејќи $\overline{AB} > \overline{DA}$ не е можно точката B да е меѓу точките A и D. Нека претпоставиме дека D е меѓу A и B. Тогаш $\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{DA} = 1$. Но, тогаш ниту едно од растојанијата $\overline{BC} = 11, \overline{CD} = 14$ и $\overline{BD} = 1$ не може да се запише како збир на другите две, што противречи на тоа дека точките B, C, D лежат на иста права. Останува точката A да е меѓу точките B и D. Тоа значи дека $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = 25$. Но, тогаш важи равенството $\overline{BD} = 25 = 11 + 14 = \overline{BC} + \overline{CD}$ заклучуваме декод што следува дека C е меѓу B и D. Значи, бараното растојание е 25. Лесно се гледа дека распоредот на точките е D, A, C, B, симетрично B, C, A, D.

11. На една права се дадени точки A, B, V, G, D. Точката A е еднакво оддалечена од точките B и V, точката D е еднакво оддалечена од точките A и V, точката V е еднакво оддалечена од точките D и G. Ако растојанието меѓу точките A и V е $3\,cm$, колкаво е растојанието меѓу G и B?

A) $6\,cm$ B) $6{,}5\,cm$ C) $7\,cm$ D) $7{,}5\,cm$ E) $8\,cm$

Решение. D). Имаме $\overline{AV}=3\,cm$ и како A е средина на отсечката BV добиваме дека $\overline{AB}=3\,cm$. Понатаму, D е средина на AV, па затоа $\overline{AD}=\overline{DV}=1{,}5\,cm$. Но, V е средина на DG, па затоа $\overline{VG}=1{,}5\,cm$.



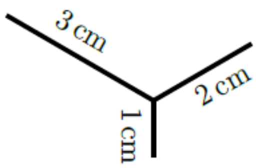
Притоа распоредот на точките на правата е $B-A-D-V-G$, па затоа $\overline{BG}=\overline{BA}+\overline{AV}+\overline{VG}=3+3+1{,}5=7{,}5\,cm$.

12. Точките C,D,E се наоѓаат на отсечката $\overline{AB}=2021\,cm$ така, што $\overline{AE}=\frac{22}{43}\overline{AB}$ и $\overline{AC}=\overline{DB}=1011\,cm$. Како се подредени точките A,B,C,D,E тргнувајќи од точката A?

A) $ACDEB$ B) $AECDB$ C) $ACEDB$ D) $ADECB$ E) $ADCEB$

Решение. E). Имаме $\overline{AE}=\frac{22}{43}\overline{AB}=\frac{22}{43}\cdot 2021=1034\,cm$, $\overline{AC}=1011\,cm$ и $\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{DB}=2021-1011=1010\,cm$. Значи, $\overline{AD}<\overline{AC}<\overline{AE}<\overline{AB}$, па затоа редоследот на точките е $ADCEB$.

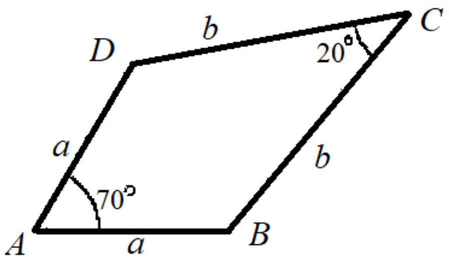
13. Матеа сака да го нацрта цртежот десно без притоа да го крева моливот од хартијата. Кое е најмалото растојание кое треба да го помине со молив за тоа да го направи? Цртањето може да го почне од било која точка и дозволено е преку некои делови да помине повеќе пати.



A) $6\,cm$ B) $7\,cm$ C) $8\,cm$ D) $9\,cm$ E) $10\,cm$

Решение. B). Очигледно преку една од трите отсечки Матеа мора да помине два пати. Најмало растојание ќе помине ако два пати помине по најкратката отсечка и тоа: тргнува од горниот лев агол и поминува по отсечката долга $3\,cm$, па по отсечката долга $1\,cm$ и се враќа назад, за на крај да помине по отсечката долга $2\,cm$. Значи, бараното растојание е $3+1+1+2=7\,cm$.

14. На цртежот десно е даден четириаголникот $ABCD$. Клкав е $\measuredangle ABC$?



A) 110° B) 120° C) 125°

D) 135° E) 140°

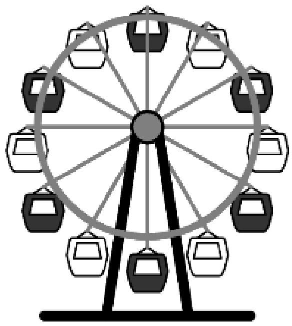
Решение. **D).** Од $\overline{AB}=\overline{AD}$ следува дека ABD е рамнокрак. Слично, триаголникот BCD е рамнокрак. Според тоа,

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ABD+\measuredangle DBC=\measuredangle ADB+\measuredangle CDB=\measuredangle ADC.$$

Значи,

$$\measuredangle ABC=(360^\circ-20^\circ-70^\circ):2=135^\circ.$$

15. Која од дадените дропки го покажува делот на една цела обиколка, за кој треба да се заврти панорамското тркало, така што најгоре ќе има бела кабина?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{5}{6}$

Решение. **D).** Тркалото има 12 кабини, кои се распоредени на еднакви растојанија. Значи, тие кружницата ја делат на 12 делови. Бидејќи најгоре има црна кабина, а лево и десно се бели кабини тркалото треба да направи $\frac{1}{12}$ од целата обиколка, по што најгоре ќе има бела кабина.

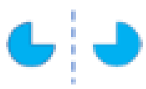
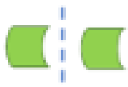
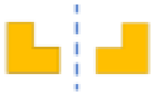
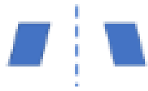
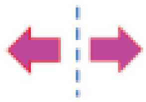
2. ОСНА СИМЕТРИЈА

1. Кој од следниве сообраќајни знаци има најмногу оски на симетрија?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. C). Знаците B и D немаат оски на симетрија. Знаците A и E имаат по една оска на симетрија и тоа хоризонтални и вертикална, соодветно. Знакот C има две оски на симетрија: хоризонтална и вертикална.

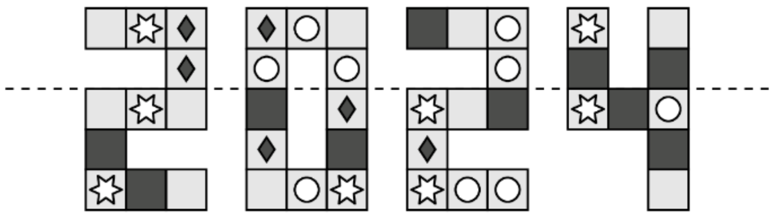
2. На кој од долните цртежи левата фигура не е огледален одраз на десната фигура?

A) B) C) D) E)

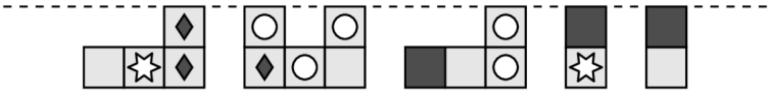
Решение. B). Огледалниот одраз на секој предмет е осносиметричен на оригиналниот предмет со оска на симетрија вертикалната страна на правоаголно огледало (на цртежите тоа се испрекинатите линии). Тоа не е случај со цртежот B).

3. Андреј по испрекинатите линии го превиткал прикажаниот цртеж, кој е нацртан на проѕирна хартија. Кое од малите квадратчиња се пресликало во самото себе?



A)  B)  C)  D)  E) 

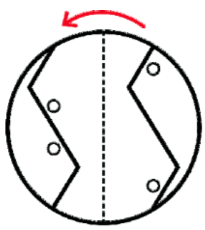
Решение. B). По превиткувањето на цртежот горниот дел изгледал како што е подолу прикажано.

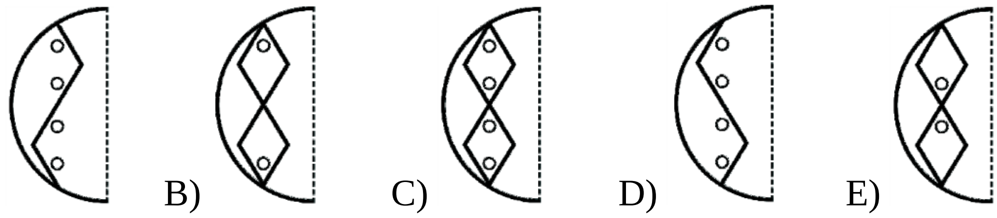


Како што гледаме единствено квадратчето со ромбот во левиот агол на нулата се пресликува во самото себе.

Забелешка. До истиот заклучок доаѓаме и ако земеме предвид дека при превиткувањето ние всушност го пресликуваме гориот дел со осна симетрија каде оската е испрекинатата линија.

4. На проsирен лист хартија е нацртан круг и во него се нацртани две искршени линии и четири кругчиња (цртеж десно). Што ќе се види кога кругот ќе се превитка по испрекината линија?

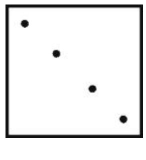


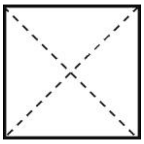
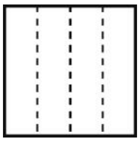
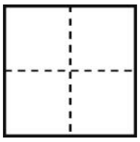
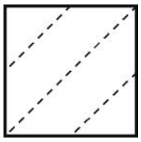
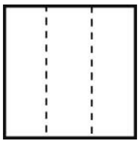


A) B) C) D) E)

Решение. C). При превиткувањето ние всушност ја гледаме левата половина од кругот и симетричната слика на десната половина во однос на испрекинатата линија како оска на симетрија. Бидејќи искршените линии не се симетрични и кругчињата не се симетрични гледаме две искршени линии и четири кругчиња.

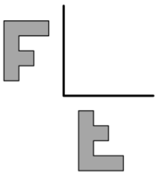
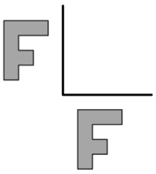
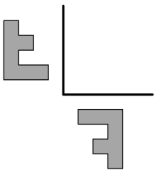
5. Коста превиткал парче хартија и користејќи дупчалка, на свитканото парче хартија, направил една дупка. Потоа хартијата ја одвиткал и таа изгледала како што е прикажано на цртежот десно. Кој од наведените цртежи ги прикажува линиите по кои Коста го свиткал парчето хартија?

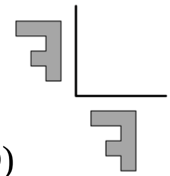
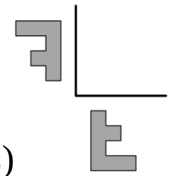


A)  B)  C)  D)  E) 

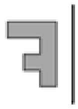
Решение. D). Четирите дупки кои ги добил Коста лежат на едната дијагонала на квадратот и се симетрични во однос на другата негова дијагонала како оска на симетрија. Тоа значи дека при превиткувањето на хартијата делови само на едната дијагонала треба да се преклопуваат. Единствено такво превиткување е прикажано на цртежот D.

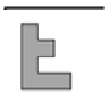
6. Маја црта симетрична фигура на дадената фигура на цртежот десно во однос на двете нацртани линии. Како ќе изгледа добиениот цртеж?

A)  B)  C) 

D)  E) 

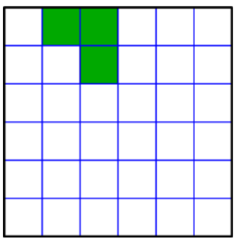
Решение. E). Симетричната фигура во однос на вертикалната линија е прикажана на цртежот десно.



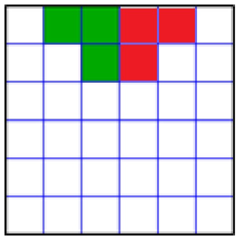


Симетричната фигура во однос на хоризонталната линија е прикажана на цртежот лево. Единствени точни се фигурите на цртежот E).

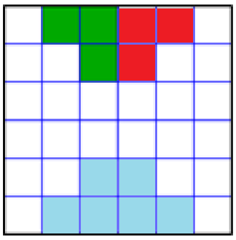
7. Кој е најмалиот број на квадратчиња што треба да се обои на цртежот десно за да се добие фигура со четири оски на симетрија?



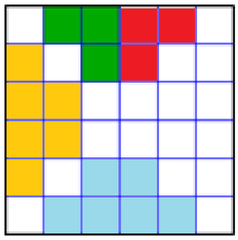
A) 1 B) 9 C) 12 D) 13 E) 21



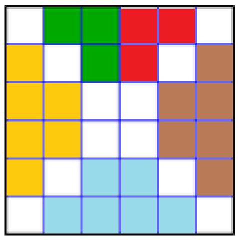
Решение. **Е).** Прво да ја земеме оската на симетрија на квадратот која минува низ средините на горната и долната страна. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати со што добиваме осносиметричен лик го добиваме цртежот десно, на кој имаме 3 нови обоени квадратчиња. .



Сега да ја земеме оската на симетрија која поминува низ средините на вертикалните страни на квадратот. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати со што добиваме осносиметричен лик го добиваме цртежот лево, на кој имаме 6 нови обоени квадратчиња.



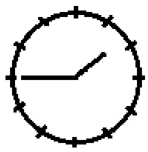
Понатаму, да ја земеме оската на симетрија која минува низ долното лево и горното десно теме на квадратот. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати со што добиваме осносиметричен лик го добиваме цртежот десно, на кој имаме 6 нови обоени квадратчиња.

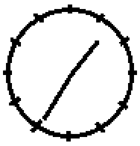
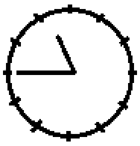
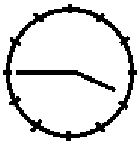
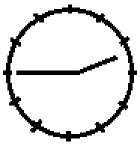
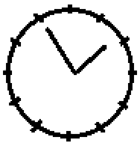


На крајот, да ја земеме оската на симетрија која минува низ гпрното лево и долното десно теме на квадратот. Ако го обоиме најмалиот можен број квадрати со што добиваме осносиметричен лик го добиваме цртежот десно, на кој имаме 6 нови обоени квадратчиња.

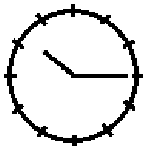
Конечно, најмалку треба да обоиме $3+6+6+6=21$ квадратче.

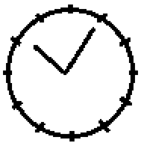
8. Марко требало да оди фудбал. Кога погледнал во огледалото, стрелките на часовникот се наоѓале во положба како на цртежот десно. Што ќе видел Марко, ако погледнал во огледалото десет минути порано?



A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **E).** Кога гледаме во огледалото ние ја гледаме симетричната слика на предметот во однос на вертикалната права. Според тоа, кога погледнал Марко часовникот го покажувал времето прикажано на цртежот десно.





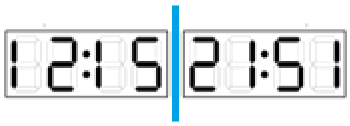
Значи, ако Марко во огледало погледнал 10 минути порано тој ќе погледнел во 10:05 часот, што значи дека стрелките на часовникот биле во положбата прикажана на цртежот лево. Конечно, тој во огледалото ја видел симетричната слика на овој цртеж во однос на вертикалната права, односно ја видел сликата Е.

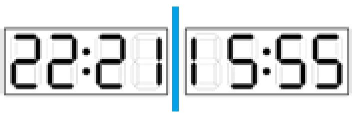
9. Кога ќе погледнам во огледало ја гледам сликата на мојот дигитален часовник кој стои на столицата зад мене (види цртеж). Каква слика ќе видам по 30 минути?

A)  B)  C) 

D)  E) 

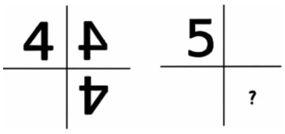
Решение. **D).** При гледањето во огледалото ние ја гледаме сликата која е основиметрична во однос на вертикалната страна на огледалото. Значи, при првото гледање во огледалото оригиналот и сликата се дадени на цртежот десно, што значи дека во тој момент е 21:51. По 30 минути ќе биде 22:21. Сликата на часовникот во огледалот во 22:21 е дадена на





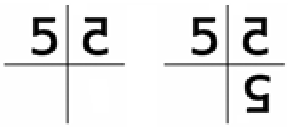
цртежот лево. Значи, во огледалото ќе видам .

10. Бројот 4 е поставен покрај две огледала во кои се гледа како што е прикажано на цртежот десно. Кога бројот 5 ќе го ставиме на истото место, што ќе добиеме на местото на прачалникот?

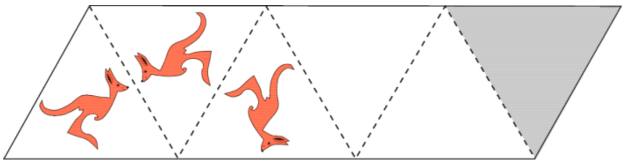


A)  B)  C)  D)  E) 

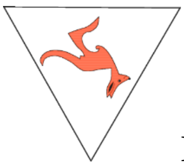
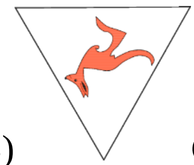
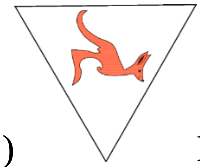
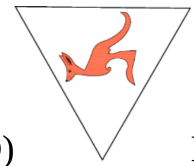
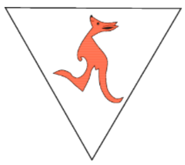
Решение. C). Кога ќе погледнеме во огледало ние гледаме слика која е симетрична на една страна на огледалото. Така, со „вертикалното“ огледало ја добиваме сликата која е прикажана на левиот цртеж, па со „хоризонталното“ огледало ја гледаме сликата која е прикажана на десниот цртеж.



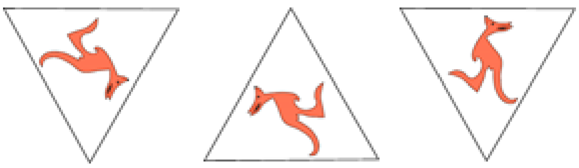
11. На цртежот десно во првиот триаголник е нацртан кенгур.



Испрекинатите линии на цртежот се однесуваат како огледала. Првите две пресликување се прикажани на цртежот. Како изгледа цртежот во сивиот триаголник?

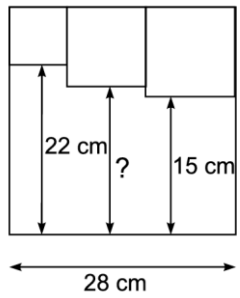
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. E). Ликот кој се добива во огледало е симетричен на оригиналниот лик во однос на долниот дел на огледалото. Затоа гледајќи од лево кон десно во празните триаголници редоследно се добиваат сликите прикажани на долните цртежи.



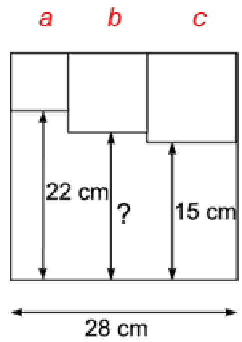
3. ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА

1. Во внатрешноста на еден голем квадрат се нацртани три мали квадрати како на цртежот. Колкава е должината означена со прашалник?



A) 17 *cm* B) 17,5 *cm* C) 18 *cm*
D) 18,5 *cm* E) 19 *cm*

Решение. Ако должините на страните на малите квадрати од лево кон десно ги означиме со a,b,c, а бараната должина означена со прашалник со x, од цртежот имаме:



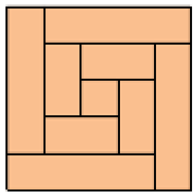
$$22+a=x+b=15+c=a+b+c=28$$

каде што имаме:

$$\begin{cases} b+c=22 \\ a+b=15 \\ a+c=x \end{cases}$$

и затоа $2(a+b+c)=37+x$, од каде добиваме $2\cdot 28=37+x$, односно $x=19\,cm$.

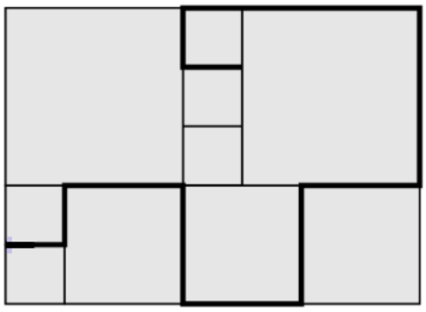
2. Никола има штица која е широка 8 *cm*. Тој штицата ја исекол на 9 делови, од кои едниот е квадрат, а другите се правоаголници. Од деловите на штицата Никола го составил квадратот кој е прикажан на цртежот десно. Колку била долга штицата?



A) 150 *cm* B) 168 *cm* C) 196 *cm* D) 200 *cm* E) 232 *cm*

Решение. D). Должините на страната на квадратот е $a=8\,cm$. Должините на подолгите страни на правоаголниците од кои е составен квадратот се: $b=2a=2\cdot 8=18\,cm$, $c=b+2a=32\,cm$. Според тоа, должината на штицата е $a+4b+4c=200\,cm$.

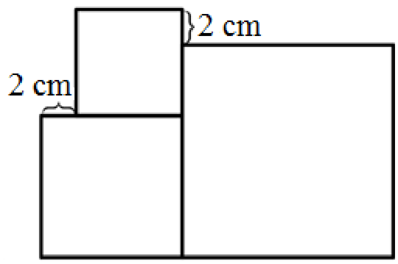
3. Терасата во куќата на Филип има форма на квадрат и е покриена со три вида квадратни плочки од кои најмалата има периметар $80\,cm$ (цртеж десно). Филип на терасата со црна креда ја нацртал задебелената линија. Колку е долга линијата која ја нацртал Филип?



A) $380\,cm$ B) $400\,cm$ C) $420\,cm$ D) $440\,cm$ E) $1680\,cm$

Решение. C). Периметарот на малата плочка е $80\,cm$, па затоа должината на нејзината страна е $80:4=20\,cm$. Сега, должината на страната на средната плочка е $2\cdot 20=40\,cm$, а должината на страната на големата плочка е $3\cdot 20=60\,cm$. Нацртаната линија содржи 5 страни на малата плочка, 5 страни на средната плочка и 2 страни на големата плочка. Нејзината должина е $5\cdot 20+5\cdot 40+2\cdot 60=420\,cm$.

4. На цртежот десно се дадени три квадрати. Должината на страната на најмалиот квадрат е еднаква на $6\,cm$. Колкава е должината на страната на најголемиот квадрат?



A) $8\,cm$ B) $10\,cm$ C) $12\,cm$ D) $14\,cm$ E) $16\,cm$

Решение. C). Должината на страната на средниот квадрат е еднаква на $6+2=8\,cm$. Збирот на должините на средниот и малиот квадрат е $6+8=14\,cm$. Конечни, должината на страната на големиот квадрат е $14-2=12\,cm$.

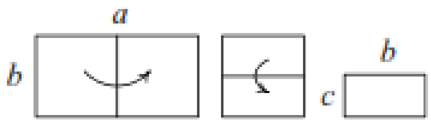
5. Катерина има 38 чкорчиња. Таа со нив сака да направи еден триаголник и еден квадрат, употребувајќи ги сите чкорчиња. Таа направила

триаголник во кој секоја страна има по 6 чкорчиња. Колку чкорчиња ќе има страната на квадратот?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) **8**

Решение. B). Катерина за триаголникот употребила $3 \cdot 6 = 18$ чкорчиња, по што и останале $38 - 18 = 20$ чкорчиња. Значи, страната на квадратот ќе има $20 : 4 = 5$ чкорчиња.

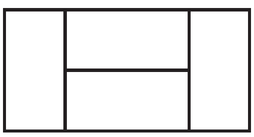
6. Правоаголно парче хартија има должина a и ширина b. Тоа е превиткано на половина двапати како што е прикажано на цртежот десно и е добиен правоаголник со должина b и ширина c. Определи го количникот $\frac{a}{c}$.



A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 4 E) не може да се определи

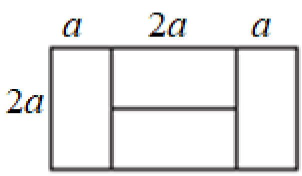
Решение. D). Ширината на добиениот правоаголник е c, па како таа е двапати помала од ширината на почетниот правоаголник, важи $b = 2c$. Должината на добиениот правоаголник е b, па како таа е дваати помала од должината на почетниот правоаголник, важи $a = 2b$. Значи, $a = 2 \cdot 2c = 4c$, од каде добиваме $\frac{a}{c} = 4$.

7. Големиот правоаголник е формиран од 4 еднакви правоаголници (види цртеж). Должината на пократката страна на големиот правоаголник е еднаква на $10\,cm$. Колкава е должината на подолгата страна на големиот правоаголник?



A) $40\,cm$ B) $30\,cm$ C) $20\,cm$ D) $10\,cm$ E) $5\,cm$

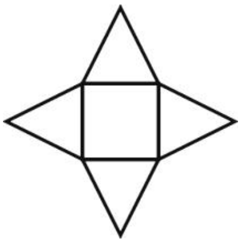
Решение. C). Ако со a ја означиме должината на пократката страна на помалиот правоагол-



ник, тогаш должината на неговата подолга страна е $2a$. Според тоа, должината на подолгата страна на големиот правоаголник е

$$a+2a+a=4a=2\cdot 2a=2\cdot 10=20\,cm.$$

8. Ѕвездата на цртежот десно е составена од квадрат и четири рамнострани триаголници. Периметарот на квадратот е еднаков на $36\,cm$. Колку е периметарот на ѕвездата?

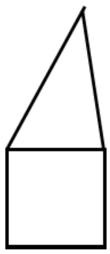


А) $144\,cm$ В) $120\,cm$ С) $104\,cm$ D) $90\,cm$ Е) $72\,cm$

Решение. **Е).** *Прв начин*. Должината на страната на квадратот е еднаква на $36:4=9\,cm$. Според тоа, периметарот на ѕвездата е еднаков на $8\cdot 9=72\,cm$.

Втор начин. Над секоја страна на квадратот имаме две страни на ѕвездата секоја од кои е еднаква на страната на квадратот. Значи, периметарот на ѕвездата е двапати поголем од периметарот на квадратот, т.е. тој е еднаков на $2\cdot 36=72\,cm$.

9. Триаголникот и квадратот на цртежот десно имаат еднакви периметри. Должината на страната квадратот е $4\,cm$. Определи го периметарот на целата фигура.

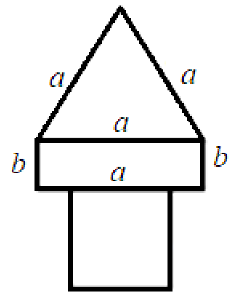


А) $12\,cm$ В) $24\,cm$ С) $28\,cm$ D) $32\,cm$

Е) зависи од должините на страните на триаголникот

Решение. **В).** Периметарот на квадратот, што значи и на триаголникот е $4\cdot 4=16\,cm$. Периметарот на целата фигура се добива кога од збирот на периметрите на квадратот и триаголникот се одземат две должини на страна на квадратот. Значи, периметарот на целата фигура е $2\cdot 16-2\cdot 4=24\,cm$.

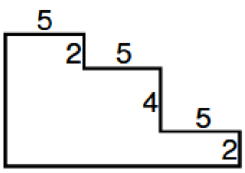
10. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од три дела: квадрат, правоаголник и рамностран триаголник. Трите дела имаа еднакви периметри. Должината на страната на квадратот е $9\,cm$. Колкава е должината на пократката страна на правоаголникот?



A) $4\,cm$ B) $5\,cm$ C) $12\,cm$ D) $6\,cm$ E) $7\,cm$

Решение. D). Периметарот на квадратот е еднаков на $4\cdot 9=36\,cm$. Според тоа, должината на страната на рамностраниот триаголник е $a=36:3=12\,cm$. Но, збирот на должините на двете пократки страни на правоаголникот е еднаков на должината на страната на триаголникот, па затоа $2b=a=12$, односно $b=6\,cm$.

11. Колку е периметарот на фигурата прикажана на цртежот десно?



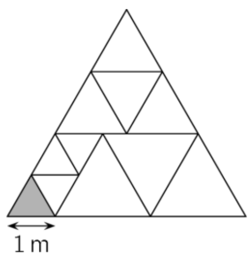
A) $3\cdot 5+4+2$ B) $3\cdot 5+8+2$ C) $6\cdot 5+4\cdot 2$

D) $6\cdot 5+6\cdot 2$ E) $6\cdot 5+8\cdot 2$

Решение. E). Периметарот на дадената фигура е еднаков на

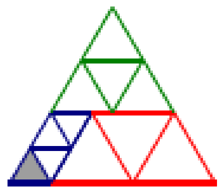
$$2\cdot(5+5+5)+2\cdot(2+4+2)=2\cdot 3\cdot 5+2\cdot 8=6\cdot 5+8\cdot 2.$$

12. Голем триаголник е поделен на рамнострани триаголници како на цртежот десно. Должината на страната на малиот сив триаголник е $1m$. Пресметај го периметарот на големиот триаголник?



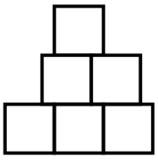
A) 15 m B) 17 m C) 18 m

D) 20 m E) 21 m



Решение. A). Големиот триаголник е составен од три различни видови рамнострани триаголници. Најголемиот од овие три триаголници има должнина на страна двапати поголема од должината на страната на најмалиот троаголник, односно $2\,m$. Долината на страната на дадениот триа. олник е еднаква на $1+2+2=5\,m$. Според тоа, периметарот на дадениот триаголник е $3\cdot 5=15\,m$.

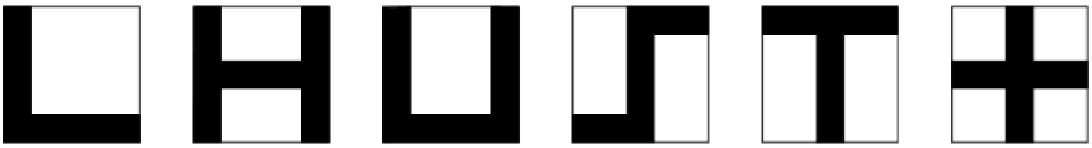
13. Марко искористил 6 квадратчиња со страна 1 за да ја состави фигурата прикажана на цртежот десно. Колку изнесува периметарот на така добиената фигура?



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Решение. **D).** Збирот на должините на вертикалните отсечки е $1+1+1+1+1+1=6$. Збирот на должините на хоризонталните отсечки е $3+(3-2)+(2-1)+1=6$. Значи, периметарот на добиената фигура е $6+6=12$.

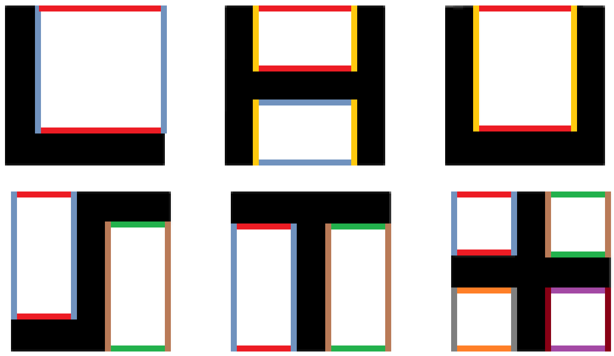
14. Магде обоила фигури на квадратни хартиени ливчиња како што е прикажано на цртежот. Колку од тие фигури имаат ист периметар како и квадратното ливче на кое е нацртана фигурата?



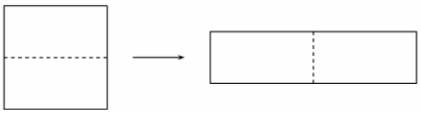
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решемие. **C).** Со паралелно поместување на линиите кои не лежат на страните на квадратните парчиња хартија добиваме дека ист периметар како и квадратното парче хартија на кое е нецртана фигурата имаат гледано од лево првата, четвртата, петтата и шестата фигура. На долните цртежи за секоја фигура со иста боја се означени линијата која се поместува и нејзината нова положба.

На втората и третата фигура со жолта боја се означени линиите кои не се поместуваат, што покажува дека овие фигури имаат поголем периметар од квадратното ливче на кои се нацртани.



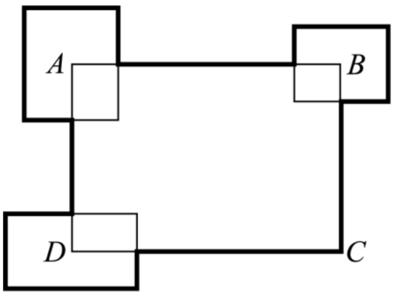
15. Даниела имала квадратно парче хартија со периметар 48 cm кое го разделила на две парчиња од кои со нивно составување направила правоаголник (види цртеж). Колку е периметарот на правоаголникот?



A) 24 cm B) 30 cm C) 48 cm D) 60 cm E) 72 cm

Решение. D). Должината на станата на квадратот е $48:4=12$ cm. Значи, должините на страните на правоаголникот се $12\cdot 2=24$ cm и $12:2=6$ cm. Конечно, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2\cdot(24+6)=60$ cm.

16. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е 30 *cm*. Три други правоаголници се сместени така да нивните центри се наоѓаат во точките A, B и D (цртеж десно). Збирот на нивните периметри е 20 *cm*. Колкава е вкупната должина на задебелените линии?

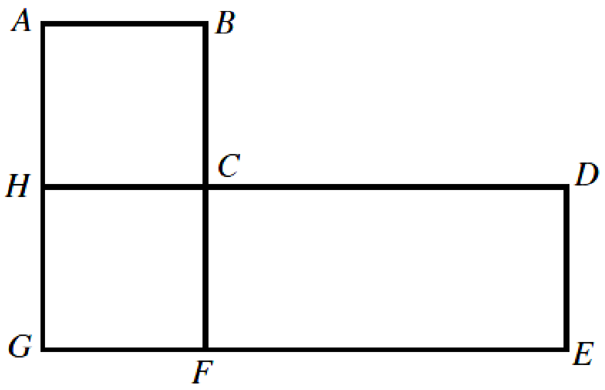


A) 50 *cm* B) 45 *cm* **C)** 40 *cm* D) 35 *cm*

E) не е можно да се определи

Решение. С). Да го разгледаме правоаголникот со центар во A. Тенката линија е $\frac{1}{4}$ од периметарот на тој правоаголник и е еднаква на тенката линија која припаѓа на големиот правоаголник кој е внатре во правоаголникот со цента A. Истото важи и за другите два правоаголници со центри B и D. Значи, должината на задебелената искршена линија е еднаква на $30-\frac{1}{4}\cdot 20+\frac{3}{4}\cdot 20=30-5+15=40\,cm$.

17. На цртежот десно е прикажан план на еден мал град. Во градот има четири автобуски линии и сите се затворени (почетните постојки се совпаѓаат со крајните). Првата линија $C-D-E-F-G-H-C$ е долга $17\,km$, должината на втората линија $A-B-C-F-G-H-A$ е $12\,km$, должината на третата линија $A-B-C-D-E-F-G-H-A$ е $20\,km$ и четвртата линија е $C-F-G-H-C$. Пресметај ја должината на четвртата линија?



A) $5\,km$ B) $8\,km$ C) $9\,km$ D) $12\,km$ E) $15\,km$

Решение. С). Должината на првата линија е еднаква на периметарот на правоаголникот $DEGH$, на втората линија на правоаголникот $ABFG$, на третата линија на шестаголникот $ABCDEG$ и на четвртата линија на квадратот $CFGH$. Лесно се добива дека

$$L_{CFGH}=L_{DEGH}+L_{ABFG}-L_{ABCDEG}=17+12-20=9\,km.$$

18. Ако должината на страната на еден квадрат се зголеми за 10%, за колку ќе се зголеми неговата плоштина?

A) 10 B) 11 C) 21 D) 40 E) 100

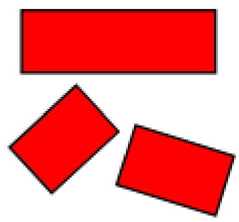
Решение. **C).** Ако должината на страната на квадратот е a, тогаш неговата плоштина е a^2. Со зголемувањето на страната за 10%, квадратот ќе има страна $1{,}1a$ и плоштина $(1{,}1a)^2 = 1{,}21a^2$. Значи, зголемувањето на плоштината ќе биде $(\frac{1{,}21a^2}{a^2} - 1)\cdot 100 = 21\%$.

19. Правоаголник со плоштина $252\,cm^2$ е добиен со лепење на 7 еднакви квадрати. Колкав е периметарот на правоаголникот?

A) $48\,cm$ B) $84\,cm$ C) $86\,cm$ D) $92\,cm$ E) $96\,cm$

Решение. **E).** Плоштината на еден квадрат е $252:7 = 36\,cm^2$. Значи, должината на страната на квадратот е $6\,cm$. За да се добие правоаголник од 7 квадрати, истите мора да се наредени во еден ред, што значи дека страните на правоаголникот се $6\,cm$ и $7\cdot 6 = 42\,cm$. Конечно, плоштината на правоаголникот е $2\cdot(6+42) = 96\,cm$.

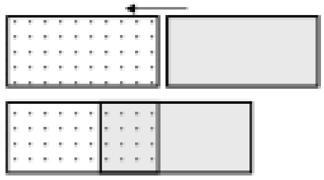
20. Даден правоаголник е расечен на два помали правоаголници (цртеж десно). Периметрите на трите правоаголници се $17\,cm, 31\,cm$ и $40\,cm$, во некој редослед. Определи ја плоштината на почетниот правоаголник.



A) $64\,cm^2$ B) $75\,cm^2$ C) $84\,cm^2$ D) $91\,cm^2$ E) $96\,cm^2$

Решение. **A).** Збирот на периметрите на двата помали правоаголници е поголем од периметарот на големиот правоаголник за две должини на страната по која е расекувањето. Значи, должината на едната страна на почетниот правоаголник е $(31+17-40):2 = 4\,cm$. Според тоа, должината на втората страна на почетниот правоаголник е $(40-2\cdot 4):2=16\,cm$. Конечно, плоштината на почетниот правоаголник е $4\cdot 16=64\,cm^2$.

21. Два складни правоаголници, секој со плоштина $18\,cm^2$, ставени се делумно еден над друг така што формираат нов правоаголник како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на новиот правоаголник, ако таа е пет пати поголема од плоштината на покриениот дел?



A) $24\,cm^2$ B) $27\,cm^2$ C) $30\,cm^2$ D) $32\,cm^2$ E) $36\,cm^2$

Решение. C). Вкупната плоштина на двата правоаголници е $36\,cm^2$. Бидејќи плоштината на новиот правоаголник е пет пати поголема од плоштината на покриениот дел, заклучуваме дека вкупната плоштина на двата правоаголници е шест пати поголема од плоштината на покриениот дел. Според тоа, плоштината на покриениот дел е $36:6=6\,cm^2$, па затоа плоштината на новиот правоаголник е $36-6=30\,cm^2$.

22. Плоштината на правоаголник е $12\,cm^2$. Должините на неговите страни се природни броеви. Кој од понудените броеви може да биде периметарот на овој правоаголник?

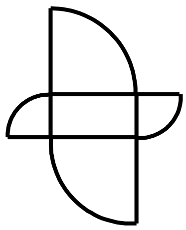
A) $20\,cm$ B) $26\,cm$ C) $28\,cm$ D) $32\,cm$ E) $48\,cm$

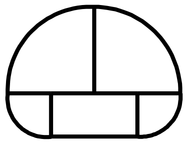
Решение. B). Ако должините на страните на правоаголникот се a и b, $a>b$, тогаш $ab=12$. Сега можните вредности за должините на страните и периметарот се дадени во долната табела.

a	$12\ cm$	$6\ cm$	$4\ cm$
b	$1\ cm$	$2\ cm$	$3\ cm$
L	$26\ cm$	$16\ cm$	$14\ cm$

Од понудените вредности само 26 cm се јавува како можна вредност на периметарот на правоаголникот.

23. На цртежот се дадени две фигури. Парчињата со кои е направена едната фигура направена е и другата. Димензиите на правоаголникот се $5\,cm \times 10\,cm$, а останатите парчиња се четвртини од две различни кружници.



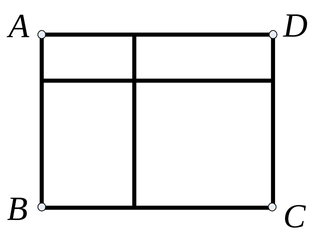


Колку е разликата меѓу нивните периметри?

A) $2{,}5\,cm$ B) $5\,cm$ C) $10\,cm$ D) $20\,cm$ E) $30\,cm$

Решение. D). Очигледно е дека радиусите на кружинците се $5\,cm$ и $10\,cm$. Разликата во периметрите на двете фигури е збир на две ширини на правоаголникот и една негова должина. Според тоа, ако L_1 е периметарот на левата а L_2 е периметарот на десната фигура, тогаш $L_1 - L_2 = 10 + 2 \cdot 5 = 20\,cm$.

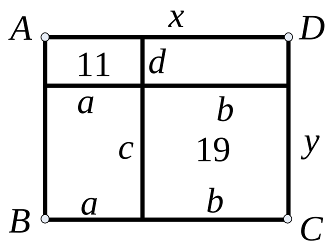
24. Правоаголникот $ABCD$ е разделен на 4 помали правоаголници како што е прикажано на цртежот. Периметрите на три од нив се 11, 16 и 19. Периметарот на четвртиот делбен правоаголник не е ниту најмал ниту најголем.



Колку е периметарот на правоаголникот $ABCD$?

A) 28 B) 30 C) 32 D) 38 E) 40

Решение. Бидејќи периметарот L_4 на четвртиот правоаголник не е ниту најмал ниту најголем, добиваме дека $11 < L_4 < 19$. Ако должините на страните на правоаголникот со периметар 11 ги означиме со a и d, а должините на страните на правоаголникот со периметар 19 ги означиме со b и c, тогаш



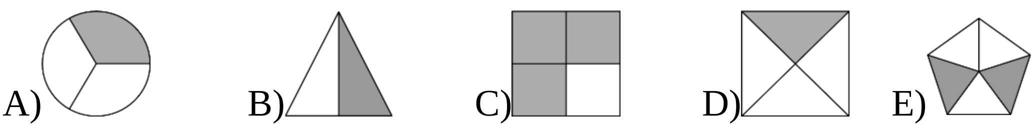
$$2a + 2d = 11$$
$$2b + 2c = 19$$

Со нивно собирање добиваме

$$2(a+b) + 2(c+d) = 30.$$

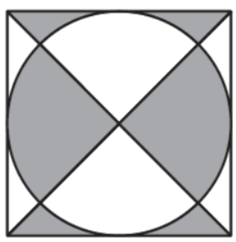
Ако x и y се должините на страните на правоаголникот $ABCD$, тогаш според ознаките на цртежот имаме $x = a+b$ и $y = c+d$, па за неговиот периметар добиваме $L = 2x + 2y = 2(a+b) + 2(c+d) = 30$.

25. Половина од една од дадените фигури е обоена со сива боја. Која е таа фигура?



Решение. **B).** Во сива боја се обоени третина од фигурата A), половина од фигурата B), три четвртини од фигурата C), четвртина од фигурата D) и две петтини од фигурата E).

26. На цртежот десно е претставен квадрат со должина на страна $10\,cm$. Колку е плоштината на сивиот дел на овој квадрат?

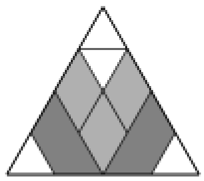


A) $40\,cm^2$ B) $45\,cm^2$ C) $50\,cm^2$

D) $55\,cm^2$ E) $60\,cm^2$

Решение. **C).** Ако дадениот квадрат го превиткаме по една од неговите дијагонали, тогаш секој негов бел дел целосно ќе се совпадне со еден негов сив дел и обратно. Значи, плоштината на сивиот дел е еднаква на половина од плоштината на квадратот. Бидејќи плоштината на квадратот е еднаква на $10 \cdot 19 = 100\,cm^2$, добиваме дека плоштината на сивиот дел е $50\,cm^2$.

27. Рамностран триаголник е поплочен со четири бели складни триаголници, два складни трапези и три складни ромбови. Кое од следниве тврдења е вистинито?



A) Светлосивата површина има најголема плоштина.

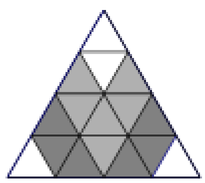
B) Темносивата површина има најголема плоштина .

C) Светлосивата и темносивата поврина имаат еднакви плоштинаи.

D) Плоштината на белата површина е половина од плоштината на темносивата површина.

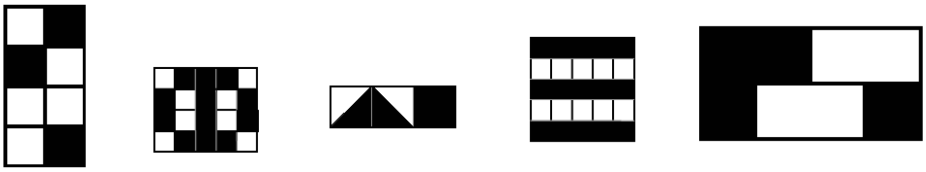
E) Плоштината на белата површина е половина од плоштината на светлосивата површина.

Решение. **C).** Ромбовите да ги поделиме на по два скалдни триаголници, а трапезите на по четири складни триаголници (цртеж десно). Сега имаме 16 складни триаголници од кои 4 се бели и по 6 се светлосиви и темносиви. Значи, точно е само тврдењето C).



28. Во едно училиште за пирати секој ученик треба да сошие знаме, при што користи црна и бела свила. Црниот дел од знамето треба да е

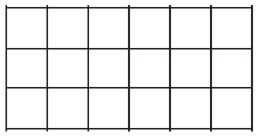
три петтини од целото знаме. Колку од прикажаните знамиња го исполнуваат овој услов?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. C). Првото знаме има 3 црни од вкупно 8 квадрати, т.е. има $\frac{3}{8}$ црн дел. Второто знаме во секој ред има по 3 црни од 5 квадрати, што значи дека има $\frac{3}{5}$ црн дел. Третото знаме има 2 црни од вкупно 3 квадрати, што значи дека има $\frac{2}{3}$ црн дел. Четвртото знаме има три црни од вкупно пет реда, па затоа има $\frac{3}{5}$ црн дел. Петтото знаме има $\frac{1}{2}$ црн дел.

29. На цртежот десно е даден правоаголник. Мартин сака да ги обои квадратите во правоаголникот така што третина од сите квадрати се сини и половина од сите квадрати се жолти. Останатите квадрати Мартин сака да ги обои со црвена боја. Колку квадрати Мартин ќе обои со црвена боја?



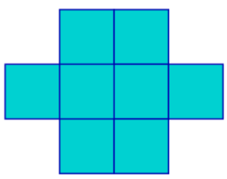
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. C). Правоаголникот има $3 \cdot 6 = 18$ квадрати. Бидејќи

$$\frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \text{ и } \frac{1}{2} \cdot 18 = 9,$$

добиваме дека $18 - 6 - 9 = 3$ квадрати ќе бидат обоени со црвена боја.

30. Периметрот на дадената фигура, направена од идентични квадрати, е еднаков на 42 cm. Колку е плош-

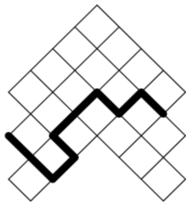


тината на оваа фигура?

A) 8 cm^2 B) 9 cm^2 C) 24 cm^2 D) 72 cm^2 E) 128 cm^2

Решение. D). Ако a е должината на страната на единечниот квадрат, тогаш периметарот на фигурата е $14a$. Според тоа, $14a = 42$, од каде добиваме $a = 3$. Сега, плоштината на фигурата е еднаква на $P = 8 \cdot 3^2 = 72$ cm^2.

31. На цртежот е прикажан дел од табла на која плоштината на секое квадратче е еднаква на $4cm^2$. Колку е долга задебелената искршена линија?

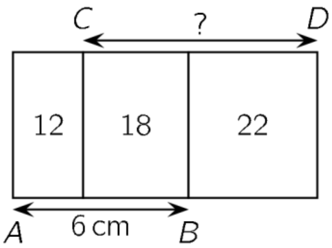


A) 16 *cm* B) 18 *cm* C) 20 *cm*

D) 21 *cm* E) 23 *cm*

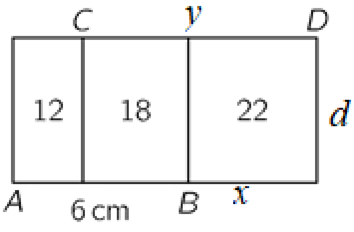
Решение. B). Од $2 \cdot 2 = 4$ следува дека должината на страната на квадратчињата е 2 *cm*. Задебелената линија се состои од 9 страни на квадратчињата, па затоа нејзината должина е $9 \cdot 2 = 18cm$.

32. Три правоаголници со иста ширина се поставени како на цртежот. Броевите што се запишани во нив ја претставуваат нивната плоштина изразена во cm^2. Ако $\overline{AB} = 6cm$, тогаш колкава е должината на отсечката CD?

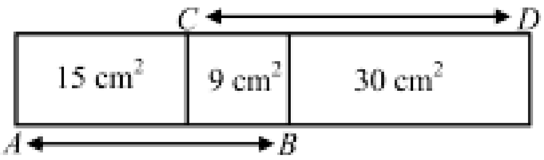


A) $7cm$ B) $7,5cm$ C) $8cm$ D) $8,2cm$ E) $8,5cm$

Решение. C). При ознаки како на цртежот десно имаме $6d = 30$, што значи $d = 5\,cm$. Понатаму $5y = 40$, од каде добиваме $y = 8\,cm$.



33. На цртежот десно е прикажан правоаголник кој е поделен на три помали правоаголници, во

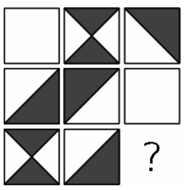


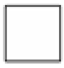
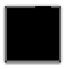
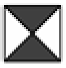
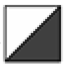
кои се впишани нивните плоштини. Ако $\overline{AB}=8\,cm$, колку е должината на отсечката CD?

A) $12\,cm$ B) $13\,cm$ C) $14\,cm$ D) $15\,cm$ E) $16\,cm$

Решение. B). Збирот на плоштните на двата леви правоаголници е еднаков на $15+9=24\,cm^2$. Затоа должината навтората страна на сите правоаголници е еднаква на $24:8=3\,cm$. Збирот на плоштините на двата десни правоаголници е еднаков на $9+30=39\,cm^2$, од каде добиваме $\overline{CD}=39:3=13\,cm$.

34. Која плочка треба да се додаде, т.е. стави на местото на прашалникот, за плоштината на белиот и плошти-ната на црниот дел од фигурата да бидат еднакви?



A)  B)  C)  D) 7 

E) тоа не е можно

Решение. E). Имаме 2 бели плочки и 6 плочки на кои плоштината на црниот дел е еднаква на плоштината на белиот дел. Затоа со додавање на било каква плочка не може да се постигне саканата цел.

35. Екранот на старт телевизор се во размер 4:3, а на нов во размер 16:9.

Размер 16:9

Размер 4:3

Имаме филм кој го пополнува целиот екран на новиот телевизор (цртеж лево). При гледање на филмот на стар телевизор, филмот ја покрива целата должина на екранот (цртеж десно). Колкав е делот на екранот од стариот телевизор кој не се користи?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$

E) зависи од големината на екранот

Решение. C). Ако размерот на стариот телевизор го запишеме така што неговата должина е еднаква на должината на новиот телевизор добиваме $4:3=16:12$. Последното значи дека од 12 дела на стариот телевизот ќе бидат искористени 9 дела, односно 3 дела нема да се користат. Значи, $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ од екранот на стариот телевизор нема да се користи.

36. Должината и ширината, изразени во сантимитри, на еден правоаголник се a и b. Ако должината се зголеми за b, а ширината се зголеми за a, се добива квадрат чија плоштина е $81 cm^2$. Определи ја најмалата можна плоштина на почетниот правоаголник.

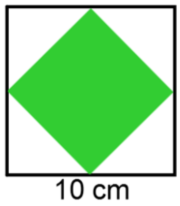
A) $8 cm^2$ B) $9 cm^2$ C) $16 cm^2$ D) $21 cm^2$ E) друг одговор

Решение. A). Од условот на задачата следува $(a+b)(a+b)=81$, па затоа $a+b=9$. Заради симетрија на a и b можни се следниве четири случаи:

$$a=1, b=8, P=8\,cm^2,$$
$$a=2, b=6, P=12\,cm^2,$$
$$a=3, b=5, P=15\,cm^2,$$
$$a=4, b=4, P=16\,cm^2.$$

Значи, најмалата плоштина е $P=8\,cm^2$.

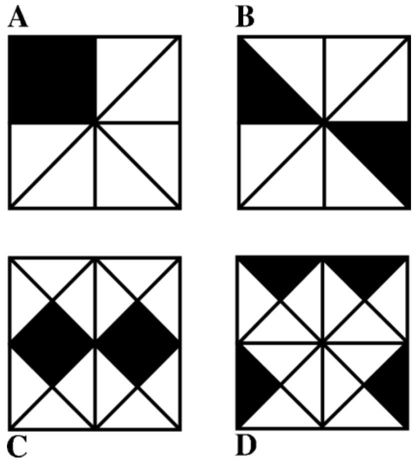
37. Катерина нацртала квадрат со страна 10 cm. Потоа, таа ги поврзала средините на страните на квадратот, со што добила помал квадрат (цртеж десно). Колкава е плоштината на помалиот квадрат?



A) $10cm^2$ B) $20cm^2$ C) $25cm^2$ D) $40cm^2$ **E)** $50cm^2$

Решение. E). Ако ги повлечеме отсечките кои ги поврзуваат средниите на спротивните страни, лесно заклучуваме дека плоштината на помалиот квадрат е еднаква на половина од плоштината на големиот квадрат. Плоштината на големиот квадрат е $10 \cdot 10 = 100cm^2$. Значи, плоштината на малиот квадрат е $100 : 2 = 50cm^2$.

38. На цртежите десно се дадени четири квадрати. Кој квадрат има црна површина со најголема плоштина?

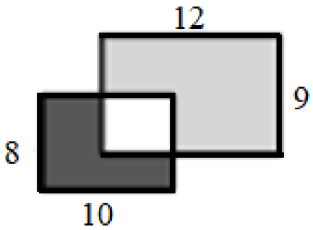


A) A B) B C) C D) D

E) сите квадрати имаат црна површина со еднаква плоштина

Решение. E). Јасно, на квадратот A црната површина зафаќа $\frac{1}{4}$ од целиот квадрат. Квадратот B е поделен на 8 еднакви правоаголни триаголници од кои два се црни, па значи $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ од целиот квадрат зафаќа црната површина. Квадратите C и D се поделени на по 16 еднакви правоаголни триаголници и во секој од нив имаме по 4 црни триаголници. Според тоа, во секој од овие два квадрати $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ зафаќа црната површина. Значи, сите квадрати имаат црна површина со еднаква плоштина.

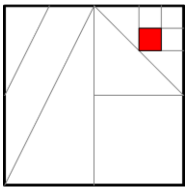
39. Два правоаголници со димензии 8×10 и 9×12 деломно се преклопуваат (цртеж десно). Ако црната површина има плоштина 37, колкава е плоштината на сивата површина?

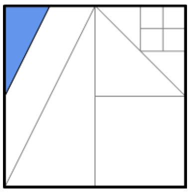


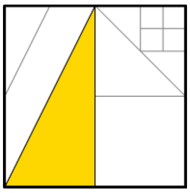
A) 60 B) 62 C) 62,5 D) 64 E) 65

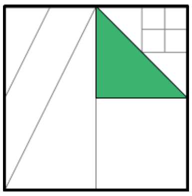
Решение. **E).** Плоштината на правоаголникот со димензии 8×10 е $8\cdot10-80$. Според тоа, плоштината на белиот дел е $80-37=43$. Плоштината на правоаголникот со димензии 9×12 е $9\cdot12=108$. Конечно, плоштината на сивиот дел е $108-43=65$.

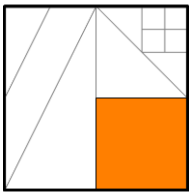
40. Даден е квадрат во кој се нацртани отсечки. Отсечките се повлечени или од темињата или од средините на веќе добиени отсечки. Обоена е $\frac{1}{8}$ од големиот квадрат. На кој цртеж е прикажано точното боење?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Решение. **D).** Нека a е должината на страната на кавдартот.

На цртежот A) е обоена квдрат со должина на страна $\frac{1}{8}a$, па неговата плоштина е $\frac{1}{64}a^2$.

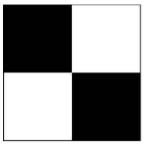
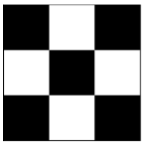
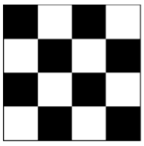
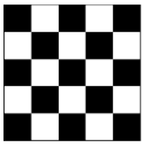
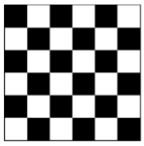
На цртежот B) е обоена правоаголен триаголник со должина на страни $\frac{1}{4}a$ и $\frac{1}{2}a$, па неговата плоштина е $\frac{1}{16}a^2$.

На цртежот C) е обоена правоаголен триаголник со должина на страни $\frac{1}{2}a$ и a, па неговата плоштина е $\frac{1}{4}a^2$.

На цртежот D) е обоена правоаголен триаголник со должина на страни $\frac{1}{2}a$ и $\frac{1}{2}a$, па неговата плоштина е $\frac{1}{8}a^2$.

На цртежот Е) е обоена квадрат со должина на страна $\frac{1}{2}a$, па неговата плоштина е $\frac{1}{4}a^2$.

41. Пет еднакви квадрати се поделени на помали квадрати. Кој од петте квадрати има најголема црно обоена површина?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. B). Ако страната на големиот квадрат е a, тогаш плоштината на црно обоената површина на секоја од понудените фигури е

$P_A = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}P$; $\quad P_B = 5 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{5a^2}{9} = \frac{5}{9}P$;

$P_C = 8 \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}P$; $\quad P_D = 13 \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{a}{5} = \frac{12a^2}{25} = \frac{12}{25}P$;

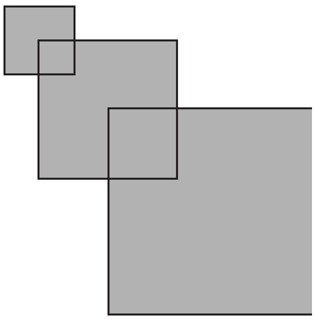
$P_E = 18 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}P$

каде што P е плоштината на големиот квадрат. Бидејќи

$$\frac{5}{9} > \frac{125}{225} > \frac{117}{225} > \frac{117}{234} = \frac{1}{2},$$

добиваме дека најголема плоштина има квадратот B).

42. Григор има три квадрати. Првиот има страна со должина 2 *cm*. Вториот има страна со должина 4 *cm* и теме кое е поставено во центарот на првиот квадрат. Последниот има страна со должина 6 *cm* и теме поставено во центарот на вториот квадрат, како што е прикажано на цр-



тежот десно. Колкава е плоштината на вака добиената фигура?

A) $32\,cm^2$ B) $51\,cm^2$ C) $27\,cm^2$ D) $16\,cm^2$ E) $6\,cm^2$

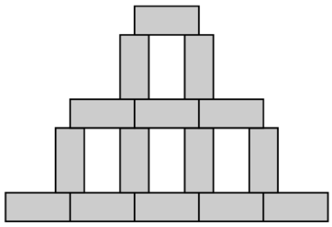
Решение. B). Збирот на плоштините на трите квадрати е

$$P = 2^2 + 4^2 + 6^2 = 56\,cm^2.$$

Од оваа плоштина треба да се одземе плоштината на четвртина од првиот и четвртина од вториот квадрат. Значи, бараната плоштина е

$$P_1 = 56 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 4^2 = 51\,cm^2.$$

43. Конструкцијата прикажана на цртежот десно е составена од складни правоаголници. Нејзината ширина е $45\,cm$, а висината и е $30\,cm$. Колкава е плоштината на еден правоаголник?

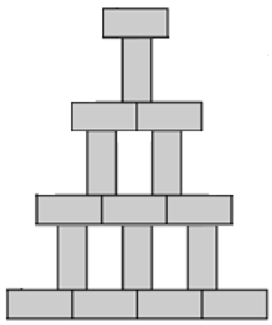


A) $24\,cm^2$ B) $27\,cm^2$ C) $30\,cm^2$ D) $32\,cm^2$ E) $36\,cm^2$

Решение. E). Ширината на еден правоаголник е $45:5=9\,cm$, а неговата висина е $(30-2\cdot 9):3=4\,cm$.

Конечно плоштината на еден правоаголник е $4\cdot 9 = 36\,cm^2$.

44. Конструкцијата прикажана на цртежот десно е составена од складни правоаголници. Неј-зината ширина е $32\,cm$, а висината и е $36\,cm$. Колкава е плоштината на еден правоаголник?



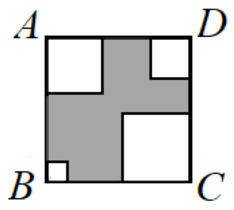
A) $16\,cm^2$ B) $20\,cm^2$ C) $24\,cm^2$

D) $28\,cm^2$ E) $32\,cm^2$

Решение. E). Ширината на еден правоаголник е $32:4=8\,cm$, а неговата висина е $(36-3\cdot 8):4=3\,cm$.

Конечно плоштината на еден пра-воаголник е $3\cdot 8=24\,cm^2$.

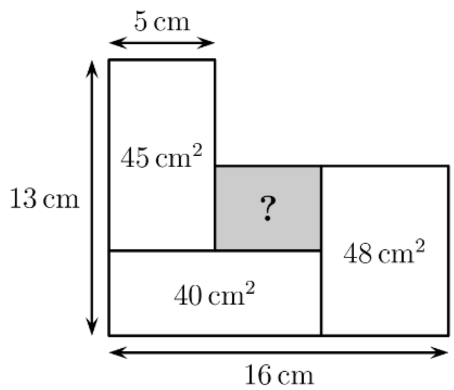
45. Од квадратот $ABCD$ се исечени 4 помали квадрати со должини на страни $1\,cm, 2\,cm, 3\,cm, 6\,cm$ (цртеж десно). Колкав е периметарот на затемнетиот дел од добиената фигура, ако нејзината плоштина е два-пати помала од плоштината на квадратот $ABCD$?



A) $36\,cm$ B) $40\,cm$ C) $44\,cm$ D) $48\,cm$ E) $52\,cm$

Решение. **B).** Плоштината на белиот дел на квадратот е еднаква на $1+4+9+36=50\,cm^2$. Според тоа, плоштината на квадратот $ABCD$ е еднаква на $2\cdot 50=100\,cm^2$ и бидејќи $100=10\cdot 10$ добиваме дека должината на неговата страна е $10\,cm$. Сега, бидејќи спротивните страни на квадратот се со еднаква должина добиваме дека сивата фигура има периметар колку и целиот квадрат $ABCD$, т.е. $40\,cm$.

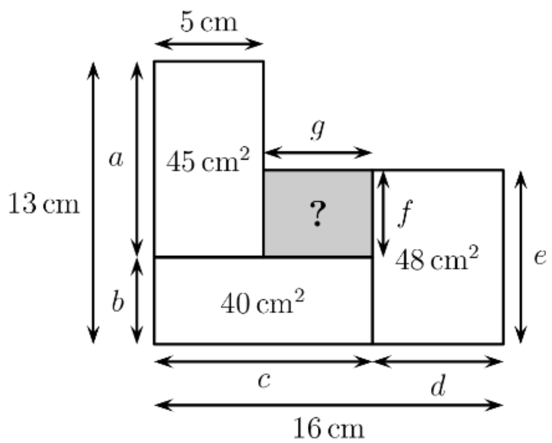
46. На цртежот десно се прикажани четири правоаголници кои меѓусебно се допираат. Колкава е плоштината на засенчениот шправоаголник?



A) $12\,cm^2$ B) $14\,cm^2$ C) $16\,cm^2$

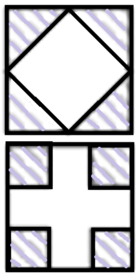
D) $18\,cm^2$ E) $20\,cm^2$

Решение. **E).** При ознаки како на цртежот десно од правоаголникот чија плоштина е $45\,cm^2$ добиваме $a=45:5=9\,cm$. Понатаму имаме $b=13-9=4\,cm$. Сега,



од правоаголникот чија плоштина е $40\,cm^2$ добиваме $c=40:4=10\,cm$. Тогаш $d=16-10=6\,cm$. Од правоаголникот чија плоштина е $48\,cm^2$ имаме $e=48:6=8\,cm$. Според тоа, $f=8-4=4\,cm$ и затоа $g=16-6-5=5\,cm$. Конечно, бараната плоштина е еднаква на $4\cdot 5=20\,cm^2$.

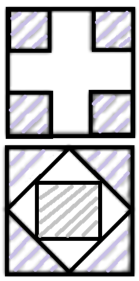
47. Двата квадрати прикажани на цртежот десно се со еднакви плоштини. Средините на страните на горниот квадрат се темиња на помалиот квадрат и триаголниците во аглите се штрафирани. Во аглите на вториот квадрат се штрафирани четири квадрати чии страни се еднакви на третина од страната на големиот квадрат. Плоштината на штрафираниот дел на првиот квадрат е $9\,cm^2$. Колкава е плоштината на штрафираниот дел на вториот квадрат?



A) $4\,cm^2$ B) $8\,cm^2$ C) $9\,cm^2$ D) $10\,cm^2$ E) $12\,cm^2$

Решение. **B).** Нека a е должината на страната на големиот квадрат. Плоштината на големиот квадрат е еднаква на $2\cdot 9=18\,cm^2=a^2$. Должините на страните на малите квадрати на долниот цртеж се $\frac{1}{3}a$. Значи, плоштината на штрафираниот дел на долниот квадрат е $4\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{3}a=\frac{4}{9}a^2=\frac{4}{9}\cdot 18=8\,cm^2$.

48. Двата квадрати прикажани на цртежот десно се со еднакви плоштини. Во аглите на првиот квадрат се штрафирани четири квадрати чии страни се еднакви на третина од страната на големиот квадрат. Средините на

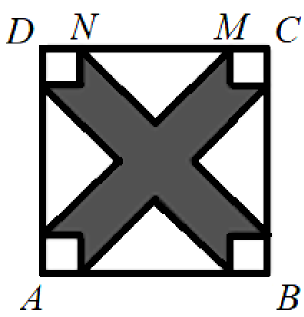


страните на горниот квадрат се темиња на помалиот квадрат, а средините на неговите страни се темиња на третиот уште помал квадрат. Ако S е плоштината на штрафираниот дел на првиот квадрат, колкава е плоштината на штрафираниот дел на вториот квадрат?

A) $\frac{9}{8}S$ B) $\frac{7}{5}S$ C) $\frac{27}{16}S$ D) $2S$ E) $\frac{9}{4}S$

Решение. **C).** Нека a е должината на страната на еден од штрафираните делови на првиот квадрат. Тогаш $S=4a^2$. Должината на страната на големиот квадрат е $3a$, па затоа неговата плоштина е $9a^2$. Плоштината на штрафираните триаголници е половина од плоштината на големиот квадрат, а плоштината на малиот штрафиран квадрат е еднаква на четвртина од плоштината на големиот квадрат. Значи, плоштината на штрафираниот дел во вториот квадрат е еднаква на $9a^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=\frac{27}{4}a^2=\frac{27}{16}\cdot 4a^2=\frac{27}{16}S$.

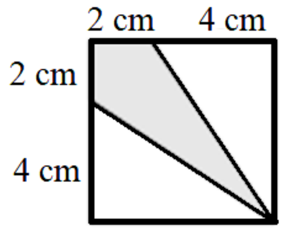
49. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $10\,cm$ (цртеж десно). Растојанието меѓу точките M и N е еднакво на $6\,cm$. Четирите бели триаголници се рамнокраки правоаголни триаголници и се еднакви меу себе. Меѓу себе се еднакви и четирите бели квадрати. Колкава е плоштината на сивиот дел од квадратот?



A) $42\,cm^2$ B) $46\,cm^2$ C) $48\,cm^2$ D) $52\,cm^2$ E) $58\,cm^2$

Решение. **C).** Четирите бели триаголници формираат квадрат со должина на страна $6\,cm$. Четирите бели квадрати формираат квадрат со должина на страна $10-6=4\,cm$. Плоштината на сивиот дел ќе ја добиеме ако од плоштината на квадратот со страна $10\,cm$ ги одземеме плоштините на квадратите со страни $6\,cm$ и $4\,cm$. Значи, бараната плоштина е $P=10^2-6^2-4^2=52\,cm^2$.

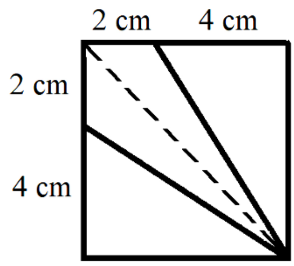
50. Колкав дел од квадратот прикажан на цртежот десно е обоен со сива боја?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{3}{6}$ E) $\frac{2}{9}$

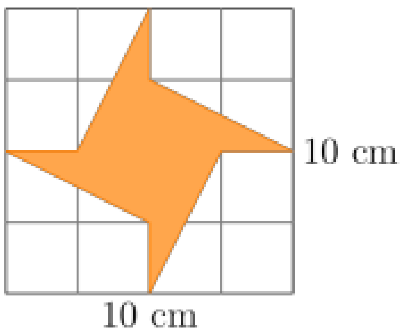
Решение. A). Должината на страната на квадратот е еднаква на $2+4=6\,cm$. Плоштината на квадртатот е $6\cdot 6=36\,cm^2$.

Прв начин. Дијагоналата на квадратот го дели сивиот дел на два триаголници со основи $2\,cm$ и висини $6\,cm$. Според тоа, плоштината на сивиот дек е $2\cdot\frac{2\cdot 6}{2}=12\,cm^2$. Значи, $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ од квадратот е обоен со сива боја.



Втор начин. Белиот дел на квадратот е составен од два правоаголни триаголници со катети $4\,cm$ и $6\,cm$. Значи, плоштината на белиот дел е $2\cdot\frac{4\cdot 6}{2}=24\,cm^2$. Според тоа, плоштината на сивиот дел е $36-24=12\,cm^2$. Конечно, $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ од квадратот е обоен со сива боја.

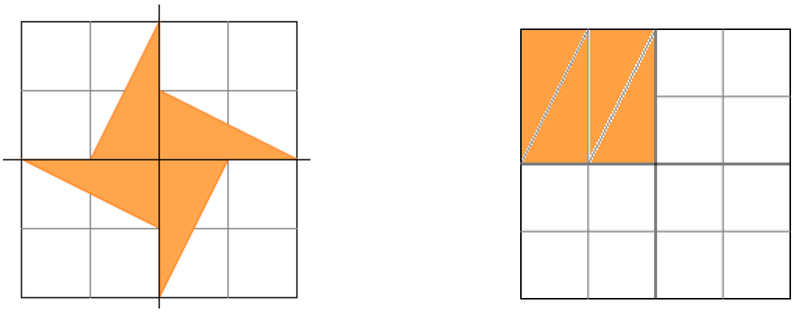
51. Даден е квадрат со должина на страна $10\,cm$, цртеж десно. Колку е плоштината на засенчениот дел од квадратот?



A) $20\,cm^2$ B) $25\,cm^2$ C) $30\,cm^2$

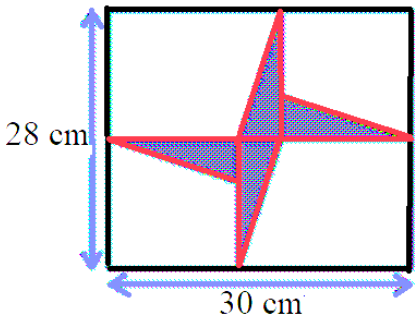
D) $35\,cm^2$ E) $40\,cm^2$

Решение. **B).** Плоштината на квадратот е еднаква на $10 \cdot 10 = 100\ cm^2$. Да ги означиме хоризонталната и вертикалната оска на симетрија на дадениот квадрат. Засенчениот дел на квадратот се состои од четири еднакви правоаголни триаголници. Плоштината на овие четири триаголници е еднаква на плоштината на една четвртина од целиот квадрат (види цртеж).



Според тоа, плоштината на засенчениот дел од квадратот е еднаква на $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25\ cm^2$.

52. Во внатрешноста на правоаголник се наоѓаат четири еднакви правоаголни триаголници (види цртеж). Одреди ја вкупната плоштина на четирите триаголници.

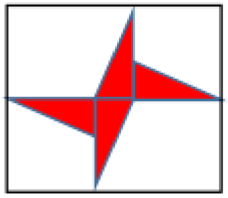


A) $46\ cm^2$ B) $52\ cm^2$ C) $54\ cm^2$

D) $56\ cm^2$ E) $64\ cm^2$

Решение. **D).** Должината на едната катета на правоаголниот триаголник е еднаква на $28:2 = 14\ cm$, а должината на другата катета е еднаква на $30 - 2 \cdot 14 = 2\ cm$. Според тоа, плоштината на еден триаголник е $S = \frac{2 \cdot 14}{2} = 14\ cm^2$. Сега, плоштината на затемнетиот дел, односно на четирите триаголници е $P = 4S = 4 \cdot 14 = 56 cm^2$.

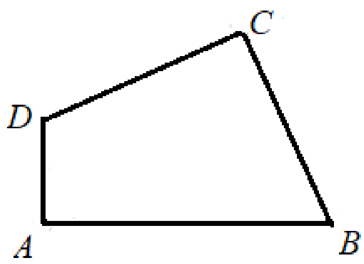
53. Во внатрешноста на правоаголник со димензии $20\,cm$ и $16\,cm$ се наоѓаат четири еднакви правоаголни триаголници (види цртеж). Колкав дел е збирот на плоштините на триаголниците од плоштината на правоаголникот?



A) $\frac{8}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{9}{40}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{1}{4}$

Решение. B). Должината на едната катета на правоаголниот триаголник е еднаква на $16:2=8\,cm$, а должината на другата катета е еднаква на $20-2\cdot 8=4\,cm$. Според тоа, плоштината на еден триаголник е $S=\frac{8\cdot 4}{2}=16\,cm^2$. Сега, плоштината на затемнетиот дел, односно на четирите триаголници е $P=4\cdot 16=64cm^2$ и таа е $\frac{64}{20\cdot 16}=\frac{1}{5}$ од плоштината на целиот правоаголник.

54. Четириаголникот $ABCD$ има должини на страни $\overline{AB}=11, \overline{BC}=7, \overline{CD}=9, \overline{DA}=3$ и прави агли во темињата A и C. Колку е плоштината на овој четириаголник?



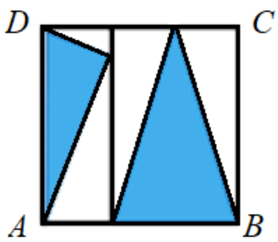
A) 30 B) 44 C) 48

D) 52 E) 60

Решение. C). Со дијагоналата BD дадениот четириаголник е поделен на два правоаголни триаголника ABD и BCD. Затоа

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BCD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{11\cdot 3}{2}+\frac{7\cdot 9}{2}=48.$$

55. Даден квадрат $ABCD$ со страна $14\,cm$ е поделен на два правоаголника, во кои се наоѓаат по еден триаголник, цртеж десно. Една од страните на

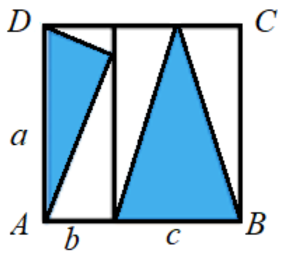


секој од триаголниците се совпаѓа со страна на праваголникот во кој е впишан, а третото теме припаѓа на спротивната страна на тој правоаголник. Колку е збирот на плоштините на двата триаголника?

A) $100\,cm^2$ B) $98\,cm^2$ C) $96\,cm^2$ D) $94\,cm^2$

E) не може да се определи

Решение. B). При ознаки како на цртежот десно за збирот на плоштините на двата триаголника добиваме



$$P=\frac{ab}{2}+\frac{ca}{2}=\frac{a(b+c)}{2}=\frac{a\cdot a}{2}=\frac{10\cdot 10}{2}=50\,cm^2.$$

56. Горјан има 2009 еднакви квадратни плочки. Со плочките тој сака да направи правоаголник, но така што ќе ги употреби сите плочки. На колку начини тоа може да го направи?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 10

Решение. C). Бројот на начините на кои може Горјан со 2009 квадратни плочки да направи правоаголник е еднаков на бројот на начините на кои може бројот 2009 да се запише како производ на два природни броја. Од $2009=7^2\cdot 41$ добиваме

$$2009=1\cdot 2009=7\cdot 287=49\cdot 41.$$

Значи правоаголникот Горјан може да го состави на три начини.

57. Дадени се 2010 еднакви квадрати. На колку различни начини може тие да се наредат еден до друг, без притоа да се преклопуваат, така што ќе се добие правоаголник?

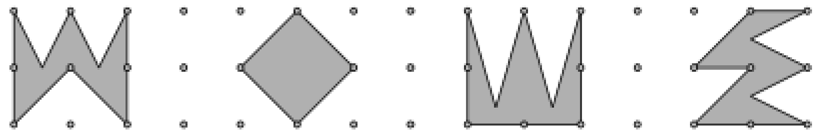
A) 4 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Решение. C). Разложувањето на бројот 2010 на прости множители е $2010=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Оттука добиваме 8 претставувања на бројот 2010 како производ на два броја:

$$2010 = 1 \cdot 2010 = 2 \cdot 1005 = 3 \cdot 670 = 5 \cdot 402$$
$$= 6 \cdot 335 = 10 \cdot 201 = 15 \cdot 134 = 30 \cdot 67,$$

што значи дека може да се добојат 8 различни правоаголници.

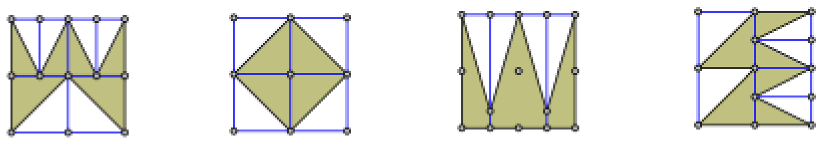
58. Која од следниве фигури има најголема плоштина?



A) B) C) D)

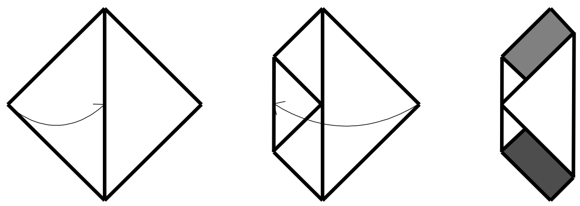
E) сите имаат еднакви плоштини

Решение. C). Сите фигури се сместени во квадрат 2×2. Да ги разгледаме цртежите



Со споредување на добиените цртежи гледам дека плоштината на фигурите A), B) и D) се еднакви на половина од плоштината на квадратот 2×2. Подека поголема од половината на плоштината на квадратот 2×2 е плоштината на фигурата C) , па затоа таа има најголема плоштина.

59. Квадратно парче хартија е превиткано двапати како што е прикажано на цртежот. Најди го збирот на плоштините на исенчените правоаголници, знаејќи дека плоштината на квадратното парче хартија е $64\ cm^2$.

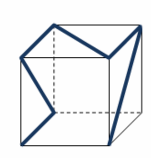


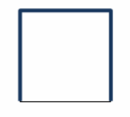
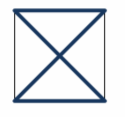
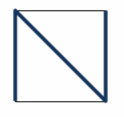
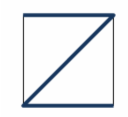
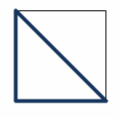
A) $10\ cm^2$ B) $14\ cm^2$ C) $15\ cm^2$ D) $16\ cm^2$ E) $24\ cm^2$

Решение. **D).** Ако плоштината на квадратното парче хартија е $64\,cm^2$ тогаш должината на страната на квадратното парче хартија е $8\,cm$. Левиот триаголник го преклопуваме на половина, а десниот на три четвртини. Од првото преклопување (превиткување) добиваме дека должината на страната на исенченото парче хартија е $4\,cm$. Со второто преклопување, добиваме дека должината на втората страна на исенченото парче хартија е $2\,cm$. Плоштината на едно исенчено парче хартија е $P_\circ = 4 \cdot 2\,cm^2 = 8\,cm^2$, а плоштината на двата исенчени дела е $P = 2P_\circ = 2 \cdot 8\,cm^2 = 16\,cm^2$.

4. КОЦКА И КВАДАР

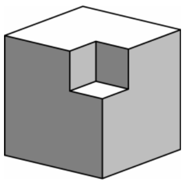
1. Црвена трака е залепена на проѕирна пластична коцка (види цртеж). Кој од следните цртежи не е поглед на коцката во правец нормален на ѕид на коцката?



A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. E). Ако погледнеме од предната страна на коцката го добиваме ликот A). Ако погледнеме од десната страна на коцката го добиваме ликот B). Ликовите C) и D) ги добиваме кога ќе погледнеме од горната страна на коцката. Бидејќи коцката е проѕирна имаме само три различни ликови, што значи дека не можеме да го видиме ликот E).

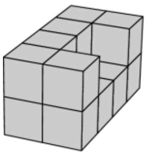
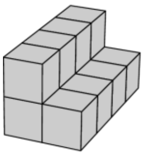
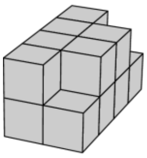
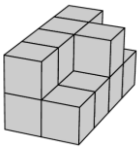
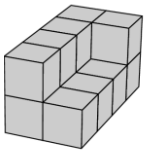
2. Од дрвена коцка со раб $3\,\text{cm}$ е отстранета мала коцка со раб $1\,\text{cm}$ (види цртеж). Колку ѕидови ќе има телото што се добива со отстранување на осум мали коцки со раб $1\,\text{cm}$ на истиот начин (за секое теме од коцката по една отстранета мала коцка)?



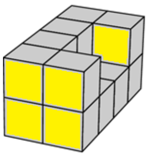
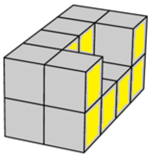
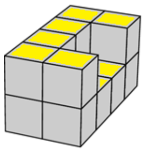
A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36

Решение. D). Со отстранување на една мала коцка добиваме 3 нови ѕида. Тоа значи дека бројот на ѕидовите се зголемува за $8\cdot 3=24$. Ова заедно со шесте ѕида на големата коцка, кои сега имаат форма на крст добиваме тело со $24+6=30$ ѕидови.

3. Ласте од идентични коцки ги составил следниве геометриски тела, кои што имаат по 8 коцки во основата. Потоа тој телата ги обоил. За кое тело Ласте потрошил најмногу боја?

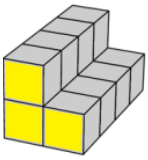
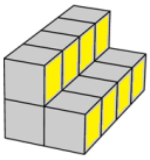
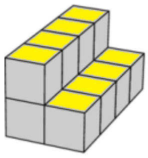
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **A).** Телото А) има на предната и задната страна по 5 квадрати, односно внупно 10 квадрати. На левата и десната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На долната и горната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На телото А) вкупно треба да се обојат $10+16+16=42$ квадрати.

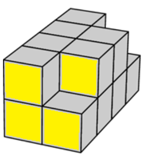
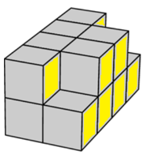
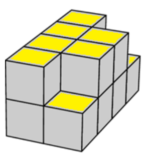
предна страна десна страна горна страна

Телото В) има на предната и задната страна по 3 квадрати, односно внупно 6 квадрати. На левата и десната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На долната и горната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На телото В) вкупно треба да се обојат $6+16+16=38$ квадрати.

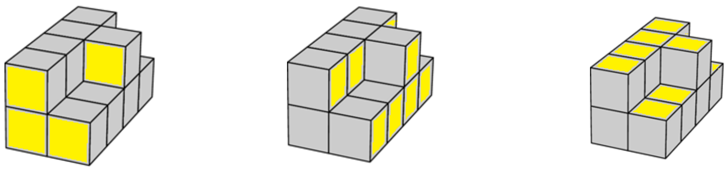
предна страна десна страна горна страна

Телото С) има на предната и задната страна по 4 квадрати, односно внупно 8 квадрати. На левата и десната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На долната и горната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На телото С) вкупно треба да се обојат $8+16+16=40$ квадрати.

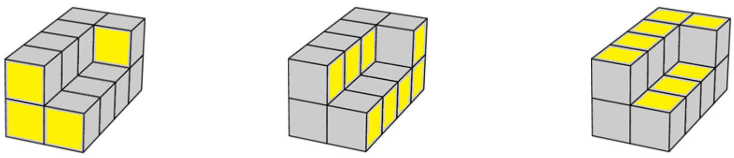
предна страна десна страна горна страна

Телото D) има на предната и задната страна по 4 квадрати, односно внупно 8 квадрати. На левата и десната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На долната и горната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На телото D) вкупно треба да се обојат $8+16+16=40$ квадрати.



предна страна   десна страна   горна страна

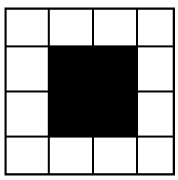
Телото E) има на предната и задната страна по 4 квадрати, односно внупно 8 квадрати. На левата и десната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На долната и горната страна има по 8 квадрати, односно вкупно 16 квадрати. На телото E) вкупно треба да се обојат $8+16+16=40$ квадрати.



предна страна   десна страна   горна страна

4. Лина направила голема коцка со димензии $4\times4\times4$, користејќи 32 бели и 32 црни коцки со димензии $1\times1\times1$. Таа ги поставила коцките така што најголемиот дел од површината на големата коцка е бел. Колкав дел од површината на големата коцка е бел?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{8}$



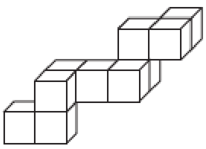
Решение. D). Од секоја мала коцка се видливи три, два или еден ѕид. Коцката има 8 темиња и во секое теме на малата коцка се видливи по 3 ѕида. Понатаму, коцката има 12 раба и на секој раб има по 2 мали коцки кои не се во темињата на големата коцка. Секоја од овие 2 мали коцки има по 2 видливи ѕида. Според тоа, на рабовите на големата коцка можеме да ставиме $8+12\cdot 2=32$ мали бели коцки. На тој начин малите бели коцки ги поставивме така што имаме најголем број нивни видливи ѕидови, односно најголем дел од површината на големата коцка е бел. Сега секој ѕид на големата коцка изгледа како на цртежот десно. Тоа значи дека $\frac{6\cdot 12}{6\cdot 16}=\frac{3}{4}$ од големата коцака е бел.

5. Кутија со големина $30\times 30\times 50$ сакаме да ја наполниме со коцки кои имаат еднакви големина. Кој е најмалиот број коцки со кои тоа можеме да го направиме?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 75 E) 150

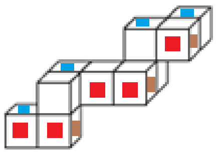
Решение. **C).** Имаме $NZD(30,30,50)=10$, па затоа во кутијата на секој раб може да се постават цел број коцки со должина на раб 10. Така, на рабовите ќе имаме 3, 3 и 5 коцки, што значи дека најмалиот број коцки е $3\cdot 3\cdot 5=45$.

6. Драган сака во кутија да ја смести конструкцијата дадена на цртежот десно. Која од следниве кутии е најмалата која тој може да ја искористи?

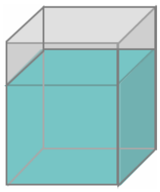


A) $3\times 3\times 4$ B) $3\times 5\times 5$ C) $3\times 4\times 5$ D) $4\times 4\times 4$ E) $4\times 4\times 5$

Решение. **C).** Дадената конструкција има три реда во висина, потоа има четири реда во ширина и пет реда во должина. Значи, најмалата кутија која е потребна е со димензии $3\times 4\times 5$.



7. Целосно затворен стаклен сад има форма на квадрат со должини на рабовите $a\ cm, b\ cm, c\ cm$ и во него е содржано извесно количество вода. Ако садот со масата се



допира со ѕидот со рабовите $a\,cm, b\,cm$, нивото на водата ќе биде $6\,cm$ под горната основа на кутија. Ако садот се допира со масата со ѕидот со рабовите $a\,cm, c\,cm$, нивото на водата ќе биде $2{,}5\,cm$ под горната основа, а ако садот се допира со масата со ѕидот со рабовите $b\,cm, c\,cm$, нивото на водата ќе биде $4\,cm$ под горната основа. Кое од дадените тврдења е точно?

A) $a<b<c$ B) $a<c<b$ C) $b<a<c$

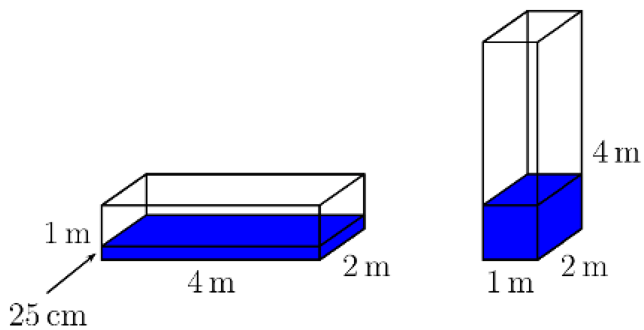
D) $c<b<a$ E) $b<c<a$

Решение. **C).** Волуменот на водата во садот можеме да го изразиме на три начини и тоа: $V=ab(c-6)=ac(b-2{,}5)=bc(a-4)$. Оттука добиваме

$$6b=2{,}5c,\ \ 6a=4c,\ \ 2{,}5a=4b.$$

Сега од првото равенство следува $b<c$, од второт следува $a<c$ и од третото следува $b<a$. Конечно, $b<a<c$.

8. На цртежот десно е прикажан сад во вид на квадар со димензии $4\,m\times 2\,m\times 1\,m$ во кој е турена вода до височина $25\,cm$.

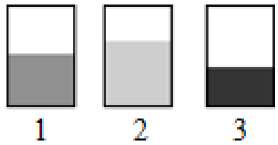


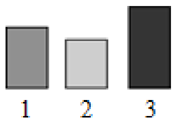
Потоа водата е претурена во сад во форма на квадар со димензии $1\,m\times 2\,m\times 4\,m$, (види цртеж). Колку е височината на нивото на водата во вториот сад?

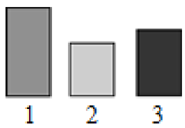
A) $25\,cm$ B) $50\,cm$ C) $75\,cm$ D) $1\,m$ E) $1{,}25\,m$

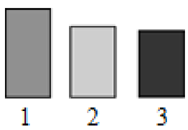
Решение. **D).** Бидејќи $25\,cm$ е $\frac{1}{4}$ од $1\,m$ заклучуваме дека водата зафаќа $\frac{1}{4}$ од волуменот на садот. Двата сада се со еднаков волумен, па затоа и во вториот сад водата ќе зафаќа $\frac{1}{4}$ од волуменот на садот. Овој сад има висина $4\,m$, што значи дека висината на водата во овој сад ќе биде $\frac{1}{4}\cdot 4\,m = 1\,m$.

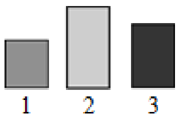
9. Мирка ставила исто количество на течност во три садови во вид на квадари. Ако ги гледаме од напред, тие изгледаат како да имаат иста големина, но течноста се искачила на различни нивоа во трите садови. Кој од следниве слики ги претставува трите сада гледано од горе?

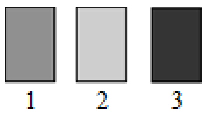


A) 

B) 

C) 

D) 

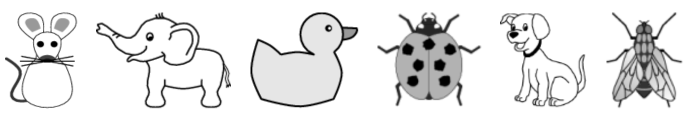
E) 

Решение. A). Садовите се со еднакви висини и должини, но очигледно со различни ширини, па затоа е најширок садот кај кој течноста е на најниско ниво. Според тоа, редоследот на садовите ако ги гледаме одозгора е:

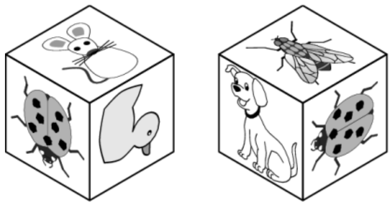
- садот 1 е со средна ширина,
- садот 2 е со најмала ширина бидејќи во него нивото на водата е најниско,
- садот 3 е со наголема ширина бидејќи во него нивото на водата е највисоко.

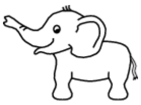
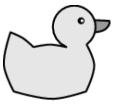
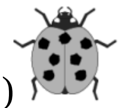
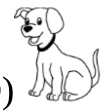
Значи, решението е A).

10. Ана залепила шест сликички на ѕидовите на една коцка:

.

Потоа ја покажала коцката на нејзиниот брат Михајло, кој два пати видел по три ѕида кои формираат по еден ќош (цртеж десно). Која сликичка се наоѓа на ѕидот што е спротивен на глувчето?



A)  B)  C)  D)  E) 

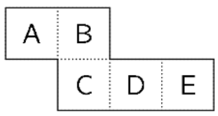
Решение. D). На првата коцка бубамарата е поставена така што зад неа е глувчето, а на втората коцка бубамарата е поставен така што кучето е пред неа. Според тоа, кучето и глувчето се на два спротивни ѕида, т.е. кучето е на ѕидот кој е спротивен на глувчето.

11. Три идентични коцки се поставени на маса. Колку е збирот на броевите кои се запишани на ѕидовите на кои лежат коцките?

A) 26 B) 40 C) 43 D) 47 E) 56

Решение. C). Ако првата коцка ја завртиме во десно гледаме дека на десниот ѕид од бројот 22 е бројот 34, а ако третата коцка ја завртиме во лево гледаме дека на левиот ѕид од бројот 22 е бројот 13. Значи, броевите 13 и 34 се на спротивни ѕидови. На потполно ист начин од втората и третата коцка заклучуваме дека на спротивни ѕидови се броевите 8 и 17. Останува броевите 5 и 22 да се на спротивни ѕидови. Значи, првата коцка лежи на ѕид на кој е бројот 13, втората на ѕид на кој е бројот 22 и третата на ѕид на кој е бројот 8. Конечно, бараниот збир е $12+22+8=43$.

12. Парче хартија е исечено како на цртежот десно и од него е направена отворена кутија. Кутијата е поста-

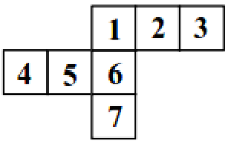


вена на маса така што нејзиниот отвор е на горната страна. Кој ѕид лежи на масата?

A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. B). При превиткувањето на хартијата се добива дека соседни ѕидови на ѕидот B се ѕидовите A, C, D и E. Бидејќи само ѕидот кој лежи на масата има четири соседни ѕида, на масата лежи ѕидот B.

13. Мајда нацртала мрежа од коцка и увидела дека наместо 6 нацртала 7 квадрати. Кој квадрат Мајда може да го отстрани така што фигурата остане цела и од неа да може да состави коцка?

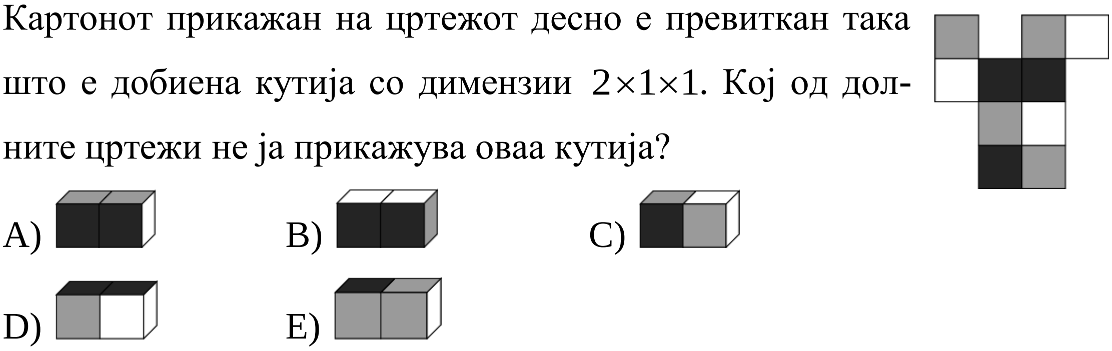


A) само 4 B) само 7 C) само 3 или 4

D) само 3 или 7 E) само 3, 4 или 7

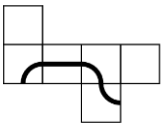
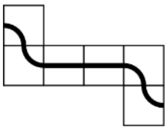
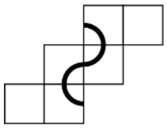
Решение. D). Може да ги отстрани само квадратите на крајот на мрежата. Тоа се квадратите 3, 4 и 7. Ако го отстрани квадратот 4, тогаш ќе се преклопат квадратите 3 и 7. Значи, Мајда може да го отстрани само 3 или 7.

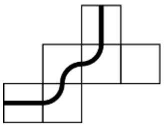
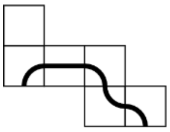
14. Картонот прикажан на цртежот десно е превиткан така што е добиена кутија со димензии $2\times1\times1$. Кој од долните цртежи не ја прикажува оваа кутија?



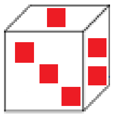
Решение. B). Кога дадената мрежа ќе се превитка во кутија со димензии $2\times1\times1$, нејзините четири ѕида ќе бидат правоаголници, а два ќе бидат квадрати. Наспроти ѕидот формиран од два црни квад-рати е ѕид формиран од црн и сив квадрат, а наспроти ѕидот од два сиви квадрати мора да е ѕид од сив и бел квадрат. Значи, ѕидовите во форма на квадрати се бели. Ова не важи за кутијата B), а сите други кутии ги задоволуваат горните услови за ѕидовите.

15. На секој од долните цртежи е прикажани мрежи на коцки. Само на една од овие коцки е нацртана затворена линија. Која мрежа ѝ припаѓа на оваа коцка?

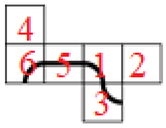
A)  B)  C) 

D)  E) 

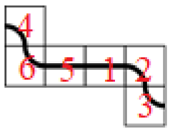
Решение. D). Да земеме дека мрежите соодветствуваат на коцки за играње (цртеж десно). Тогаш збировите на точките на спротивните ѕидови ќе биде еднаков на 7. За дадените мрежи со цифри да ги означиме точките на ѕидовите кога коцките се составени.



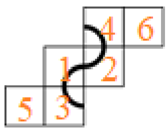
За мрежата A) едниот крај на линијата е на заедничкиот раб за ѕидовите 2 и 3, а другиот на заедничкиот раб на ѕидовите 3 и 6, па затоа на оваа коцка не е нацртана затворена линија.



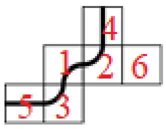
За мрежата B) краевите на линијата лежат на спротивни ѕидови, па затоа на оваа коцка не е нацртана затворена линија.



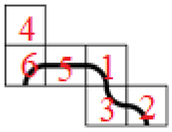
За мрежата C) краевите на линијата лежат на спротивни ѕидови, па затоа на оваа коцка не е нацртана затворена линија.



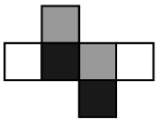
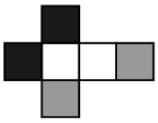
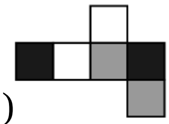
За мрежата D) двата краја на линијата се на заедничкиот раб за ѕидовите 4 и 5, па затоа на оваа коцка е нацртана затворена линија.

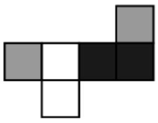
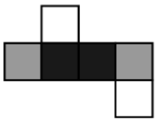


За мрежата Е) едниот крај на линијата е на заедничкиот раб за ѕидовите 2 и 6, а другиот на заедничкиот раб на ѕидовите 3 и 6, па затоа на оваа коцка не е нацртана затворена линија.



16. Ѕидовите на коцката се обоени со црна, сива и бела боја така што спротивните ѕидови се обоени со различна боја. Која од следниве мрежи не е можно да е на оваа коцка?

A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. **E).** Кај мрежата А) спротивните ѕидови се сив и црн, бел и сив, бел и црн, па ова може да е мрежа на дадената коцка.

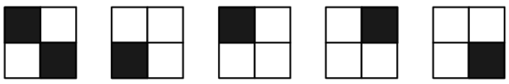
Кај мрежата В) спротивните ѕидови се црн и сив, црн и бел, бел и сив, па ова може да е мрежа на дадената коцка.

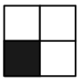
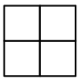
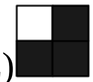
Кај мрежата С) спротивните ѕидови се црн и сив, црн и бел, бел и сив, па ова може да е мрежа на дадената коцка.

Кај мрежата D) спротивните ѕидови се црн и сив, црн и бел, бел и сив, па ова може да е мрежа на дадената коцка.

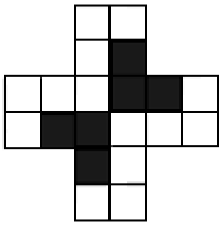
Кај мрежата Е) спротивните ѕидови се црн и сив, црн и сив, бел и бел, па затоа ова не е мрежа на дадената коцка.

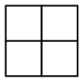
17. Голема коцка била направена од 8 идентични мали бели и црни коцки. Пет ѕида на големата коцка се прикажани на цртежот десно. Како изгледа шестиот ѕид на големата коцка?



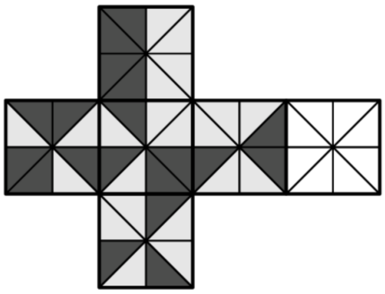
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **D).** Ако на средина го поставиме ѕидот кој има две бели и две црни дијагонални квадратчиња, тогаш во мрежата на големата коцка сигурно три од преостанатите четири ѕида се негови соседни ѕидови. Ако земеме предвид дека малите коцки се еднобојни, тогаш малите квадрати кои се наоѓаат на рабовите на големата коцка мора да се симетрични, па затоа трите ѕида соседни на централниот ѕид имаат еднозначен распоред. Сега лесно се гледа дека и четвртиот даден ѕид е соседен на централниот ѕид, па затоа се добива делот од мрежата прикажан на цртежот десно. Конечно, од добиениот дел од мрежата, заради еднобојноста на малите коцки, добиваме дека дека горниот ред на големата коцка е формиран од четири бели коцки, па затоа шестиот ѕид е бел (цртеж десно).



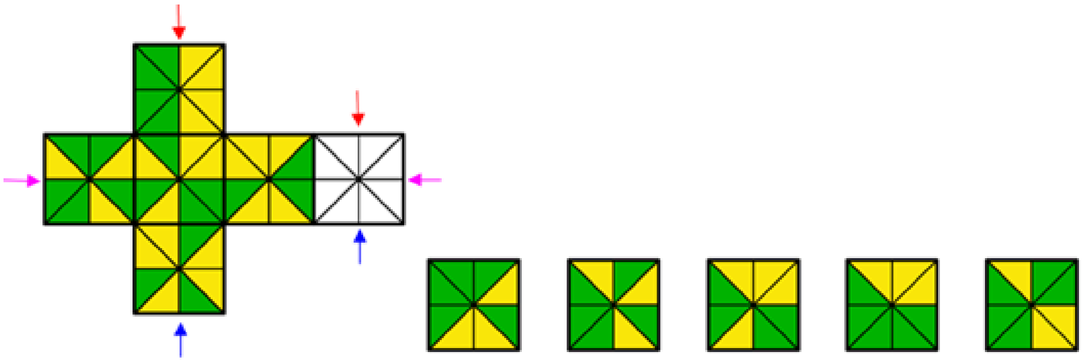


18. Од дадената мрежа прикажана на цртежот десно Филип ссоставил коцка така што триаголниците кои се допираат по секој заеднички раба на коцката се еднакво обоени. Како изгледа квадратот кој ќе биде на местото на белиот ѕид?



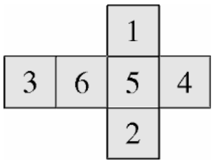
A)  B)  C)  D)  E) 

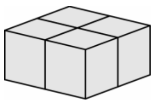
Решение. **B).** Да ги пребоиме мрежата и понудените квадрати со зелена и жолта боја како на долните цртежи и со стрелички со иста боја да ги означиме рабовите по кои белиот квадрат треба да се поврзи со другите три кавдрати во мрежата (види ги долните цртежи).



Сега е јасно дека бараниот квадрат е вториот квадрат од лево, при рабовите кои се означени со црвена и сина боја се поврзуваат огледално.

19. Горјан направил 4 идентични коцки користејќи ја мрежата дадена на цртежот десно. Потоа, тој со лепење на четирите коцки направил квадар како на цртежот лево. Залепени се страни на две коцки со исти броеви. Кој е најголемиот збир на броеви што може да го добие Горјан со собирање на броевите кои се запишани на страните на квадарот?

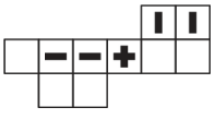
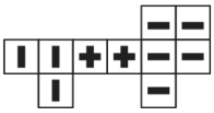
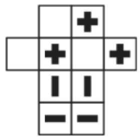


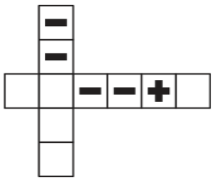
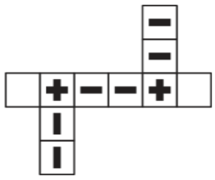


A) 66 B) 68 C) 72 D) 74 E) 76

Решение. **B).** Најголемиот можен збир се добива ако залепиме осум страни, две по две соседни, кои даваат најмал збир. Најмал збир на две соседни страни е $1+3=4$ и истиот може да се повтори четири пати на следниот начин: лепиме два пати по две коцки со страните на кои е запишан бројот 1, но така да бројот 3 се наоѓа на иста страна од добиениот квадар, а потоа двата квадари ги лепиме со страните на кои е запишан бројот 3. На тој начин збирот кој ќе го добие Горјан е $4\cdot(2+4+5+6)=68$ и тоа е најголемиот можен збир.

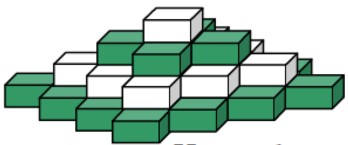
20. Која од понудените фигури не е мрежа на квадарот прикажан на цртежот десно?

A)  B)  C) 

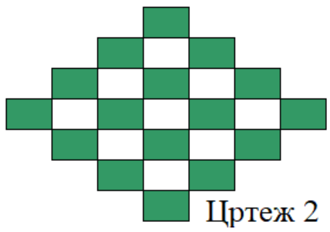
D)  E) 

Решение. **B).** Фигурата прикажана на цртежот B нема четири знаци – кои може да се постават по парови во иста насока, а на двата пара знаците да се во спротивни насоки. Затоа оваа фигура не може да е мрежа на дадениот квадар. За останатите фигури со соодветни превиткувања може да се добијат трите видливи ѕида на дадениот квадар. Обиди се тоа самостојно да го направиш.

21. Во продавница за играчки се наоѓа четирикатна кула составена од зелени и бели коцки (цртеж 1). Секој кат е составен од истобојни коцки. На цртежот 2 е прикажано како изгледа конструкцијата кога ќе се погледне од горе. Колку бели коцки се употребени за градбата на конструкцијата?



Цртеж 1

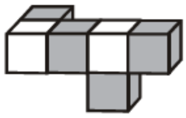


Цртеж 2

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

Решение. **E).** Белите коцки на цртеж 2 ја прикажуваат контурата на конструкцијата на вториот кат, која содржи само бели коцки. Значи, на вторит кат има $1+3+5+3+1=13$ бели коцки. На четвртиот кат има уште 1 бека коцка, што значи дека вкупно има $13+1=14$ бели коцки.

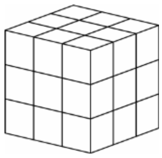
22. На цртежот десно е прикажано геометриско тело составено од 2 бели и 4 сиви единечни коцки. Колку квадари содржи ова тело кои се составени од еднаков број бели и сиви коцки?

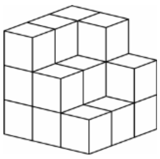


A) 3 B) 4 C)5 D) 6 E) друг одговор

Решение. D). Секои две соседни бела и сива коцка формираат по еден квадар со димензии $2\times1\times1$ и тоа се 5 квадари. Двете бели со двете сиви коцки кои се во ист ред формираат квадар со димензии $4\times1\times1$. Значи, вкупно имаме $5+1=6$ квадари.

23. Матео со редење на мали идентични коцки сака да направи коцка каква што има Христина (цртеж десно). Но, на Матео му снемало мали коцки, и тој направил само дел



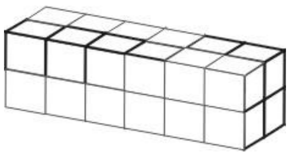


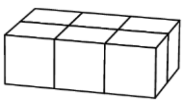
од коцката што требало да ја направи (цртеж лево). Колку мали коцки му се потребни на Матео за да ја доправи коцката?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. C). Првиот ред оддолу е целосно направен. Во вториот ред недостасуваат 2 коцки, во третиот ред недостасуваат 5 коцки. Според тоа, на Матео му се потребни $2+5=7$ коцки.

24. Марко и Никола имаат еднаков број идентични коцки. Од своите коцки Марко направил квадар како на цртежот десно.





Првиот ред на квадарот на Никола е прикажан на цртежот лево. Колку редови има квадарот на Никола?

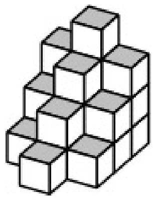
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). Од квадарот на Марко гледма е дека секое дете има по $2\cdot2\cdot6=24$ коцки.

Во првиот ред на квадарот на Никола има $2 \cdot 3 = 6$ коцки.

Значи, неговиот квадрат ќе има $24:6=4$ редови.

25. На цртежот десно е прикажан подиумот за доделување на наградите на десетте првопласирани ученици на натпреварот „Кенгур без граници“. Подиумот е изграден од дрвени коцки, кои се наредени така што соседните ѕидови се допираат. Колку коцки се употребени за правење на подиумот?

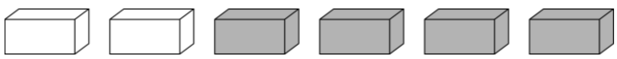


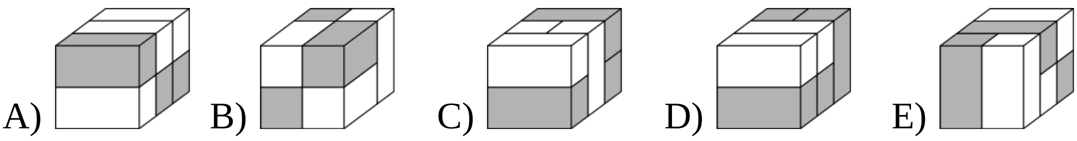
A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

Решение. D). *Прв начин.* Гледано однапред во крајните колони има по $1+2+3=6$ коцки, а во средната колона има $6+4=10$ коцки. Значи, подиумот е направен од $6+10+6=22$ коцки.

Втор начин. На врвот на подиумот има 1 коцка, а во секој ред надолу има по 3 коцки повеќе отколку во претходниот ред. Имаме четири реда, што значи дека подиумот е составен од $1+4+7+10=22$ коцки.

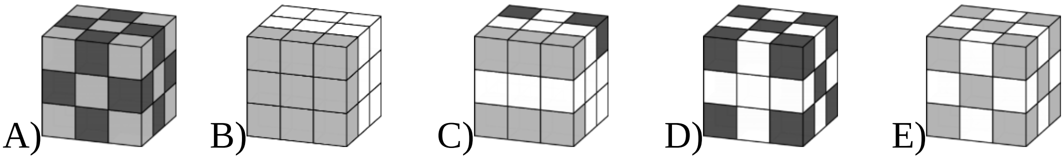
26. Кое од следниве тела може да се направи со дадените шест цигли?





Решение. D). Дадени се 2 бели и 4 сиви цигли. Телата A, B, C и E имаат по три бели цигли, па затоа не може да се состават. Телото D има 2 бели и 4 сиви цигли и истото може да се состави.

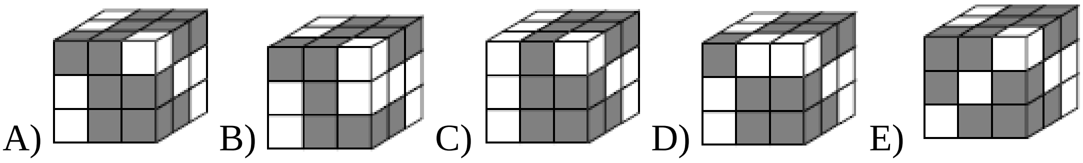
27. Маја има точно 10 бели коцкички, 9 светло сиви и 8 темно сиви коцкички, сите со исти димензии. Таа ги залепила коцкичките и направила една голема коцка. Која од понудените би можело да биде коцката што ја направила Маја?



Решение. В). Коцката А) има 10 светло сиви коцкички, па затоа истата не може да ја состави. Коцката С) има 11 бели, па затоа не може да ја состави. Коцката D) има 9 темно сиви коцкички, па затоа не може да ја состави. Коцката Е) има 10 светло сиви коцкички, па затоа не може да ја состави. На коцката В) се гледаат 9 светло сиви и 10 бели коцкички. Бидејќи големата коцка има 27 мали коцкички, преостануваат $27-(10+9)=8$ коцкички кои не се гледаат и сите тие може да се темно сиви.

.

28. Една рамка се состои од 2 сиви коцки и 1 бела коцка залепени заедно, како што е прикажано на цртежот десно. Која коцка може да се направи со 9 такви рамки?



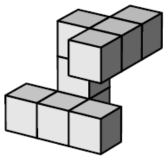
Решение. А). Очигледно гледајќи најгорниот на коцката А може да се состави, а средниот ред се добива со вртење за 180° на најгорниот ред. Долниот ред се добива, на пример, ако напред се постави една рамка, зад неа втората рамка во иста положба и на крајот третата рамка завртена обратно.

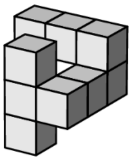
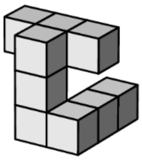
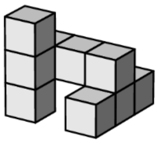
Коцката В не може да се направи бидејќи не може да се состави средниот ред. Имено, за да има три бели коцки на левата страна мора три рамки да се поставени во хоризонтална положба една до друга, а тоа не е можно за предната рамка.

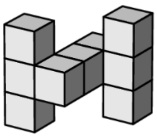
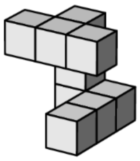
Предниот ѕид на коцката С) не може да се состави, бидејќи нема како да се добие неговиот горен ред.

Со слични размислувања се докажува дека не е можно да се добијат е коцките D и E. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

29. На цртежот десно е дадено тело составено од девет еднакви коцки. Кое од долните пет тела се совпаѓа со ова тело?

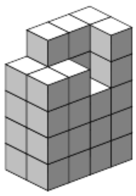


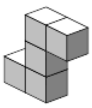
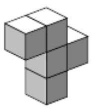
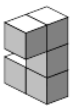
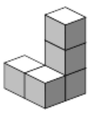
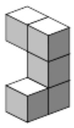
A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. **C).** Даденото тело е составено од три кули со по три коцки. Притоа една од овие три кули со своите крајни коцки ги поврзува другите две со нивните средни коцки. Затоа телата А), B) и E) отпаѓаат. Понатаму, две кули кај телото D) се наоѓаат на спротивните страни на третата кула, па затоа и ова тело отпаѓа. Останува телото C) кај кое ако исправената кула се постави да лежи се добива даденото тело.

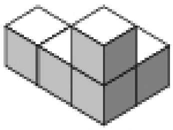
30. Која од следниве фигури ќе го дооформи квадарот прикажан на цртежот десно?

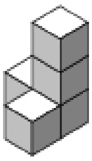
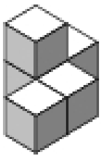
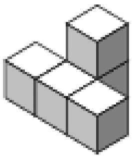
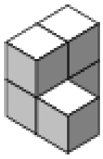
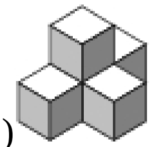


A)  B)  C)  D)  E) 

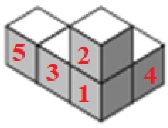
Решение. **E).** Во горниот ред на квадарот недостасуваат три коцки на кои на левата страна наназад се надоврзува една коцка и на десната страна надолу се надоврзува една коцка. Ваков распоред на коцките има само фигурата E). Имено, кај А) и B) сите коцки се во еден ред, кај D) двете коцки кои се надоврзуваат на трите коцки се на левата страна, а кај C) петтата коцка наместо надолу е поставена нагоре.

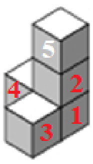
31. На цртежот десно е прикажано геометриско тело составена од пет еднакви коцки. Кое од понудените пет тела не може да се добие од даденото тело со преместување на само една коцка?

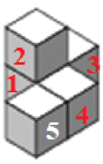


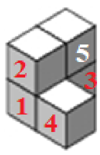
A)  B)  C)  D)  E) 

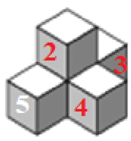
Решение. **C).** Нека коцките на даденото тело ги означиме како на цртежот десно. Тогаш со преместување на само една коцка телата A, B, D и E може да се добијат како што е прикажано на долните цртежи.



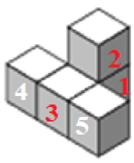




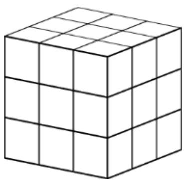


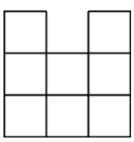


Што се однесува до телото C) бидејќи во долниот преден ред има три коцки, а даденото тело има само една коцка, јасно е дека е погтребно да преместиме две коцки за истото да го добиеме (цртеж десно).



32. На цртежот десно е дадена $3\times3\times3$ коцка, направена од 27 единечни коцки. Кој е најмалиот број единечни коцки кои треба да се отстранат од големата коцка за да погледот од десно, погледот од горе и погледот од напред на новодобиеното тело е како на цртежот лево?





A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

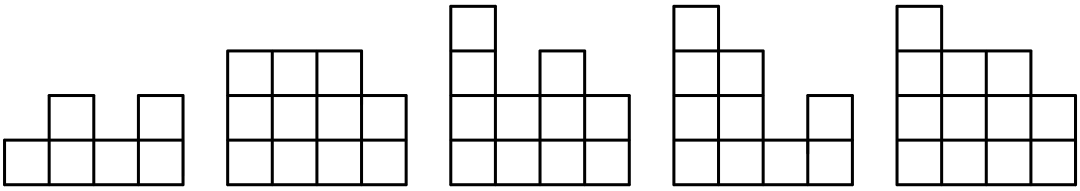
Решение. D). За да погледот од десно биде како на цртежот гледајќи од десно мора од горниот ѕид да се извадат трите коцки од средниот ред. Слично, од средниот ред на најгорниот ѕид гледајќи однапред треба да се извадат преостанатите две коцки. Сега, доволно е од предниот ѕид да се извадат двете мали коцки во средниот ред. Значи, најмалиот број коцки кои треба да ги извадиме е $3+2+2=7$.

33. Никола направил зграда од коцки. На цртежот лево е дадена шема на зградата кога ја гледаме одозгора. Во секое квадратче е запишан бројот на коцки што се поставени една над друга во форма на кула. Ако зградата ја погледнеме однапред, која шема ќе ја видиме?

Задна страна

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

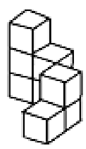
Предна страна



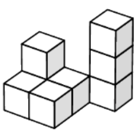
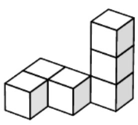
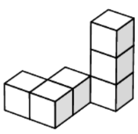
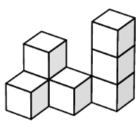
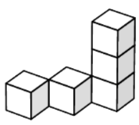
A) B) C) D) E)

Решение. E). Во секој ред ќе ја гледаме највисоката кула. Значи, во првата колона гледаме 4 коцки, во втората 3 коцки, во третата 3 коцки и во четвртата 2 коцки.

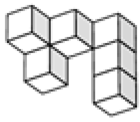
34. Кое од телата прикажани на долните цртежи, комбинирано со телото прикажано на цртежот десно, ја реализира табелата, која го покажува бројот на коцките во секој столб?



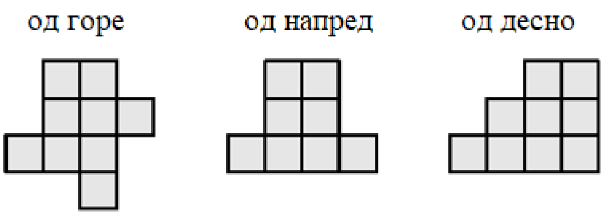
3	2	3
2	1	2
1	0	1

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **D).** Даденото тело е составено од 8 коцки. Во табелата која го покажува бројот на коцките по комбинациите збирот на броевите е 15. Значи, телото со кое треба да се комбинира даденото тело треба да има 7 коцки. Телото А) има 8 коцки и затоа отпаѓа, телата В), С) и Е) имаат по 6 коцки и затоа отпаѓаат. Останува телото D) кое има 7 коцки. Комбинирањето на овие две тела се прави така што телото D) ќе се заврти во положба како на цртежот десно (гледано оддолу), а потоа столбот од три коцки ќе се постави како трет во аголот кој е заеднички за двата ѕида на даденото тело.

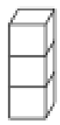


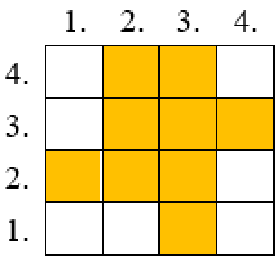
35. Трите цртежи ги покажуваат погледите одгоре, однапред и оддесно на објект направен од коцки. Кој е најголемиот можен број коцки кои се употребени за да се направи овој објект?



A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

Решение. **B).** Со ставање на коцките една врз друга добиваме кули како на цртежот десно.





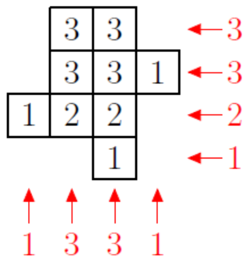
Како што може да забележиме од погледот одгоре, коцките се распоредени во кули кои се поставени во 4×4 мрежа. Да го поставиме објектот во ваква мрежа согласно погледот од горе.

Погледите однапред и оддесно ни даваат информација за висината на најголемата кула во секој ред и во секоја колона. Како што можеме да видиме од погледот од горе во првата и четвртата

	1.	2.	3.	4.
4.		3	3	
3.		3	3	1
2.	1	2	2	
1.			1	

колона има по една кула, а од погледот од напред заклучуваме дека овие кули се составени од по една коцка. Понатаму, според погледот одгоре во четвртиот ред има една кула, а од погледот оддесно заклучуваме дека оваа кула е составена од една коцка. Останува да ги определиме најголемите можни висини на кулите кои се во пресекот на првите три реда и втората и третата колона. Од погледот однапред заклучуваме дека овие кули може да имаат по најмногу три коц-ки, но од погледот оддесно гледаме дека кулите кои се во првите два реда може да имаат по најмногу три коцки, а додека кулите кои се во третиот ред може да имаат по најмногу две коцки. Претходно изнесеното значи дека најголемиот можен број коцки за секоја кула е како на цртежот десно. Конечно, најголемиот можен број коцки е

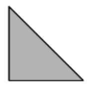
$$3\cdot 1+2\cdot 2+4\cdot 3=19\,.$$



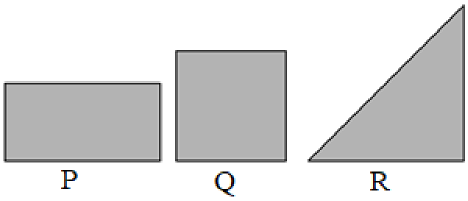
Коментар. Најголемиот број коцки во секоја кула, врз основа на погледот од горе и користејќи ги погледите од напред и од десно може да се прикаже како на цртежот десно.

5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Пабло има парче хартија. Тој го свиткал точно на половина. Потоа вака свиткано, пак го свиткал точно на половина и така го добил триаголникот прикажан на цртежот десно.



Кое парче хартија P, Q или R може да биде парчето хартија кое Пабло го имал на почетокот?



A) само P B) само Q

C) само R D) само P или Q E) било кое P, Q или R

Решение. **E).** Од правоаголникот P триаголникот може да се добие ако прво тој се превитка на половина по подолгата страна, а потоа добиениот квадрат се превитка по дијагоналата.

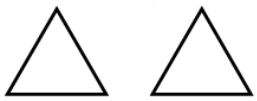
Од квадратот Q триаголникот може да се добие ако тој прво се превитка по дијагонала, а потоа добиениот рамнокрак триаголник се првитка по висината повлечена од правиот агол.

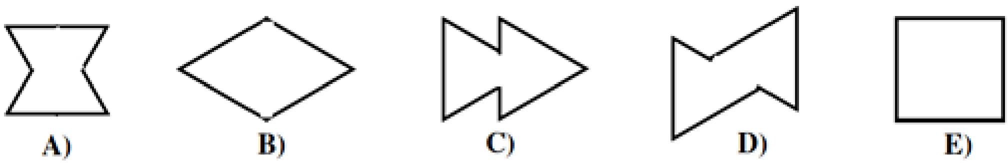
Од триаголникот R бараниот триаголник се добива со две последователни превиткувања по висините повлечени од правиот агол.

2. Дадени се два еднакви квадрати (цртеж десно). Која од следниве фигури не може да се добие со лепење на овие квадрати?

Решение. **A).** Фигурата A не може да се добие бидејќи дијагоналата на квадтатот е подолга од неговата страна. Фигурата B се добива ако квадратите се преклопат така што дијагоналите на горниот квадрат се совпаднат со правите кои минуваат низ средините на неговите страни. Фигурата C се добива ако квадратите се ставаат еден до друг. Фигурата D се добива ако квадратите се поставаат така да нивните соодветни страни се паралелни, а горниот десен агол на едниот квадрат се покрие со долниот лев агол на другиот квадрат. Фигурата E се добива така што дијагоналата на горниот квадрат се поклопи со страната на долниот квадрат.

3. Стојмен прави фигури од два еднакви рамнострани триаголници. Која од фигурите тој не може да ја направи?

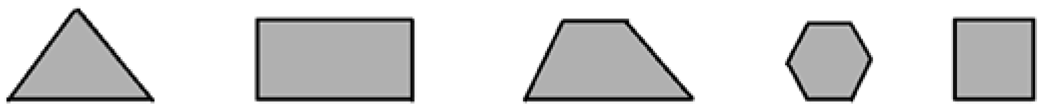




A) B) C) D) E)

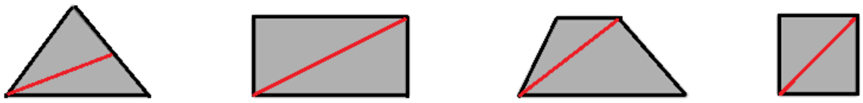
Решение. **E).** Фигурата A) може да се добие со поставување еден над друг на двата триаголници при што страната на вториот триаголник е паралелна со страната на првиот. Фигурата B) се добива со поврзување на двата триаголници со заедничка страна. Фигурата C) се добива со покривање на едниот агол на триаголникот со другиот триаголник при што озновите на двата триаголника ќе бидат паралелни. Фигурата D) се добива од фигурата B) со лизгање на едниот по другиот триаголник така што заеднички ќе им се по половина страна. Фигурата E) не може да се добие бидејќи не може да се добија два прави агли.

4. Која од следните фигури не може со една отсечка да биде поделена на два триаголника?



A) B) C) D) E)

Решение. D). Триаголникот и четириаголниците може да се поделат со една отсечка на два триагоника. Примери на такви поделби се прикажани на долните цртежи.

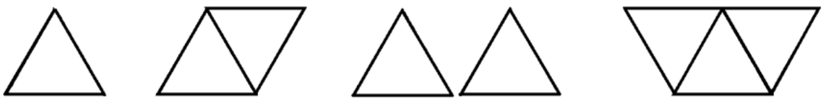


Шестаголникот не може да биде поделен на саканиот начин. Имено, ако отсечката минува низ две темиња кои не се соседни, тогаш таа го дели шестаголникот на триаголник и петаголник, или пак на два четириаголници, а ако не минува низ две несоседни темиња, тогаш лесно се гледа дека делбените многуаголници не се и двата триаголници. Исто така, ако отсечката минува низ едно реме и точка на некоја од страните или двет точки кои припаѓаат на различни страни не може да се добијат два триаголника. Провери!

5. Со кој од посочените броеви еднакви дрвца не може да се формираат триаголници, при што сите дрвца мора да се искористат? (Дрвцата не смее да се кршат или прекршуваат.)

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

Решение. D). На долните цртежи е прикажано како со 3, 5, 6 и 7 дрвца може да се состават триаголници.



Јасно, откако ќе се состави еден триаголник со 3 дрвца, со додавање на уште 1 дрвце не може да се добие нов триаголник. Значи, одговорот е 4 дрвца.

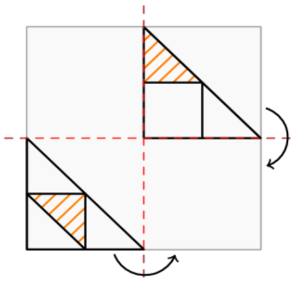
6. Колку различни триаголници може да се направат користејќи три од дадени пет дрвца со должини $1\,cm$, $2\,cm$, $3\,cm$, $4\,cm$ и $5\,cm$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **D).** Ќе користиме дека за произволен триаголник важи неравенството на триаголник $a<b+c$, каде a,b,c се должините на страните на триаголникот. Јасно, стапчето со должина $1\,cm$ не можеме, па ни остануваат само стапчињата $2\,cm, 3\,cm, 4\,cm$ и $5\,cm$. Со овие четири стапчиња може да се состават триаголниците чии должини на страни се:

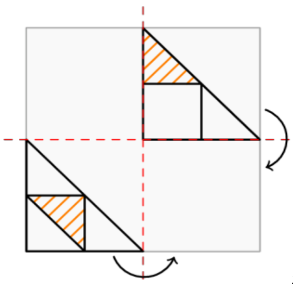
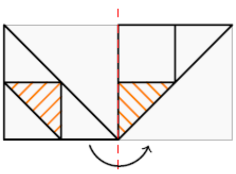
$$2\,cm, 3\,cm, 4\,cm;\ 3\,cm, 4\,cm, 5\,cm \text{ и } 2\,cm, 4\,cm, 5\,cm.$$

7. На парче проѕирна хартија е нацртан е квадрат со две фигури како што е прикажано на цртежот десно. Потоа квадратот е свиткан двапати, прво по хоризонтакната линија, а потоа по вертикалната линија. Која фигура е добиена?



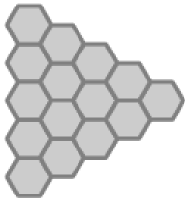
A)  B)  C)  D)  E) 

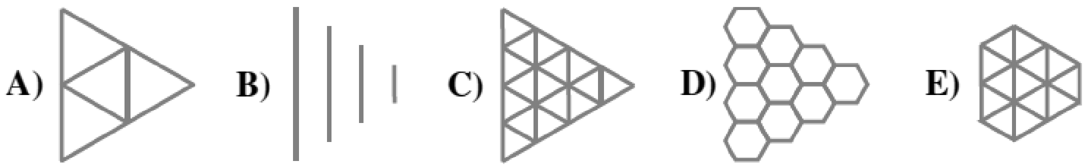
Решение. **A).** Редоследно имаме:

 ,  и .

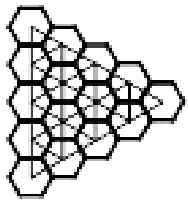
8. На цртежот десно цртаме нова фигура која што се добива со поврзување на центрите на два соседни шестаголници (два шестаголници се соседни ако имаат заедничка страна).

Која фигура ќе се добие?





Решение. **C).** Кога ги поврзуваме центрите на три соседни шестаголници добиваме рамностран триаголник. Според тоа, при поврзувањето на центрите на првите две колони шестаголници добиваме колона од четири и колона од три рамнострани триаголници. Со поврзување на центрите на втората и третата колона добиваме колона од три и колона од два рамнострани триаголници. Слично се добиваат колона од два и колона од 1 рамностран триаголник и на крајот само еден рамностран триаголник. Според тоа, фигурата која се добива е рамностран триаголник кој е разделен на



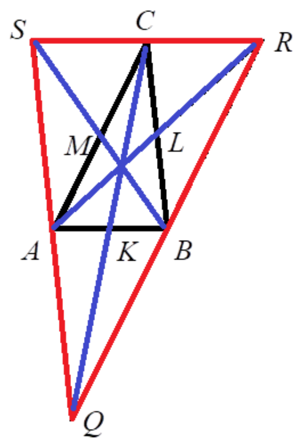
$$(4+3)+(3+2)+(2+1)+1=7+5+3+1=16$$

еднакви рамнострани триаголници.

9. Дадени се три точки кои се темиња на триаголник. Сакаме да додадеме уште една точка за да четирите точки се темиња на паралелограм. На колку различни начини може да ја додадеме четвртата точка?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Зависи од почетните три точки

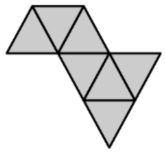
Решение. **C).** Нека ABC е триаголник и K,L,M се средини на страните AB,BC и CA соодветно. Тогаш AL,BM и CK се тежишни линии на триаголникот. Нека Q,R и S се точки кои лежат на полуправите AL,BM и CK такви што



$$\overline{AL}=\overline{LR},\ \overline{BM}=\overline{MS},\ \overline{CK}=\overline{KQ}.$$

Бидејќи паровите отсечки AB и CQ, AR и BC, AC и BS се половат, четириаголниците $AQBC, ABRC, ABCS$ се паралелограми. Бидејќи точно две страни од триаголникот треба да се страни и на таквите можни паралелограми, најдените паралелограми се единствени.

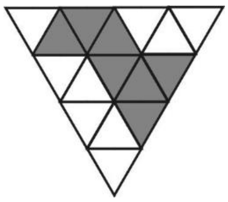
10. Максим сака да формира голем триаголник користејќи мали складни триаголници. Тој веќе поставила неколку мали триаголници како на цртежот десно. Кој е најмалиот број мали триаголници со кои Максим може да го доврши големиот триаголник?



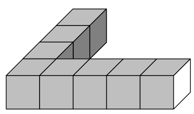
A) 5 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Решение. **B).** Најмал број мали триаголници ќе поставиме ако со најмал број мали триаголници составиме една страна на големиот триаголник. Тоа може да се направи со поставување на четири триаголници во горниот ред.

Така го добиваме триаголникот прикажан на цртежот горе десно, кој е составен од $7+5+3+1=16$ мали триаголници. Значи, потребно е да се постават најмалку $16-7=9$ мали триаголници.

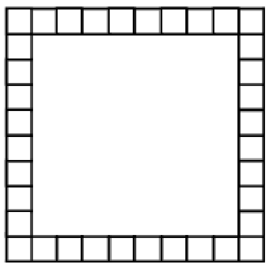


11. Невена употребила 36 идентични коцки за да направи ограда од коцки околу квадратен полигон. Дел од оградата е прикажана на цртежот. Колку коцки и се потребни на Невена за да го пополни заградениот простор?



A) 36 B) 49 C) 64 D) 81 E) 100

Решение. **C).** Гледано од горе распоредувањето на 36 еднакви коцки околу квадрат е прикажано на цртежот десно. Значи, Невена оградата ја направила околу квадрат над чија страна се поставени

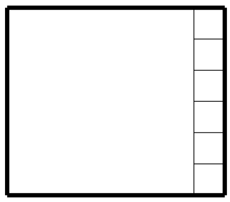


по 8 коцки. Според тоа, за да го пополни про-сторот на Невена и се потребни $8\cdot 8=64$ коцки.

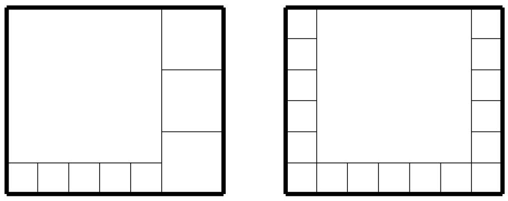
12. Петар сака правоаголник со димензии 6×7 да го раздели на квадрати на кои страните им се природни броеви. Кој е најмалиот број на квадрати што може да се добие при такво разделување?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 42

Решение. Очигледно е дека страните на делбените квадрати треба да се паралелни со страните на дадениот правоаголник. Ќе разгледаме повеќе случаи.



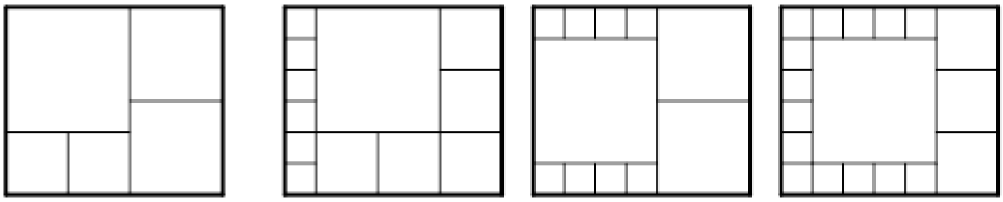
Случај 1. Во поделбата има делбен квадрат со страна 6. Може да има најмногу еден делбен квадрат со страна 6. Во тој случај има уште 6 делбени квадрати со страна 1 (види цртеж). Значи, во овој случај имаме 7 делбени квадрати.



Случај 2. Во поделбата има делбен квадрат со страна 5.

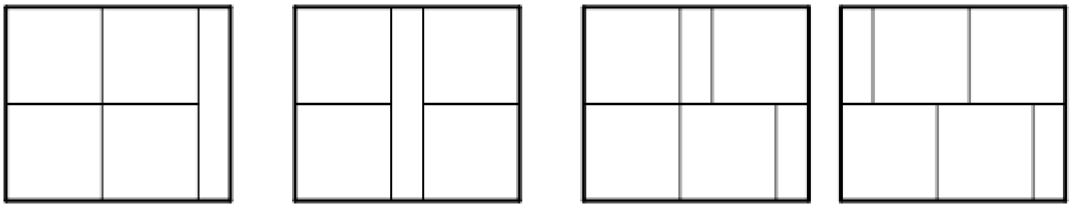
Може да има најмногу еден делбен квадрат со страна 5. Притоа можни се два подслучаи кои се дадени на цртежот. Во првиот подслучај (лев цртеж), најмалиот број на делбени квадрати е 9, а во вториот подслучај најмалиот број на делбени квадрати 18.

Случај 3. Во поделбата има делбен квадрат со страна 4. Може да има најмногу еден делбен квадрат со страна 4. Можни се четири подслучаи, кои се дадени на цртежот. Во првиот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 5 (прв цртеж од лево кон десно). Во вториот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 12. Во третиот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 11, а во четвртиот подслучај најмалиот број на делбени квадрати е 17.



Случај 4. Најголем делбен квадрат е квадрат со должина на страна 3. Притоа може да има еден, два, три или четири делбени квадрати со страна 3.

Има четири делбени квадрати со должина на страна 3. Тогаш тие може да се распоредени на еден од следните начини:



Во секој од овие подслучаи најмалиот број на делбени квадрати е 11.

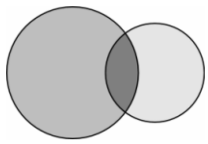
Има три делбени квадрати со должина на страна 3. Бидејќи $(42-27):4=15:4=3,75$, минималниот број на делбени квадрати не може да е помал од 6.

Има два делбени квадрати со должина на страна 3. Бидејќи $(42-18):4=24:4=6$, минималниот број на делбени квадрати не може да е помал од 8.

Има еден делбен квадрат со должина на страна 3. Бидејќи $(42-9):4=33:4=8,25$, минималнио број на делбени квадрати не може да е помал од 9.

Според дискусијата од четирите случаи, најмалиот број на делбени квадрати на кои може да се раздели правоаголник со димензии 7×6 е 5.

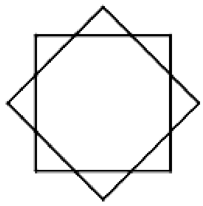
13. Со пресек на два круга Пабло добил фигура, која се состои од три дела (види цртеж). Колку најмногу



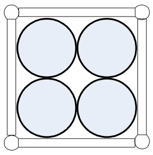
делови што може да добиеме со цртање на два исти квадрати?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Решение. E). За да се добие еден дел мора страна на едниот квадрат да го пресекува другиот квадрат. Најголемиот број делови се добива кога секоја страна на првиот квадрат отсекува дел од вториот квадрат и кога секоја страна на вториот квадрат отсекува дел од првиот квадрат. Така добиваме $4+4=8$ делови кои страните на едниот квадрат ги отсекуваат од страните на другиот квадрат, што заедно со заедничкиот дел на двата квадрати дава $8+1=9$ делови. На цртежот десно е прикажана положба на два квадрати кои се сечат во 9 делови.

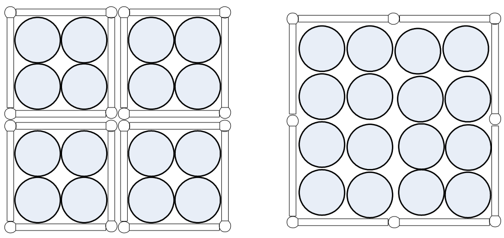


14. Маријана може да стави 4 еднакви монети во квадрат направен од 4 чкорчиња (види цртеж). Кој е најмалиот број на чкорчиња кои Маријана треба да ги употреби за да направи квадрат во кој може да се стават 16 монети без тие да се преклопуваат?



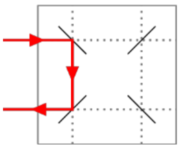
A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

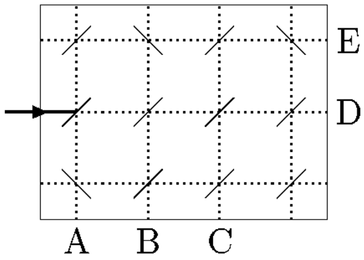
Решение. A). Ако Маријана употреби четири квадрати како дадениот, тогаш таа може да направи квадрат во кој се сместени 16 монети (види цртеж). Доволно е да ги отстрани осумте чкорчиња кои се во внатрешноста на добиениот квадрат со спојувањето и таа добива квадрат во кој се сместени 16 монети. Притоа таа употребува 8 чкорчиња (види цртеж).



15. Ласерскиот зрак се одбива од огледалото на начин на кој е прикажан на левиот цртеж.

Во која точка ќе заврши ласерскиот зрак прикажан на десниот цртеж?

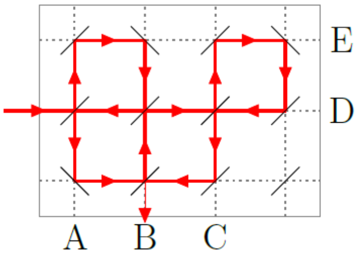




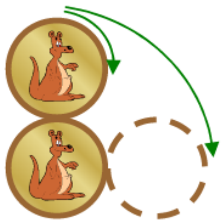
A) A B) B C) C

D) D E) E

Решение. B). Движењето на ласеркиот зрак е дадено на цртежот десно. Според тоа, зракот ќе заврши во точката B.



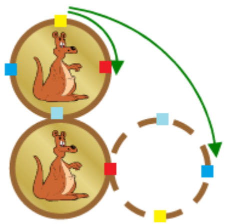
16. Горната монета без лизгање ротира околу долната фиксна монета, како што е прикажано на цртежот. Која е заемната положба на монетите по ротирањето?



A) B) C) D)

E) зависи од брзината на ротацијата

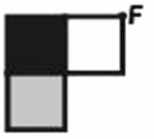
Решение. A). Бидејќи при ротирањето на горната монета црвената точка поминува четвртина од должината на монетата таа ќе ја допира долната -, цртеж десно). Сега, бидејќи редоследот на обоените точки при ротирањето не се менува истиот е прикажан на цртежот десно, што значи дека новата положба е дадена на цртежот A).



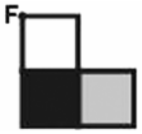
17. Фигурата прикажана на цртежот десно ја ротираме околу точката F за половина круг. Која фигура ќе ја добиеме?

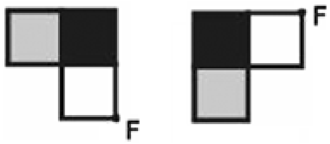
A) 

B) 

C) 

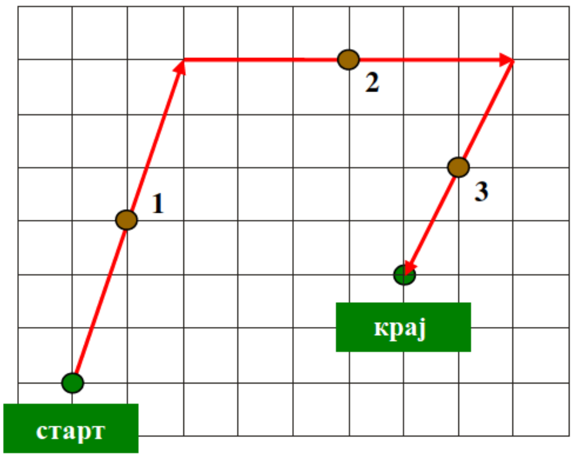
D) 

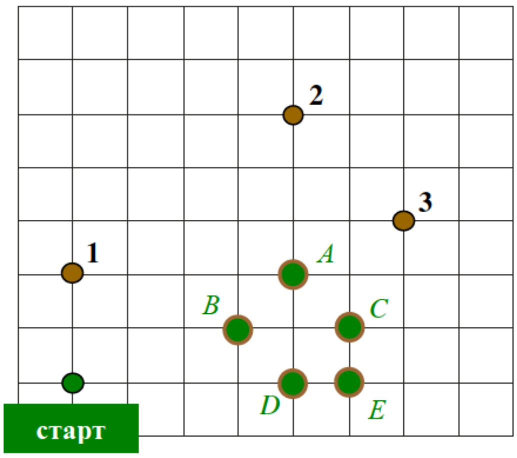
E) 



Решение. **C).** Ротацијата за половина круг можеме да ја направиме ако прво фигурата ја ротираме за прав агол, а потоа добиената фигура ја ротираме уште еднаш за прав агол. При првата ротација за прав агол ја добиваме фигурата прикажана на првиот цртеж десно, а при ротацијата на добиената фигура за прав агол ја добиваме фигурата прикажана на вториот цртеж.

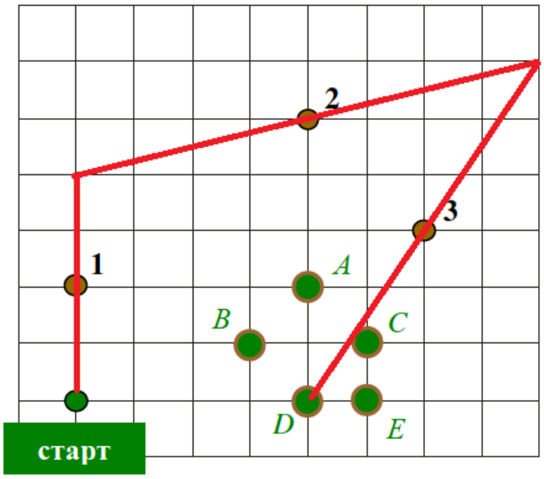
18. Кенгурите Хип и Хоп играат игра. Тие прескокнуваат преку камења, при што прескокнатиот камен е средина на растојанието изминато при скокот. На цртежот лево е прикажано како Хоп скокал прескокнувајќи ги камењата 1, 2 и 3 во дадениот редослед. Хип треба да ги прескокне истите три камења 1, 2 и 3 во дадениот редослед (цртеж десно), но скокањето го почнал од друга позиција. Која од точките A, B, C, D и E ќе биде точка во која тоа ќе стаса?





A) A B) B C) C D) D E) E

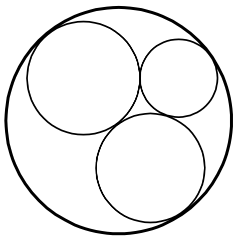
Решение. **D).** Според условот на задачата при скокањето кенгу-рите скокаат од точката во која моментално се наоѓаат во точка симетрична на точката во која се наоѓа каменот. Редоследот на скокање на Хип е прикажан на цртежот десно. .



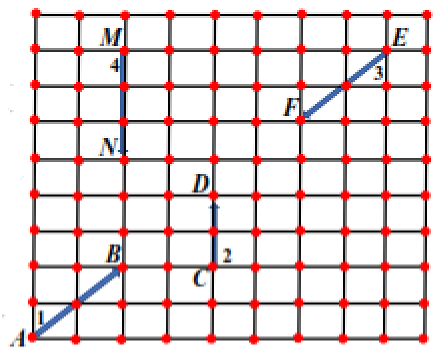
19. На таблата треба да се нацртаат четири кружници така што секоја од нив допира барем една од другите три кружници. Кој е наголемиот можен број допирни точки?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Решение. **D).** Најголемиот број допирни точки се добиваат ако секои две од четирите кружници се допираат меѓу себе. На цртежот десно е прикажан овој случај и бројот на допирните точки е 6.



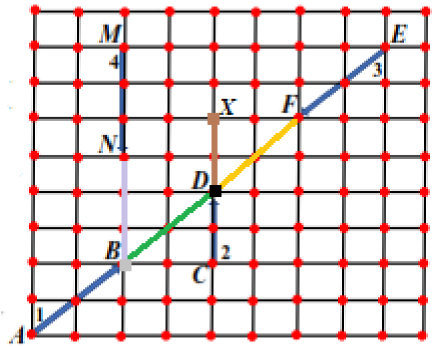
20. Во забавен парк четири електрични коли кои на долниот цртеж се означени со броевите 1, 2, 3 и 4 се движеле вкупно 10 секунди по прави линии, секоја со своја постојана брзина. Тие тргнале едновремено и на почетокот се наоѓале во точките A, C, E, M за да по 5 секунди соодветно се најдат во точките B, D, F, M . Кои колички ќе се судрат на крајот од десеттата секунда?



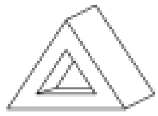
A) 1, 2 и 3 B) 2 и 3 C) 1, 3 и 4

D) 1 и 3　　　　E) 1 и 2

Решение. **D).** Бидејќи количките се движеле по прави линии, секоја со своја постојана брзина, секоја од нив во следните 5 секунди ќе се помести во истата насока за исто растојание (ист вектор) за кое се поместила во првите 5 секунди. Значи, по 5 секунди количките 1, 2, 3, 4 ќе се најдат соодветно во точките D, X, D, B (цртеж десно). Според тоа, по 5 секунди ќе се судрат количките 1 и 3.



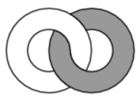
21. Колку ѕидови има телото прикажано на цртежот десно?

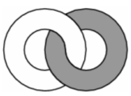
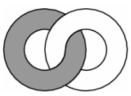
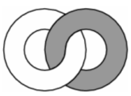
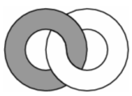
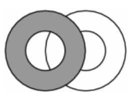


A) 3　　　B) 5　　　C) 6　　　D) 8　　　E) 12

Решение. **D).** Тристрана призма има пет ѕидови. Со отстранување на внатрешната тристрана призма се добиени уште три ѕида. Значи, даденото тело има $5+3=8$ ѕидови.

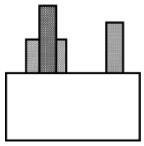
22. Два кружни пластични прстени, еден бел и еден сив, поврзани се еден со друг. Павле ги гледа однапред и ги гледа како што е прикажано на цртежот. Павле истите прстени ги гледа одназад. Што ќе види Павле?

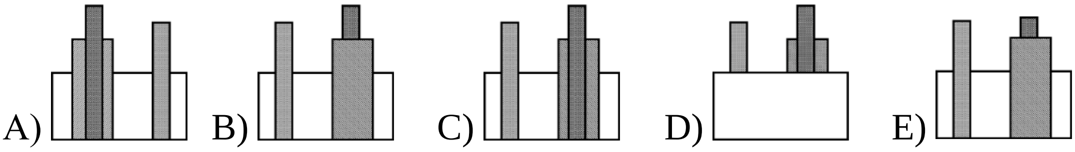


A) 　B) 　C) 　D) 　E) 

Решение. **D).** Павле од десно го гледа сивиот прсте, па затоа A) и C) отпаѓаат. Понатаму, E) отпаѓа бидејќи прстените се раздвоени. Бидејќи Павле гледа одназад горниот дел на сивиот прстен е над горниот дел на белиот прстен, што значи дека тој ја гледа сликата D).

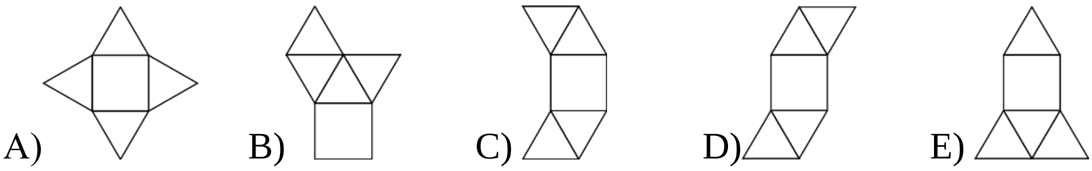
23. Павел е пред бел ѕид, зад кој покарј самиот ѕид има три објекти (цртеж десно). Што ќе види Павел ако премине на другата страна на ѕидот?





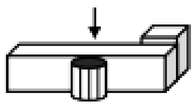
Решение. **B).** Кога Павел ќе премине од другата страна на ѕидот ќе ги гледа објектите кои затскриваат дел од ѕидот, а тоа што го гледал од десно ќе го гледа од лево и обратно. Понатаму, Од двата објекти кои се еден зад друг прво ќе го гледа поширокиот објект. Трите услови ги задоволува цртежот B).

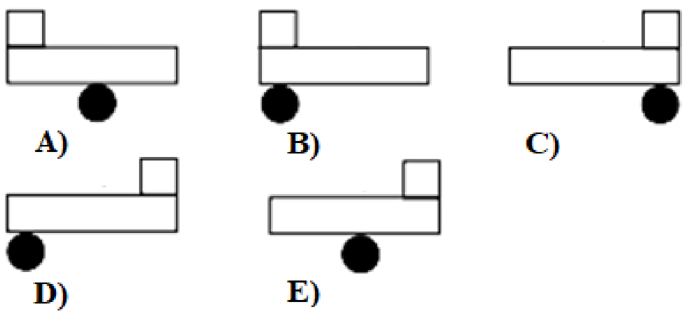
24. Која од следниве пет мрежи не е мрежа на пирамида?



Решение. **C).** Во мрежата C) триаголниците на левата сгтрана ќе се совпаднат, па затоа таа не е мрежа на пирамида.

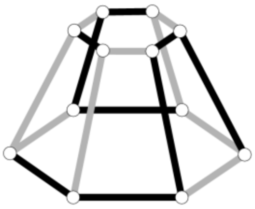
25. На масата, како на цртежот лево, се поставени три геометриски тела. Што ќе види Петар, ако ја гледа масата од горе?

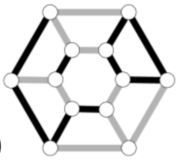
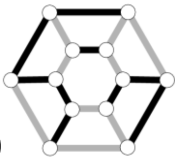
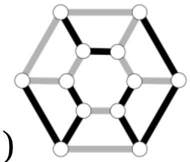


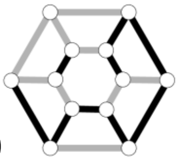
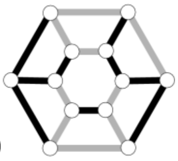


Решение. **E).** Петар од горе ќе види правоаголник, кој на едната страна во таа средината го допира круг, а на другата страна, гледано десно од кругот правоаголникот на крајот го допира квадрат. Тоа е цртежот Е).

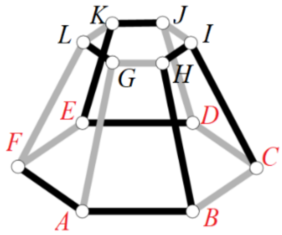
26. Кој од понудените одговори е изгледот на телото на цртежот десно гледано од горе?



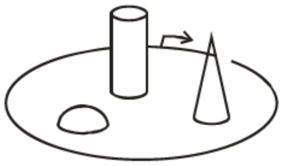
A)  B)  C) 

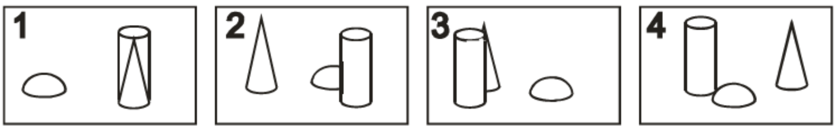
D)  E) 

Решение. B). Телото е ограничено со два шестаголници и шест трапези. Да ги означиме темињата на телото како на цртежот десно. Трапезот $FAGL$ има два сиви крака и две црни основи. Таков трапез иам само на цртежите А) и B). Кај трапезот $BCIH$ само поголемата основа е сива, а другите страни се црни. На црте-жот А) нема таков трапез, а додека истиот го има на цртежот B).



27. Горјан еднаш го обиколил паркот, тргнувајќи од местото означено на цртежот десно. Тој направил четири фотографии кои се прикажани на долните цртежи. По кој редослед Горјан ги направил фотографиите?





A) 2431 B) 4213 C) 2143 D) 2134 E) 3214

Решение. **C).** При обиколувањето на паркот на почетокот десно е цилиндарот, лево е конусот, а делумно зад цилиндарот лево е барата и тоа е прикажано на фотографијата 2. Сега движејќи се следува положбата прикажана на фотографијата 1, па положбата прикажана на фотографијата 4 и положбата прикажана на фотографијата 3. Значи, редоследот е 2143.

IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

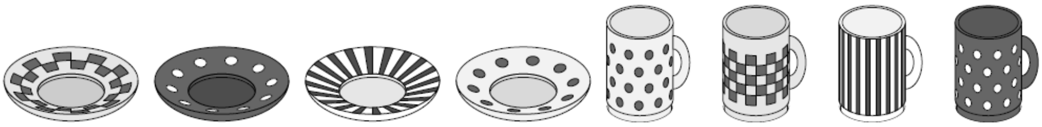
1. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

1. Околу тркалезна маса има 60 столици. На масата седат n луѓе така што секој од нив има свој сосед, Кој е најмалиот можен број n?

А) 40 B) 30 C) 20 D) 10 E) друг одговор

Решение. **Е).** Од условот на задачата е јасно дека на масата мора да седат најмалку двајца. Тоа е најмалиот можен број луѓе, бидејќи ако двајца седат еден до друг, тогаш условот на задачата е исполнет.

2. Комплет за чај се состои од чаша и чинија со еден ист дизајн. На случаен начин чашите од 4 комплети се поставени на чинии од истите тие комплети. Кое од следниве тврдења со сигурност е точно?



А) Сигурно е дека ниту една од четирите чаши не е врз соодветната чинија.

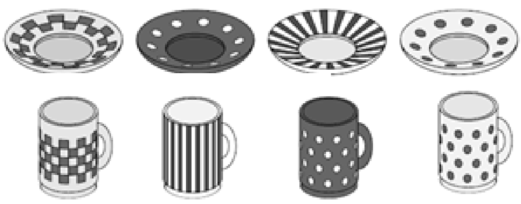
B) Сигурно е дека точно една чаша е врз соодветната чинија.

C) Не е можно точно 2 чаши да се врз соодветните чинии.

D) Не е можно точно три чаши да се врз соодветните чинии.

E) Не е можно сите четири чаши да се врз соодветните чинии.

Решение. **D).** Дека тврдењата А), B) и C) не се се со сигурност точни, покажува распоредот даден



на цртежот десно. Понатаму, јасно е дека е можно сите четири чаши да се врз соодветните чинии, па и тврдењето E) не е со сигурност точно. Конечно, ако три чаши се врз соодветните чинии, тогаш и четвртата чаша мора да е врз соодветната чинија, па со сигурност е точно тврдењето D).

3. Колку пати најмалку треба да ја фрлиме правилната коцка за играње, за да бидеме сигурни дека барем еден од паднатите броеви точки ќе се повтори?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 12 E) 18

Решение. C). Ако коцката ја фрлиме шест пати, тогаш може да се случи во некој редослед бројот на паднатите точки да е 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Тоа значи дека нема да се случи еден од паднатите броеви точки да се повтори. Но, при седмото фрлање без разлика кој број точки ќе падне ќе имаме повторување на еден од паднатите броеви точки.

4. Во една торба има само црвени и зелени џамлии. Ако од кутијата без гледање земеме 5 џамлии, тогаш најмалку една од нив е црвена, а ако без гледање извлечеме 6 џамлии, тогаш најмалку една од нив е зелена. Колку најмногу џамлии може да има во кутијата?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

Решение. C). При првото извлекување на џамлиите од 5 извлечени џамлии најмалку 1 е црвена и најмногу 4 се зелени. При второто извлекување на џамлиите најмногу 5 се црвени и најмалку 1 е зелена. Значи, во кутијата имаме најмногу 4 зелени и најмногу 5 црвени, односно најмногу $4+5=9$ џамлии.

5. Во кошница се наоѓаат 3 зелени јаболки, 5 жолти јаболки, 7 зелени круши и 2 жолти круши. Андреј случајно избира овошки од кошни-

цата една по една. Колку овошки е потребно да извади Андреј од кошницата, за да биде сигурен дека има барем едно јаболко и една круша со иста боја?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Решение. **E).** Ако Андреј извади 12 овошки, може да се случи да извади 5 жолти јаболки и 7 зелени круши, па тогаш нема да има барем едно јаболко и една круша со иста боја. Но, ако извади 13 овошки тогаш мора да има барем едно јаболко и една круша со иста боја.

6. На три натпревари фудбалскиот клуб „Вардар“ постигнал 3 гола, а примил 1 гол. Во овие 3 натпревари, „Вардар“ еднаш победил, еднаш играл нерешено и еднаш изгубил. Со кој резултат „Вардар“ победил?

A) 2:0 B) 3:0 C) 1:0 D) 4:1 E) 0:1

Решение. **B).** Бидејќи примил еден гол, единствен резултат со кој „Вардар“ може да изгуби е 1:0. Но тогаш единствен резултат кој е нерешен е 0:0. Сега, јасно е дека „Вардар“ победил со 3:0.

7. Во финалето на еден фудбалски турнир биле постигнати многу голови. Во првото полувреме биле постигнати вкупно 6 голови, и во водство биле гостите. Во второто полувреме домаќините постигнале 3 гола и победиле. Колку вкупно голови постигнале домаќините во финалето?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **C).** Резултатот во првиот дел на натпреварот може да биде 0:6, 1:5 или 2:4. Во второто полувреме домаќините постигнале 3 гола и победиле. Гостите не дале ниту еден гол, што значи дека со постигнатите 3 гола во второто полувреме домаќините постигнале повеќе голови. Тоа е единствено можно кога резултатот од првото поолувреме е 2:4, па затоа вкупниот резултат е 5:4. Значи, домаќините вкупно постигнале 5 голови.

8. Осум карти се нумерирани со броевите од 1 до 8 (секој број е запишан на една карта и на секоја карта е запишан по еден број). Картите се ставени во две кутии A и B. Збирот на броевите на картите ставени во кутијата A е еднаков на збирот на броевите на картите ставени во кутијата B. Ако во кутијата A има точно три карти, тогаш со сигурност можеме да кажеме дека
А) три карти во кутијата B се со непарни броеви
В) четири карти во кутијата B се со парни броеви
С) картата со број 1 не е во кутијата B
D) картата со број 2 е во кутијата B
Е) картата со број 5 е во кутјата B.
Решение. D). Збирот на сите броеви е $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Бидејќи збирот на броевите запишани на картите во двете кутии е еднаков, добиваме дека тој е $36:2=18$. Бројот 18 како збир на три од дадените броеви може да се запише на три начини, па така ја добиваме табелата:

Кутија А	Кутија В
8, 7, 3	1, 2, 4, 5, 6
8,6, 4	1, 2, 3, 5, 7
7, 6, 5	1, 2, 3, 4, 8

Според тоа, од понудените тврдења единствено во сите три случаи е исполнето тврдењето D).

9. Ана, Бојан, Васил и Кирил играле фудбал во училницата и кога учителката прашала чија била идејата , со што се нарушува дисциплината во училиштето, ги добила следниве одговори:

Ана: *Бојан беше*.

Бојан: *Васил беше*.

Васил: *Не бев јас*.

Кирил: *Не бев јас*.

Чија е идејата, ако само едно од децата кажало вистина.

А) Ана B) Кирил C) Бојан D) Васил

E) Не може да се определи со сигурност

Решение. B). Изјавите на Бојан и Васил се противречни, што значи дека едната од нив е вистинита, а другата е лажна. Бидејќи само едно од децата говори вистина, заклучуваме дека Кирил лаже. Значи, идејата да се игра фудбал во училницата е на Кирил.

10. Ацо, Бојан и Киро одат на прошетка секој ден. Ако Ацо не носи капа, тогаш Бојан носи капа. Ако Бојан не носи капа, тогаш Киро носи капа. Денес Бојан не носи капа. Кој носи капа?

A) Ацо и Киро B) само Ацо C) само Киро

D) Ниту Ацо, ниту Киро E) Не е можно да се определи.

Решение. A). Според условот во задачата, кога Бојан не носи капа, тогаш мора Киро да носи капа. Кога Ацо не би носел капа, тогаш . според условот на задачата мора Бојан да носи капа. Но, Бојан не носи капа, па затоа мора Ацо да носи капа. Значи, денес капа носат Ацо и Киро.

11. Дадени се три кутии: бела, црвена и зелена. Во едната од нив има чоколади, во другата има јаболка, а третата е празна. Во која кутија се чоколадите, ако знаеме дека чоколадите се во црвената или белата кутија, а јаболката не се ниту во белата ниту во зелената кутија?

A) бела B) црвена C) зелена

D) црвена или зелена E) не може да се определи

Решение. **A).** Бидејќи јаболката не се ниту во белата ниту во зелената кутија, заклучуваме дека тие се црвената кутија. Сега, чоколадите се во црвената или белата кутија и како во црвената се јаболката, добиваме дека чоколадите се во белата кутија.

12. Нина рекла дека Димитар е лажго. Димитар рекол дека Виктор е лажго. Виктор рекол дека Димитар е лажго. Јана рекла дека Нина е лажга. Колку од децата се лажговци?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Решение. **C).** Ако Нина ја зборува вистината, тогаш Димитар е лажго. Ако Димитар е лажго, тогаш Виктор ја зборува вистината. Ако Нина ја зборува вистината, тогаш Јана е лажга. Значи, во овој случај две деца ја зборуваат вистината, а две деца лажат.

Ако Нина е лажга, тогаш таа лаже, па според тоа Димитар ја зборува вистината. Ако Димитар ја зборува вистината, тогаш Виктор е лажго. Ако Нина е лажга, тогаш Јана ја зборува вистината. Значи, и во овој случај две деца ја зборуваат вистината, а две деца лажат.

13. Три пријатели се лекар, инжењер и музичар. Нивните имиња се Борис, Данчо и Теодор, не задолжително во овој редослед. Лекарот нема ниту брат ниту сестра и е најмлад од тројцата пријатели. Теодор е постар од инжењерот и се оженил со сестрата на Борис. Запиши ги имињата на лекарот, инжењерот и музичарот во овој редослед?

A) Борис, Данчо, Теодор

B) Теодор, Борис, Данчо

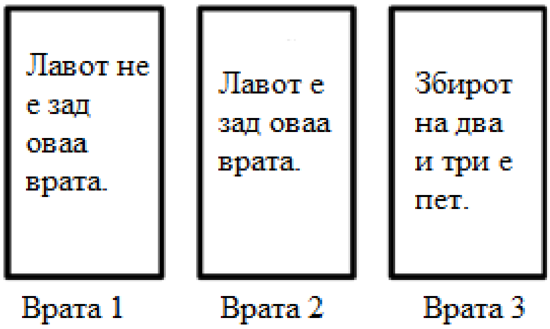
C) Данчо, Борис, Теодор

D) Данчо, Теодор, Борис

E) Борис, Теодор, Данчо

Решение. **C).** Бидејќи Теодор е постар од инжењерот, а лекарот е најмлад, заклучуваме дека тој е музичарот. Од условот следува дека Борис има сестра, па затоа тој не е лекарот. Значи, Борис е инжењерот, па останува Данчо да е лекарот.

14. Лав стои зад една од трите врати прикажани на цртежот десно. На секоја од вратите е напишана по една реченица, но само една од три реченици е вистинита. Зад која врата е лавот?



A) Врата 1 B) Врата 2 C) Врата 3

D) Можно е лавот да е зад секоја од трите врати

E) Можно е лавот да е зад вратата 1 или вратата 2

Решение. **A).** Бидејќи $2+3=5$, реченицата запишана на третата врата е вистинита. Според тоа, не се вистинити речениците напишани на првата и втората врата. Тоа значи, вистинитото тврдење за првата врата е: „Лавот е зад оваа врата“, а вистинитото тврдење за втората врата е: „Лавот не е зад оваа врата“. Значи, лавот е зад вратата 1.

15. Во една кутија има 20 јаболка и 20 круши. Кире по случаен избор зел 20 парчиња овошје од кутијата, а Лука ги зел преостанатите. Кое од следниве тврдења е секогаш точно?

A) Кире зел барем една круша.

B) Кире зел ист број јаболка како и круши.

C) Кире зел ист број јаболка како Лука.

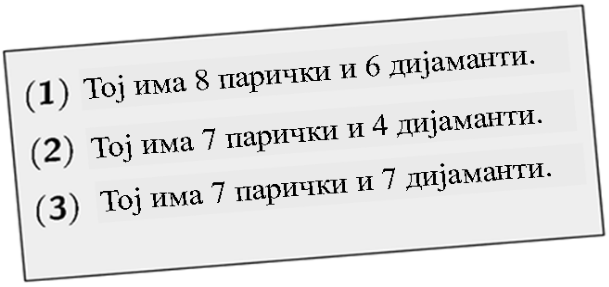
D) Кире зел круши колку што Лука зел јаболка.

Е) Кире зел ист број круши како Лука.

Решение. **D).** Бројот на јаболката во кутијата е еднаков на бројот на крушите. Една од можноте поделби е Кире да ги зел сите круши, па тогаш Лука ги зел сите јаболка. Значи, Кире има 20 круши, а Лука има 20 јаболки. Јасно, во овој случај не важат А), В), С), Е).

Ако Кире зел x круши и y јаболка, тогаш останале $20-x$ круши и $20-y$ јаболка кои ги зел Лука. Но, $x+y=20$, па затоа $20-x=y$ и $20-y=x$, што значи дека Лука зел x јаболка и y круши, т.е. секогаш е точно тврдењето: *Кире зел круши колку што Лука зел јаболка*.

16. Три пирати добиле прашање колку парички и колку дијаманти има нивниот пријател Сивобрадиот. Секој од нив кажал една точен и еден неточен исказ. Нивните одговори се запишани на парчето хартија прикажано на цртежот десно. Колку е точниот вкупен број на парички и дијаманти кои што ги имал Сивобрадиот?



А) 11　　В) 12　　С) 13　　D) 14　　Е) 15

Решение. **С).** Вториот и третиот пират дале ист прв исказ. Нека претпоставиме дека тој е неточен. Тоз значи дека нивните втори искази се точни, што не е можно бидејќи според едниот Сивобрадиот има 4 дијаманти, а според другиот тој има 7 дијаманти. Затоа Сивобрадиот има 7 парички. Сега првиот исказ на првиот пират е неточен, па значи неговиот втор исказ е точен. Според тоа, Сивобрадиот има 6 дијаманти. Конечно, Сивобрадиот има $7+6=13$ парички и дијаманти.

17. Во земјата Недојдија или цел ден грее сонце или цел ден врне и на секој сончев ден му претходат најмалку два дождовни дена. Освен тоа, петтиот ден по секој дождовен ден повторно е дождовен. Денес времето е сончево. Колку денови најмногу, од денес па натаму, со сигурност можеме да предвидиме дали денот ќе биде сончев или ќе врне дожд?

A) 1 B) 2 C) 4

D) времето може да се прогнозира за секој ден од денес па натаму

E) друг одговор

Решение. **C).** Сончев ден ќе означуваме со ☺, а дождлив со ☻. Денешниот ден е сончев, па затоа претходните два дена се дождливи и петтиот ден по секој од овие два дена е дождлив. Така ја имаме низата ☻ ☻ ☺ _ _ ☻ ☻ _ _. Сега, ако првиот или вториот ден од денес натаму (деновите означени со цртичките) е сончев, тогаш два дена пред тоа мора да се дожливи, што не е точно. Имено, во првиот случај денот пред тоа е сончев, а во вториот случај два дена пред тоа било сончево. Значи, овие два дена мора да се дождливи. Така ја добиваме низата ☻ ☻ ☺ ☻ ☻ ☻ ☻ _ _. Да видиме што с е случува со петтиот ден. Бидејќи третиот и четвртиот ден се дождливи, овој ден може да е сончев. Меѓутоа, овој ден може да е дождлив, бидејќи по два дождливи дена не следува задолжително сончев ден.

18. Тролот секогаш лаже, додека џуџето секогаш ја кажува вистината. При една нивна средба ѝ двајцата кажале една иста реченица. Која од следниве реченици може да ја кажале?

A) Јас ја кажувам вистината.

B) Ти ја кажуваш вистината.

C) Двајцата ја кажуваме вистината.

D) Јас секогаш лажам.

E) Само еден од нас ја кажува вистината.

Решение. **A).** Ако ѝ двајцата кажале некоја од речениците B), D), E), тогаш тролот би кажал вистина, што е спротивно на тоа дека тролот секогаш лаже. Ако ѝ двајцата ја кажале реченицата C), тогаш џуџето ќе лаже, што е спротивно на тоа дека џуџето секогаш ја говори вистината. Во случајот на реченицата A) тролот лаже, а џуџето ја говори вистината, па затоа ѝ двајцата ја кажале оваа реченица.

19. Во група од 10 џуџиња и тролови, на секој од нив му бил даден жетон на кој е запишан различен број од 1 до 10. Тие биле прашани да го кажат бројот на својот жетон, на што кажале броеви од 1 до 10. Збирот на одговорите што ги дале е 30. Секој трол кажал лага, а секое џуџе кажало вистина. Кој е најголемиот можен број џуџиња во групата?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

Решение. **D).** Најголемиот можен број џуџиња се добива ако џуџињата ги кажале најмалите можни броеви, а сите тролови кажале некој од броевите кои ги кажале џуџињата.

Бидејќи $1+2+3+4+5+6+7=28$, трите трола треба да кажат броеви чиј збир е 2, што не е можно, бидејќи збирот на нивните броеви секогаш е поголем или еднаков на 3. Значи, во групата има помалку од 7 џуџиња.

Понатаму, $1+2+3+4+5+6=21$ и на пример $9=3+2+2+2$, па добиваме дека во групата може да има 6 џуџиња и 4 тролови.

20. Во група од 10 џуџиња и тролови, на секој од нив му бил даден жетон на кој е запишан различен број од 1 до 10. Тие биле прашани да го кажат бројот на својот жетон, на што кажале броеви од 1 до 10. Збирот на одговорите што ги дале е 36. Секој трол кажал лага, а секое џуџе кажало вистина. Кој е најмалиот можен број тролови во групата?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

Решение. B). Најмалиот можен број тролови соодветствува на најголемиот можен број џуџиња. Најголемиот можен број џуџиња се добива ако џуџињата ги кажале најмалите можни броеви, а сите тролови кажале некој од броевите кои ги кажале џуџињата. Бидејќи

$$1+2+3+...+7+8+9+10=55>36$$
$$1+2+3+...+7+8+9=45>36,$$

не е можно во групата да има 10 или 9 џуџиња. Понатаму, ако во групата има 8 џуџиња, тогаш од $1+2+3+...+7+8=36$ следува дека збирот на броевите кои ги кажале двата трола е еднаков на 0, што не е можно бидејќи тој е поголем или еднаков на 2. Можно е во групата да има 7 џуџиња и 2 трола и притоа џуџињата да ги кажале броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, а троловите да ги кажале броевите 3, 3 и 2. Тогаш збирот на кажаните броеви е $1+2+3+...+7+3+3+2=36$.

21. Ана обожава парни броеви, Бојана обожава броеви деливи со 3, а Венда обожава броеви деливи со 5. Во кутија има 8 топчиња на кои се напишани броеви. Тие последователно од кутијата одеднаш земаат топчиња на кои се напишани броеви кои ги обожаваат. Се покажало дека Ана ги зела топчињата со броеви 32 и 52, Бојана со 24, 33 и 45, Венда со 20, 25 и 35. По кој редослед девојките ги зеле топчињата од кутијата?

A) Ана, Венда, Бојана B) Венда, Бојана, Ана

C) Бојана, Ана, Венда D) Венда, Ана, Бојана

E) Бојана, Венда, Ана

Решение. **E).** Бојана и Венда зеле по еден парен број, па затоа тие зеле топчиња пред Ана, бидејќи во спротивно Ана ќе има повеќе од два броја. Бројот 45 е делив со 5, па затоа Бојана зела топчиња пред Венда, бидејќи во спротивно Венда ќе има повеќе од три броја. Значи, редоследот е Бојана, Венда, Ана.

22. Во една кутија има седум карти и на секоја од нив е запишан по еден од броевите од 1 до 7. Младен без да гледа извлекол три карти, а потоа Весна извлекла две карти, така што во кутијата останале две карти. Тогаш Младен и рекол на Весна: „Сигурен сум дека збирот на твоите карти е парен број.“ Колку е збирот на картите кои ги извлекол Младен?

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

Решение. **B).** Во кутијата има три парни и четири непарни броеви. Збирот на два броја е парен ако и само ако двата собирци се со иста парност. Значи, Младен може да е сигурен дека збирот на картите на Весна е парен броја ако и само ако тој ги извлекол трите парни карти: 2, 4 и 6. Според тоа, збирот на неговите броеви е $2+4+6=12$.

23. Даден е природен број n и четири тврдења:

i) n е делив со 5,

ii) n е делив со 11,

iii) n е делив со 55,

iv) n е помал од 10.

Знаеме дека за бројот n точно две од горните тврдења се вистинити. Кој е бројот n?

A) 1 B) 5 C) 10 D) 11 E) 55

Решение. B). Ако е вистинито тврдењето *ii*), тогаш не е вистинито тврдењето *iv*), па затоа мора да е вистинито едно од тврдењата *i*) или *iii*). Но, тогаш се вистините тврдењата *i*), *ii*) и *iii*), што е потивречност. Ако е вистинито тврдењето *iii*), тогаш се вистините тврдењата *i*), *ii*) и *iii*), што е потивречност. Значи, вистинито е тврдењето *i*) и како *ii*) и *iii*) не може да се вистинити, добиваме дека за да имаме две вистинити твдења мора да е вистинито е тврдењето *iv*). Значи, природниот број n е делив со 5 и е помал од 10. Единствен таков број е бројот 5.

24. Филип, Петар, Матео и Дамјан ги освоиле првите четири места на училишниот шаховски турнир. Ако ги собереме броевите на освоените места на Филип, Петар и Дамјан ќе добиеме 6. Бројот 6 ќе го добиеме ако ги собереме броевите на освоените места на Петар и Матео. Кој го освоил првото место ако се знае дека Петар е подобар од Филип?

A) Филип B) Петар C) Матео D) Дамјан

E) не може да се определи

Решение. D). Збир на три од броевите 1, 2, 3, 4 е еднаков на 6, тоа е случај само ако $1+2+3=6$ добиваме дека Филип, Петар и Дамјан ги освоиле првите три места во некој редослед. Понатаму, збир на два од броевите 1, 2, 3, 4 е еднаков на 6, само ако $2+4=6$ добиваме дека Петар и Матео ги освоиле второто и четвртото место. Во двете збира се јавува само бројот 2 и се јавува само Петар. Значи, Петар го освоил второто место. Но, Петар е подобар од Филип, па затоа Филип го освоил третото мести и останува дека првото место го освоил Дамјан.

25. Арон, Берт и Карл секогаш лажат. Секој од нив имал џамлии во боја: или црвени или зелени. Арон рекол: „Моите џамлии имаат иста боја како и џамлии на Берт“, а Берт рекол: „Моите џамлии имаат иста боја како и џамлиите на Карл“. Карл рекол: „Точно двајца од нас имаат црвени џамлии“. Кое од следниве тврдења е точно?

A) Арон има зелени џамлии

B) Берт има залени џамлии

C) Карли има црвени џамлии

D) Џамлиите на Арон и Карл имаат различна боја

E) Ниту едно од претходните тврдења

Решение. **A).** Бидејќи Арон, Берт и Карл секогаш лажат, нивните тврдења од задачата не се точни. Според тоа Арон и Берт имаат џамлии со различна боја и Берт и Карл имаат исто така џамлии со различна боја. Значи, Арон и Карл имаат џамлии со иста боја, па затоа тврдењето под D) не е точно. Од друга страна, заради изјавата на Карл, двајца од нив имат џамлии со зелена, а еден џамлии со црвена боја. Значи, Берт има црвени џамлии, а Арон и Карл имаат џамлии со зелена боја. Конечно, точно е тврдењето A).

26. Рампо и Ана се деца на Јанко. Јанко напишал пет тврдења, од кои само едно е невистинито. Кое?

A) Мојот син Рампо има три сестри.

B) Мојата ќерка Ана има два брата.

C) Мојата ќерка Ана има две сестри.

D) Мојот син Рампо има два брата.

E) Имам 5 деца.

Решение. **D).** Ако тврдењето A) не е вистинито, тогаш Рампо нема три сестри, па затоа Ана нема две сестри, што значи дека не е вистинито и тврдењето C). Последното противречи на условот дека имаме само едно невистинито тврдење.

Ако тврдењето B) не е вистинито, тоа значи дека Ана нема два брата, па затоа тврдењата A) и D) се вистинити. Значи, Јанко има 6 деца, па затоа не е вистинито и тврдењето E). Последното противречи на условот дека имаме само едно невистинито тврдење.

Ако тврдењето C) не е вистинито, тоа значи дека Ана нема две сестри, па затоа Рампо нема три сестри, т.е. не е вистинито и тврдењето A). Последното противречи на условот дека имаме само едно невистинито тврдење.

Ако не е вистинито тврдењето D), тоа значи дека Рампо нема 2 брата, т.е. Јанко нема 3 сина. Сега, од B) следува дека Ана има 2 брата и од C) дека Ана има две сестри. Значи, вистинито е тврдењето A) и вистиото е тврдењето E).

Ако не е вистинито тврдењето E), тоа нзачи дека Јанко нема 5 деца, па затоа не е вистинито едно од тврдењата B) или C).

27. Обезбедувањето на морскиот цар е составено од октоподи со шест, седум и осум пипки. Октоподите со 7 пипки секогаш лажат, а тие со по 6 и 8 пипки секогаш ја говорат вистината. Еден ден се сретнале четири октоподи. Синиот октопод рекол: „Сите заедно имаме 28 пипки“, зелениот рекол „Сите заедно имаме 27 пипки“, жолтиот рекол: „Сите заедно имаме 26 пипки“ и црвениот рекол „Сите заедно имаме 25 пипки“. Која е бојата на октоподот кој не излагал?

A) црвена B) сина C) зелена D) жолта E) нема таков

Решение. C). Бидејќи сите тврдења се различни, најмногу еден октопод кажал вистина. Значи, три или четири лажат. Ако сите лажат, тогаш сите имаат по 7 пипки, што значи вкупно 28 пипки. Но, тоа не е можно бидејќи тогаш синиот октопод не излагал. Според тоа, три октоподи лажат и тие заедно имаат 21 пипка. Ако октоподот кој не излагал има 8 пипки, тогаш сите заедно имаат 29 пипки, но никој не кажал дека заедно имаат 29 пипки. Значи, октоподот кој не излагал има 6 пипки и сите заедно имаат 27 пипки. Тоа го кажал зелениот октопод, што значи дека тој не излагал.

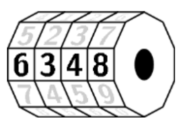
28. На еден остров имало 2013 жители. Некои од нив се витези, а останатите се лажговци. Витезите секогаш ја зборуваат вистината, а лажговците секогаш лажат. Секој ден еден од жителите велел: По моето заминување од островот, бројот на витези на островот ќе биде ист со бројот лажговци, и потоа заминувал од островот. По 2013 искажувања сите жители на островот заминале. Колку од нив биле лажговци?

A) 0 B) 1006 C) 1007 D) 2013

E) не е можно да се определи

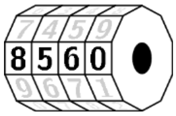
Решение. **B).** Бидејќи по 2013 кажувања сите жители на островот заминале, т.е. останале 0 жители, последниот жител кој заминал бил витез. Јасно, претпоследниот жител кој заминал не може да биде витез, бидејќи ако е витез, тогаш ќе останел само еден жител, а витезите не лажат. Понатаму, пред да останат 2 жители, лицето кое заминало мора да е витез, а пред да останат три жители лицето кое заминало мора да е лажго. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека од назад последователно заминувал: витез, лажго, витез, лажго, витез итн. што значи дека на островот имало 1007 витези и 1006 лажговци.

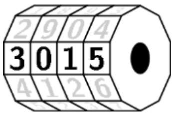
29. Брат ми има четирицифрена брава за велосипеди со цифрите од 0 до 9 во ист редослед на секој дел од бравата (цртеж десно). Тој почнал од точната комбинација, а потоа

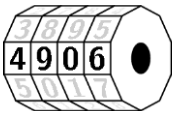


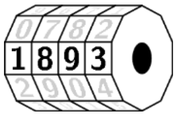
подеднакво во иста насока го завртел секој од од четирите дела и сега бравата го покажува бројот 6348.

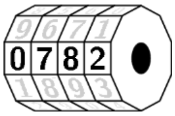
Кој број од понудените не може да биде точната комбинација на бравата на брат ми?

A) 

B) 

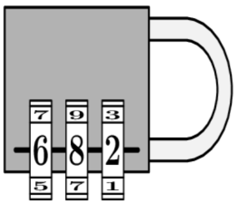
C) 

D) 

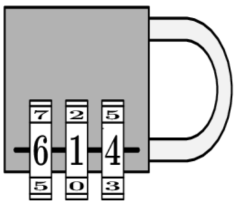
E) 

Решение. C). Бројот 8560 се добива со две завртувања на секој дел во иста насока. Бројот 3015 се добива со три завртувања на секој дел во иста насока. Бројот 1893 се добива со пет завртувања на секој во иста насока. Бројот 0782 се добива со четири завртувања на секој дел во иста насока. За бројот 4906 првиот дел треба да се заврти два пати во една насока, вториот дел четири пати во истата насока, третиот дел четири пати во иста насока и четвртиот дел два пати во истата насока, па затоа овој број не може да биде точната комбинација на бравата на брат ми.

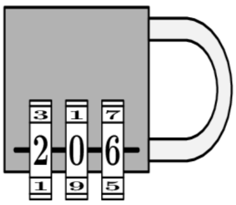
30. Со помош на исказите под клучовите определи ја шифрата за отклучување на клучот.



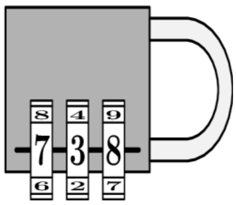
Една од цифрите е точна и е на вистинско место



Една од цифрите е точна, но е на погрешно место



Две од цифрите се точни, но се на погрешни места



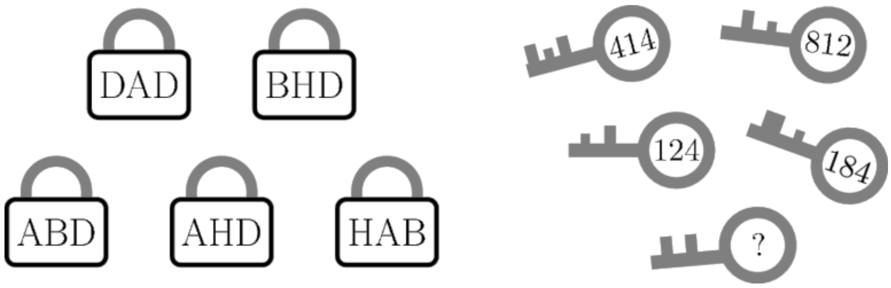
Нема точна цифра

A) 604 B) 082 C) 640 D) 042 E) 046

Решение. D). Цифрата 6 во првите два клуча е на прво место, па како во едниот точната цифра е на вистинското место, а во другиот е на погрешно место, оваа цифра не е дел од шифрата. Од четвртата изјава и клучот над неа следува дека цифрата 8 не е дел од шифрата.

Значи, од првиот клуч следува дека цифрата 2 е дел од шифрата и таа е на вистинското место. Сега, бидејќи 6 не е дел од шифрата, а 2 е трета цифра во шифрата, од третиот клуч следува дека шифрата е од видот 0_2. Цифрата 1 не може да е дел од шифрата, бидејќи таа би била единствена во вториот клуч и би била на вистинското место. Значи, третата цифра е 4 и шифрата е 042.

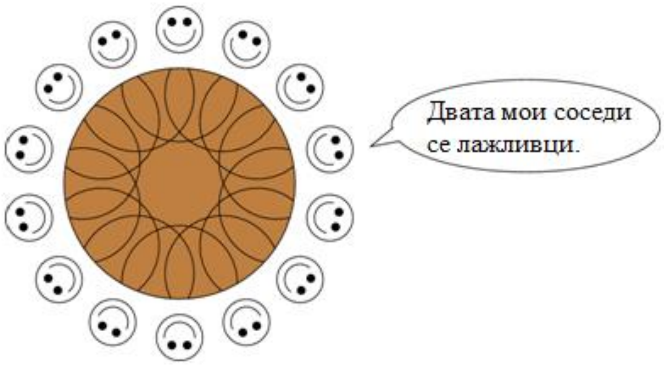
31. Пет клучеви отклучуваат пет катанци. Бројот на секој од клучевите соодветствува на буквите на катанецот кој го отклучува (види цртеж). Кој број е запишан на последниот клуч?



A) 382 B) 282 C) 284 D) 823 E) 824

Решение. **C).** Јасно, на катанецот DAD соодветствува клучот 414, бидејќи само овој пар има симетричен распоред на букви и цифри. Значи, на буквата D соодветвува цифрата 4, а на бусквата A соодветствува цифрата 1. Клучот 812 има средна цифра 1, па нему треба да му соодветствува катанец _A_. Единствен катанец кај кој буквата A е на средина е катанецот HAB. Затоа цифрата 8 соодветствува на H и цифрата 2 соодветствува на буквата B. Сега, на катанецот ABD соодветствува клучот 124, а на катанецот AHD соодветствува клучот 184. Конечно, остана катанецот BHD на кој му соодветствува клуч со број 284, па тоа е бројот кој треба да стои на местото на прашалникот.

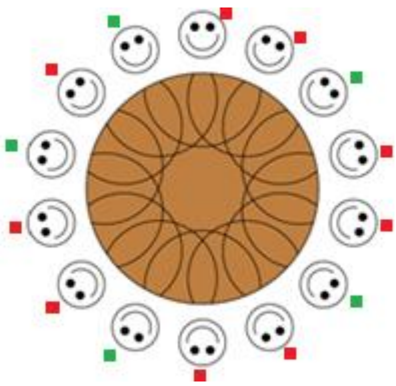
32. Четиринаесет луѓе седат околу тркалезна маса. Секој од нив или е лажливец или секогаш ја говори вистината. Секој од четиринаесетте луѓе ја изговорил реченицата: „Двата мои соседи се лажливци“.



Кој е најголемиот број лажливци кои може да седат околу масата?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 14

Решение. **C).** На масата последователно не може да седат три лажливци, бидејќи тогаш тој што седи на средината кажал точен исказ. Значи, на масата може да седнат еден до друг најмногу двајца лажливци. Најголем број лажливци се добива кога ќе имаме најголем можен број парови лажливци. Ако имаме десет лажливци, т.е. пет парови лажливци, тогаш меѓу секој пар треба да има вистинољубец, а тоа се пет луѓе, па бројот на луѓето кои седат околу масата ќе биде 15. Значи, бројот на лажливците мора да е помал или еднаков на 9. На цртежот десно е даден распоред со 9 лажливци кои се обележени со црвени квадратчиња, и 5 вистинољупци кои се обележени со зелени квадратчиња.



33. За да решат кој ќе го добие последното парче од роденденската торта на Ацо, другарите Ацо, Даме, Рампо, Тоше и Марко се наредиле во круг во насока на движењето на стрелките на часовникот во дадениот редослед и започнале со бројаницата:

ЛИСТ-КАМЕН-НОЖИЧКИ-НАШИТЕ-ПЕЧЕНИ-КОКОШКИ.

да бројат во насока на движењето на стрелките на часовникот. Секој од шесте збора брои едно дете и на кој ќе му падне „кокошки“ отпаѓа. Броењето продолжува во истата насока со следното дете по ред додека не остане едно дете, кое го добива парчето торта. Ацо има право да каже од каде ќе почне броењето. Кој треба да е изборот на Ацо, за да последното парче ќе го добие Марко?

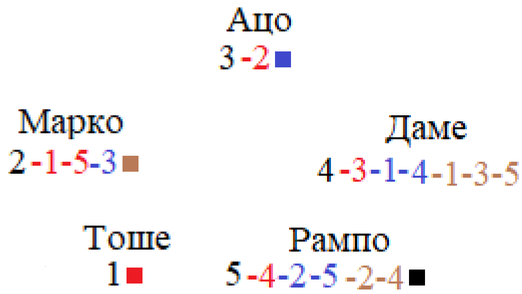
A) Ацо B) Даме C) Рампо D) Тоше E) Марко

Решение. B). *Прв начин*. Бидејќи на почетокот се 5 деца, а при секое броење отпаѓа по едно дете, потребни се 4 броења.

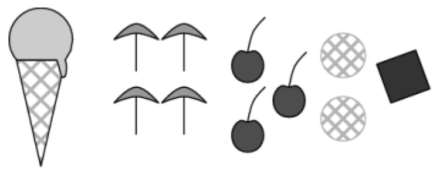
При последното (четвртото) броење треба да се почне од Марко. Имено, во броењето учествуваат 2 деца, а бројот 2 е делител на бројот на зборовите во бројаницата, т.е. на бројот 6. Третото броење исто така треба да почне од Марко, бидејќи сега учествуваат 3 деца, а бројот 3 е делител на бројот на зборовите во бројаницата, т.е. на бројот 6. При второто броење имаме 4 деца, па како $6-4=2$, двајца од учесниците во тоа броење ќе учествуваат двапати. Тоа значи дека сега Марко треба да е трет по ред. При првото броење се бројат петмина. Но, $6-1=5$ и еден од учесниците во тоа броење се брои два пати. Освен тоа, по ова дете кое се брои двапати во насока на стрелката на часовникот треба да има уште двајца, за да може Марко да е трет при следното броење. Според тоа, првото броење треба да почне со третиот пред Марко во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Тоа дете е Даме.

На цртежот десно редоследно се прикажани броењата и со квадратчињата се означени децата кои редоследно отпаѓаат: Даме – Тоше – Рампо – Ацо.

Втор начин. Да почнеме да броиме од произволно дете, на пример од Тоше. Тогаш, според начинот на броење децата отпаѓаат редоследно: Тоше – Ацо – Марко – Рампо и останува Даме. Сега Марко е две места пред Даме, па за тој остане последен треба да почнеме да броиме од детето кое е две места пред Тоше. Тоа е токму Даме.



34. Десет луѓе нарачале сладолед, секој по едно топче, а порачани се: 4 топчиња од ванила, 3 топчиња од чоколадо, 2 топчиња од лимон и 1 топче од манго. Топчињата биле украсени со 4 чадорчиња, 3 вишна, 2 наполитанки и 1чоколадна коцка, така што на едно топче сладолед има една декорација и при тоа нема два исти сладоледи. Која од следниве комбинации НЕ била сервирана?



A) од чоколадо со вишна B) од манго со чадорче

C) од ванила со чадорче D) од лимон со наполитанка

E) од ванила со чоколадна коцка

Решение. D). *Прв начин*. Вкусовите да ги означиме со В-ванила, Ч-чоколадо, Л -лимон и М-манго, а украсите со ч-чадорче, в-вишна, н-наполитанка и к-чоколадна коцка. Сладоледите се: В, В, В, В, Ч, Ч, Ч, Л, Л, М, а украсите се ч, ч, ч, ч, в, в, в, н, н, к.

Има 4 различни декорации, па сладоледот од ванила е сервиран со сите видови декорации, па (C) и (E) не се бараниот одговор. Потоа, остануваат различни декорации со чадорче, чадорче и наполитанка кои се сервирани на сладоледот од чоколадо, па (A) не е бараниот одговор. Од декорациите остануваат 2 чадорчиња и 1 вишна, па помеѓу (B) и (D) бараниот одговор, т.е. сладоледот што не е сервиран е од лимон со наполитанка, т.е. (D). Бидејќи има точно 4 вкусови и 4 чадорчиња, чадорчињата треба да ги распоредиме на сите вкусови. Така добиваме: Вч, В, В, В, Чч, Ч, Ч, Лч, Л, Мч и останува да ги распоредиме украсите в, в, в, н, н, к. Ни останаа 3 вишни и тие треба да ги распоредиме на три различни вкусови, па добиваме Вч, Вв, В, В, Чч, Чв, Ч, Лч, Лв, Мч и останува да ги распоредиме украсите н, н, к. Ни останаа 2 наполитанки и тие треба да распоредиме на два различни вкусови, па добиваме: Вч, Вв, Вн, В, Чч, Чв, Чн, Лч, Лв, Мч. Остана да се распореди само коцката чоколадо и дконечно добиваме: Вч, Вв, Вн, Вк, Чч, Чв, Чн, Лч, Лв, Мч. Значи, од понудените распореди не може да се добие само лимон со наполитанка.

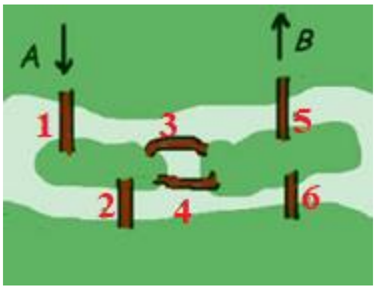
Втор начин. Бидејќи нема исти комбинации, чадорчето мора да се распореди на сите четири вкуса. Бидејќи преостанаа три топчиња ванила, две чоколади и еден лимон, вишните мора да се распоредат на сите три различни вкусови. Останаа две ванили и една чоколада, па наполитанките мора да се распоредат на два различни вкуса. На крајт останува едно топче ванила и коцка чоколада.

	Вани.	Вани.	Вани.	Вани.	Чок.	Чок.	Чок.	Лим.	Лим.	Ман.
Чад.	*				*			*		*
Виш.		*				*			*	
Напо.			*				*			
Чоко.				*						

Значи, од понудените распореди не може да се добие само лимон со наполитанка.

2. ПАТЕКИ И ЛАВИРИНТИ

1. Низ еден град минува река и во неа има два мали острови. Островите меѓу себе и со бреговите на реката се поврзани со 6 мостови (црте десно). Колку различни патишта може да се стигне од A до B со еднократно минување по мостовите?



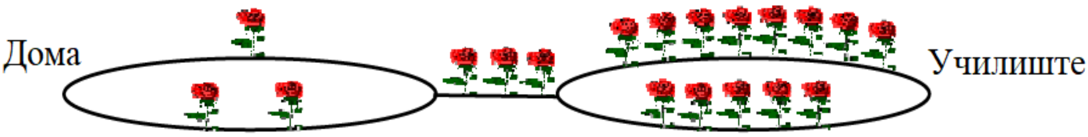
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) повеќе од 8

Решение. C). Патиштата по кои може да се стигне од A до B со еднократно минување по мостовите се:

1-2-6-5, 1-3-5, 1-4-5, 1-3-4-2-6-5, 1-4-3-2-6-5, 1-3-6-2-4-5.

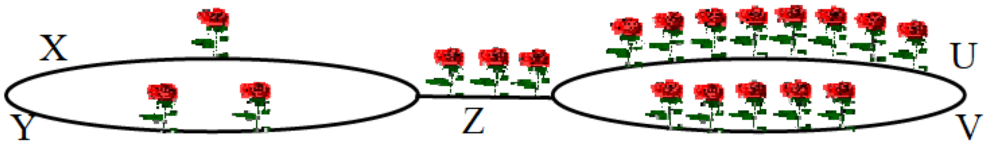
Конечно, вкупниот број патишта е 6.

2. Кенгурот Скокалко се движи од дома кон училиштето. По патот (од лево кон десно) го бери секој цвет. Колку цветови не може да има неговиот букет?



A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Решение. C). Да ги означиме со X, Y, Z, U, V деловите од патеките по кои Скокалко може да се движи (види цртеж).



Тогаш тој може да оди по патеката:

а) XZU и наберува $1+3+8=12$ цветови,

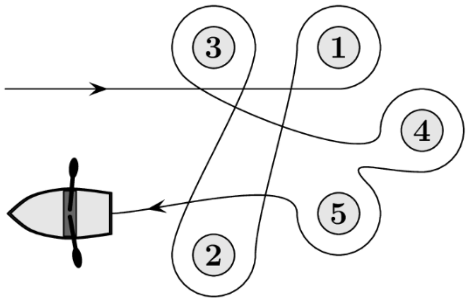
б) XZV и наберува $1+3+5=9$ цветови,

в) YZU и наберува $2+3+8=13$ цветови,

г) YZV и наберува $2+3+5=10$ цветови.

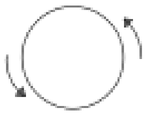
Значи, Скокалко не може има букет од 11 цветови.

3. Андреј веслал околу пет пловки, како што е прикажано на цртежот десно. Околу кои пловки Андреј веслал обратно од насоката на движењето на часовникот?



A) 1 и 4 B) 2, 3 и 5 C) 2 и 3 D) 1, 4 и 5 E) 1 и 3

Решение. **E).** Кога Андреј весла околу пловката во насока обратна од насоката на движењето на часовникот пловката се наоѓа на неговата лева страна (види цртеж). Според цртежот тоа се пловките 1 и 3.



4. Мирјана и Катерина тргнале од исто место во прошетка низ градскиот парк. Мирјана заминала 1 km северно, па 2 km западно, па 4 km јужно и на крај 1 km западно. Катерина заминала 1 km источно, па 4 km јужно и на крај 4 km западно. Која треба да биде последната маршрута на Катерина за да таа стаса на исто место како и Мирјана.

A) веќе стигнала на истото место

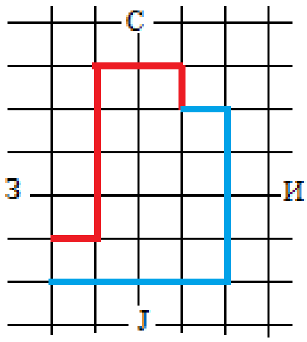
B) 1 km на север

C) 1 km на северозапад

D) повеќе од 1 km на северозапад

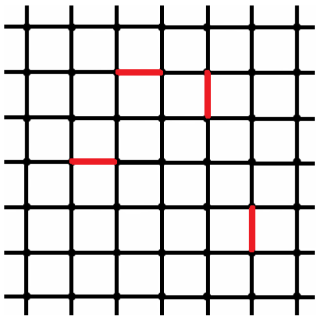
E) 1 km на запад

Решение. **B).** Патеката по која се движеча Мирјана е означена со црвена боја во шемата на цртежот десно, а патеката по која се движела Ка-



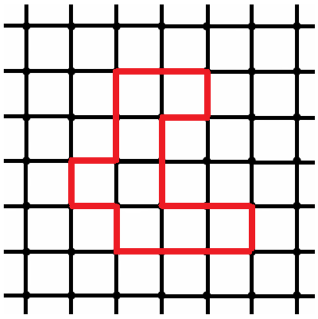
терина е означена со сина боја (страната на едно квадратче е 1 km). Значи, Катерина треба да оди 1 km на север.

5. Мравка се движи по линиите на квадратна мрежа при што почнува и завршува во иста точка. Не постојат линии по кои мравката поминува двапати. Мравката треба да помине по црвените отсечки (цртеж десно), но така што ќе обиколи најмал можен број единечни квадрати. Колку квадрати ќе обиколи мравката?

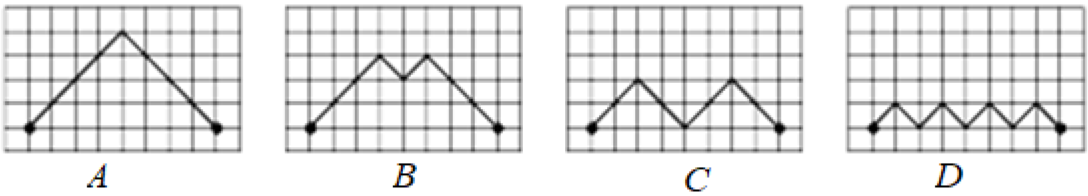


A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

Решение. **A).** Мравката ќе обиколи најмал број квадрати ако патеката по која поминува е со ширина еден квадрат. Истата е прикажана на цртежот десно. Значи, мравката ќе обиколи 8 квадрати.



6. На долните цртежи се прикажани четири патеки кои поврзуваат две исти точки. Која патека е најкратка?

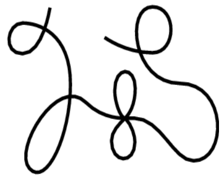


A) A B) B C) C D) D

E) сите патеки се со иста должина

Решение. **E).** Точките се наоѓаат на иста хоризонтална линија. Патеките се состојат од дијагонали на единичните квадрати. Притоа ако по дијагонала се качуваме нагоре, тогаш по дијагонала слегуваме надолу. Секоја патека има 4 качувања нагоре и 4 следувања надолу, т.е. еднаков број дијагонали по кои се качуваме нагоре и исто толкав број дијагонали по кои слегуваме надолу. Значи, сите патеки се со иста должина.

7. Со помош на лупа Петар гледа во различни ситни делови на цртежот десно. Што не може да види Петар?



A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. E). Делот А) Петар може да го види во горе лево, делот B) во горе десно, делот C) долу десно и делот D) долу лево. Не може да го види делот Е) бидејќи на цртежот нема дел во кој линијата се сече во дел кој е испакнат налево и испактнат нагоре.

8. На долните цртежи се прикажани пет јажиња. Кое јаже има јазол?

A) B) C) D) E)

Решение. D). Ако тргнеме од еден крај на секое од јажињата и земеме предвид дека делот од јажето кој е прикажан со полна линија е над делот од јажето кој е прикажан со прекината линија можеме да видиме дека јазол е прикажан само на цртежот D).

9. Во која од наведените плетенки е употребен повеќе од еден конец?

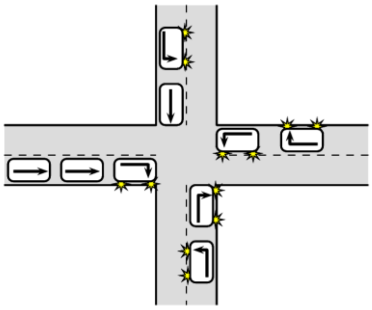
I II III IV V

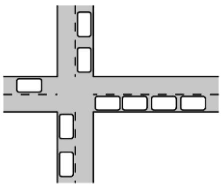
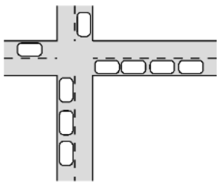
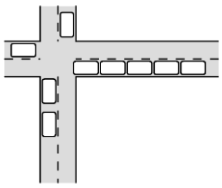
A) I, III, IV, V B) III, IV, V C) I, III, V

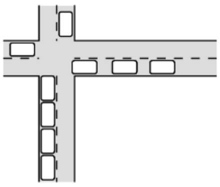
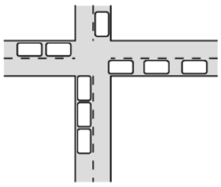
D) во сите патеки E) во ниту една патека

Решение. C). За плетенката I се употребени 2 конци, за плетенката II е употребен 1 конец, за плетенката III се употребени 2 конци, за плетенката IV е употребен 1 конец и за плетенката V се употребени 3 конци.

10. На цртежот лево се прикажани девет автомобили кои пристигнале на раскрсница. Секој од автомобилите се движи во правецот кој го покажува стрелката нацртана на него. На кој цртеж се прикажани автомобилите по поминувањето на раскрсницата?



A)  B)  C) 

D)  E) 

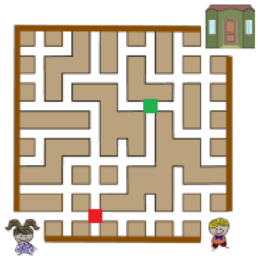
Решение. B). Раскрсницата ќе ја гледаме според географските правци: север, југ, исток и запад. Според ознаките откако автомобилите ќе ја поминат раскрсницата на север ќе биде 1 автомобил, на југ ќе има 3 автомобили, на исток ќе има 4 автомобили и на запад ќе има 1 автомобил. Значи, одговорот е цртежот B).

11. На шемата е даден планот на населбата во која живеат Косара (долу лево) и Темјана (долу десно). Тие се наоѓаат пред своите куќи, а во горниот де-

сен агол е училиштето. Која од понудените патеки треба да ја избере Косара, за да постои можност, без разлика кога ќе тргнат, таа и Темјана да не се сретнат пред да стигнат во училиштето?

A)  B)  C) 

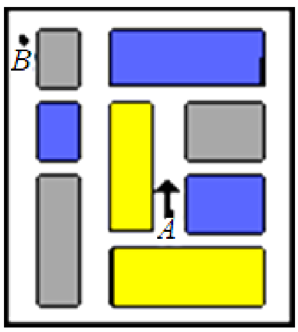
D)  E) 



Решение. D). Ако Косара избере било која од патеките A, C или E, тогаш можна средба е на местото означено со црвеното квадратче (цртеж десно). Ако ја избере патеката B, тогаш можна средба е на местото означено со зеленото квадратче (цртеж десно).

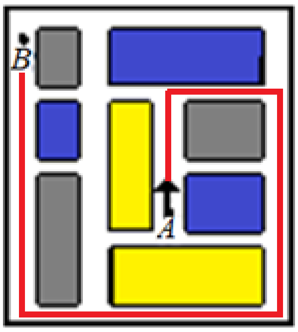
Ако Косара ја избере патеката D, тогаш Темјана може да оди по сината патека означена на цртежот десно и тогаш тие нема да се сретнат се додека не дојдат до училиштето.

12. Бојан учи да вози. Тој научил со автомобилот да врти во десно, но не научил да врти во лево. Кој е најмалиот број на вртења во десно што тој треба да го направи за да дојде од местото A до местото B?

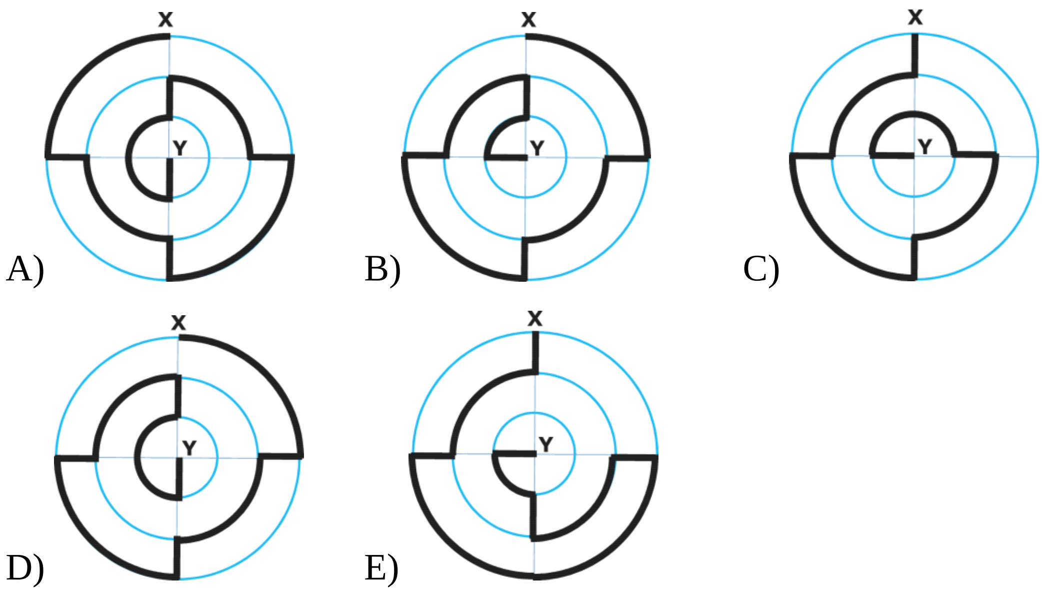


A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Решение. **В).** Кога ќе тргне Бојан има две можности да заврти десно. Притоа seedно е дали ќе заврти на првата или втората раскрсница. Нека заврти на втората раскрсница. Сега продолжува право преку две раскрсници, бидејќи во спротивно ќе заврти во круг и ќе направи непотребно нови завртувања во десно. На крајот од населбата мора да заврти десно и ќе продолжи право. Јасно, нема да заврти на првата раскрсница, бидејќи ќе има непотребно нови вртења во десно. Ќе заврти на втората раскрсница и ќе продолжи право до местото B. Значи, Бојан ќе направи 4 завртувања во десно.



13. На долните цртежи се прикажани пет патеки од X до Y, кои се означени со задебелена линија. Која патека е најкратка?



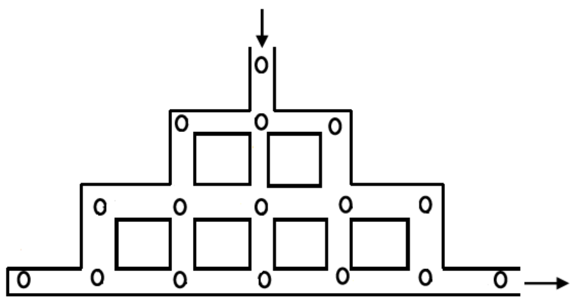
Решение. **C).** Секоја патека содржи пет идентични прави делови: три меѓу најголемата и средната кружница, еден меѓу средната и малата кружница и еден меѓу малата кружница и центарот на дадените концентрични кружници. Затоа овие делови на влијаат на разликите во должините на патеките.

Сега да видиме која патека колкав дел содржи од секоја од трите кружници.

	Од најголемата кружница	Од средната кружница	Од најмалата кружница
Патека A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Патека B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Патека C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Патека D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Патека E	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Патеките A и D се со иста должина и тие се најдолги. Патеките B, C и E содржат еднаков дел од средната кружнца, потоа B и E содржат по $\frac{1}{2}$ од најголемата кружница и $\frac{1}{4}$ од најмалата кружница, а патеката C содржи $\frac{1}{4}$ од најголемата кружница и $\frac{1}{2}$ од најмалата кружница. Затоа патеката C е најкратка.

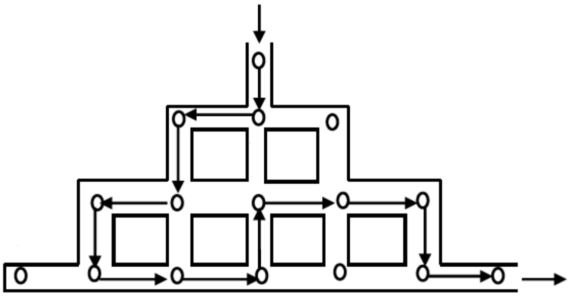
14. Хрчакот Фридолин оди во Земјата на чудата. Пред да влезе во оваа легендарна земја, тој мора да помине низ систем на тунели прикажан на цртежот. Не му е дозволено да се врати на раскрсница која веќе ја поминал. На секоја раскрсница нашол семка од тиква.



Колку најмногу семки од тиква хрчакот Фридо-лин може да собере?

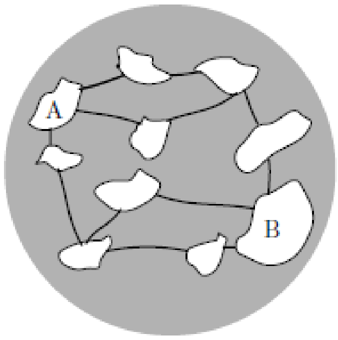
А) 12 В) 13 С) 14 D) 15 Е) 16

Решение. **В).** Хрчакот најмногу семки ќе собере ако прво отиде до најдалечната лева раскрсница, а потоа одејќи десно, горе и долу помине најголем број раскрсници кои пред тоа не ги поминал. Една од патеките по кои треба да се движи е прикажана на цртежот десно.



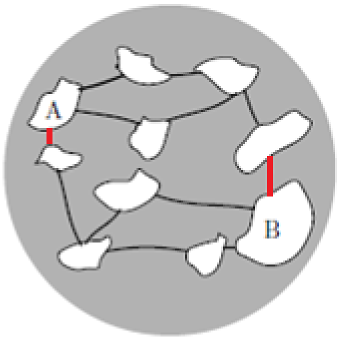
Како што можеме да видиме хрчакот Фридолин ќе собере 13 семки од тиква.

15. На една планета има 10 острови и 12 мостови, цртеж десно. Во моментов сите мостови се отворени за сообраќај. Кој е најмалиот број на мостови кои треба да се затворат за да се запре сообраќајот помеѓу островите A и B.

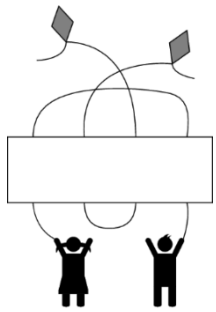


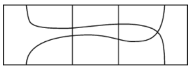
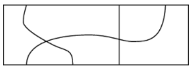
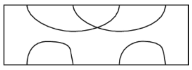
А) 1 В) 2 С) 3 D) 4 Е) 5

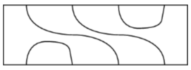
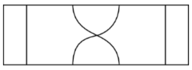
Решение. **В).** Бидејќи имаме два потполно независни патишта меѓу островите A и B, сообраќајпт нема да се прекине ако затвориме само еден мост. Но, ако го затвориме првиот мост кој води јужно од A и првиот мост кој води северно од B, сообраќајот меѓу A и B ќе се прекине. Значи, најмалиот брок мостови е 2, кои на цртежот десно се црвено обоени.



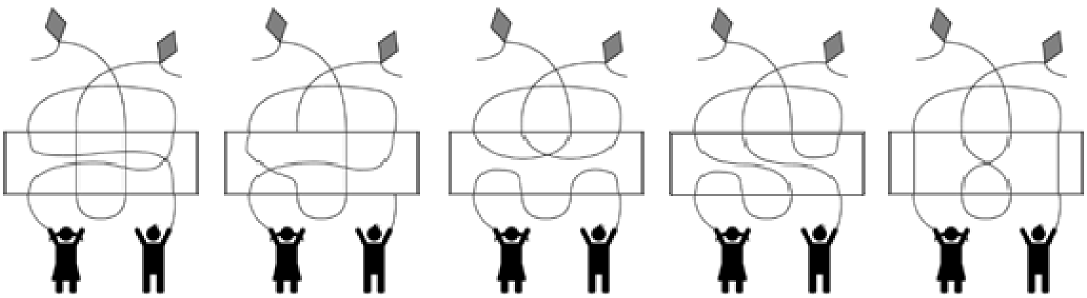
16. Која налепница треба да се стави во правоголникот на цртежот десно така што секое дете ќе биде поврзано со различно летало?



A)  B)  C) 

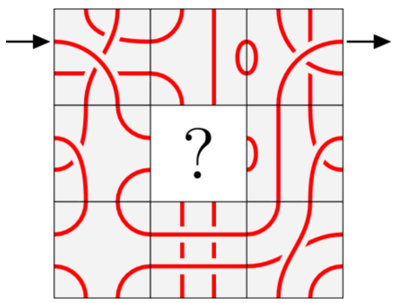
D)  E) 

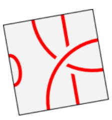
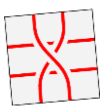
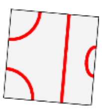
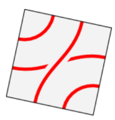
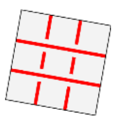
Решение. D). Во горниот и долниот дел на правоаголникот имаме по 4 поврзувања, па затоа налепницата B) отпаѓа. Понатаму, налепницата C) ги одделува децата од леталата, па и таа отпаѓа. Слични налепниците A) и E) ги поврзуваат одделно децата и одделно леталата, па останува налепницата D). Сите пет случаи се прикажани на долните цртежи.



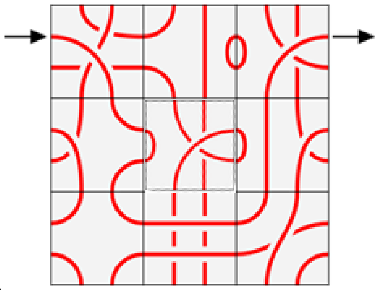
A) B) C) D) E)

17. Роса сака да почне да оди од местото кое го покажува левата стрелка, да ја следи патеката прикажана на цртежот и да излезе на местото кое го покажува десната стрелка. Кој дел НЕ може да се стави на местото на прашалникот за да се овозможи Роса да го направи саканото патување?

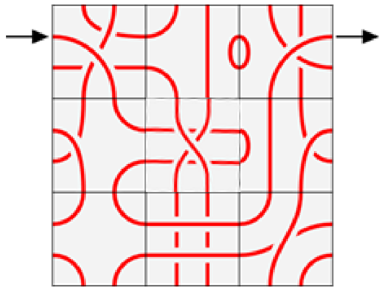


A)  B)  C)  D)  E) 

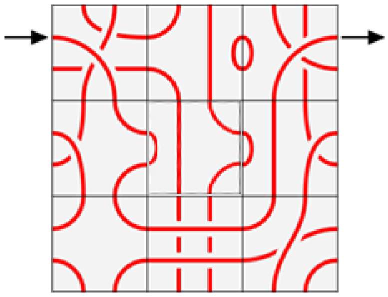
Решение. **D).** На долните цртежи е прикажано како со ставање на деловите A, B, C и E, Роса може да го направи саканото патување.



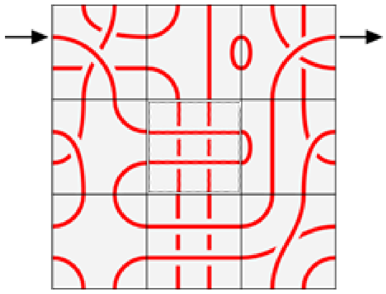
A



B

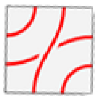
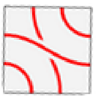


C

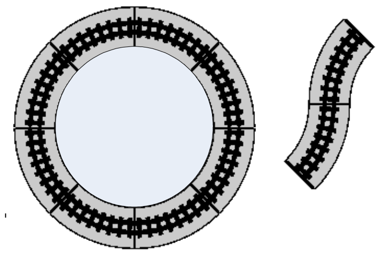


E

Меѓутоа, делот D може да се постави само на два начини и тоа

 , при што и во двата случаја не добиваме пат кој од влезот води кон излезот.

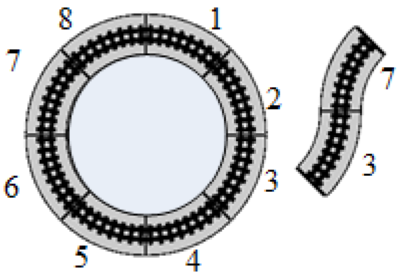
18. Мартин и Матеј играле со својата игрaчка „железница“. Матеј направил кружна пруга со употреба на 8 идентични парчиња како што е прикажано на цртежот десно. Мартин исто така сакал да направи затворена пруга и поставил две парчиња како што е покажано на цртежот десно. Кој е најмалиот број на парчиња што тој мора да ги употреби за да ја доврши пругата?



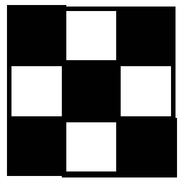
A) 11 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

Решение. **B).** Бројот на парчињата не може да биде непарен, бидејќи 8 парчиња прават кружен дел, а за да се премине од испакнат кон вдлабнат дел и обратно потребни се 2 парчиња. Значи бројот на парчињата е поголем или еднаков на $8+2+2=12$.

Мартин започнал со елеменот 3, продолжил со елементот 7 и сега ако поставува: 3, 2, 1, 8, 7, 3, 7, 6, 5, 4 ќе добие затворена пруга составена точно од 12 елементи.



19. Тргнуваме да се движиме од едно квадратче на шаховската 3×3 табла (цртеж десно). Треба да поминеме низ секое квадратче по еднаш. Од едно квадратче дозволено е да се преминеме само во негово соседно квадратче. Соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна. Кои се сите квадратчиња од каде што можеме да го почнеме движењето?



A) средното квадратче

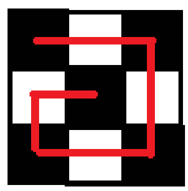
B) аголните квадратчиња

C) сите бели квадратчиња

D) сите црни квадратчиња

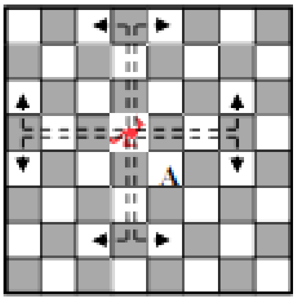
E) било кое квадратче

Решение. **D).** При премин од едно во друго квадратче се менува бојата на квадратчето. Ако тргнеме од бело (Б) квадратче, тогаш за да поминеме 5 црни (Ц) квадратчиња потребно е да реализираме низа: БЦБЦБЦ БЦБЦ, што не е можно бидејќи имаме само 4 бели квадратчиња, а во секое квадратче смееме да поминеме само еднаш. Значи, остануваат црните квадратчиња. Заради симетрија доволно е да покажеме дека целта може да се постигне од едно аголно квадратче и од средното



квадратче. Еден начин за постигнување на целта во двата случаја е прикажан на цртежот десно. .

20. Во шахот е воведена нова фигура „кенгур“. При секое движење, таа прескокнува или 3 квадрати вертикално и еден хоризонтално, или 3 квадрати хоризонтално и еден вертикално, како што е прикажано на цртежот. Тргнувајќи од моменталната положба, кој е најмалиот број на движења кои кенгурот треба да ги направи за стигне до квадратот означен со A?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **B).** Ако со x ја означиме колоната, а со y редот во кој се наоѓа фигурата, според правилото на движење фигурата од поле (x,y) може да се придвижи на полињата $(x\pm 3, y\pm 1)$ и $(x\pm 1, y\pm 3)$. Прашањето е кој е најмалиот број потези за да фигурата премине од полето (x,y) на полето $(x+1, y-1)$.

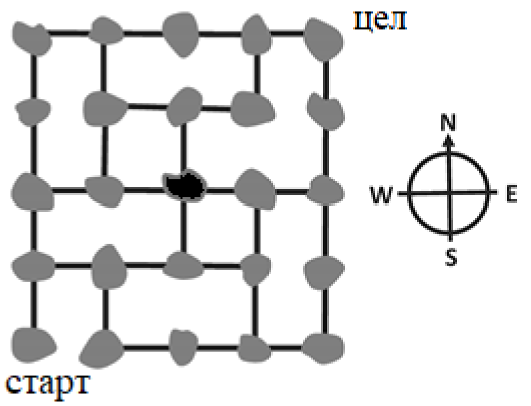
Да претпоставиме дека фигурата во првиот потез од полето (x,y) преминала на полето $(x+3, y-1)$. Тогаш во вториот потез таа не може да остане на редот $y-1$, па затоа со два потези не може да стигне во полето $(x+1, y-1)$. Меѓутоа тоа може да се постигне со три потези и тоа:

$$\begin{aligned}(x,y) &\to (x+3, y-1) \to (x+3-1, y-1-3) = (x+2, y-4)\\ &\to (x+2-1, y-4+3) = (x+1, y-1).\end{aligned}$$

Слично се докажува дека и за преостанатите дозволени први потези фигурата во два потези не може од полето (x,y) да премине на полето $(x+1, y-1)$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Значи најмалиот потребен број потези е 3.

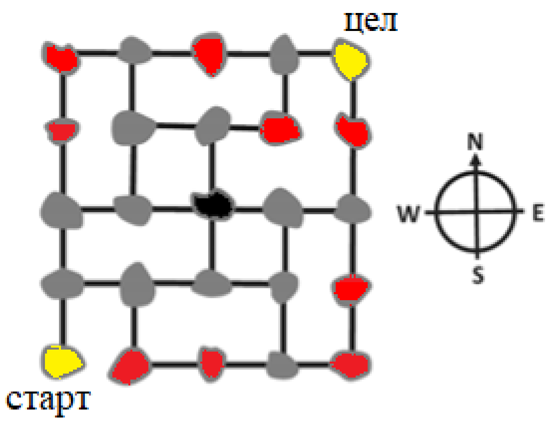
21. Сликата претставува карта на острови и начин на нивна поврзаност со мостови. Поштарот треба да ги посети сите острови и тоа точно еднаш. Почнал од островот кој е означен со „старт“, а би сакал да заврши на островот означен со „цел“. Во овој момент се наоѓа на островот во центарот на картата. Како треба да продолжи, кој е негов следен чекор?



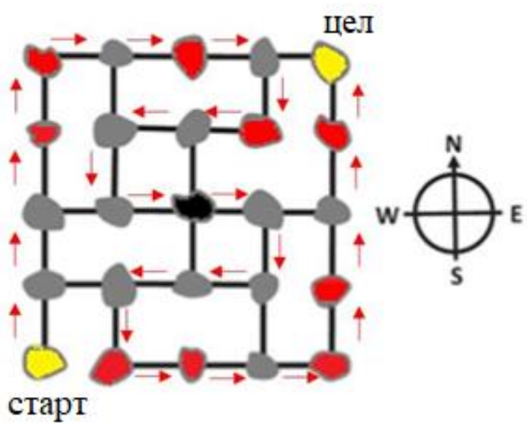
A) на север B) на исток C) на југ D) на запад

E) не постои начин да продолжи понатаму

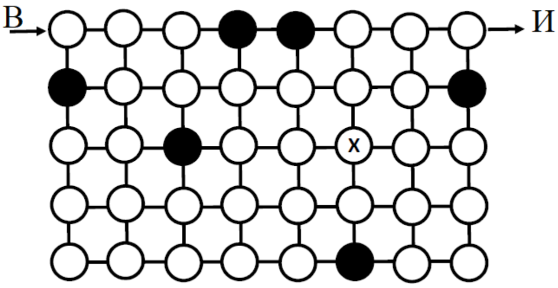
Решение. **B).** Прво да забележиме дека постојат острови кои се поврзани само со други два острови. Бидејќи поштарот сака да стигне до секој остров само по еднаш, кај ваквите острови патот на поштарот е еднозначно определен. На таков остров мора да дојде од едниот соседен остров и да отиде на другиот. На картата ваквите острови да ги означиме со црвена боја, а стартот и целта да ги означиме со жолта боја.



Сега, тргнувајќи од стартот и почитувајќи го претходно кажаното го добиваме патот по кој поштарот треба да помине. Истиот е со црвени стрелки е означен на цртежот десно. Како што можеме да видиме од црниот остров кој е во центарот на картата поштарот треба да оди на исток.

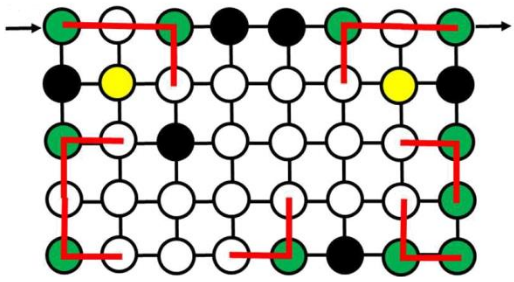


22. Истражувач сака да помини низ лавиринтот прикажан на цртежот десно тргнувајќи од точката В и излегувајќи во точката И. Може да се движи само хоризонтално и вертикално и може да минува само низ белите кругови. Исто така низ секој бел круг мора да помине точно еднаш. Кога ќе помине низ кругот во кој е знакот X, кој ќе му биде следниот потез?

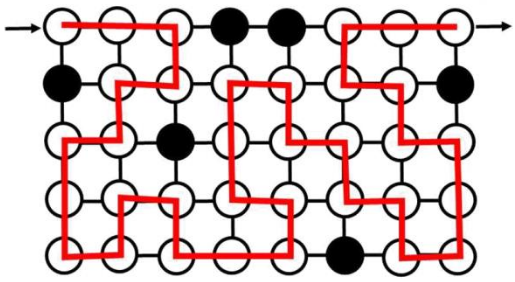


A) ↑ B) ↓ C) → D) ← E) не постои таков пат

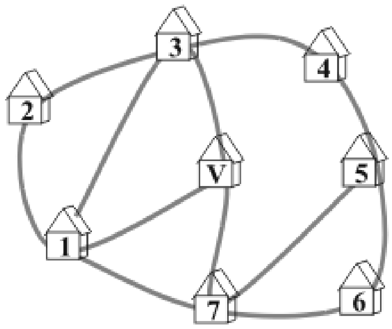
Решение. **B).** Со зелена боја на цртежот десно се означени круговите поврзани со точно еден или точно два бели круга. Патиштата низ овие кругови се еднозначно определени (само излез, само влез или само еден влез-излез), па затоа да ги истакнеме со црвена боја.



Сега со жолта боја да означиме некои од круговите кои се, согласно со црвено означената патека, се поврзани со точно два круга со кои може да се поврзат. Кога ќе ги нацртаме тие делови на патеката низ жолтите кругови, остатокот од патеката е лесно да се заврши. Целата патека е прикажана на цртежот десно. Значи, по кругот во кој е знакот X истражувачот треба да оди надолу.



23. Снежана и седумте џуџиња живеат во шумата во осум куќички (цртеж десно). Куќичката на Снежана е означена со буквата V (цртеж десно). Еден ден Снежана излегла од дома и ги посетила сите џуџиња (некои повеќе од еднаш) и на крајот останала да преноќи кај џуџето Спанко. На цртежот е покажана патеката по која Снежана се движела тој ден, при што секој дел од патот го минала само еднаш. Со кој број е означења куќичката на Спанко?



A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

E) не може да се определи

Решение. C). При секоја посета на џуџе кај кое Снежана не останала да преноќи до куќата на тоа џуџе има пат по кој пристигнала и пат по кој Снежана заминала понатаму. Значи, до секоја од куќите на џуџињата кај кои Снежана не преноќила водат парен број патишта (доаѓање и одење). Според тоа, само до куќата на Спанко (евентуално до куќата на Снежана) може да водат непарен број патишта, едно доаѓање (одење) повеќе. Бидејќи до куќите 1, 2, 3, 4, 6 и 7 соодветно водат 4, 2, 4, 2, 2 и 4 патишта, ниту една од нив не е куќата на Спанко. Останува куќата 5 до која водат 3 патишта, исто колку и до куќата на Снежана. Еден од можните редоследи на движењето на Снежана е:

$$V \to 1 \to 3 \to V \to 7 \to 5 \to 6 \to 7 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5\,.$$

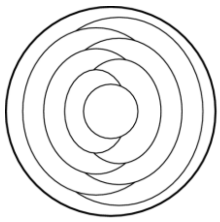
3. БОЕЊЕ И ПОКРИВАЊЕ

1. Колку различни коцки има такви што три негови ѕида се црвени, а останатите се сини?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. B). Три ѕида на една коцка може да имаат заедничко теме или да немаат заедничко теме. Во два случаја имаме еднствена коцка кај која три ѕида се црвени, а другите три се сини. Значи, имаме 2 коцки кои го задоволуваат условот на задачата.

2. Софија го бои секој дел од чинијата на цртежот или со црвена или со сина или со жолта боја. Притоа, соседните делови ги бои со различни бои. Надворешниот прстен го обоила со сина боја. Колку вкупно делови ќе бидат на крајот обоени со сина боја?



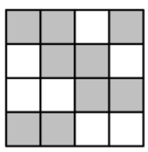
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

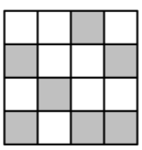
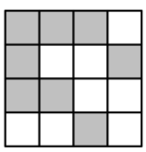
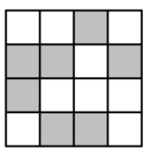
Решение. B). Ако надворешниот прстен е син, тогаш според условот на задачата можни се следниве две боења:

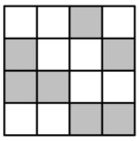
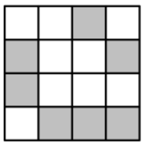
 и .

Значи, во секој случај на крајот ќе имаме 3 сини региони.

3. Голем квадрат се состои од мали бели и сиви квадратчиња. Како ќе изгледа квадратот ако на квадратчињата ги замениме боите?

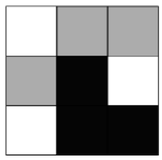


A)  B)  C) 

D)    E) 

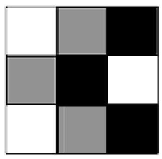
Решение. **D).** При замена на боите во првиот ред треба од лево кон десно да имаме 2 бели, 1 сиво и 1 бело квадратче, па затоа квадратот B) отпаѓа. Понатаму, во вториот ред треба од лево кон десно да имаме 1 сиво, 2 бели и 1 сиво квадратче, па затоа квадратот C) отпаѓа. Сега, во третиот ред треба од лево кон десно да имаме 2 сиви и 2 бели квадратчиња па затоа отпаѓаат A) и E). Останува квадратот D) кој ги задоволува условите на задачата.

4. Матео обоил 9 квадрати со бела, црна и сива боја како што е прикажано на цртежот. Колку најмалку квадрати треба да пребои така што било кои два квадрати со заедничка страна нема да се исто обоени?

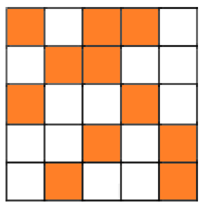


A) 2   B) 3   C) 4   D) 5   E) 6

Решение. **A).** Бидејќи се допираат два сиви квадрати и два црни квадрати не е доволно да се пребои еден квадрат. Целта може да се постигне со пребојување на точно два квадрати. Во првиот ред десниот сив квадрат треба да се пребои во црно, а во третиот ред левиот црн квадрат треба да се пребои во сиво.



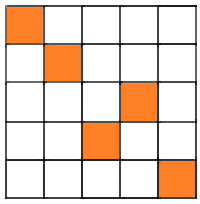
5. Колку квадратчиња на фигурата прикажана на цртежот десно треба да се пребојат во бела боја за да во секој ред и во секоја колона остане само по еден портокалов квадрат?



A) 4   B) 5   C) 6   D) 7

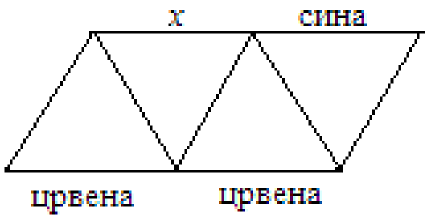
E) не може да се определи

Решение. **C).** На дадената фигура има 11 портокалови квадратчиња. Бидејќи во секој ред и во секоја колона треба да остане по едно обоено квадратче, т.е. вкупно 5 обоени квадратчиња, ако пребојувањето е можно тогаш треба да се пребојат $11-5=6$ портокалови квадратчиња. На цртежот десно е прикажано еднао такво пребојување.



Забелешка. Постојат и други пребојување со кои се постигнува сакана цел. Обиди се да најдеш некои од нив.

6. Секоја од деветте отсечки на фигурата треба да се обојат со сина, зелена или црвена боја. Притоа, потребно е страните на секој триаголник да бидат обоени со три различни бои. Три отсечки се веќе обоени. Со која боја може да биде обоена отсечката означена со x?

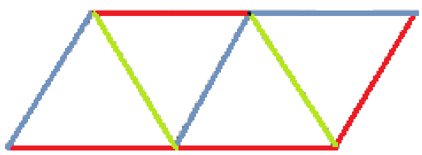


A) сина B) зелена C) црвена

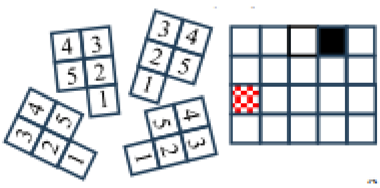
D) и сина, и зелена и црвена

E) вакво обојување не е можно

Решение. **C).** Страната меѓу последните два триаголника мора да е зелена, па затоа третата страна на долниот десен триаголник мора да е сина. Тоа значи, дека страната меѓу првите два триаголника мора да е зелена. Конечно, страната означена со x мора да е црвена. Целото боење е прикажано на цртежот десно.



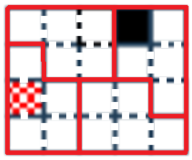
7. Правоаголникот прекажан на цртежот десно е покриен со преостанатите четири фигури кои може да се вртат, но не и да се



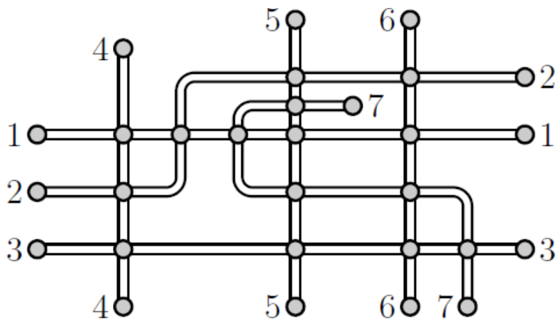
превртуваат и препокриваат. Ако црното квадратче е покриено со квадратче на кое е запишан бројот 4, кој број е запишан во шареното квадратче?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. B). За да црното квадратче е покриено со квадратче во кое е запишан бројот 4 распоредот на четирите фигури мора да е како на цртежот десно. Значи, во спротивните агли се наоѓаат по две исти фигури, од каде следува дека во пареното квадратче е запишан бројот 2.

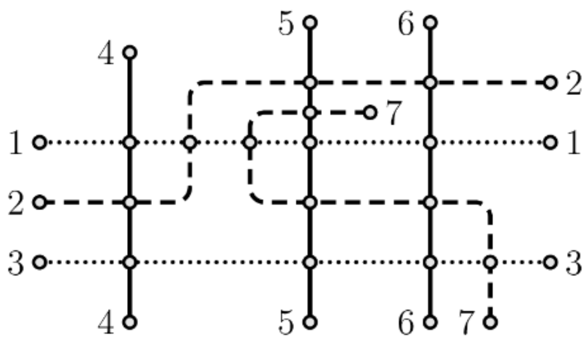


8. На цртежот десно е прикажан планот на трамвајските линии на еден мал град. Станиците се означени со кругчиња. Пабло сака да ги обои линиите така штоо секои две линии кои имаат заедничка станица се обоени во различна бои. Кој е најмалиот број бои со кои тоа може да го нашрави?



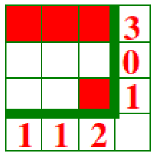
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

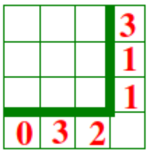
Решение. A). Линиите 4, 5 и 6 немаат заедничка станица, па затоа тие може да се обојат со една боја. Понатаму, линиите 1 и 3 немаат заедничка станица па затоа тие може да се обојат со една боја, а исто така со една боја може да се обојат и линиите 2 и 7. Така со три бои ги обоивме сите седум линии. Дека боењето не може да се направи со помалку од три бои следува од тоа што линиите 1, 2 и 4 се сечат две по две па

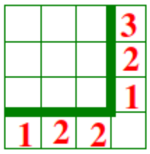


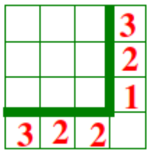
затоа за нивно боење ни се потребни три бои. Бараното боење е прикажано на цртежот десно.

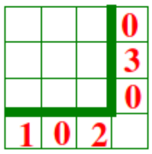
9. Некои квадратчиња од квадратна шема 3×3 се обоени со црвена боја. Бројот на црвени квадратчиња во една редица е означен со број на десната страна од редицата, а бројот на црвени квадратчиња од една колона е означен со број на крајот на колоната долу (види цртеж десно). Во која од дадените шеми е можно боење кое соодветствува на запишаните броеви?

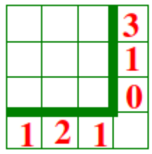


A) 

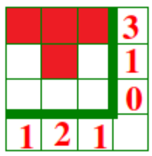
B) 

C) 

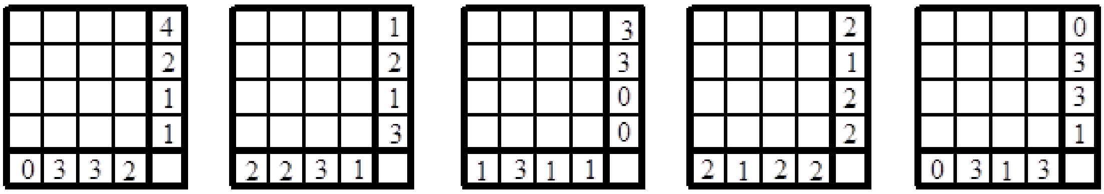
D) 

E) 

Решение. **E).** Вакво боење не е можно на шемата A) бидејќи треба сите полиња на првата редица да се обоени, а првата колона да нема обоени полиња. Бидејќи збирот на обоените полиња по редици е еднаков збирот на обоените полиња по колони, т.е. на вкупниот број обоени полиња вакво боење не е можно и за шемите B) и C). Во шемата D) сите полиња на втората редица мора да се обоени, па затоа не може да има колона без обоени полиња, што значи дека и оваа шема отпаѓа. Останува шемата E) и бараното боење е прикажано на цртежот десно.



10. Некои квадратчиња од квадратна шема 4×4 се обоени со црвена боја. Бројот на црвени квадратчиња во една редица е означен со број на десната страна од редицата. Бројот на црвени квадратчиња од една колона е означен со број на крајот на колоната долу. Потоа црвената боја од квадратната шема е отстранета. Еден од дадените цртежи одговара на боењето. Кој е тој?



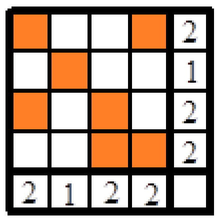
A) B) C) D) E)

Решение. **D).** Јасно е дека тоа не може да е случајот E). Во првата редица и првата колона не може да има обоени квадратчиња. Тогаш последните три полиња на втората и четвртата колона се сите обоени, како и последните три полиња од втората и третата редица се обоени. Но, тогаш во четврта редица и трета колона ќе има по две обоени полиња, што не е можно.

Јасно е дека тоа не може да е случајот C). Во третата и четвртата редица нема обоени полиња. Според тоа, во втората колона не може да има три обоени полиња.

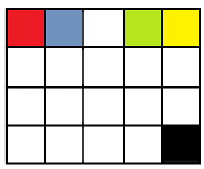
Исто така јасно е дека тоа не може да е случајот A). Во првата редица сите полиња се обоени, а во првата колона нема обоено поле, што не е можно.

Тоа не може да е случајот B). Имено, збирот на обоените полиња по редици е 7, а збирот на обоените чполиња по колони е 8, што не е можно, бидејќи овие два збира треба да се еднакви.



Значи, единствено можен е случајот D) што може да се види од цртежот десно.

11. Сакаме да обоиме квадратчиња во правоаголна 4×5 табела користејќи четири бои: црвена, сина, зелена и жолта, така што две соседни квадратчиња да не се обоени со иста боја (соседни се квадратчиња кои имаат барем едно заедничко теме). Четири квадратчиња се веќе обоени (цртеж десно). Со

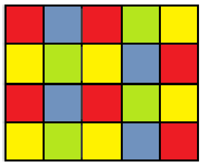


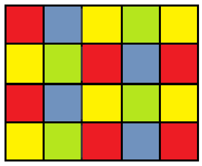
која боја може да биде обоени црното квадратче?

А) црвена B) сина C) зелена D) жолта

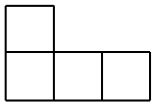
Е) има две различни можности

Решение. А). Средното квадратче во првиот ред можеме да го обоиме црвено или жолто. Понатаму, за секоја од овие две можности боењето на преостанатите квадратчиња е еднозначно. Притоа во секој следен ред прво го боиме централното квадратче, а потоа преостанатите четири квадратчиња во редот. Двете боења се прикажани на цртежите десно. Како што гледаме и во двата случаја црното квадратче е обоено со црвена боја.



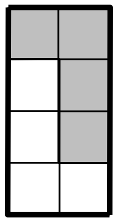


12. Горјан сака да состави квадрат користејќи само фигури како на цртежот десно. Кој е најмалиот број фигури што тој мора да ги употреби?

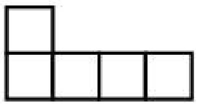


А) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Решение. А). Со две дадени фигури може да се состави правоаголник 2×4 како што е прикажано на цртежот десно. Со два вакви правоаголници формираме квадрат,



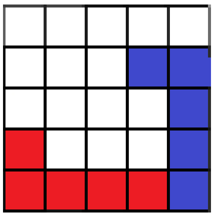
13. Андреј сака да состави квадрат користејќи само фигури како на цртежот десно. Кој е најмалиот број фигури што тој мора да ги употреби?

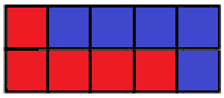


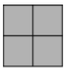
А) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 20

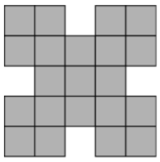
Решение. Е). Еден квадрат може да има 4, 9, 16, 25, 36, 64, 81, 100, 121, ... единечни квадратчиња. Една фигура има 5 единечни квадратчиња, па за да биде направен од најмал број на плочки од облик даден на цртежот, тој треба да има 25 или 100 единечни квадратчиа (број делив со 5).

За да се направи квадрат со 25 единечни квадратчиња треба во еден агол на квадратот да ја ставиме дадената фигура. Без ограничување на општоста можеме да земеме тоа да е левиот долен агол. Тогаш ако втората фигура ја поставиме како на цртежот десно, станува јасно дека не може да го направиме бараниот квадрат. Затоа втората фигура мора да ја ставиме како на цртежот долу и добиваме правоаголник 5×2. Сега ни останува да составиме правоаголник 5×3. На ист начин заклучуваме дека мора да сставиме правоаголник 5×2, по што останува да составиме правоаголник 5×1 што не е можно. За квадрат со 100 единечни квадратчиња ни се потребни $100:5=20$ од дадените фигури. Истиот може да се состави така што како погоре составуваме десет 5×2 правоаголници, а потоа истите по 2 ги редиме во пет реда.



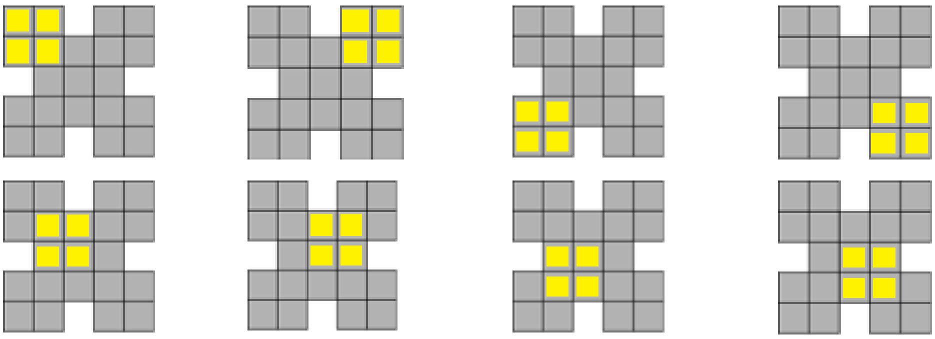


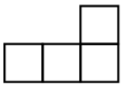
14. Магдалена сака да обои 2×2 квадрат  кој е дел од фугурата прикажана на цртежот десно. На колку начини може таа да го направи тоа?

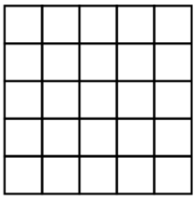


A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. **D).** Четири начини на боење на 2×2 квадрат е боењето во аглите на дадената фигура. Други четири начини е боењето ан 2×2 квадрат во сентралниот 3×3 квадрат. Осумте начини на боење се прикажани на долните цртежи.

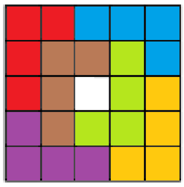


15. Кој е најголемиот број на L-тетрамина, фигури со об-
лик , кои може да се исечат од 5×5 квадрат?

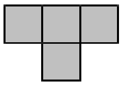


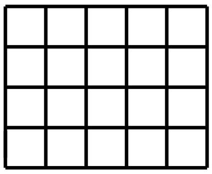
A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. D). Дадениот квадрат е составен од $5\cdot5=25$ единечни квадратчиња. Бидејќи секое L-тетрамина е составено од 4 квадратчиња и $25=4\cdot6+1$ добиваме дека не е можно да се постават повеќе од 6 L-тетрамина. На цртежот лево е прикажано поставување на точно 6 L-тетрамина.



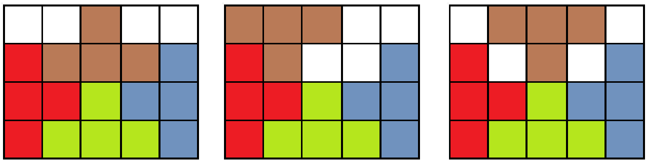
16. Ана во една кутија има многу плочки од облик како на цртежот (тетрамино – фигура во облик на буквата Т). Таа се обидува да стави што повеќе од нив на правоаголна плоча со димензии 4×5 (види цртеж). Кој е најголемиот број на плочки што таа може да ги постави без тие да се преклопуваат и без да излегуваат надвор од правоаголната плоча?



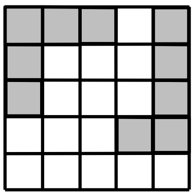


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

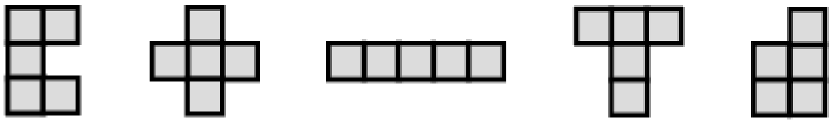
Решение. C). За да се покрие првата хоризонтала мора да поставиме три тетрамина и истите се поставуваат на единствен начин. Сега остануваат непокриени трите средишни квадратчиња од втората хоризонтала и целата трета хоризонтала. На непокриениот дел може да се постави само уште едно тетрамино. Можните поставувања се прикажани на цртежите десно.



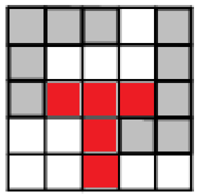
17. Илина поставила две фигури составени од по пет мали квадрати на квадратна плоча како на цртежот десно.



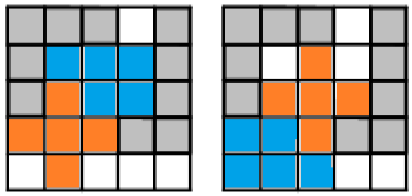
Која од следниве пет фигури таа може да ја смести на празниот дел од таблата, така што не би имало место за ниту една од преостанатите четири фигури?



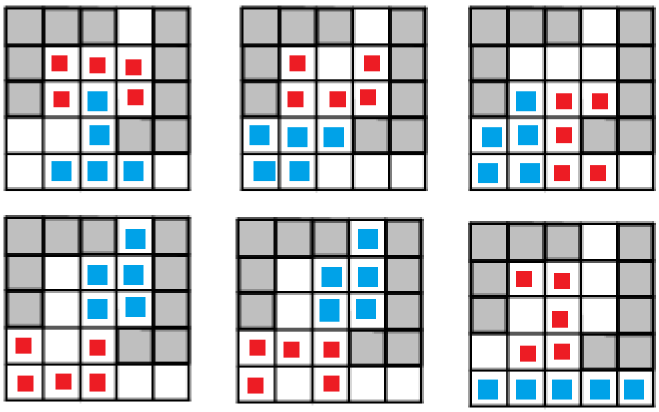
A) B) C) D) E)



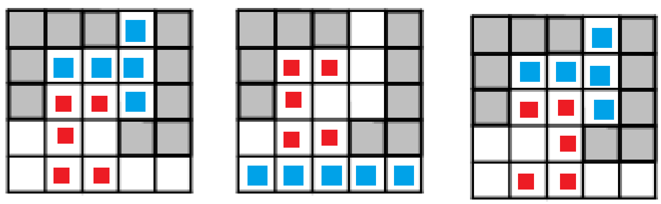
Решение. Ако ја ставиме фигурата под D) како на цртежот десно, тогаш ниту една од другите фигура не може да се постави.



Понатаму, крстот B) во празниот дел може да се постави на два начина, при што секогаш може да се постави една од другите четири фигури. Ова е покажано на цртежите десно.



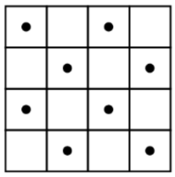
Фигурата A) на празниот дел може да се постави дури на девет начини и за секое поставување може да се постави уште една од другите фигури (види ги цртежите десно).

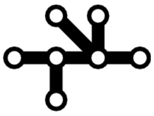
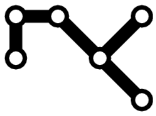
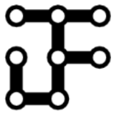


Фигурата C) на празниот дел може да се постави на единствен начин и како што е покажано на цртежите десно секогаш може да се постави уште една фигура.

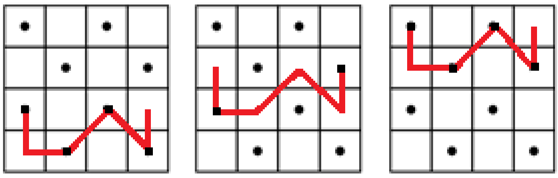
Фигурата E) на празните места може да се постави на повеќе начини и може да се види дека за секое нејзино поставување на полињата кои остануваат празни може да се постави барем една од преостанатите четири фигури. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. .

18. Која од следните фигури препокрива најголем број на точки од квадратната шема кога соодветно ќе се постави врз неа?

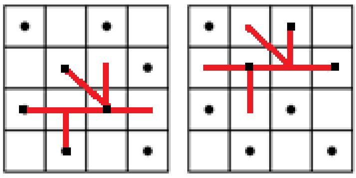


A)  B)  C)  D)  E) 

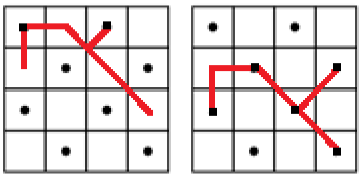
Решение. **C).** Со фигурата под A) може да се покријат две или четири точки, поставувајќи ја во секоја од трите можни позиции, вклучувајќи ги и ротациите (види цртеж).



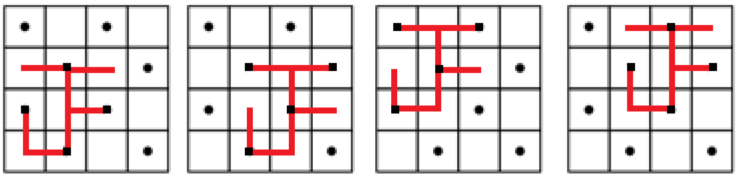
Со фигурата B) може да се препокријат три или четири точки, поставувајќи ја во секоја од двете можни позиции, вклучувајќи ги и ротациите (види цртеж).



Со фигурата C) може да се препокријат пет или една точка поставувајќи ја во двете можни позиции, вклучувајќи ги и ротациите (вуду цртеж).

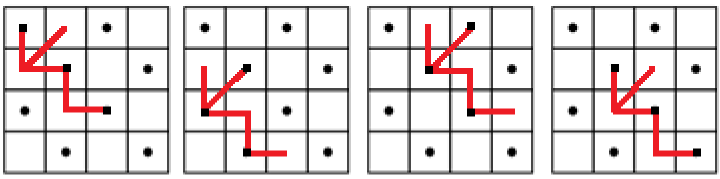


Со фигурата под D) може да се покријат три или четири точки



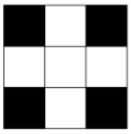
поставувајќи ја во четирите можни позиции, вклучувајќи ги и ротациите (види цртеж).

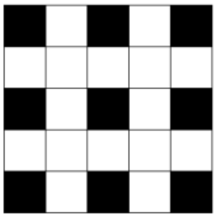
Со фигурата под E) може да се покријат



три точки поставувајќи ја во четирите можни позиции, вклучувајќи ги и ротациите (види цртеж).

19. Квадратни подови се покриваат со бели и црни плочки. Подови со 4 и со 9 црни плочки се прикажани на цртежот. Во секое ќоше има црна плочка и секоја црна плочка од сите страни е заградена со бели плочки. Колку бели плочки се потребни за да се покрие под на кој се поставени 25 црни плочки?

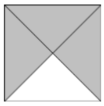




A) 25 B) 39 C) 45 D) 56 E) 72

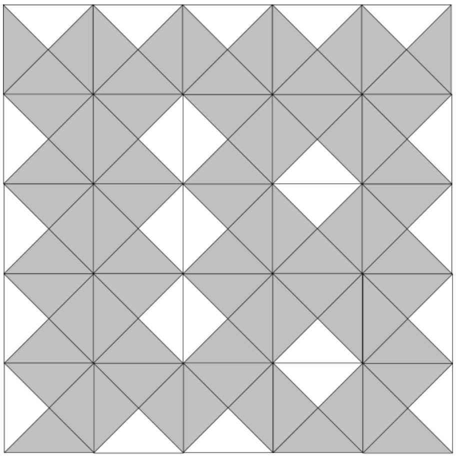
Решение. **D).** Според начинот на поплочување дадените 25 црни плочки се поставени по 5 плочки во пет реда. Бидејќи во секој ќош на квадратот има црна плочка, во првиот ред на квадратот има 4 бели плочки. Значи, квадратот е поплочен со $9 \cdot 9 = 81$ плочка. Имаме 25 црни плочки, па затоа бројот на белите плочки е $81 - 25 = 56$.

20. Квадратна 5×5 табла е поплочена со единечни идентични меѓу себе плочки со шара како што е дадено на цртежот десно. Било кои две плочки што имаат заедничка страна се допираат со иста боја, бела или сива. Една страна на единечна плочка е бела ако е страна на бел триаголник и сива ако е страна на сив триаголник. Обиколката на квадратната шема се состои од отсечки со должина 1. Кој е најмалиот можен број на единечни сиви отсечки на обиколката на 5×5 таблата, што може да се направи при нејзино поплочување?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. **B).** Бидејќи плочките имаат по една бела и три сиви страни, во секој агол на 5×5 таблата мора да има барем една сива отсечка. Тоа значи дека бројот на сивите отсечки е поголем или еднаков на 4. Ако ги поплочиме горната, левата и десната страна на таблата така што во агите ќе има точно по една сива отсечка, тогаш останатиот дел од таблата се поплочува на единствен начин, при што бидејќи должината на страната на таблата е непарен број се јавува најмалку уште една сива отсечка. Значи, најмалиот можен број сиви отсечки е $4+1=5$. Вакво поплочување е прикажано на цртежот десно.



21. Природните броеви се обоени во црвено, зелено и сино на следниот начин: 1 е црвен, 2 е син, 3 е зелен, 4 е црвен, 5 е син, 6 е зелен и така натаму на ист начин. Која боја ќе биде бројот кој е збир на црвен број и син број?

A) не е можно да се каже B) црвен или син C) само зелен

D) само цевен E) само син

Решение. **C).** Од начинот на боење, очигледно е дека за $k \in \mathbb{N}$, секој број од облик $3k+1$ е обоен во црвено, секој број од облик $3k+2$ е обоен во сино, а секој број од облик $3k+3$ е обоен во зелено.

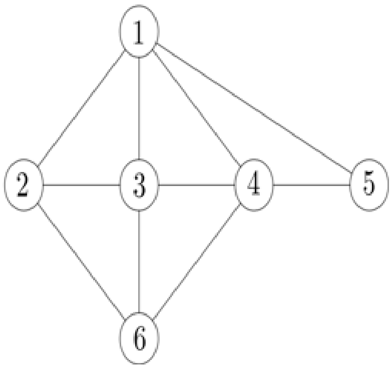
Според тоа, ако имаме црвен број и син број тоа се природни броеви од облик $3k_1+1$ и $3k_2+2$, за некои $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Нивниот збир е

$$(3k_1+1)+(3k_2+2)=3(k_1+k_2+1)=3k+3,$$

односно збирот е зелен број.

4. РАСПОРЕДУВАЊЕ БУКВИ, БРОЕВИ И ФИГУРИ

1. Следнава шема го покажува пријателството меѓу Ана, Бети, Цвета, Дијана, Елизабета и Марта. Секој број претставува една од девојките, а секоја линија пријателство меѓу две девојки. Секоја од следниве три девојки Цвета, Дијана и Марта има четири пријателки. Цвета и Дијана се и двете пријателки со Бети. Бети нема други пријателки. Кој број ја претставува Марта?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **B).** По четири пријателки имаат девојките означени со 1, 3 и 4, па затоа тие се Цвета, Дијана и Марта во некој редослед. Девојката означена со број 5 има две пријателки, и тоа 1 и 4, па затоа бројот 5 Бети, а 1 и 4 се Цвета и Дијана. Според тоа, 3 е Марта.

2. Пополни ги со броевите 1, 2, 3 или 4 празните полиња на квадратот прикажан на цртежот десно, така што броевите на двете дијагонали да се совпаѓаат, а броевите во секој ред и секоја колона да се различни. Кој број е во квадратчето во третиот ред одгоре надолу и првата колона одлево надесно?

		1	
		3	
	2		

A) 1 или 3 B) 2 или 4 C) 3 или 4 D) 1 или 4 E) 2 или 3

Решение. **B).** Според условот на задачата делумно пополнувањето е единствено и истото е прикажано на цртежот десно. Сега е јасно дека во квадратчето во третиот ред одгоре надолу и првата колона одлево надесно може да е еден од броевите 2 или 4.

3	4	2	1
	3	1	
	1	3	
1	2	4	3

3. Никола сака да ги подели броевите 2, 3, 4, ..., 10 во неколку групи, но така што збирот на броевите во секоја група да биде еднаков. Кој е најголемиот број групи што Никола може да ги направи?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) друг одговор

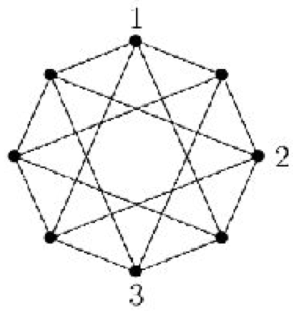
Решение. B). Збирот на дадените броеви е

$$2+3+4+5+6+7+8+9+10=54.$$

Бројот 54 е делив со 2, 3, 6, 9 и 27. Збирот на броевите во делбените групи мора да е поголем или еднаков на 10, па затоа Никола не може да формира 6 или повеќе групи. Никола броевите може да ги подели во три групи во кои збирот на броевите ќе биде 18. Навистина

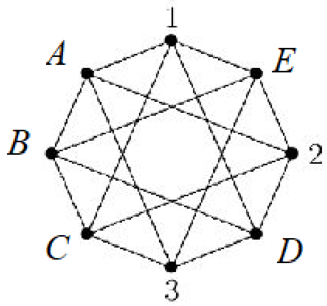
$$2+7+9=4+6+8=3+5+10=18.$$

4. Броевите 1, 2, 3 и 4 треба да се запишат во секоја од 8-те обележани точки на дадената фигура (во секоја точка еден број) така што на краевите на секоја отсечка се запишани различни броеви. Три броеви се веќе запишани. Колку пати ќе биде запишан бројот 4?

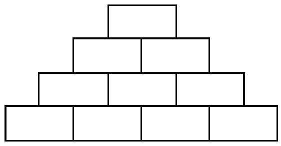


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. D). Точките во кои не е запишан број ќе ги означиме со A,B,C,D и E види цртеж. Точките A,C,D,E се краеви на отсечки во кои се запишани броевите 1, 2, 3. Според тоа, тие ќе бидат краеви на отсечки во кои е запишан бројот 4. Јасно, во точката B не може да биде запишан бројот 4.



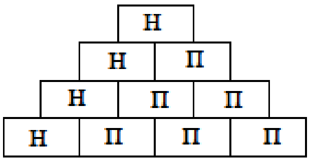
5. Михаил сака да запише по еден природен број во секое поле на цртежот десно, но така што секој број над долниот ред да е збир од двата броја запишани во полињата веднаш под него. Кој е најголемиот број на непарни броеви кои Михаил може да ги запише?

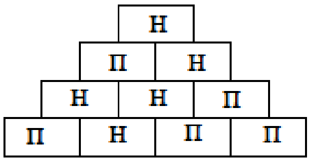


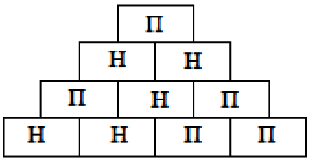
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

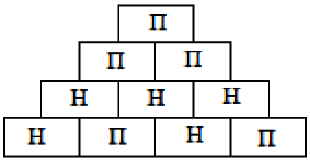
Решение. **D).** Бројот на непарните броеви е определен со бројот на непарните броеви и нивниот распоред во првиот ред.

Ако долу имаме еден непарен број, тогаш ќе има 4 или 5 непарни броја (цртеж десно).



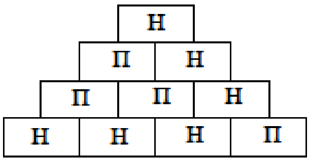


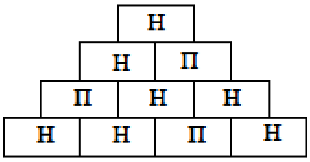




Ако долу имаме два непарни броја, тогаш ќе имаме 5 непарни броја (цртеж лево).

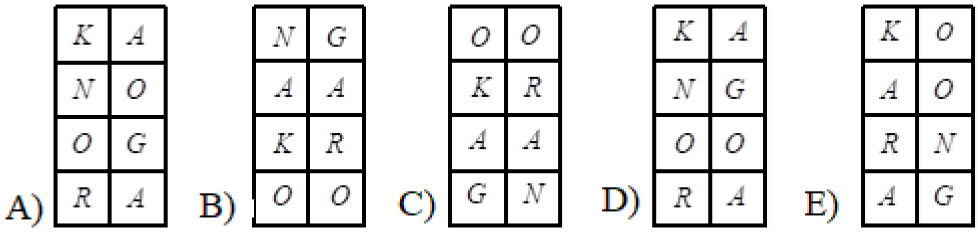
Ако долу имаме три непарни броја, тогаш ќе имаме 6 или 7 непарни броја (цртеж десно).





6. Виктор ги запишувал буквите од зборот KANGAROO во квадратчиња, во секое квадратче по една буква. Првата буква може да ја запише во било кое квадратче. Секоја следна буква ја запишува во квадратче кое има најмалку една заедничка точка со квадратчето во кое е запишана претходната буква. Која од следните табели Виктор не може да ја добие?

1	2
3	4
5	6
7	8



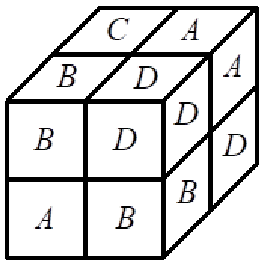
Решение. Квадратчињата ќе ги означиме со броеви како на цртежот од 1 до 8 од горе надолу од лево кон десно. Тогаш имаме

A) 1 2 3 6 8 7 5 2 B) 5 3 1 2 4 6 7 8

C) 3 5 8 7 6 4 2 1 E) 1 3 6 8 7 5 4 2

Во случајот D) таква низа од поврзани квадратчиња не постои. Имено, првите четири поврзувања се еднозначо определени и тоа: 1 2 3 4, но сега следува буквата A, а таа е во квадратчето 8 кое нема заедничка точка со квадратчето 4.

7. Маријана има 8 еднакви меѓу себе коцки на кои се запишани буквите A, B, C и D. Секоја од коцките на своите страни има иста буква. Таа од нив направила нова поголема коцка (види цртеж). Притоа, две соседни коцки немаат иста буква. Која буква е на коцката која не може да се види на цртежот?

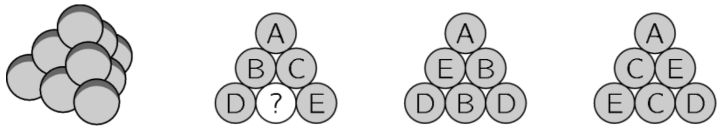


A) A B) B C) C D) D E) не може да се определи

Решение. B). Над коцката која не се гледа горе е коцката C , десно е коцката D, а пред неа е коцката A. Значи на страните на таа коцка е буквата B .

8. Триаголна пирамида е направена со помош на 10 идентични топчиња, како што е прикажано на цртежот долу лево. На секое топче е запишана една од буквите A, B, C, D и E. Има по две топчиња на кои е запишана иста буква. На преостанатите три цртежи се прика-

жани три страни на пирамидата. Која буква треба да стои на местото на прашалникот?



А) A B) B C) C D) D E) E

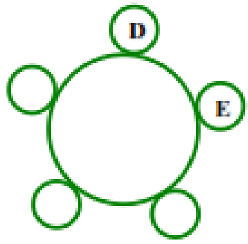
Решение. А). На врвот на пирамидата е едно топче означено со А. Во средниот ред се три топчиња редоследно означени со Е, В, С. Во долниот ред се шест топчиња редоследно означени со: Е, С, D, В, D и знакот прашалник, Бидејќи со секоја буква се означени по 2 топчиња, на местото на прашалникот треба да стои буквата А.

9. Ана, Боби, Цане, Дени и Елена седат на тркалезна маса. Ана не седи до Боби, Дени седи до Елена, а Боби не седи до Дени. Кои две деца седат до Цане?

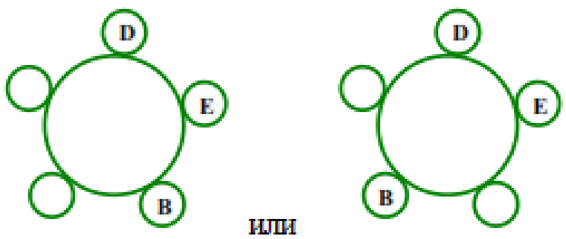
А) Ана и Боби B) Боби и Дени C) Дени и Елена

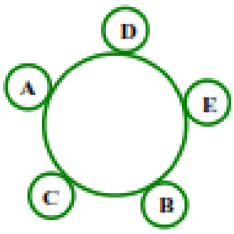
D) Елена и Ана E) Не е можно да се определи

Решение. А). Да означиме положба на масата каде Дени е до Елена. Бидејќи седат околу тркалезна маса, заради симетрија сеедно е на која страна ќе биде Елена од Дени.



Понатаму, Боби не седи до Дени, па затоа за местото на Боби имаме две можности (види ги цртежите десно).





Сега, бидејќе Ана не седи до Боби, можноста прикажана на десниот цртеж отпаѓа. Според тоа, Ана седи до Дени. Значи, до Цане седат Ана и Боби (цртеж лево).

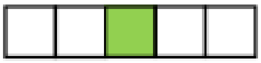
10. Богдан броевите од 1 до 9 ги внесувала во квадратна 3×3 шема, прикажана на цртежот, секој број во едно квадратче. На почеток тој ги запишал броевите од 1 до 4 како што е претставено. За бројот 5 збирот на соседните броеви (соседни се броевите запишани во квадратчиња со заедничка страна) е 9. Колку е збирот на броевите што се соседни на бројот 6?

1		3
2		4

A) 14 B) 15 C) 17 D) 28 E) 29

Решение. **E).** Јасно, бројот 5 не може да е во црнтралното поле. Понатаму, од $9-(1+2)=6$, $9-(1+3)=5<6$ и $9-(2+4)=3<6$ следува дека бројот 5 е во средното поле од првата колона и третиот соседен број му е 6. Значи, бројот 6 е во централното поле и негови соседни броеви се 5, 7, 8 и 9. Конечно, бараниот збир е $5+7+8+9=29$

11. Броевите 6, 7, 8, 9 и 10 се распределени во петте квадратчиња на цртежот десно, така што збировите на првите три и на последните три броја се еднакви на 23. Кој број е запишан во сивото квадратче?

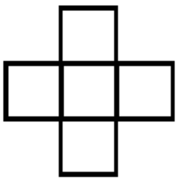


A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Решение. **A).** Збирот на двата збира е еднаков на $2\cdot23=46$. Во двата збира бројот кој е запишан во сивото квадратче се јавува два пати, а останатите броеви се јвуваат еднаш. Збирот на петте броја е $6+7+8+9+10=40$, па затоа бројот запишан во сивото квадратче е $46-40=6$. Еден од можните распореди на броевите во шемата е даден на цртежот десно.

10	9	6	8	7

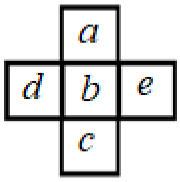
12. Броевите 1, 4, 7, 10 и 13 се запипани во квадратчињата на фигурата дадена на цртежот десно, во секое квадратче по еден број. Се покажало дека збирот на брое-



вите запшишани во редот е еднаков на збирот на броевите запишани во колоната и дека тој збир е најголем можен. Кој е тој збир?

А) 18 В) 20 С) 21 D) 22 Е) 24

Решение. Е). Броевите запишани во квадратчињата да ги означиме како на цртежот десно. Тогаш



$$a+b+c=d+b+e=A$$

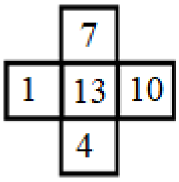
и A е најголем можен збир ако и само ако

$$2A=a+b+c+d+b+e=(a+b+c+d+e)+b$$
$$=1+4+7+10+13+b=35+b.$$

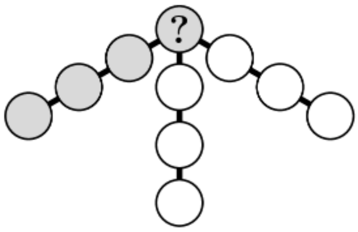
е најголем можен збир. Сега $2A$ е најголем можен збир ако и само ако b е најголемиот од дадените броеви, т.е. $b=13$. Според тоа,

$$a+c+d+e=1+4+7+10=22$$

па затоа $a+c=d+e=11$. Значи, бараниот најголем можен збир е $a+b+c=d+b+e=11+13=24$. Еден можен распоред на броевите 1, 4, 7, 10 и 13 е даден на цртежот десно.



13. Пабло во кругчињата на цртежот десно ги запишал броевите од 1 до 10 така што збирот на броевите запиани во кругчињата кои лежат на една права е 23. Кој број го запишал во кругчето во кое е прашалникот?



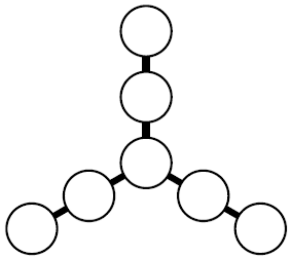
А) 4 В) 5 С) 6 D) 7 Е) 8

Решение. D). Збирот на сите запишани броеви е $1+2+...+10=55$. Збирот на трите збира на броевите кои се наоѓаат на трите прави е еднаков на $3\cdot 23=69$. Во овие три збир сите броеви се јавуваат по еднаш, освен бројот кој е запишан на местото на прашалникот, кој се јавува три пати. Според тоа, бројот кој е запишан на местото на прашалникот е еднаков на $(69-55):2=14:2=7$.

Пример на едно пополнување на шемата кој ги задоволува дадените услови е (7, 1, 6, 9), (7, 3, 5, 8), (7, 2, 4, 10). Навистина:

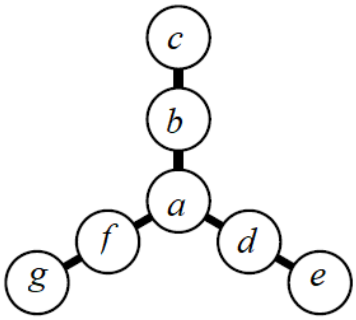
$$7+1+6+9=7+3+5+8=7+2+4+10=23.$$

14. Андреј ги запишува седумте броеви 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 во кругчињата на цртежот десно така да збирот на броевите запишани во секои три кругчиња кои лежат на иста права е еднаков. Колкав е најголемиот можен збир на запишаните броеви кои лежат на иста права?



A) 28 B) 18 C) 22 D) 16 E) 20

Решение. E). Ако броевите ги означиме како на цртежот десно, тогаш збирот на броевите кои лежат на една права е најголем можен ако и само ако е најголем можен збирот на броевите кои лежат на трите прави. Имаме

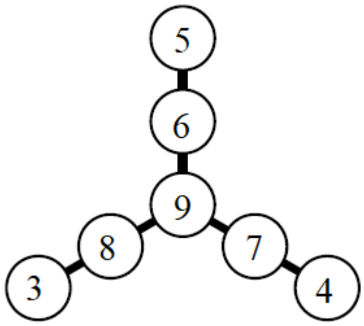


$$a+b+c=a+d+e=a+f+g=S,$$

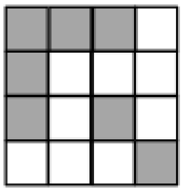
па затоа

$$\begin{aligned}3S&=(a+b+c+d+e+f+g+h)+2a\\&=(3+4+5+6+7+8+9)+2a\\&=42+2a\end{aligned}$$

и овој збир е најголем можен ако и само ако бројот a е најголем можен. Значи, $a=9$ и притоа добиваме $3S=60$, т.е. $S=20$. Останува уште да покажеме дека ваков распоред на броевите постои. Еден од можнире распореди е даден на цртежот десно.



15. Вуки е народ кој живее во земјата Недојдија. Нивната азбука се состои од 3 букви: А, К и Р. Десно е даден крстозбор на јазикот на народот Вуки, која може да се пополни со 4 од следниве 5 збора со три букви:

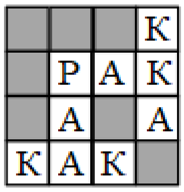


КKА, КАК, АРК, РАК и РАА.

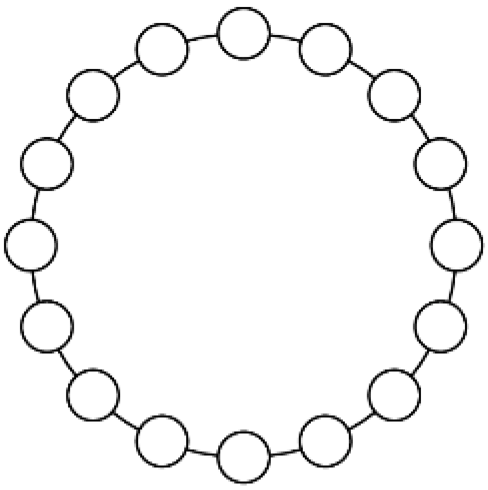
Кој од овие 5 збора не е употребен при пополну-вањето на крстозборот? (Се пополнуваат само необоените полиња.)

А) ККА B) КАК C) РАК D) РАА E) АРК

Решение. **E).** Броевите кои треба да се запишат во вториот ред и втората колона почнуваат со иста буква. Ако тоа се броевите ККА и КАК, тогаш во крстозборот треба да се запише збор кај кој буквата К е средна буква. Но, меу преостанатите три броја таков збор не постои. Значи, во втората колона и вториот ред треба да се запишат зборовите РАК и РАА. Сега е јасно дека другите два броја кои треба да се запишат се ККА и КАК (цртеж десно). Значи, нема да се употреби зборот АРК.



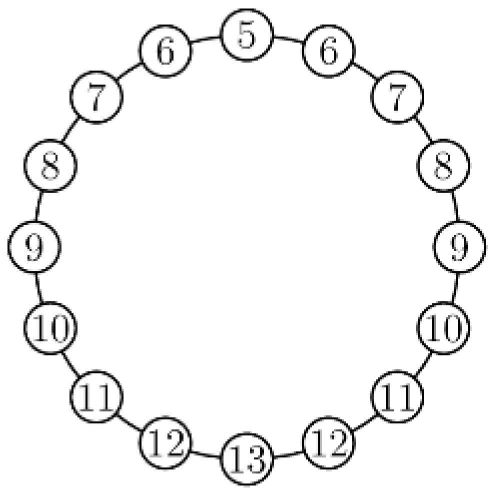
16. Секој од 16 прикажани кругови содржи по еден број. Броевите во соседните кругови се разликуваат за 1. Еден од круговите го содржи бројот 5, а другиот бројот 13. Колку различни броеви се запишани во овие 16 кругови?



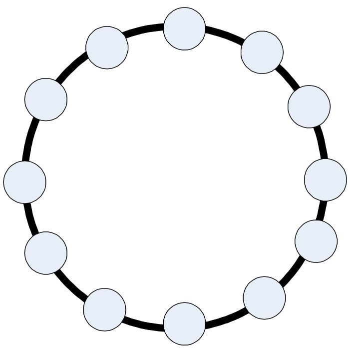
А) 9 B) 10 C) 13

D) 14 E) 16

Решение. **А).** Меѓу 5 и 13 има седум природни броеви, шго воедно е и бројот на круговите меѓу произволен круг и нему дијаметрално спротивниот круг. Затоа овие седум кругови мора да ги содржат броевите 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12. Но заради симетрија преостанатите седум кругови ги содржат истите тие броеви, што значи дека во круговите се запишаии броевите 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13.

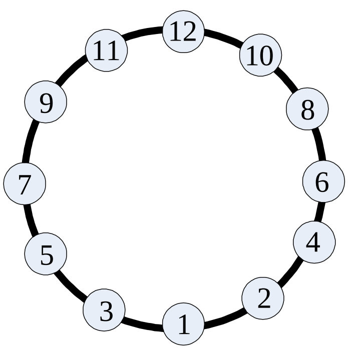


17. Броевите од 1 до 12 се запишани во кругчињата од цртежот, во секое кругче по еден број. Два соседни запишани бројчиња се разликуваат за 1 или 2. Кои од дадените парови броеви се соседи?



А) 5 и 6 В) 10 и 9 С) 6 и 7
D) 8 и 10 Е) 4 и 3

Решение. **D).** Единствен начин на распоредување на броевите е даден на цртежот. Според тоа, од предложените одговори, единствено можен, т.е. точен е одговорот под D). Соседи се броевите 8 и 10.



Навистина, соседи на 12 може да бидат броевите 11 и 10. Соседи на 11 може да се 12, 10 и 9. Бидејќи 12 и 10 се веќе запишани, добиваме дека втор сосед на 11 мора да е 9. Соседи на 10 може да бидат 12, 11, 9 и 8. Бидејќи 12, 11 и 9 се веќе запишани, втор сосед на 10 мора да биде 8. Соседи на 9 може да бидат 11, 10, 8 и 7. Бидејќи 11, 10 и 8 се веќе запишани, втор сосед на 9 мора да биде 7. Соседи на 8 може да бидат 9, 10, 7 и 6. Бидејќи 10, 9 и 7 се веќе запишани, втор сосед на 8 мора да биде 6. Продолжувајќи го овој начин на пополнување го добиваме записот даден на цртежот. Значи, од дадените парови единствени соседи се 8 и 10.

18. Во единечните квадратчиња од 4×4 квадратна табла се запишани природни броеви, во секое квадратче по еден број. Два броја запишани во соседни квадратчиња се разликуваат за 1. (соседни се квадратчиња се оние кои имаат заедничка страна). На таблата се запишани и бројот 3 и бројот 9. Бројот 3 е запишан во горниот лев агол (види цртеж). Колку различни броеви се запишани на таблата?

3			

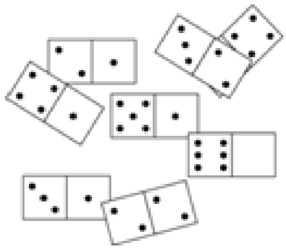
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

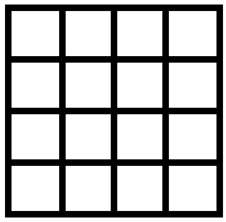
Решение. **D).** Во квадратната 4×4 од секое поле можеме да дојдеме до секое поле користејќи низа соседни полиња. Бидејќи таблата ги содржи броевите 3 и 9, а броевите во соседните полиња се разликуваат за 1, добиваме дека на таблата мора да се запишани броевите 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Понатаму, на таблата не постои низа со повеќе од 7 различни полиња, па затоа не може да бидат запишани повеќе од 7 различни броеви. Броевите 3 и 9 се разликуваат за 6, па затоа мора да има 6 премини, што е можно само ако бројот 9 е запишан во долниот десен агол. Ваков распоред на броевите 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 е даден на цртежот десно.

3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	9

19. На масата се наоѓаат осум домина (цртеж 1). Половина од едното домино е покриено. Од осумте домина може да се состави квадрат со

димензии 4×4 (цртеж 2) така што бројот на точките во секој ред и во секоја колона на квадратот е еднаков.


Цртеж 1

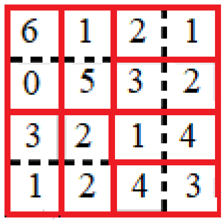

Цртеж 2

Колку точки се наоѓаат на покриениот дел од доминото?

A) 1　　B) 2　　C) 3　　D) 4　　E) 5

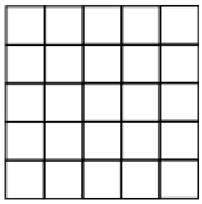
Решение. **C).** Збирот на точките кои се гледаат на домината е:

$$4+3+2+2+1+4+1+5+1+6+3+1+2+2=37.$$



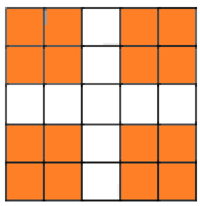
Квадратот има четири реда и во секој ред збирот на точките е еднаков. Според тоа, збирот на точките треба да е делив со 4. Од броевите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, само бројот 3 собран со бројот 37 дава збир делив со 4. Значи, вкупниот број точки на квадратот е 40 и збирот на точките во секој ред и секоја колона е 10. На цртежот десно е даден распоредот на домината на квадатот при кој се исполнети бараните услови.

20. Броевите 0 и 1 се запишани во единечните полиња на квадратна табла со димензии 5×5 така што секој 2×2 квадрат од таблата содржи точно три еднакви броеви. Колку изнесува најголемиот можен збир на сите броеви запишани во таблата?



A) 22　　B) 21　　C) 20　　D) 19　　E) 18

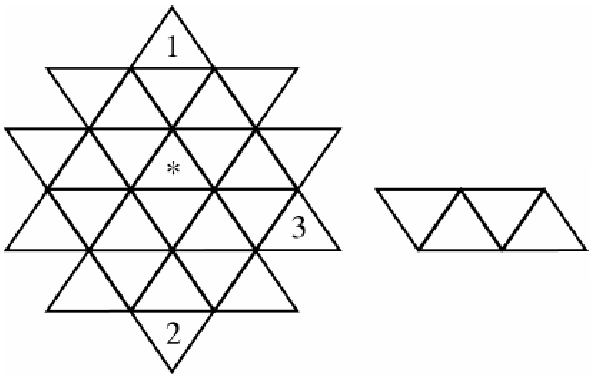
Решение. **B).** За да го добиеме најголемиот можен збир треба да види кој е најмалиот број нули кои се запишани во полињата на таблата така што е исполнет



условот на задачата. Ако во таблата се запишани три или помалку 0, тогаш најмалку во еден од четирите квадрати обоени црвено се запишани четири единици, што противречи на условот на задачата. Значи, на таблата се запишани четири или повеќе нули. Распоред со четири нули е даден на цртежот десно. Значи, најголемот можен збир на броевите запишани на таблата е 21.

1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

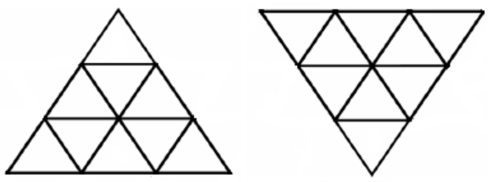
21. Во секој триаголник на левиот цртеж се запишува по еден од броевите 1, 2, 3, 4, но така што во секоја група од четири триаголници (види го десниот цртеж), независно од положбата (хоризонтално или по дијагонала), треба да се содржат четири различни броја. Кој број треба да се стави на местото на ѕвездичката?

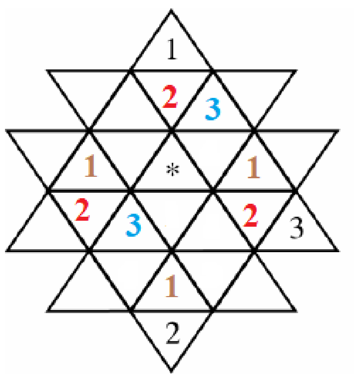


A) само 1 B) само 2 C) само 3 D) само 4

E) некој од броевите 1, 2 или 3

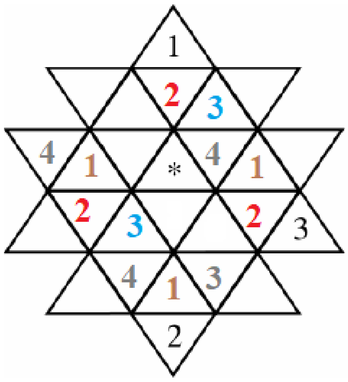
Решение. **B).** Од условот на задачата следува дека во секој триаголник од видовите како на цртежите десно во темените триаголници е запишан еден ист број. Имено, на страните имаме по две групи од по 4 мали триаголници кај кои средните три триаголници се заеднички, па затоа мора во крајните триаголници броевите да се исти. Според тоа,



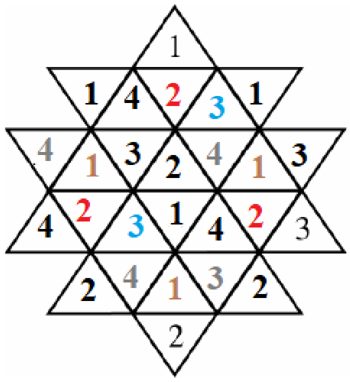


делот од пополнувањето прикажан на цртежот десно е еднозначен.

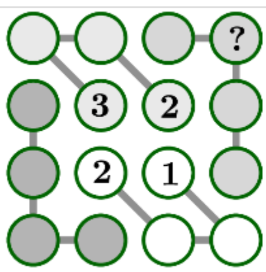
Сега е јасно дека во празниот триаголник на пополнетата горна дијагонална група мора да е бројот 4, па ако се искористи погоре кажаното за триаголниците составени од девет мали триаголници го добиваме пополнувањето.



Во редот во кој е ѕвездичката во групите од по четири мали триаголници ги имаме броевите 1 и 4, па затоа на местото на ѕвездичката мора да е еден од броевите 2 или 3. Но, бројот 3 се содржи во дијагоналните групи од по четири мали триаголници во кои е ѕвездилчката, па затоа на местото на ѕвездичката треба да е бројот 2. Пополнетата фигура е прикажана на цртежот десно.



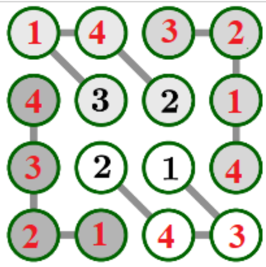
22. Горјан ги пополнува кругчињата од фигурата прикажана на цртежот десно, така што во секој ред, секоја колона и секоја четворка кругчиња поврзана со линии ги распоредува четирите броја 1, 2, 3, 4. Кој број Горјан ќе го запише на местото на прашалникот?



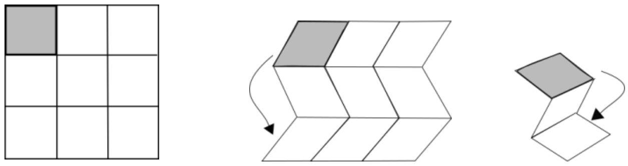
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) не може да се определи

Решение. B). Заради четворката кругчиња поврзани со линии која го содржи горното лево аголно поле во првите две полиња од првиот ред не може да се броевите 2 и 3. Понатаму, заради третата колона во првото нејзино поле не може да се броевите 1 и 2. Значи, бројот 2 во првиот ред не може да биде запишан во ниту едно од првите три полиња, па затоа тој е запишан на местото на прашалникот.

Останува да покажеме дека вакво пополнување постои. Навистина, во третото поле на првиот ред мора да е бројот 3, па сега во чртвртото поле на третата колона мора да е бројот 4 итн. Пополнетата фигура е прикажана на цртежот десно.



23. Васко има лист хартија во форма на квадрат, поделен на 9 помали квадрати како на долниот цртеж лево. Тој го свиткал листот како што е прикажано - преклопувајќи го прво хоризонтално, а потоа вертикално, така што сивото квадратче да биде најгоре.



Васко сака да ги запише броевите од 1 до 9 во квадратчињата, така што откако листот ќе биде свиткан, броевите би растеле по големина со 1 најгоре. Кои броеви ќе бидат напишани на местото на буквите a, b, c?

	a	
		c
	b	

A) $a=6, b=4, c=8$ B) $a=4, b=6, c=8$ C) $a=5, b=7, c=9$

D) $a=4, b=5, c=7$ E) $a=6, b=4, c=7$

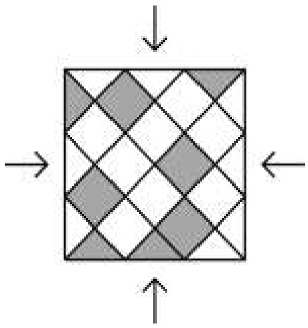
Решение. A). Да ги означиме квадратчињата како на цртежот десно. При првото свиткување на хартијата под сивото квадратче ќе бидат квадратчињата од првата колона во истиот редослед, т.е. $I1, I2, I3$, до нив ќе бидат квадратчињата од втората колона во истиот редослед, т.е. $II1, II2, II3$ и на крајот квадратчињата од третата колона во истиот редослед $III1$, $III2, III3$. По второто свиткување квадратчињата $I1, I2, I3$ остану-

I1	*II1*	*III1*
I2	*II2*	*III2*
I3	*II3*	*III3*

ваат во истиот редослед, квадратчињата $II1, II2, II3$ ќе бидат наредени во обратен редослед и квадратчињата $III1, III2, III3$ остануваат во истиот редослед. Значи, редоследот е $I1, I2, I3, II3, II2, II1, III1, III2, III3$. Бидејќи броевите треба да се во растечки редослед почнувајќи од бројот 1, го добиваме распоредот на броевите прикажан на цртежот десно. Според тоа, $a=6, b=4, c=8$.

1	6	7
2	5	8
3	4	9

24. Квадратниот под на цртежот десно е покриен со сиви и бели триаголни и квадратни плочки. Колку најмалку сиви плочки треба да ги заменат местата со бели плочки така што подот да изгледа исто од секоја од четирите страни?



A) три триаголни, една квадратна

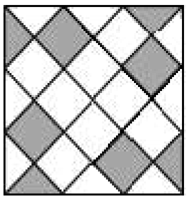
B) една триаголна, една квадратна

C) две триаголни, две квадратни

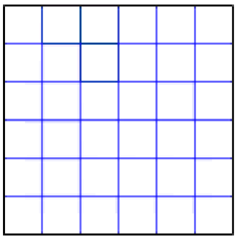
D) три триаголни, три квадратни

E) три триаголни, две квадратни

Решение. **B).** На долната страна имаме две сиви триаголни плочки, а на десната страна нема сива триаголна плочка. Значи, местата треба да ги заменат втората сива триаголна плочка на долната страна и белата долна триаголна плочка на десната страна. Сега, трите сиви триаголни плочки имаат заедничко теме со три сиви квадратни плочки, и обратно. Ова не е случај со сивата триаголна плочка на горната страна, па затоа горната квадратна сива плочка која не допира страна на квадратот треба да го замени местото со белата квадратна плочка која е горе-десно над неа. Сега, изгледот на подот е даден на цртежот горе.



25. Во секое поле од 6×6 квадрат има по една светилка. Велиме дека две светилки се соседни ако тие лежат во полиња кои имаат заедничка страна. На почетокот некои светилки светат и во секоја минута, секоја светилка која има две соседни светилки кои светат почнува да свети. Кој е минималниот број на светилки кои треба да светат на почетокот, за да бидеме сигурни дека после некое време сите светилки ќе светат?

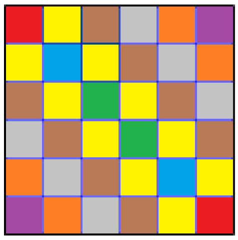


A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. **C).** Ако во најгорниот ред на квадратот нема запалена светилка, тогаш ниту едно негово поле нема да има две соседни полиња во кои се запалени две светилки, па затоа светилките во најгорниот ред нема да може да се запалат. Значи, во најгорниот ред мора да има барем една запалена светилка. На сличен начин заклучуваме дека во најдолниот ред и во левата и десната колона мора да има по една запалена светилка. Најмалиот број запалени светилки при што во крајните редови и колони ќе има барем по една запалена светилка е две светилки, кои се поставени во два спротивни агли на квадратот (црвена полиња).

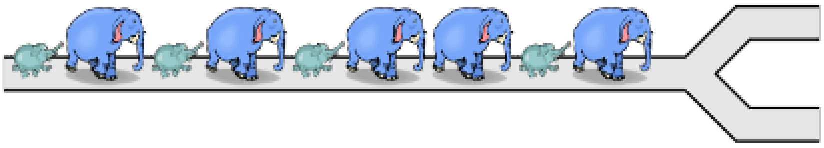
Сега, ако ги отстраниме крајните редови и колони, добиваме 4×4 квадрат и на сличен начин заклучуваме дека во неговите крајни редови и колони мора да има по една запалена светилка во секој ред и секоја колона, а тоа се најмалку две светилки (сини полиња).

Ако од овој квадрат ги отстраниме крајните редови и колони, добиваме 2×2 и на ист начин заклучуваме дека во него мора во секој ред и секоја колона да има по една запалена светилка во секој ред и секоја колона, а тоа се најмалку две светилки (зелени полиња).

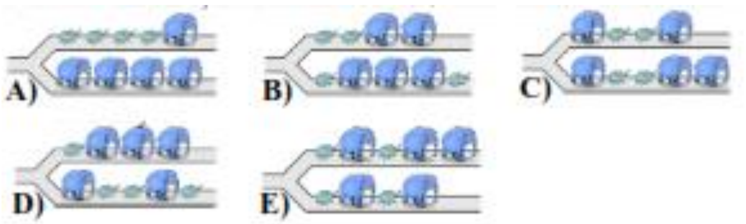


Според тоа, мора да има 6 или повеќе запалени светилки. Еден распоред на точно 6 светилки е даден на цртежот десно (црвени, сини и зелени полиња). Во првата минута ќе се запалат светилките во жолтите полиња, во втората во кафеавите, во третата во сивите, во четвртата во портокаловите и во петата во лилјаковите. Обиди се да најдеш и други распореди на 6 запалени светилки така што ќе се запалат светилките во останатите полиња.

26. Пет големи и четири мали слона се движат по патека, како што е прикажано на цртежот.



На раскрсницата некои од нив одат лево, а останатите десно. Која од понудените пет состојби не е можна?



Решение. **C).** Кога слон оди лево ќе означуваме со Л, а кога оди десно ќе означуваме со Д.

Состојбата A) може да се добие со низата ЛЛДДЛДЛДЛ.

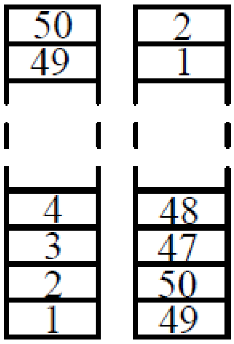
Состојбата B) може да се добие со низата ЛДЛДЛДЛДД.

Состојбата D) може да се добие со низата ЛДЛДДЛЛЛД.

Состојбата E) може да се добие со низата ДДЛЛЛЛЛДД.

Состојбата C) не може да се добие бидејќи без разлика како ќе одат слоновите во една од патеките, лево или десно, на крајот мора да има мал слон, што не е случај.

27. Калина има кула составена од 50 блокови означени со броевите од 1 до 50 (левата кула на цртежот десно). Калина гради нова кула на следниов начин: одеднаш зема два блока од врвот на кулата и ги поставува на земјата во истиот редослед, потоа одеднаш ги зема следните два блока од врвот на остатокот на првата кула и ги поставува во истиот редослед итн, со што ја добива десната кула на горниот цртеж.

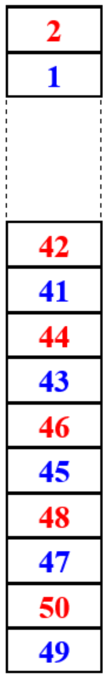


Кои од следниве парови блокови се наоѓаат на соседни блокови во новата кула?

A) 29 и 28 B) 34 и 35 C) 29 и 26

D) 31 и 33 E) 27 и 30

Решение. **E).** На цртежот десно се покажани пет почетни чекори при составување на новата кула. Во новата кула под секој парен број е бројот кој е за еден помал од него, а под секој непарен број е бројот кој е за 3 поголем од него.



Од дадените парови броеви единствен пар кој задоволува еден од двата услови е парот 27 и 30 и тој се наоѓа на соседни блокови во новата кула.

28. Во низа едно до друго се наредени 2024 топчиња, така што меѓу секои 100 последователни топчиња има најмногу 34 жолти. Кој е најголемиот можен број жолти топчиња во оваа низа?

A) 680 B) 704 C) 1024 D) 1520 E) 1544

Решение. **B).** Низата топчиња гледајќи лево да ја поделиме на 21 групи и тоа 20 групи од по 100 топчиња и 1 група од 24 топчиња. Во секоја од првите 20 групи може да има најмногу по 34 жолти топчиња и ако во последната група сите 24 топчиња се жолти, тогаш најголемиот можен број жолти топчиња е $20\cdot 34+24=704$. Распоред на 704 жол-ти топчиња е можен ако формираме 20 еднакви групи со по 34 жол-ти топчиња на почетокот и 66 бели топчиња по нив, и на крајот ја ставиме последната група со 24 жолти топчиња.

29. Околу тркалезна маса седат 30 луѓе. Некои од нив носат капа. Луѓето кои носат капа секогаш ја кажуваат вистината, а додека луѓето кои не носат капа некогаш лажат, а некогаш ја кажуваат вистината. Секој човек рекол: „Најмалку еден од моите соседи не носи капа.“ Кој е најголемиот можен број на луѓе околу таа маса кои носат капа?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Решение. D). Со К да означиме дека човекот носи капа, а со Н дека човекот не носи капа. Да разгледаме било кои тројца кои седат еден до друг.

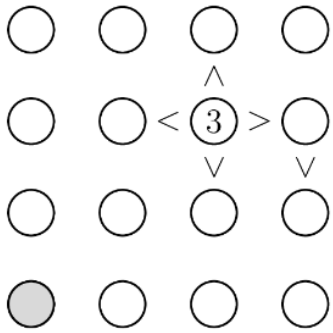
Ако човекот кој е во средина носи капа, тој ја говори вистината, па затоа најмалку еден човек кој седи до него не носи капа. Значи можни се три случаја: НКН, НКК и ККН.

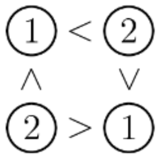
Ако човекот кој е во средина не носи капа, тој понекогаш кажува вистина, а понекогаш лаже. Кога кажува вистина, тогаш најмалку еден негов сосед не носи капа, па ги имаме следниве три можности ННН, ННК и КНН. Кога лаже, не важи изјавата дека најмалку еден негов сосед не носи капа, па затоа двата негови соседи носат капа, т.е. имаме само една можност КНК.

Од претходно кажаното следува дека за било кои тројца кои седат еден до друг ги имаме следниве можности: НКН, НКК, ККН, ННН, ННК и КНН и КНК. Последното значи дека за било кои тројца кои седат еден до друг може да се тврди дека најмалку еден од нив не носи капа. Значи, од 30 луѓе капа не носат најмалку 10, па затоа меѓу 30 луѓе најмногу 20 носат капа.

Ваков распоред е: НККНККНККНККНККНККНККНККНККНКК.

30. Матео сака да ја доврши сложувалката прикажана на цртежот десно така што во секој ред и секоја колона броевите 1, 2, 3 и 4 ќе бидат запишани точно еднаш. Притоа за броевите во круговите меѓу кои се знаците < и > ќе важат точни неравенства, како што е покажано на примерот лево.





Кој број Матео треба да го запише во сивиот круг?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 2 или 3

Решение. **A).** Бидејќи десно од 3 е помал број, а од овој број долу е повторно помал број, единствена можност е десно од 3 да е бројот 2, а под него да е бројот 1 (прв квадрат во првиот ред). Бидејќи лево од 3 е помал број, а бројот 2 веќе е запишан, лево од 3 мора да е бројот 1, а лево од него е бројот 4 (втор квадрат во првиот ред). Сега, бидејќи во третиот ред веќе е запишан бројот 1, под бројот 3 во третата колона мора да е бројот 2, а над него мора да е бројот 1. Значи, најдолу во трета колона е бројот 4 (трет квадрат во првиот ред).

		3	2
			1

4	1	3	2
			1

		1	
4	1	3	2
		2	1
		4	

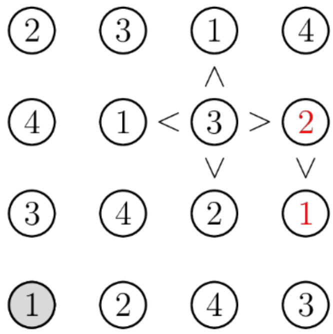
		1	4
4	1	3	2
		2	1
		4	3

		1	4
4	1	3	2
3	4	2	1
		4	3

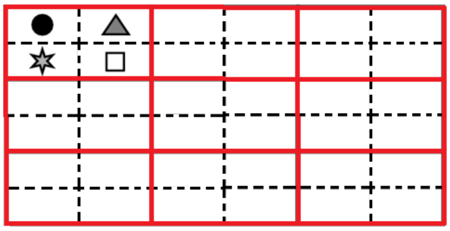
	3	1	4
4	1	3	2
3	4	2	1
	2	4	3

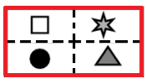
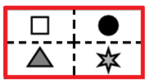
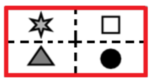
2	3	1	4
4	1	3	2
3	4	2	1
1	2	4	3

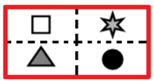
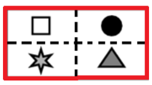
Продолжувајќи со слични размислувања ги пополнуваме следните четири квадрати прикажани на горните цртежи. Така ја добиваме пополнетата сложувалка, која е прикажана на цртежот десно. Значи, во сивиот круг е бројот 1.



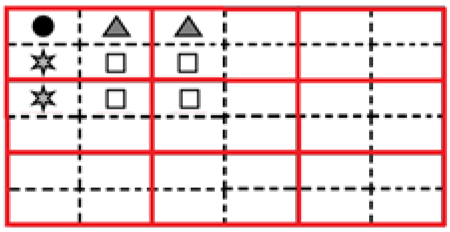
31. Имаме правоаголни карти поделени на четири еднакви полиња и во секое поле се нацртани четирите различни знаци □, ✡, ●, ▲. Картите може да се ставаат една до друга само ако истите знаци се наоѓа во соседните полињата во кои тие се допираат. Девет карти се искористени за правење на правоаголникот што е прикажан на цртежот десно. Која од следниве карти сигурно не е искористена за да се формира овој правоаголник?



A)  B)  C) 

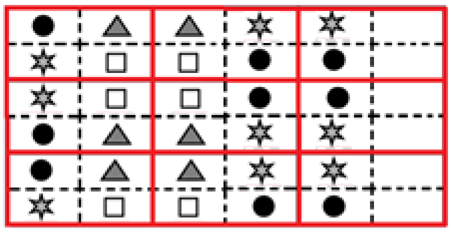
D)  E) 

Решение. **E).** Според условот на задачата еднозначно се определени првите две чполиња на средната карта во првиот ред и средната карта во вториот ред, како и горното лево поле на централната карта (цртеж десно).



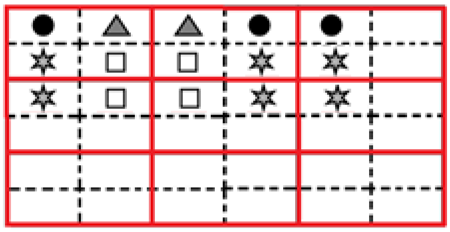
Сега во долното десно поле на средната карта во првиот ред може да се стави ✡ или ●. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.

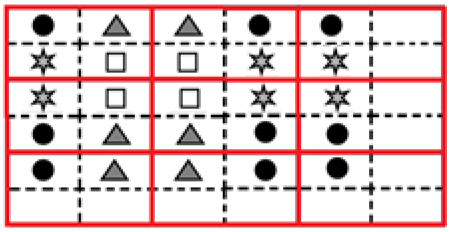
Ако во полето е ставен знакот ●, тогаш со последователна примена на правилото за поставување на картите го

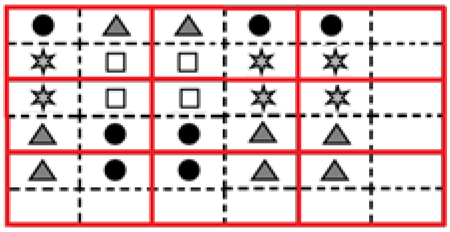


добиваме распоредот прикажан на цртежот десно, во кој не се пополнети шест полиња од трите карти во последната колона. Забележуваме дека во овој случај се појавуваат картата B), но не се појавува картата E) и истата не може да се појави меѓу картите од последната колона.

Ако во полето е ставен знакот ✡ , тогаш со последователна примена на правилото за поставување на картите го добиваме распоредот прикажан на цртежот десно. Сега во долниот десен агол на првата карта во вториот ред може да се појави еден од знаците ● или △. Притоа ги добиваме распоредите прикажани на долните цртежи.







Забележуваме дека картите A) и C) се јавуваат на десниот цртеж, картата D), а додека картата E) не се јавува и на двата цртежи и не може да се појави меѓу во последните редови и последните колони и на двата цртежи.

5. ПРЕБРОЈУВАЊА

1. Колку прирродни броја со помалку од три цифри може да се запишат само со нули, единици и двојки?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) повеќе од 9

Решение. C). Природните броеви кои имаат помалку од три цифри запишани само со нули, единици и двојки се едноцифрените броеви 1, 2, и двоцифрените броеви 10, 11, 12, 20, 21, 22. Според тоа, има 8 такви броеви.

2. Марко ги запишал сите броеви со следниве својства: првата цифра е 1,секој следна цифра е поголема или еднаква на претходната цифра, збирот на цифрите е еднаков на 5. Колку броеви запишал Марко?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Решение. B). Марко ги запишал броевите: 11111, 1112, 113, 122 и 14. Значи, тој запишал 5 броја.

3. Еден трицифрен број го нарекуваме „убав“, ако цифрата на десетките е поголема од збирот на другите две цифри. Колку најмногу последователни „убави“ броеви постојат?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. D). Најмногу последователни „убави“ броеви може да се набројат само ако цифрата на десетките е најголемата можна цифра, а тоа е цифрата 9. Сега, убавите трицифрени броеви се од видот $\overline{a9c}$, при што важи $a+c<9$. Јасно, најмногу вакви последователни броеви имаме ако $a=1$ и притоа ги добиваме броевите: 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196 и 197. Значи, има 8 најмногу последователни „убави“ броеви.

4. Колку е бројот на сите парови двоцифрени броеви чија разлика е 50. *Забелешка*. Паровите (x, y) и (y, x) ги сметаме за еднакви и ги броиме еднаш.

A) 40 B) 30 C) 50 D) 60 E) 10

Решение. A). Најмалиот двоцифрен број е 10. Имаме $10+50=60$, па затоа паровите кои го задоволуваат условот на задачата се: (10,60), (11,61), (12,62), ..., (49,99). Според тоа, бројот на паровите е 40.

5. Ако од еден троцифрен број го одземеме бројот 297 се добива троцифрен број запишан со истите цифри но во обратен редослед. Колку такви троцифрени броеви има?

A) 6 B) 7 C) 10 D) 60 E) 70

Решение. D). Нека $\overline{abc}$ е трицифрен број со саканото својство. Јасно, $a, c \neq 0$. Трицифрениот број запишан со истите цифри но во обратен редослед е $\overline{cba}$ и од условот на задачата следува

$$\begin{aligned}
&\overline{abc}-297=\overline{cba},\\
&100a+10b+c-297=100c+10b+a,\\
&99(a-c)=297,\\
&a-c=3.
\end{aligned}$$

Сега, бидејќи $a, c \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, решение на последната равенка се подредените парови $(9,6),(8,5),(7,4),(6,3),(5,2),(4,1)$. Но, b е произволна цифра, па затоа добиваме дека постојат 60 такви трицифрени броеви.

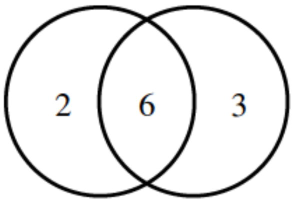
6. Филип има три карти со броеви запишани на двете страни. На првата карта на предната страна е бројот 1, а на задната е бројот 4, на втората на предната страна е бројот 2, а на задната е бројот 5, на третата на предната страна е бројот 3, а на задната е бројот 6. Филип слу-

чајно ги става трите карти на масата и ги собира броевите кои ги гледа. Колку различни збирови може да добие?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

Решение. **B).** Најмалиот збир кој го може Филип да го добие е еднаков на збирот на броевите на предните страни на картите, т.е. на 6. Секогаш кога ќе преврти една карта збирот на броевите се зголемува за 3. Тој може да преврти три карти, што значи дека може да добие 4 различни збира.

7. Колку различни резултати може да се добија при гаѓање со две стрелички во метата прикажана на цртежот десно?



A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

Решение. **D).** Треба да ги сметаме и промашувањата. Значи, може да се добијат следниве резултати:

$$0=0+0,\quad 2=0+2,\quad 3=0+3,\quad 6=0+6,\quad 4=2+2,$$
$$6=3+3,\quad 12=6+6,\quad 5=2+3,\quad 8=2+6,\quad 9=3+6.$$

Значи, може да се добијат десет резултати, од кои два се еднакви меѓу себе, па затоа бројот на различните резултати е 9.

8. Мачка има 7 мачиња: бело, црно, црвено, бело-црно, бело-црвено, црно-црвено и бело-црно-црвено. На колку начини можат да се изберат 4 мачиња така што секои две од избраните да имаат заедничка боја?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

Решение. C). Четири мачиња кои го исполнуваат условот на задачата, а едно е еднобојно се:

бело, бело-црно, бело-црвено, бело-црно-црвено

црно, бело-црно, црно-црвено, бело-црно-црвено

црвено, бело-црвено, црно-црвено, бело-црно-црвено,

Четири мачиња кои го исполнуваат условот на задачата, а меѓу нив нема еднобојно се:

бело-црно, бело-црвено, бело-црно-црвено, црно-црвено.

Значи, тоа може да се направи на четири начини.

9. Во спортска продавница се продаваат три вида различни топки: жолти, црвени и зелени. На колку начини може да се купат 5 топки?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

Решение. E). Бројот на различните начини на кои можат да се купат 5 топки е еднаков на бројот на подредените тројки броеви (x, y, z) од множеството $\{0,1,2,3,4,5\}$ такви што $x + y + z = 5$. Сите тројки од овој вид се дадени со помош на следнава табела:

x	5	0	0	4	4	1	0	1	0			
y	0	5	0	0	1	4	4	0	1			
z	0	0	5	1	0	0	1	4	4			
x	3	3	3	2	1	0	2	1	0	2	2	1
y	2	1	0	3	3	3	0	1	2	2	1	2
z	0	1	2	0	1	2	3	3	3	1	2	2

Значи, вкупно имаме 21 начин за купување на топките.

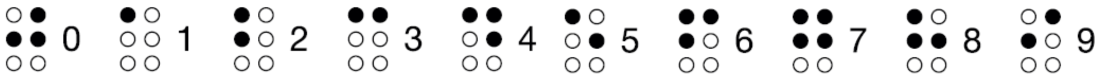
10. Во Брајовата азбука за луѓе со оштетен вид цифрите од 0 до 9 се претставуваат со различни комбинации на црни и бели точки, како што е прикажано на долните цртежи.

Колку различни двоцифрени броеви содржат по 5 црни точки?

A) 16 B) 18 C) 30 D) 32 E) 34

Решение. C). Имаме $1+4=3+2=5$. Со 1 црна точка е само цифрата 1, а со 4 црни точки е само цифрата 7, па во овој случај има 2 броја со по 5 црни точки. Понатаму, со 2 црни точки има 4 цифри и со 3 црни точки има 4 цифри, па во овој случај $2\cdot4\cdot4-4=32-4=28$ броја се со по 5 црни точки (ги одземаме комбинациите во кои 0 е на прво место, кои се 4). Конечно, со 5 црни точки има $2+28=30$ двоцифрени броеви.

11. Во Брајовата азбука за луѓе со оштетен вид цифрите од 0 до 9 се претставуваат со различни комбинации на црни и бели точки, како што е прикажано на долните цртежи.

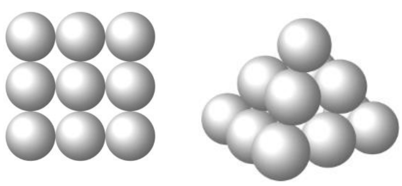


Колку различни помали од 30 содржат помалку од 5 црни точки?

A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

Решение. D). Двоцифрени броеви кои се помали од 30 и кои содржат помалку од 5 точки се: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23, 25, и 29. Тоа се 14 броеви.

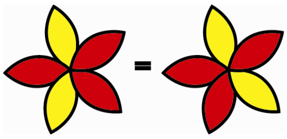
12. Дејан гради пирамида со топчиња. Основата е квадрат со 3×3 топчиња. Средниот слој има 2×2 топчиња и едно топче најгоре. Меѓу секои две топчиња има една точка со лепило. Колку точки со лепило има на пирамидата?



A) 20 B) 24 C) 28 D) 32 E) 36

Решение. **E).** Топчињата од првиот ред имаат $2+3+2+3+2=12$ допирни точки. Секое топче од вториот ред допира по 4 топчиња од првиот ред и истите самите се допираат во 4 точки. Значи имаме $4+4\cdot4=20$ нови допирни точки. На крајот горното топче ги допира топчињата од вториот ред во 4 точки. Според тоа, вкупно имаме $12+20+4=36$ допирни точки, т.е. 36 точки до лепило.

13. Ивона нацртала цвет со пет венечни ливчиња. Сака да го обои, но има само две бои – црвена и жолта. Колку различни цветови ќе добие ако секое ливче го обои со една од двете бои? (Цветовите прикажани на цртежот десно се исто обоени.)



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

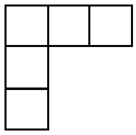
Решение. **C).** Првата можност е кога петте ливчиња се црвени, втората е кога едно ливле е жолто, а останатите се црвени, третата е кога две ливчиња се жолти, а останатите три се црвени. Во последниот случај за распоредот на жолтите ливчиња има две можности: да се едно до друго или да се разделени со црвено ливче. До сега добиваме $1+1+2=4$ можности. Ако во секоја од овие можности ги замениме црвените ливчиња со жолти, а жолтите со црвени, добиваме уште четири можности. Значи, вкупно има $4+4=8$ можности.

14. Една пицерија има основна верзија на пица со мартадела и кечап. Освен тоа пицеријата прави пици со еден или два различни додатоци од следниве продукти: шунка, печурки, сирење и јајце. За секој вид на пица има три големини: мала, средна и голема. Колку различни пица прави пицеријата?

A) 33 B)12 C) 18 D) 45 E) 72

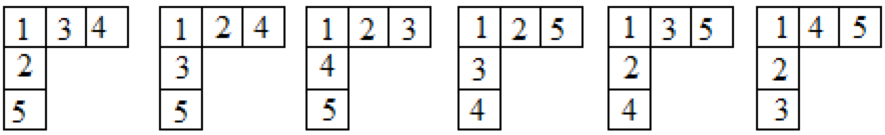
Решение. А). Ако основните продукти и додатоците ги означиме со големите букви од македонската азбука добиваме дека пицеријата ги прави следниве пици: МК, МКШ, МКП, МКС, МКЈ, МКШП, МКШС, МКШЈ, МКПС, МКПЈ, МКСЈ. Значи, според содржината имаме 11 видови пици, па како тие се прават во три големини добиваме дека пицеријата прави $3 \cdot 11 = 33$ различни пици.

15. Броевите 1, 2, 3, 4 и 5 треба да бидат запишани во петте квадратчиња од цртежот така што да важи: Ако бројот е точно под друг број, тогаш тој мора да биде поголем од бројот над него. Ако бројот е десно од друг број, тогаш тој мора да биде поголем од бројот лево од него. На колку начини може да се пополни фигурата од цртежот?



А) 3 В) 4 С) 5 D) 6 Е) 8

Решение. D). Според условот на задачата бројот 1 мора да е секогаш во аголното поле. Понатаму, бројот 5 мора да е или во најдолното или во најдесно поле. Сега распоредот на другите броеви го добиваме така што од трите броја избираме еден број кој го запишуваме меѓу броевите 1 и 5, а другите два броја ги распоредуваме во другиот ред (колона). Бидејќи од три броја еден број избираме на 3 начини и истиот го запишуваме на два начина, во ред или колона, имаме шест можни распореди. На долните цртежи се прикажани можните шест распореди.



16. Со броевите 5, 6, 7 и 8 пополни ги празните квадратчиња од табелата дадена на цртежот десно, така што секој од

5			
6	5		
	7		
	8		

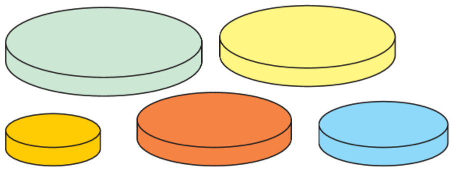
броевите е запишан во секој ред и секоја колона. На колку начини тоа може да се направи?

A) 5　　　B) 4　　　C) 3　　　D) 2　　　E) 1

Решение. **B).** Пополнувањето на првата и втората колона е еднозначно и истото е прикажано на цртежот десно. Сега во првата редица треба да се запишат броевите 7 и 8 и тоа може да се направи на два начина, по што втората редица еднозначно се пополнува. Исто така во третата редица мора да се запишат броевите 5 и 6 и тоа може да се направи на два начина, по што четвртата редица се пополнува еднозначно. Значи, табелата може да се пополни на $2 \cdot 2 = 4$ различни начини.

5	6		
6	5		
8	7		
7	8		

17. Ангела има 5 кружни дискови со различна големина (цртеж десно). Со помош на четири дискови сака да направи кула така што секој диск во кулата ќе биде помал од дискот кој е непосредно под него. Колку различни кули може да направи Ангела?



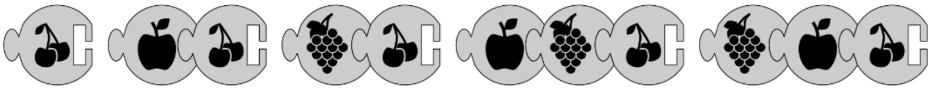
A) 4　　　B) 5　　　C) 9　　　D) 12　　　E) 20

Решение. **B).** Изборот на четири дискови е исто што и да се изостави еден диск. Тоа значи дека изборот на четири дискови може да се направи на пет различни начини. Откако избрала четири дискови, Ангела може само на еден начин да ја изгради саканата кула. Ако дисковите на цртежот ги означиме со нивните бои: син(С), жолт (Ж), црвен (Ц), зелен (З), портокалов (П), тогаш петте кули во кои дисковите се распоредени почнувајќи од најголемиот па до најмалиот се: СЖЦЗ, СЖЦП, СЖЗП, СЦЗП, ЖЦЗП.

18. Пабло си игра со седум делови на сложувалката (види цртеж). Сака да состави гасеница со една глава, една опашка и еден, два или три дела меѓу нив. Колку различни гасеници може да состави Пабло?

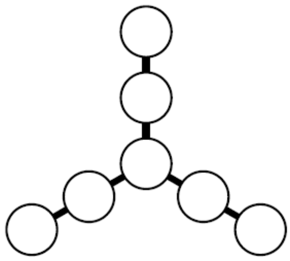
A) 10 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Решение. E). Главата Пабло може да ги избере на два начина, а исто така и опашката може да ја избере на два начина. Според тоа, за главата и опашката имаме 4 можности. За секоја од овие можности телото на гасеницата може да се состави на 5 начини, и тоа



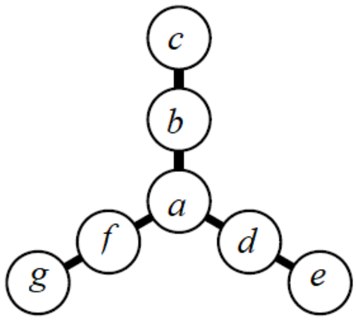
Според тоа, Пабло може да состави $4\cdot 5=20$ различни гасеници.

19. Андреј ги запишува седумте броеви 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 во кругчињата на цртежот десно така да збирот на броевите запишани во секои три круга кои лежат на иста права е еднаков. Колку се сите можни распореди?



A) 150 B) 216 C) 99 D) 123 E) 144

Решение. E). Ако броевите ги означиме како на цртежот десно, тогаш



$$a+b+c=a+d+e=a+f+g=S,$$

па затоа $3S=42+2a$. Оттука следува дека бројот кој е запишан во централното кругче мора да е делив со 3. Значи, во централното кругче може да е запишан еден од броевите: 3, 6 и 9.

Ако во централното кругле е запишан бројот 3, тогаш $3S=42+6$, т.е. $S=16$, па затоа збирот на другите два броја на секоја права е

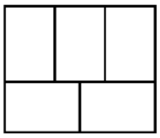
$16-3=13$. Во случајот без централното кругче паровите се: 4 и 9, 5 и 8, 6 и 7.

Ако во централното кругче е запишан бројот 6, тогаш збирот е $S=18$ и паровите без централното кругче се 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7.

Ако во централното кругче е запишан бројот 9, тогаш збирот е $S=20$ и паровите без централното кругче се 3 и 8, 4 и 7, 5 и 6.

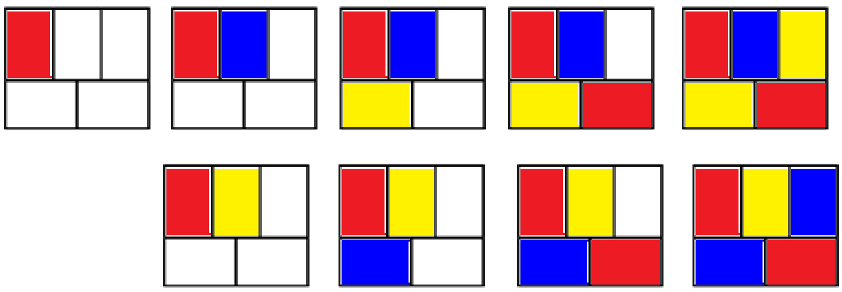
Сега имаме 3 можности за централното кругче, за секоја можност по $3\cdot 2=6$ можни распореди на паровите на трите прави и за секој пар по два распореди, што значи $2\cdot 2\cdot 2=8$ распореди на броевите од паровите. Значи, бараниот број распореди е $3\cdot 6\cdot 8=144$.

20. На цртежот десно големиот парваоголник е поделен на пет мали правоаголници. Матео сака да ги обои со црвена, сина и жолта боја така што секои два соседни правоаголници се обоени со различни бои. Соседни се правоаголниците кои имаат заедничка страна или дел од страна. На колку начини може Матео да го направи боењето?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Решение. **D).** Прво да го обоиме горниот лев правоаголник со една од боите, на пример со црвена. За правоаголникот до него во првиот ред имаме две можности, сина или жолта. Тоа значи дека левиот долен правоаголник е жолт или син, па десниот долен правоаголник е црвен и горниот десен правоаголник е жолт или син.

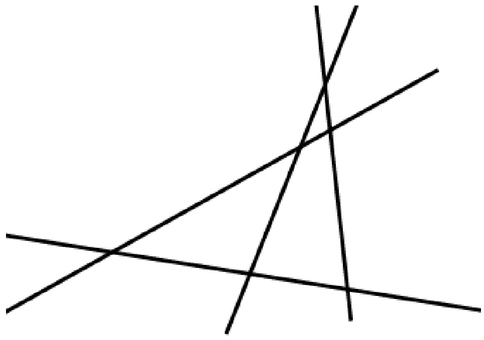


Значи, ако ја избедреме црвената како почетна боја имаме 2 можни боења. Но за избор на почетната боја имаме 3 можности, па затоа вкупниот број боења е $3\cdot 2=6$.

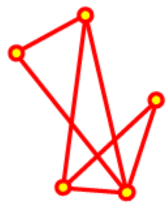
21. Колку најмногу пресечни точки може да имаат четири прави во рамнината?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **E).** Две прави може да имаат најмногу една пресечна точка. Значи бројот на пресечните точки на четири прави во рамината е најголем ако правите две по две се сечат. Вкупниот број на парови прави е еднаков на $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ и тоа е најголемиот можен број пресечни точки. Една реализација на 6 пресечни точки е прикажана на цртежот десно.



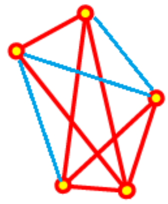
22. Во земјата Недојдија има 5 градови. Секои два града се поврзани со пат, видлив или невидлив. На мапата на земјата Недојдија се видливи седум патишта. Азра има магични наочари. Ако таа ја гледа мапата со наочарите, ги гледа невидливите патишта. Колку невидливи патишта Азра гледа на мапата, кога ги носи наочарите?



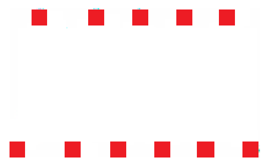
A) 9 B) 8 C) 7 D) 3 E) 2

Решение. **D).** *Прв начин*. Бројот на различни патишта меѓу градовите во земјата Недојдија е $\frac{5\cdot 4}{2}=10$. Бидејќи видливи се 7, Азра со своите магични наочари ќе ги види трите невидливи патишта.

Втор начин. Од секој град до другите градови водат четири патишта. Ако со сини линии ги нацртаме патиштата кои недостасуваат (цртеж десно), добиваме дека Азра со своите магични наочари ќе ги види три невидливи патишта.



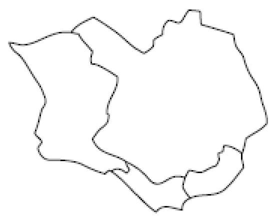
23. На цртежот десно Ана треба секое горно квадратче да го поврзи со секое долно квадратче. Колку отсечки ќе повлече Ана?



A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Решение. **C).** Во корниот ред има 5 квадратчиња. Секое од овие квадратчиња Ана го поврзува со 6 квадратчиња кои се во долниот ред. Значи, Ана ќе повлече $5\cdot 6=30$ отсечки.

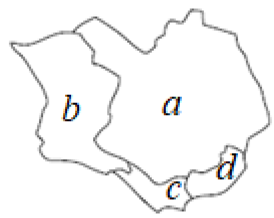
24. Јулија има четири дрвени боички со различни бои и сака да искористи неколку или сите дрвени боички за да нацрта мапа на остров поделен на четири држави, како на цртежот десно. На мапата две држави со заедничка граница не смее да се обоени со иста боја. На колку начини може да се обои мапата на островот?



A) 12 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

Решение. **E).** Ќе разгледаме два случаја.

Двете области b и d кои немаат заедничка граница ги боиме со една боја за што имаме 4 можности. Тогаш за областа a имаме 3 можности и за областа c имаме 2 можности. Значи, во овој случај вкупно имаме $4\cdot 3\cdot 2=24$ различни боења.



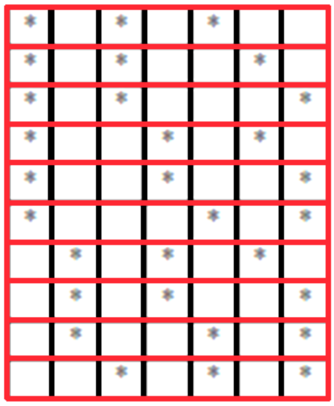
Секоја област ја боиме со различна боја. Тогаш за областа a имаме 4 можности, па за областа b имаме 3 можности, за c имаме 2 можности и на крајот за d останува 1 можност. Во овој случај имаме $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ различни боења.

Значи, вкупно имаме $24+24=48$ различни боења.

25. Имаме седум кафези, кои се наредени во еден ред. На колку начини може да се сместат 3 кенгури во 3 различни кафези така што било кои 2 кенгура да не бидат соседи?

A) 7 B) 8 C) 9

D) 10 E) 11



Решение. D). Сите сместувања на кенгурите во кафезите при што се исполнети условите на задачата се дадени на цртежот десно, при што секое сместување е во посебен ред. Значи, имаме 10 можни сместувања.

26. Матео имала 4 бели и 4 црни единечни коцкички. Од нив тој треба да направи коцка со раб 2. На колку различни начини Матео тоа може да го направи тоа (две коцки од кои едната може да се добие со ротација на другата не ги сметаме за различни)?

A) 16 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

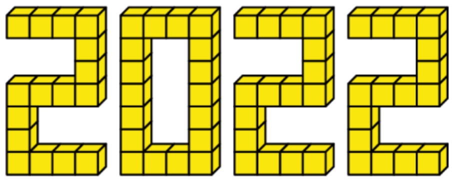
Решение. D). Можни се следниве случаи:

- Долу се 4 црни, горе 4 бели коцки – една можност за составување на нова коцка.
- Долу се 3 црни и 1 бела коцка, горе се 3 бели и 1 црна коцка – четири можности за составување на нова коцка (го поставуваме долниот ред, па потоа за белата коцка имаме 4 можности) .

- Долу една до друга се 2 црни и 2 бели коцки, а горе над црната е бела коцка и обратно – една можност за составување на коцката.
- Долу дијагонално се 2 црни и 2 бели коцки, а горе над црната е бела коцка и обратно – една можност за составување на коцката.

Значи, вкупно имаме $1+4+1+1=7$ различни коцки.

27. На цртежот десно е прикажан бројот 2022, кој е направен од 66 коцки и потоа целиот е обоен со жолта боја. Колку коцки имаат по 4 жолти ѕидови?



A) 16 B) 30 C) 46 D) 54 E) 60

Решение. E). Сите коцки од кои е составена цифрата 0 имаат по четири жолти ѕидови. Почетната и крајната коцка во низата од кои е составена цифрата 2 имаат по пет жолти ѕидови, а останатите коцки имаат по четири жолти ѕидови. Имаме 3 цифри 2, што значи дека имаме $3\cdot 2=6$ коцки со по пет жолти ѕидови, а останатите коцки се со по четири жолти ѕидови. Значи, вкупно $66-6=60$ коцки имаат по четири жолти ѕидови.

28. Коцка со димензии $8\times 8\times 8$ е составена од 512 единечни коцки и потоа пет нејзини ѕида се обоени со црвена боја. Колку единечни коцки немаат обоен ѕид?

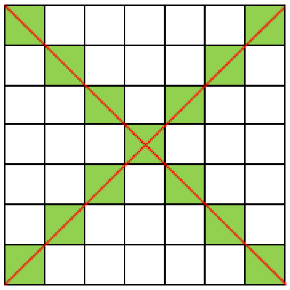
A) 114 B) 115 C) 216 D) 225 E) 252

Решение. E). Немаат обоен ѕид коцките кои се во внтрешниста на големата коцка и коцките кои се во внатрешноста на ѕидот кој не е обоен. Првите формираат коцка со димензии $6\times 6\times 6$, а вторите формираат дел од шестиот ѕид димензии 6×6.

Според тоа, $6\cdot 6\cdot 6+6\cdot 6=216+36=252$ единечни коцки немаат обоен ѕид.

29. Една голема коцка има страна долга $7\,cm$. На секој од нејзините шест ѕидови се нацртани нивните дијагонали со црвена линија. Потоа, големата коцка е исечена на мали коцки секоја со раб $1\,cm$. Колку мали коцки ќе имаат барем една црвена линија нацртана на нив?

A) 54 B) 62 C) 70 D) 78 E) 86



Решение. B). *Прв начин.* На еден ѕид на големата коцка има $7+7-1=13$ мали коцки кои ќе имаат црвена линија на најмалку еден од ѕидовите. На сите шест ѕида ќе имаме $6\cdot 13=78$ мали коцки со барем една црвена линија на нив, при што осумте коцки кои се во темињата на големата коцка се броени трипати. Според тоа, бројот на коцките кои ќе имаат барем една црвена линија нацртана на нив е $78-2\cdot 8=62$.

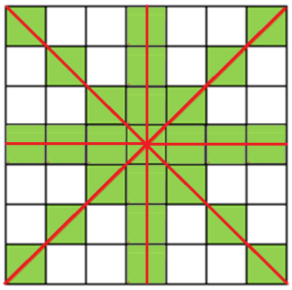
Втор начин. На секој ѕид на големата коцка имаме $7+7-1=13$ мали коцки кои ќе имаат црвена линија на ѕидовите. Според тоа, на горниот и долниот ѕид имаме $2\cdot 13=26$ такви квадратчиња. За предната и задната страна и за левата и десната страна треба да одземеме по 4 квадратчиња, бидејќи истите се ѕидови на коцките кои веќе ги броевме преку горниот и долниот ѕид на големата коцка. Значи, на секој од овие четири ѕида има $13-4=9$ од бараните квадратчиња, па вкупно се $4\cdot 9=36$. Конечно, бројот на коцките кои ќе имаат барем една црвена линија нацртана на нив е $26+36=62$.

30. Една голема коцка има страна долга $7\,cm$. На секој од нејзините шест ѕидови со црвена линија се нацртани нивните дијагонали и отсечките кои ги поврзуваат средините на спротивните страни на ѕидовите. Потоа, големата коцка е исечена на мали коцки секоја со

раб $1cm$. Колку мали коцки ќе имаат барем една црвена линија нацртана на нив?

A) 84 B) 122 C) 144 D) 156 E) 186

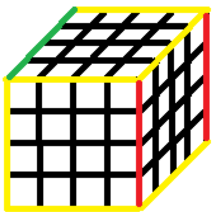
Решение. **B).** На еден ѕид на големата коцка има $7+7+7+7-3=25$ мали коцки кои ќе имаат црвена линија на најмалку еден од ѕидовите. На сите шест ѕида ќе имаме $6\cdot 25=150$ мали коцки со барем една црвена линија на нив, при што осумте коцки кои се во темињата на големата коцка се броени трипати, а дванаесетте коцки кои се наоѓаат во средините на рабовите се броени двапати. Значи, бројот на коцките кои ќе имаат барем една црвена линија нацртана на нив е $150-2\cdot 8-12=122$.



31. Павел користи мали коцки со должина на раб 1 за да направи поголема коцка со должина на раб 4. Потоа, три од ѕидовите на поголемата коцка ги обоил со црвена боја, а останатите три со зелена. Откако завршил, увидел дека немало мала коцка на која три ѕида и се црвени. Колку мали коцки имаат црвен и зелен ѕид?

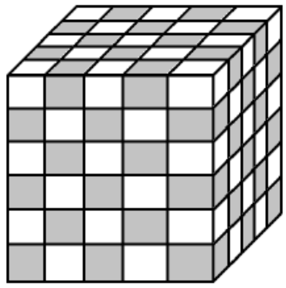
A) 0 B) 8 C) 12 D) 24 E) 32

Решение. **D).** Три обоени ѕида имаат само коцките кои се наоѓаат во темињата на големата коцка. Бидејќи нема мала коцка на која три ѕида се обоени со црвена боја, добиваме дека трите црвени ѕидови се распоредени така што два се спротивни еден на друг, а третиот е соседен на овие ѕидови. На дадениот цртеж тоа се предниот, десниот и задниот ѕид, а горниот, долниот и левиот ѕид се зелени. Притоа рабовите на коцките кои имаат црвен и зелен ѕид се обоени со жолта боја, при што жолти се уште двата раба на задниот ѕид, а четвртиот раб на левиот ѕид е зелен. Сега лесно се гледа дека на предниот и задниот ѕид



имаме по 10 коцки со црвен и зелен ѕида и на десниот ѕид имаме уште 4 такви коцки. Според тоа, имаме $10+4+10=24$ од саканиот вид.

32. Квадарот прикажан на цртежот десно е составен од бели и сиви коцки со еднакви димензии, при што две истобојни коцки немаат заеднички ѕид. Една бела коцка има маса $2\,g$, а една сива коцка има маса $1\,g$. Колку грама е масата на целиот квадар?

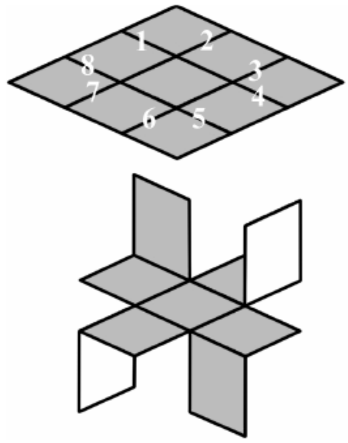


A) 225 B) 175 C) 250 D) 200 E) 275

Решение. A). На предниот ѕид на квадарот имаме 15 бели и 15 сиви коцки. Во редот зад него соседните коцки се обратно обоени, па затоа повторно имаме 15 бели и 15 сиви коцки. Ова важи за сите 5 реда. Значи, коцката е составена од $5\cdot 15=75$ бели и $5\cdot 15=75$ сиви коцки и нејзината маса е $75\cdot 2+75\cdot 1=225$ грама.

6. РАСЕКУВАЊЕ И СОСТАВУВАЊЕ ФИГУРИ

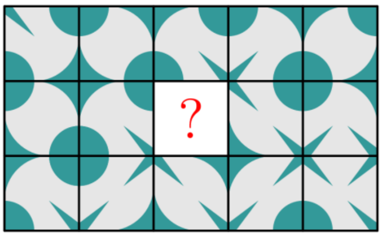
1. Квадратен лист хартија од долната страна е бел, а од горната е сив. Тој е поделен на девет еднакви квадрати и некои од страните на квадратите се нумерирани (види цртеж). Потоа се направени неколку сечења со што е добиена фигурата под квадратниот лист. По кои страни на малите квадрати се направени сечењата?



A) 1, 3, 5, 7 B) 2, 4, 6, 8 C) 2, 3, 5, 6 D) 3, 4, 6, 7 E) 1, 4, 5, 8

Решение. **B).** За превиткувањето на горниот сив дел пресечена е страната 2, за превиткувањето на горниот бел дел пресечена е страната 4, за превиткувањето на долниот сив дел пресечена е страната 6 и за превиткувањето на долниот бел дел пресечена е стграната 8.

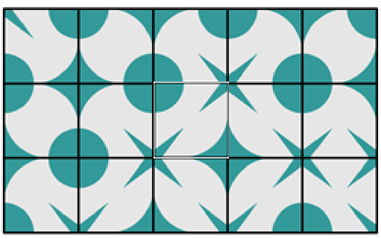
2. Која плочка недостасува?



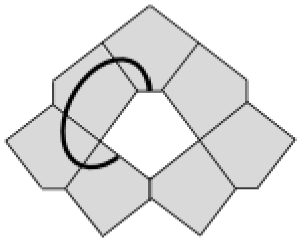
A)  B)  C) 

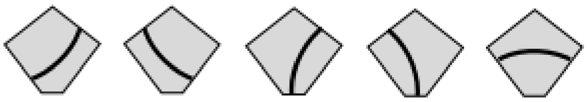
D)  E) 

Решение. На плочката која недостасува четвртина од кружница треба да има во горниот лев агол, во долниот лев и горниот десен агол треба да е дел од четирикраката ѕвезда и во долниот десен агол треба да е дел од третата фигура. Ваков распоред имаме единствено на плочката (E). Пополнувањето е прикажано на цртежот десно.



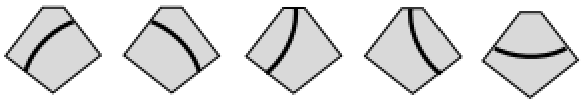
3. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од седум еднакви петаголници, од кои едниот е отстранет. Кој петаголник е отстранет, ако нацртаната линија е затворена?



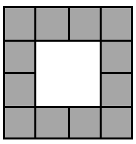
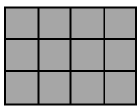
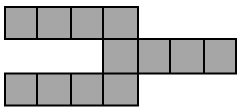


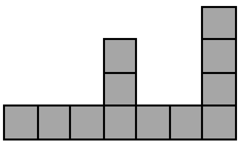
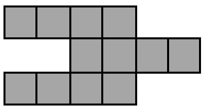
A) B) C) D) E)

Решение. **C).** Кај петаголникот кој е отстранет најкратката страна е горе, па затоа петте петаголници ќе ги ротираме за 180°. Ротираните петаголници во истиот редослед се прикажани на долните цртежи. Забележуваме дека само кај третиот петаголник краевите на линијата се во положба така што се добива затворена линија. Значи, отстранет е петаголникот C).

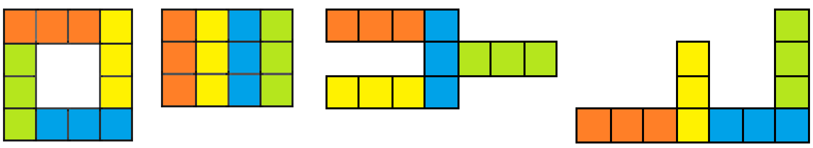


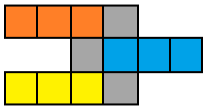
4. Ана има 4 фигури со следнава форма  (право тримино). Која од следниве фигури Ана не може да ја направи со помош на дадените 4 фигури?

A)  B)  C) 

D)  E) 

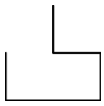
Решение. **E).** Фигурите A, B, C, D можат да се покријат како што е прикажано на долните цртежи.

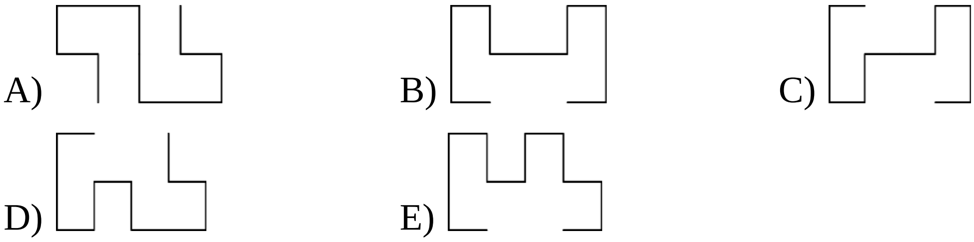




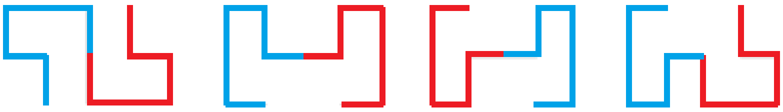
За да се покријат крајните леви квадратчиња во првиот и третиот ред на фигурата Е и крајното десно квадратче во вториот ред мора да се постават три тримина како што е прикажано на цртежот десно. Сега е јасно дека преостанатите три сиви полиња не може да се покријат со четвртото тримино.

5. Даме има две исти парчиња од жица како на цртежот десно. Која од следниве фигури не може да се добие кога едно до друго ќе се стават двете парчиња жица?



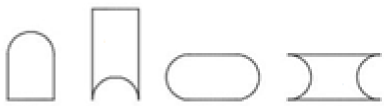


Решение. **E).** Фигурите A , B, C и D може да се состават како што е прикажано на долните цртежи.

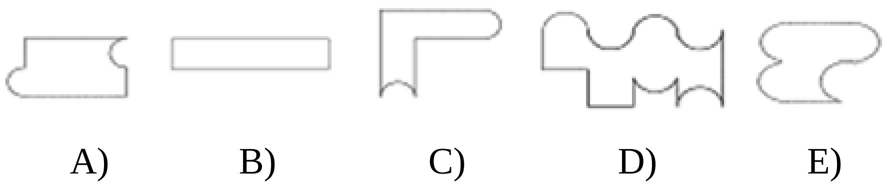


Не може да се направи фигурата Е, бидејќи нејзиниот лев дел е едно од двете парчиња, но десниот дел не е второто парче (цртеж десно).

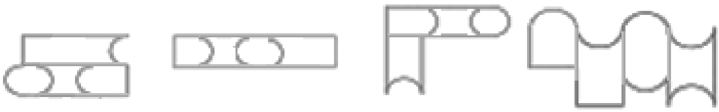
6. Четирите картонски фигури прикажани на цртежот се поврзуваат, без празнини и преклопување, и се добива нова фигура.



Која од следниве фигури не може да се добие на тој начин?

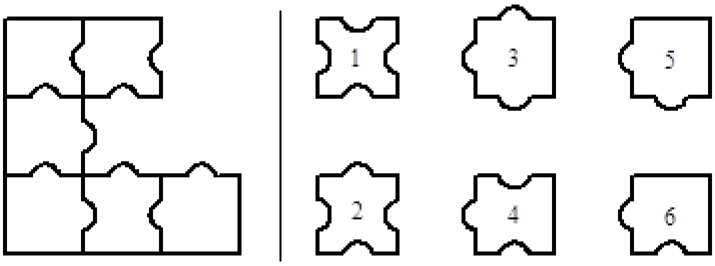


Решение. **Е).** Фигурите А), В), С) и D) може да се добијат со поврзување на дадените картончиња, како што е прикажано на на долните цртежи.



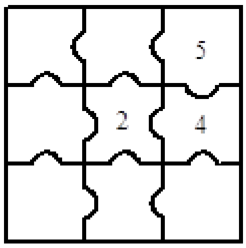
Долниот дел на фигурата Е) може да се добие со поврзување или на првите две или на вторите две картончиња. Но тогаш и во двата случаја со преостанатите две картончиња не е можно да се добие горниот дел на оваа фигура.

7. Кои три од означените мали фигури на долниот цртежот треба да се додадат на фигурата, за да се добие квадрат?

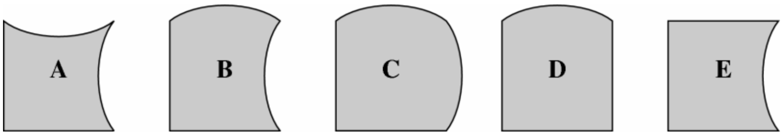


A) 1, 3, 4 B) 1, 3, 6 C) 2, 4, 5 D) 2, 3, 6 E) 2, 5, 6

Решение. **С).** Фигурата која треба да се стави во средината мора лево и долу да има вдлабнатина, а горе да има испакнатина. Единствена таква фигура е фигурата 2. Сега во средната редица крајната фигура која ќе се постави мора лево да има испакнатин, долу да вдлабнатина и десно да е рамна. Тоа е фигурата 4. Сега последната фигура мора да лево и долу да има испакнатини, а другите две страни да се рамни. Тоа е фигурата 5. Добиениот квадрат е прикажан на цртежот десно.



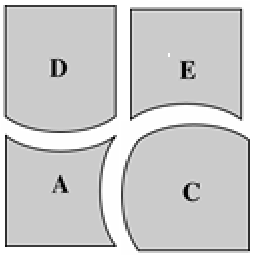
8. Со четири од дадените пет парчиња може да се состави квадрат.



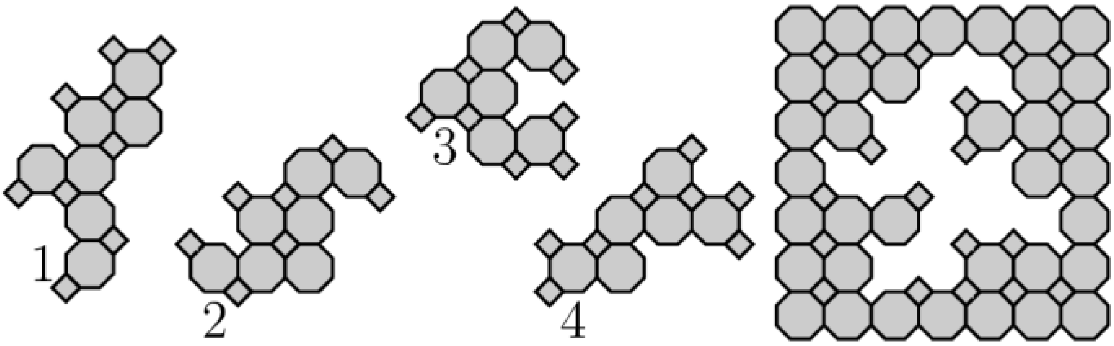
Кое парче нема да биде употребено?

A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. **B).** При составување на квадратот треба да употребиме четири делови, при што е потребно бројот на вдлабнатините да е еднаков на бројот на испакнатините. На A и E имаме три вдлабнатини, на C и D три испакнатини, а на B една вдлабнатина и една испакнатина. Според тоа мора да отпадне дел кој има еднаков број вдлабнатини и испакнатини. Јасно, тоа е делот B. Од останатите четири дела може да се состави квадрат. Положбите во кои треба да се поставени се прикажани на цртежот десно.



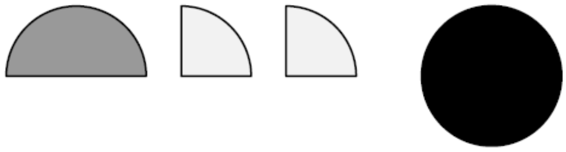
9. Со кои два од дадените четири дела се дополнува шарата прикажана на цртежот?



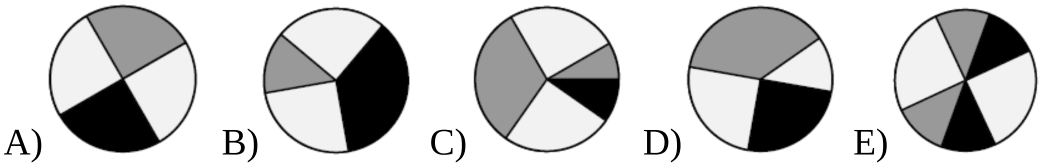
A) 1 и 2 B) 1 и 4 C) 2 и 3 D) 2 и 4 E) 3 и 4

Решение. **D).** За да се пополни долниот дел на шарата фигурата која ќе се стави мора да има најдолу ред од два шестаголници и над него ред од три шестаголници. Единствена таква фигура е фигурата 4. По нејзиното ставање просторот кој останува најдолу има 3 шестаголници, над нив два шестаголници и над нив 2 шестаголници, а тоа го имаме само кај фигурата 2.

10. Филип без да ги расекува ги залепил трите фигури прикажани на долните леви цртежи врз црниот круг, прикажан на десниот цртеж.

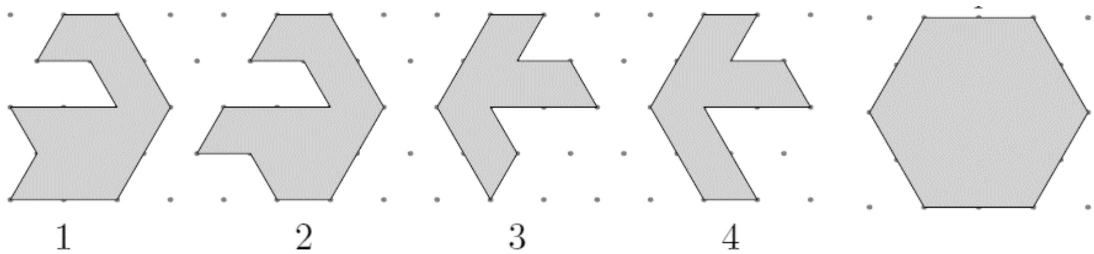


Која од следниве шари не можел да ја добие?



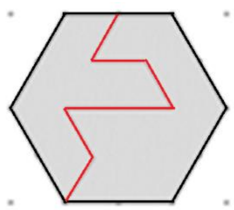
Решение. C). Единствено не може да се добие шарата прикажана на цртежот C, бидејќи во спротивно сивиот дел би бил покривал повеќе од половина од кругот. Останатите шари може да се добијат. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

11. Со кои два од понудените четири дела може да се состави шестаголникот, без притоа деловите да се преклопуваат?



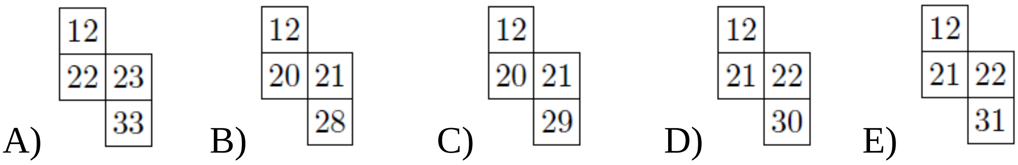
A) 1 и 2 B) 1 и 3 C) 2 и 3 D) 2 и 4 E) 1 и 4

Решение. B). Заради формата во долниот дел на левата страна на делот 2 истиот не може да учествува во составување на шестаголникот. Значи останува со делот 1 во комбинација со еден од деловите 3 и 4 да се состави шестаголникот. Тоа не може да е делот 4 бидејќи тогаш би дошло до преклопување на половина од долната страна. Шестаголникот може да се состави со деловите 1 и 3 како што е прикажано на цртежот десно.



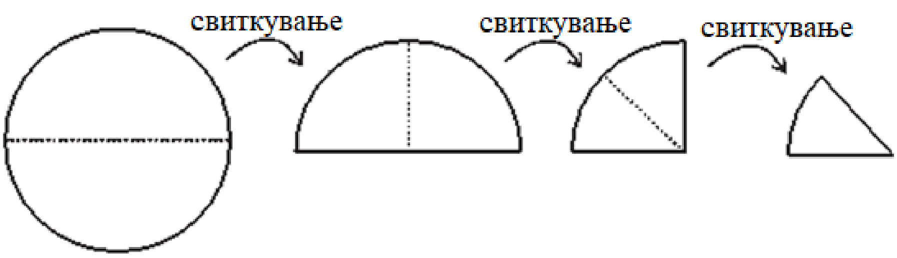
12. Продолжувајќи на истиот начин Филип ги пополнува со броебите до 40 празните полиња на табелата прикажана на цртежот десно. Кој од понудените делови Филип може да го исечен од пополнетата табела?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12				

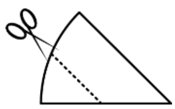


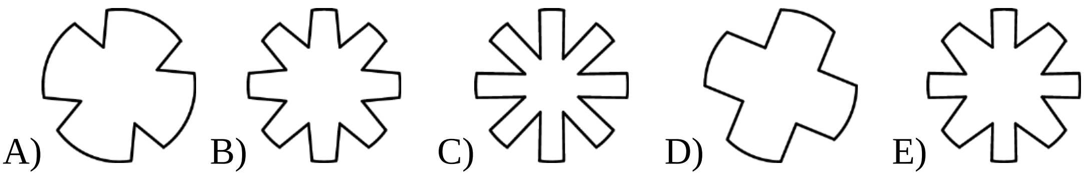
Решение. C). Под секој број во првиот ред бројот кој е запишан во вториот ред треба да е за 8 поголем, а исто важи и за бројот кој е во третиот ред. Овој услов го задоволува само делот C).

13. Ана превиткала круг од хартија на половина. Добиената фигура ја превиткала на половина, па постапката ја повторила уште еднаш (види цртеж долу).



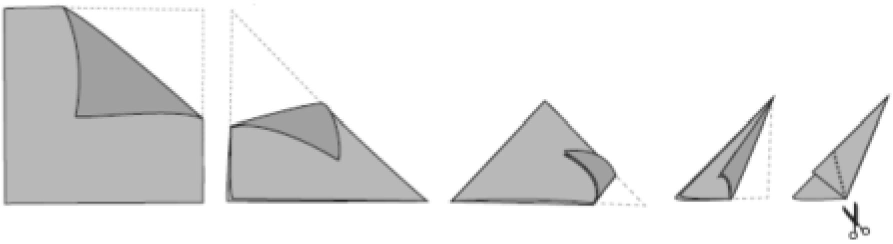
Потоа, Ана го пресекла завитканото парче хартија како што е прикажано на цртежот десно. Која фигура ја добила Ана, откако ја одвиткала хартијата?

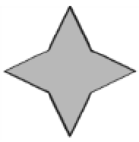
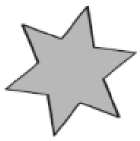
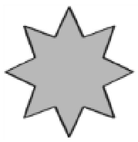
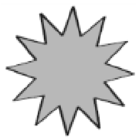




Решение. D). При првото превиткување во центарот добиваме рамен агол. При вторатот превиткување во центарот добиваме прав агол. При третото превиткување во центарот добиваме агол од 45°. Имаме 8 слоеви хартија, па затоа при сечењето ќе отсечеме 4 еднакви парчиња, составени од по 2 слоја хартија. Бидејќи сечеме паралелно со едниот радиус ние всушност отсекуваме 4 делови од кружни исечоци со централен агол од $2 \cdot 45^{\circ} = 90^{\circ}$. Значи, ја добиваме фигурата D.

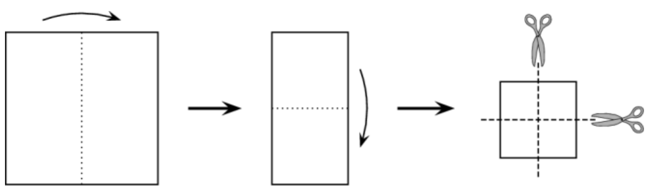
14. Која ѕвезда ќе се добие, ако квадратен лист хартија се превитка четири пати и потиа се пресече, како што е прикажано на долните цртежи?



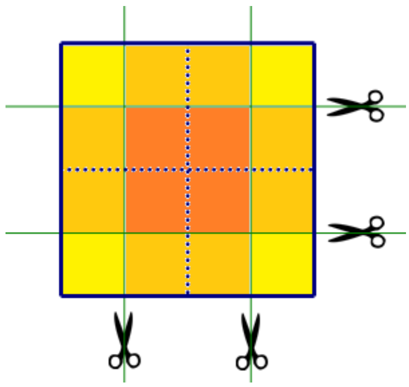
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **C).** При првото превиткување има два слоја хартија. При второто се добиваат четири слоја хартиа. При третото се добиваат осум слоја хартија. При четвртото превиткување имаме два различни дела од по осум слоја хартија. Сега, при сечењето отпаѓаат два пати по четири дела од по два поврзани слоја хартија. Значи ќе се добие ѕвездата C).

15. Јована два пати превиткала квадратно парче хартија и тогаш два пати го пресекла како на цртежот десно. Колку парчиња хартија добила Јована?

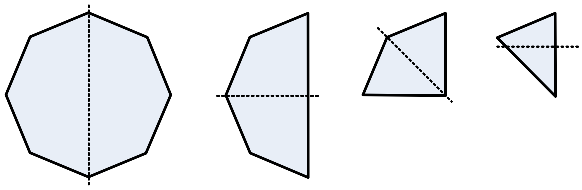


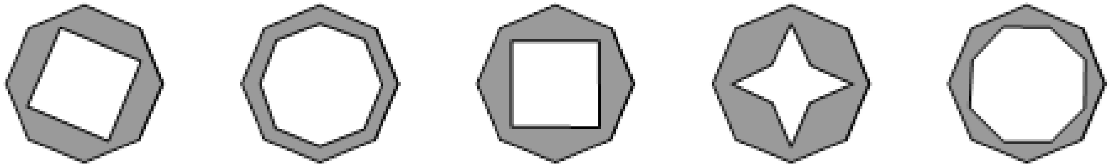
A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 16



Решение. **C).** На цртежот десно со испрекинати линии се прикажани местата на кои Јована го превиткала листот, а со цели линии се прикажани местата по кои листот е пресечен. При сечењето се добиени 4 мали квадрати, 4 правоаголници составени од по два мали квадрати и 1 квадрат составен од четири мали квадрати. Значи, Јована добила $4+4+1=9$ делови.

16. Правилен осумаголник направен од хартија, го превиткуваме трипати последователно додека не се добие триаголник (види цртеж). Потоа врвот на рамнокракиот триаголник е одсечен под прав агол како што е прикажано на цртежот. Каква геометриска фигура се добива ако хартијата ја расклопиме?





A) B) C) D) E)

Решение. **C).** Јасно ќе бидат отсечени осум правоаголни триаголници. Притоа ќе имаме отсечени два по два соседни правоаголни триаголници кои ќе имаат заедничка катета и остар агол при центарот на кругот еднаков на $360:8=45^\circ$, па затоа тие формираат рамностран правоаголен триаголник. Така добиваме дека се отсечени четири рамнострани правоаголни триаголници со заеднички врз при правите агли, што значи дека е отсечен квадрат,

7. ИГРИ

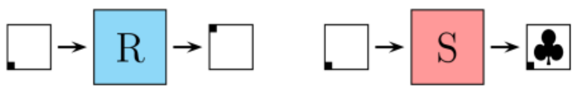
1. Четири карти се наредени во редица: 2 0 1 7. Дозволено е само две карти да може да ги променат местата. Која редица од карти не може да се добие?

A) 2 7 1 0 B) 0 1 2 7 C) 1 0 2 7

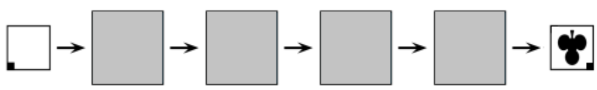
D) 0 2 1 7 E) 2 0 7 1

Решение. **B).** Редицата А се добива со замена на местата на 0 и 7. Редицата С се добива со замена на местата на 2 и 1. Редицата D се добива со замена на местата на 2 и 0. Редицата Е се добива со замена на местата на 1 и 7. Кај редицата В имаме една замена на 2 и 0 за да 0 дојде на прво месте, а потоа мора и 2 и 1 да ги заменат местата, па затоа истата не може да се добие од дадената редица само со една замена.

2. Ако квадратен лист хартија се стави во машината R, таа го врти листот во насока на движењето на стрелките на часовникот за 90°, а ако листот се стави во машината S, таа на листот става печат во форма на детелинка (цртежи горе десно).



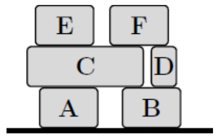
Во каков редослед треба да се употребат машините, за да се добие резултатот прикажан на цртежот.

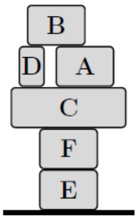


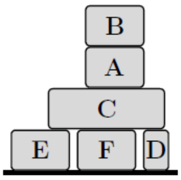
A) SRRR B) RRRS C) SRSS D) RSRR E) SRRS

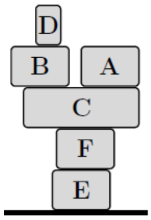
Решение. **D).** На добиениот резултат црната точка се наоѓа од левата страна на исправената детелинка, па откако ќе се направи печатот листот треба два пати да се заврти во насока на стрелката на часовникот. Значи, последните три користења на машините се SRR. Пед да се употреби машината S црната точка е во левиот горен агол, па затоа пред тоа мора да се употреби машината R. Значи, барааниот редослед е RSRR.

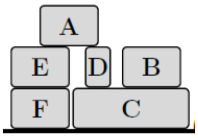
3. На камион се наместени шест кутии како што е прикажано на цртежот десно. Павле ги преместил на подот. Земал кутија по кутија, и тоа така што кутијата која ја зема нема друга кутија над неа. Кутиите ги редел така што кутијата која била на ред или ја ставал на подот или над некоја од веќе наместените кутии. Кој од следниве распореди не можел да го добие?

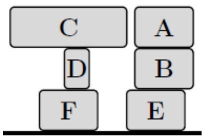


A) 

B) 

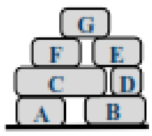
C) 

D) 

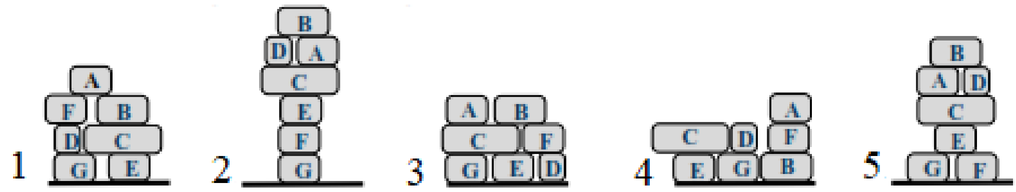
E) 

Решение. **C).** По преместувањето на кутиите E и F се зема или кутијата C или кутијата D. Ако се земе C, по неа мора да се земе A или D. Значи, кутијата B не може да се земе пред кутијата D, па затоа не може да се распореди пред D. Значи, не може да се добие распоредот C). Лесно се гледа дека сите други распореди може да се добијат.

4. На камион се наместени седум кутии како што е прикажано на цртежот десно. Павле ги преместил на подот. Земал кутија по кутија, и тоа така што кутијата која ја зема нема друга кутија над неа. Кутиите ги редел така што кутијата



која била на ред или ја ставал на подот или над некоја од веќе наместените кутии. Кој од следниве распореди можел да го добие?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. D). Кутијата B се зема по кутијата F, па затоа истата не може да е под кутијата F. Тоа значи дека распоредот 4 не може да се добие. Лесно се гледа дека останатите четири распореди може да се добијат. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Две девојчиња, Ева и Олга и три момчиња, Александар, Иван и Михаил играат со топка. Ако топката е кај девојче, тоа топката ја фрла на момче или на девојче. Ако топката е кај момче, тоа топката ја фрла на момче, но не на момчето од кое непосредно ја добило топката. Играта ја почнува Ева и таа топката му ја фрлила на Александар. Кој ќе го направи петтото фрлање на топката?

A) Александар B) Ева C) Иван D) Олга E) Михаил

Решение. A). Прва фрла Ева и таа топката му ја фрлила на Александар. Сега Александар топката може да му ја фрли на Иван или на Михаил.

Ако му ја фрли на Иван, тогаш ја имаме следнава низа фрлања:

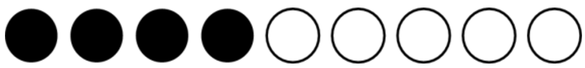
$$\text{Ева} \to \text{Александар} \to \text{Иван} \to \text{Михаил} \to \text{Александар} \to \dots,$$

а ако му ја фрли на Михаил, тогаш ја имаме следнава низа фрлања:

$$\text{Ева} \to \text{Александар} \to \text{Михаил} \to \text{Иван} \to \text{Александар} \to \dots .$$

Значи, во секој случај петтот фрлање че го направи Александар.

6. Девет жетони се црни од една-



та страна, а бели од другата страна. На почетокот, 4 жетони се завртени со црната страна на горе. При секое превртување на жетоните, мора да се превртат 3 жетони. Кој е најмалиот број на превртувања на жетоните што е потребен, за сите жетони да покажуваат иста боја од горната страна?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

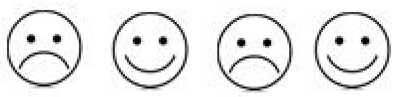
Решение. B). Да ги разгледаме сите можности на бројот на жетоните по бои после првото превртување:

Број завртени црни жетони	Број завртени бели жетони	Вкупен број црни жетони	Вкупен број бели жетони
0	3	$4+3=7$	$5-3=2$
1	2	$4-1+2=5$	$5-2+1=4$
2	1	$4-2+1=3$	$5-1+2=6$
3	0	$4-3=1$	$5+3=8$

Бидејќи се бара најмалиот број завртувања, очигледно тоа е случајот каде што бројот на жетоните со иста боја е најмалиот број делив со 3. Значи, тоа е третиот случја.

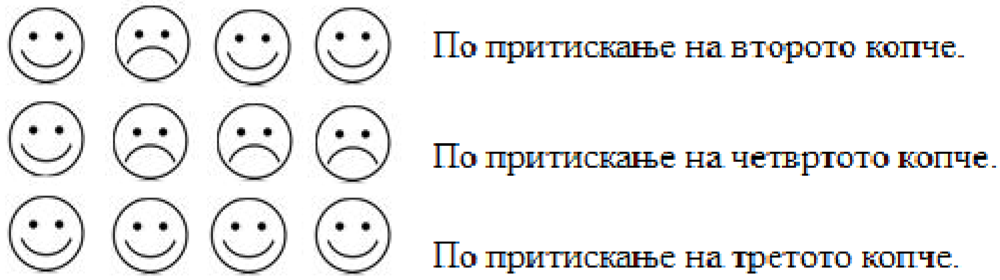
Значи, најмалиот број чекори е два, во првиот чекор треба да завртиме 2 црни и 1 бел жетн, а во вториот случај 3 црни жетони. Потоа сите жетони ќе бидат бели.

7. Дадени се четири копчиња во низа. На две од нив е ликот на Смешки, а на другите две ликот на Лутко. Ако притиснеме некое од нив, тогаш изразот на лицето се менува во спротивниот (Смешко станува Лутко и обратно) и на соседните копчиња исто така се менува изразот на лицето. Кој е најмалиот број на копчиња кои треба последователно да ги допреме за да на сите е Смешко?

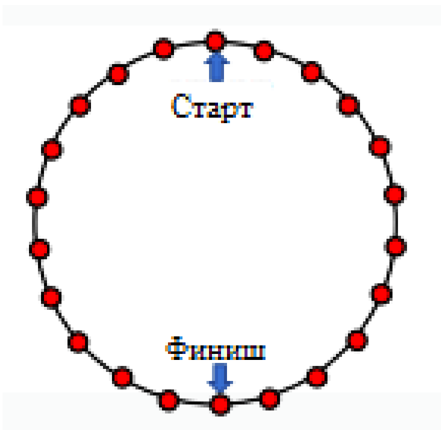


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **В).** Ако допреме крајно копче, тогаш е јасно дека дека со со второто допирање не можеме да добиеме низа од четири лика Смешко. Ако допреме некое од средните две копчиња, тогаш повторно ќе добиеме низа од три копчиња со наизменични ликови, при што со второто допирање не може да се добие низа од четири лика Смешко. Според тоа, ќе имаме најмалку три допирања. На долниот цртеж се прикажани промените со три допирања, по кои имаме низа од четири лика Смешко.



8. На кружна патека се натпреваруваат мачка, зајак и кенгур. На еднакви растојанија на патеката се наредени кружни плочки. Две од плочките се означени со старт и финиш. Трите натпреварувачи тргнуваат од стартот и се движат во насока на стрелката на часовникот. Мачката скока на секоја следна плочка, зајакот скока преку една плочка и кенгурот скока преку две плочки. Победник е оној кој по најмал број скокови ќе застане на плочката финиш. Кој победил во натпреварот?



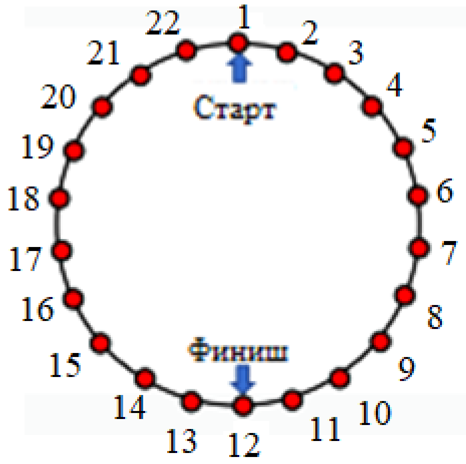
A) мачката　　B) зајакот　　C) кенгурот

D) кенгурот и зајакот　　E) кенгурот и мачката

Решение. **E).** Плочките да ги означиме со броевите од 1 до 22. Зајакот може да се најде на плочките:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 1, ...

па затоа тој никогаш не може да дојде до плочката 12, т.е. до плочката финиш. Мачката до плочката финиш треба да направи $12-1=11$ скокови,



а кенгурот за да дојде до оваа плочка го поминува патот: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 3, 6, 9, 12 и тоа се точно 11 скокови. Значи, на натпреварот ќе победат мачката и кенгурот.

9. Никола има квадратно хартиено ливче на кое се запишани три броја. Играта „промени го ливчето" се состои во промена на ливчето со ново ливче на кое се запишани три броја, при што секој од нив е збир на два броја од броевите на ливчето кое го заменуваме. На пример, ливчето на кое се запишани броевите $\{3,4,6\}$ се заменува со ливче на кое се запишани броевите $\{10,9,7\}$, кое пак се заменува со ливче на кое се запишани броевите $\{19,17,16\}$ итн. Ако почнеме со ливче на кое се запишани броевите $\{20,1,3\}$, која е максималната разлика помеѓу два броја на ливчето што се добива по 2013 последователни промени?

A) 1 B) 2 C) 7 D) 19 E) 2013

Решение. **D).** Нека на ливчето се запишани броевите a, b и c, при што $a > b > c$. Кога ќе го смениме ливчето ќе се добие ливче на кое се запишани бровите $a+b, a+c$ и $b+c$. Притоа $a+b > a+c > b+c$.

На првото ливче можни разлики се $a-b, a-c$ и $b-c$. На второто ливче можни разлики се:

$$(a+b)-(a+c)=b-c,\quad (a+b)-(b+c)=a-c,\quad (a+c)-(b+c)=a-b.$$

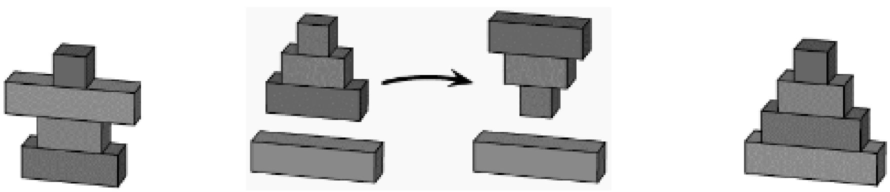
Според тоа, максималната разлика на првото ливче е еднаква на максималната разлика на второто ливче. Од тие причини, по 2013 промени се добива ливче на кое максималната разлика на два броја од запишаните е еднаква на максималната разлика на два броја од запишаните на било кое претходно ливче па и на првото. Таа разлика е $20-1=19$.

10. Осумдесет и една карта се наредени на масата во еден ред со лицето надолу. Горјан реализира низа чекори. При првиот чекор тој ја превртува првата карта одлево надесно, при вториот чекор ги превртува првите две карти одлево надесно, при третиот чекор ги превртува првите три карти одлево надесно итн. Горјан продолжува на истиот начин, при што во секој следен чекор превртува по една карта повеќе отколку во претходниот чекор. Кога веќе не можел да реализира нов чекор Горјан ги пребројал картите кои се со лицето нагоре. Кој број го добил?

A) 35 B) 37 C) 39 D) 41 E) 42

Решение. D). Во секој непарен чекор бројот на картите кои се завртени со лицето нагоре се зголемува за 1, а во секоја парен чекор тој број не се менува. Бидејќи од 1 до 81 има 41 непарни броеви, по пребројувањето Горјан го добил бројот 41.

11. Четири дрвени квадари со различни димензии се наредени како што е покажано на цртежот 1.

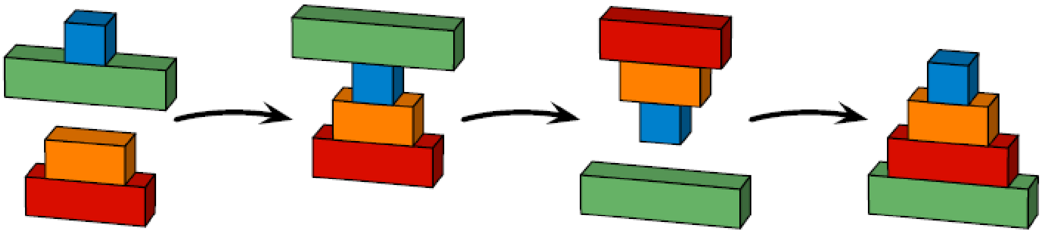


1 2 3

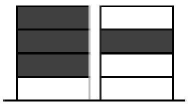
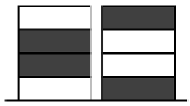
Во еден потез Горјан може да земе дел или сите квадари од горе и да ги постави од горе како што е прикажано на цртежот 2. Горјан сака да ги нареди квадарите како на цртежот 3. Кој е најмалиот број потези што тој треба да ги направи за да го добие саканиот распоред?

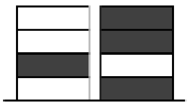
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

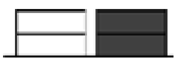
Решение. **B).** Прво мора најголемиот квадар да го доведеме најдолу. Со најмал број потези тоа може да го направиме така што во првиот потез ќе го доведеме најгоре, а потоа целата конструкција ќе ја превртиме (види цртеж). Сега третиот потез е очигледен. Значи, најмалиот број потези е 3.



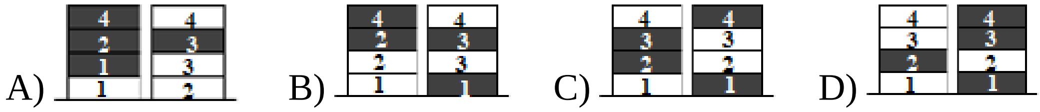
12. Сања имала 4 бели, а Маја 4 сиви жетони. Играле игра во која наизменично ставале по еден жетон еден над друг како би добиле две кули од по 4 жетони. Сања играла прва. Кој од наведените парови кули не можеле да го добијат?

A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. **E).** Бидејќи играле наизменично и жетоните ги ставле во две кули, не е можно да ги добиле кулите на цртежот E) бидејќи по четирите поставени жетони ја имаме ситуацијата . Сега игра Сања па барем еден од третите жетони во кулите мора да е бел, што не е случај.

Останатите четири парови кули може да се добијат како што е прикажано на долните цртежи.



13. Софија и Матеа играат игра со жетони. Од купче наизменично земаат жетони, а секоја одеднаш може да земе 1, 2, 3, 4 или 5 жетони. Девојчето кое ќе го земе последниот жетон ја губи играта. Во еден момент во купчето има 10 жетони, а на потез е Софија. Колку жетони треба да и остави на Матеа за да биде сигурна дека ќе победи?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Решение. **C).** За Матеа да изгуби пред таа да земе жетон во купчето мора да има 1, 7, 13, ..., $6a+1$, ... жетони. Навистина, ако во купчето има $6n+1$ жетон, тогаш Матеа може да земе 1, 2, 3, 4 или 5 жетони, по што Софија соодветно ќе земе 5, 4, 3, 2 или 1 жетон. Значи, двете заедно зеле 6 жетони, па во купчето ќе има $6(n-1)+1$ жетон. Со оваа стратегија Софија секогаш може на Матеа да и остави број на жетони од видот $6a+1$ и така ја добива играта. Во моментот на масата има 10 жетони, па ако Софија земе 3 жетони, тогаш таа сигурно ја добива играта.

8. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

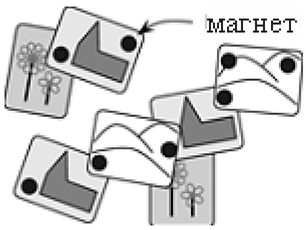
1. Ана на масата поставила три чинии со прибори како на цртежот десно. Нејзината мајка

побарала покрај секоја чинија да има нож на десната страна и виљушка на левата страна од чинијата. Колку најмалку промени на местата на ножевите и виљушките треба да направи Ана, за да ги подреди според барањата на мајка и?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Решение. B). Ана треба да ги замени местата на десната виљушка кај првата чинија и левиот нож кај втората чинија, а потоа кај третата чинија треба да ги замени местата на ножот и виљушката. Значи, најмалку две замени.

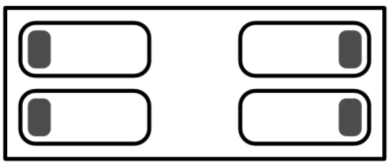
2. На фрижидерот на Мајда, 8 магнети држат неколку разгледници (цртеж десно). Колку најмногу магнети може да отстрани Мајда, но така што ниту една разгледница да не падне на земја?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. C). Од магнетите кои ги држат двете разгледници можеме да го отстраниме дениот магнет. Од магнетите кои ги држат другите разгледници можеме да го отстраниме најдолниот магнет и двата најгорни магнети. Значи, вкупно $1+1+2=4$ магнети.

3. На левата страна од собата, Мајада и Мери спијат со лицата свртени една кон друга. На десната страна од собата, Кате и Крис-



тина спијат свртени една на друга со грб. Колку девојчиња спијат така што нивното десно уво ја допира перницата?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

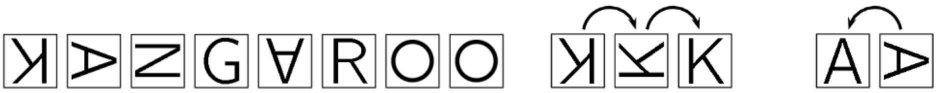
Решение. **C).** Во двата случаја девојчињата спијат на спротивните страни на лицата, што значи едно од нив перницита ја допира со деснот, а другото со левото уво. Значи, две девојчиња перницата ја допираат со десното уво.

4. На колку места на цртежот две деца се држат со нивните леви раце?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. **A).** Две деца се држат за леви раце ако првото од лево е свртено со лицето, а второто е свртено грбот. Таков е случајот само со петтото и шестото дете броено од лево кон десно.

5. Катерина ги наредила картичките на кои бил запишан зборот KANGARRO како на цртежот. Некои од картите биле свртени. Вртејќи ја буквата K двапати и буквата A еднаш таа ги исправила. Колку завртувања вкупно треба да направи Катерина за да ги исправи сите букви?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

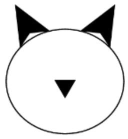
Решение. **C).** За првата буква се потребни 2 вртења, за втората 1, за третата 1, за четвртата 0, за петтата 2, за шестата, седмата и осмата по 0 вртења. Значи, вкупно се потребни $2+1+1+2=6$ вртења.

6. На горниот дел од мојот чадот стои зборот KANGAROO (цртеж десно). На кој од дадените цртежи сигурно не е претставен мојот чадот?

A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. C). На цртежот C) буката R е запишпана обратно.

7. Ана почнала да црта маче. На овој цртеж, прикажан десно, нацртала уште некои детали. Кој од понудените цртежи подолу може да биде цртежт на Ана?



A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. B). На цртежите поред почетниот цртеж, односно како се нацртани A), D), E) не соодветствува носот, а на цртежот C) не соодветствуваат ушите, Значи, соодветствува цртежот B).

8. Луѓето A,B,C,D и E во дадениот редослед седат на тркалезна маса, во насока на стрелките на часовникот. Кога заѕвонило ѕвончето, два пара соседи си ги промениле местата. Распоредот на луѓето по промена на местата, во насока на стрелките на часовникот, почнувајќи од A е A,E,B,D,C. Кој човек не го променил местото?

A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. B). На почетокот човекот C е меѓу кенгурите B и D па од положбата A,E,B,D,C следува дека C и D ги промениле местата. Сега, од A,E,B,C,D, бидејќи на почетокот E е меѓу A и D следува дека A и E ги промениле местата. Значи, не се поместил B.

9. Датата 01-03-05 (1 март 2005), се состои од три последователни непарни броеви, запишани во растечки редослед. Ова е првата ваква дата во 21-виот век. Вклучувајќи ја и наведената дата, колку вкупно дати од 21-виот век го исполнуваат ова својство (редоследот е ден-месец-година).

A) 5 B) 6 C) 16 D) 13 E) 8

Решение. **A).** Дати кои го имаат тоа својство се

01.03.05 03.05.07 05.07.09 07.09.11 09.11.13

Повеќе такви дати нема, заради бројот на месеците.

10. Три вторници во еден месец се паднале во парни датуми. Кој ден од седмицата е на 21-ви тој месец?

A) среда B) четврток C) петок D) сабота E) недела

Решение. **E).** Три вторници во текот на еден месец може да се на парни дати, ако датите се 2-ри, 9-ти, 16-ти, 23-ти и 30-ти. Сега, 23-ти е вторник, па како 21-ви е два дена порано, тоа е недела.

11. Во еден месец има 5 саботи, 5 недели, но само 4 петоци и 4 понеделници. Во следниот месец ќе има

A) 5 среди B) 5 четвртоци C) 5 петоци

D) 5 саботи E) 5 недели

Решение. **A).** Ако еден месец има 5 саботи, 5 недели, 4 петоци и 4 понеделници, тогаш тој има $4 \cdot 7 + 2 = 30$ дена. Значи, првиот месец почнува во сабота и завршува во недела. Тоа значи дека овој месец не е јануари, па следниот месец не е февруари. Бидејќи месецот има 30 дена, следниот месец има 31 ден и први е во понеделник. Овој месец ќе има 5 понеделници, 5 вторници, 5 среди и по 4 четвртоци, петоци, саботи и недели.

12. Во понеделник Алексадар споделил фотографија со 5 свои пријатели кои ја примиле и ја виделе истиот ден. Следниот ден секое лице кое ја примило фотографијата ја испратило на двајца свои пријатели, кои сѐ уште не ја виделе фотографијата, кои ја примиле и ја виделе истиот ден, па следниот ден секој од нив ја пратил фотографијата до двајца свои пријатели, кои ја примиле и ја виделе фотографијата истиот ден и така се ширел кругот на пријатели кои ја добиле и ја виделе фотографијата. Кој ден бројот на луѓето кои ја виделе фотографијата ќе биде поголем од 100?

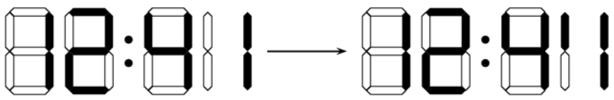
A) Среда B) Четврток C) Петок D) Сабота E) Недела

Решение. C). Фотографијата во понеделник ја виделе 5 пријатели, во вторник 10 пријатели, во среда 20 пријатели, во четврток 40 пријатели, во петок 80 пријатели итн. Бидејќи

$$5+10+20+40+80>100,$$

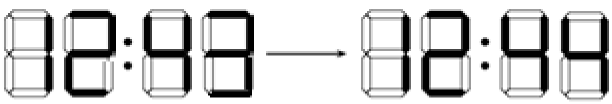
бараниот ден е петок.

13. Филип има дигитален часовник на кој трите хоризонтални лет диоди на најкрајната десна цифра не работат. Часовникот работи точно. Филип погледнал во часовникот во моментот кога тој ја променил состојбата како што е прикажано на цртежот. Колку бил часот непосредно по промената?

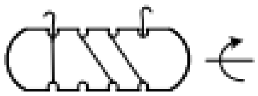


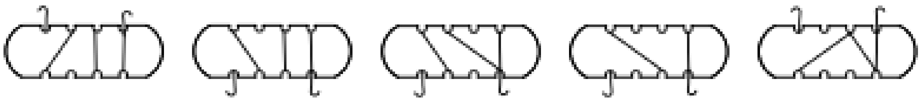
A) 12:40 B) 12:42 C) 12:44 D) 12:47 E) 12:49

Решение. C). Со палење на некои од хоризонталните диоди на последната цифра две последователни цифри може да се добијат само ако се запалат трите диоди лево и се запали средната диода десно. Така, исправен часовник би покажувал промена како на цртежот десно. Значи, непосредно по промената било 12:44.



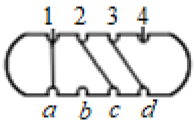
14. Андреа навиткала јаже околу дрвена плочка како на цртежот десно. Таа ја звртела дрвената плочка како што е покажано со стрелката на цртежот. Што видела Андреа по завртувањето?





A) B) C) D) E)

Решение. **B).** Нека длабнатините во плочата каде што поминува јажето ги означиме со $1,2,3,4$ и a,b,c,d, цртеж десно. Тогаш од задната страна на плочата јажето се гледаат поврзувањата $(a,2),(c,3)$ и $(d,4)$. Бидејќи плочата се превртува преку горната страна длабнатините се во горниот ред и наведените поврзувања се прикажани на цртежот B.



15. Осум кенгури се наредени во редица како на цртежот.

Во даден момент, два кенгури кои се еден до друг и свртени еден кон друг ги заменуваат местата прескокнувајќи се еден со друг. Ова се повторува се додека вакви прескокнувања се можни. Колку прескокнувања се направени?

A) 2 B) 10 C) 12 D) 13 E) 16

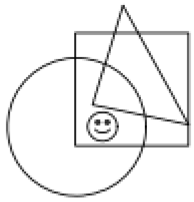
Решение. **D).** Бројот на прескокнувањата е еднаков на бројот на кенгурите кои се свртени во спротивна насока од кенгурите кои гледаат кон лево. Коннлево гледаат три кенгури. Одејќи од лево кон десно наспроти првиот кенгур имаме 3 кенгури, наспроти вториот кенгур имаме 5 кенгури и наспроти третиот кенгур имаме 5 кенгури. Значи, вкупно имаме $3+5+5=13$ прескокнувања.

16. Во круг се распоредени 40 момчиња и 28 девојчиња, фатени за рака . Точно 18 момчиња со десната рака се држат со девојче. Колку момчиња со левата рака се држат со девојче?

A) 18 B) 9 C) 28 D) 14 E) 20

Решение. **A).** Момчињата да ги распоредиме во групи така што во секоја група има точно едно момче кое со десната рака се држи со девојче. Бидејќи имаме 18 момчиња добиваме 18 групи момчиња, при што меѓу секои две групи има најмалку едно девојче. Притоа, точно едно од момчињата со десната рака се држи со девојче и точно едно од момчињата со левата рака се држи со девојче. Значи, 18 момчиња со левата рака се држат со девојче.

17. Каде е смешкото?



A) Во кругот и триаголникот, но не и во квадратот.

B) Во кругот и квадратот, но не и во триаголникот.

C) Во триаголникот и квадратот, но не и во кругот.

D) Во кругот, но не е во квадратот или триаголникот.

E) Во квадратот, но не е во кругот или триаголникот.

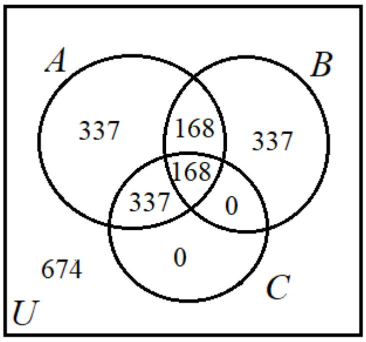
Решение. **B).** Смешкото не е во триаголникот, а е во кругот и квадратот.

18. Запиши ги сите природни броеви од 1 до 2021 и подцртај ги тие кои се деливи со 2, потоа потцртај ги тие кои се деливи со 3 и на крајот подцртај ги тие кои се делив со 4. Колку броеви се подцртани два пати?

A) 1012 B) 1010 C) 505 D) 337 E) 168

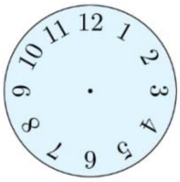
Решение. **C).** Со U да го означиме множеството броеви од 1 до 2021, а со A, B и C да ги означиме броевите кои припаѓаат на U и се деливи со 2, 3 и 4, соодветно. Лесно се добива дека

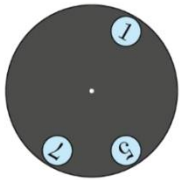
$$|A|=1010, |B|=673, |C|=505,$$
$$|A\cap B|=505, |A\cap C|=336,$$
$$|B\cap C|=168, |A\cap B\cap C|=168.$$



Така го добиваме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Понатаму, два пати се подцртани броевите кои се точно во две од трите множествата A, B и C, што значи дека два пати се подцртани $337+168=505$ броеви.

19. Преку часовникот е поставен црн диск со три отвора, како на цртежот десно. Ако црниот диск се заврти околу неговиот центар, кои три броја може да се видат во отворите?





A) 2, 4, 9 B) 1, 5, 10 C) 4, 6, 12 D) 3, 6, 9 E) 5, 7, 12

Решение. **C).** Првиот и третиот отвор на црниот диск се дијаметрално поставени, што значи дека најголемата разлика меѓу броевите кои ќе се видат е 6. Затоа одговорите A), B) и E) отпаѓат. Вториот е за 4 броја оддалечен од првиот отвор и за 2 броја оддалечен, па затоа одговорот D) кај кој растојанијата меѓу броевите се еднакви отпаѓа. Значи, ќе се видат броевите 4, 6, 12.

20. Баба Марта за своите внуци купила бомбони. Таа ги поделила така што секој внук добил еднаков број бомбони. Во вреќичките ставила најголем можен број бомбони. Кога била готова видела дека 12 бомбони ѝ останале. Колку најмалку внуци може да има баба Марта?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

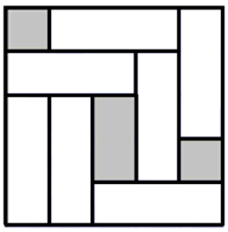
Решение. **C).** Ако баба Марта имала 12 или помалку внуци, тогаш во секоја торбичка можела да стави најмалку уште по една бомбона, што според условот на задачата не е можно. Ако бројот на внуците е 13 или поголем, тогаш бидејќи има уште 12 бомбони, таа не може во торбичките да стави поголем број бомбони. Значи, баба Марта имала најмалку 13 внуци.

21. Баба Марта за своите внуци купила бомбони. Таа ги поделила така што секој внук добил еднаков број бомбони. Во вреќичките ставила најголем можен број бомбони. Кога била готова видела дека во секоја вреќичка има по 20 бомбони и дека 12 бомбони ѝ останале. Кој е најмалиот број бомбони што го купила баба Марта?

A) 52 B) 232 C) 272 D) 411 E) 432

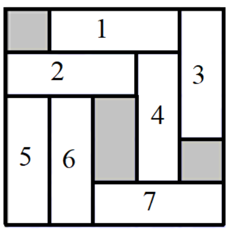
Решение. C). На потполно ист начин како во претходната задача заклучуваме дека баба Марта има најмалку 13 внуци. Бидејќи во секоја торбичка има по 20 бомбони и 12 бомбони останале, најмалиот број бомбони е $13 \cdot 20 + 12 = 272$.

22. Во кутија има седум еднакви плочки кои можеме да ги поместуваме без да ги креваме. Кој е најмалиот број плочки што треба да ги придвижиме за да можеме да ставиме уште една таква плочка?



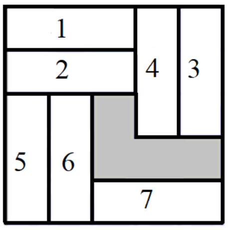
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Решение. B). Да ги означиме плочките со броевите од 1 до 7 (види цртеж лево). Како што можеме да видиме единствено можеме да ги придвижиме плочките означени со броевите 3 и 1. Ако ја придвижиме



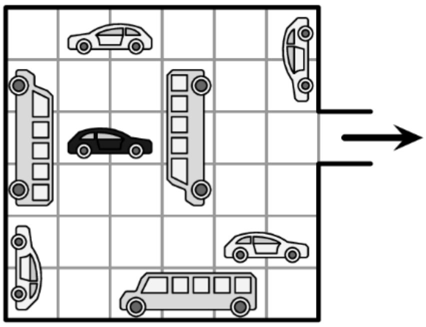
плочката 3, тогаш можеме да ја придвижиме само плочката 1 и веќе имаме две придвижувања, по кои не можеме да ставиме нова плочка и повторно можеме да ја придвижиме само плочката 1 (направи цртеж).

Ако ја придвижиме плочката 1, тогаш единствено можеме да ја придвижиме плочката 4, по што над плочката 7 можеме да ставиме нова плочка (види цртеж десно).



Според тоа, најмалиот број поместувања е 2.

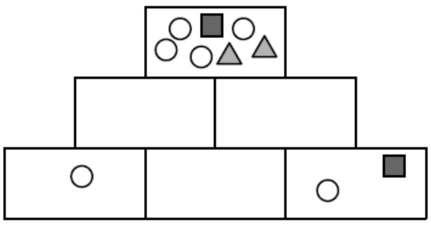
23. Во гаражата прикажана на цртежот десно, возилата може да се движат само напред и назад, без притоа да вртат. Колку најмалку возила треба да се преместат, за да може црниот автомобил да излезе?

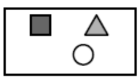
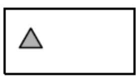
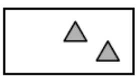
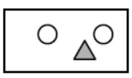


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

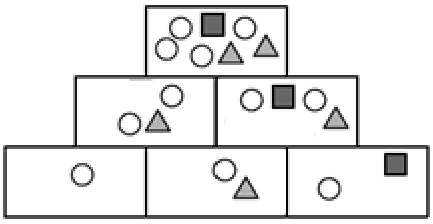
Решение. C). Треба да се помести автобусот кој е пред автомобилот. Ако се помести назад, автомобилот не може да излезе, па затоа треба да се помести две полиња напред. Тоа значи дека треба да се помести автобусот кој е пред него. Слично, овој автобус мора да се помести две полиња напред, за што е потребно по едно поле да се поместат автомобилот и автобусот кои се зад црниот автомобил. Значи, вкупно треба да се поместат 4 возила.

24. Андреј црта фигури во правоаголниците на пирамидата прикажана на цртежот десно. Секој правоаголник ги содржи сите фигури кои се наоѓаат во правоаголниците кои се наоѓаат непосредно под него. Кои фигури се во централниот квадрат во првиот ред?

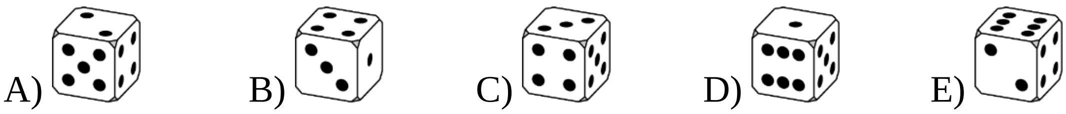


A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **D).** Во левиот правоаголник на вториот ред треба да се нацртаат 1 круг и фигурите од централниот квадрат на првиот ред. Во десниот квадрат на вториот ред треба да се нацртаат 1 круг, 1 квадрат и фигурите од централниот квадрат на првиот ред. Значи, во најгорниот квадрат треба да има 2 круга, 1 квадрат и два пати фигурите од централниот квадрат. Ако одземеме 2 круга и 1 квадрат, преостануваат 2 круга и 2 триаголника. Значи, во централниот квадрат треба да има 1 круг и 1 триаголник. Пополнетата пирамида е прикажана на цртежот десно.

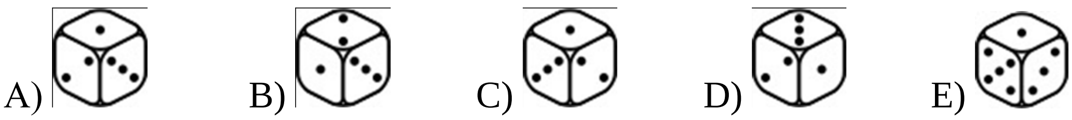


25. Збирот на точките на спротивните ѕидови на една обична коцка за играње е еднаков на 7. Која од следниве коцки може да е обична?



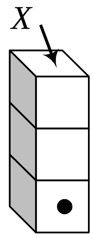
Решение. **E).** Кај коцките од A) до D), соседни страни имаат точки чиј збир е еднаков на 7, т.е. A) $5+2=7$, B) $3+4=7$, C) $4+3=7$ и D) $6+1=7$, па затоа ниту една од нив не е обична. Значи, останува да е обична само коцката E).

26. Збирот на точките на спротивните ѕидови на една правилна (обична) коцка е 7. Која од дадените коцки се разликува од останатите?



Решение. **A).** Ако ја завртиме коцката E) така да ѕидот со 3 точки биде лево, добиваме дека кај коцките B), C), D) и E) распоредот на ѕидовите со 1, 2 и 3 точки е во насока на движењето на стрелките на часовникот, а кај коцката A) овој распорфед е во обратната насока од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Значи, коцката А) се разликува од останатите коцки.

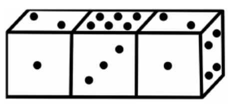
27. На цртежот се прикажани три правилни коцки, ставени една врз друга. Правилна коцка го има следново својство: збирот на точките на два спротивни ѕида е 7. Збирот на точките на секои два ѕида што се поклопуваат е 5. Колку точки има на ѕидот X ?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **E)** Бидејќи $5=1+4=2+3$ и на предниот ѕид на долната коцка има 1 точка, на допирните ѕидови на долните две коцки има 2 и 3 точки. Ако на горниот ѕид на првата коцка има 3 точки, тогаш на долниот ѕид на втората коцка ќе има 2 точки. Тоа значи дека на горниот ѕид на втората коцка ќе има $7-2=5$ точки. Последното не е можно бидејќи во тој случај збирот на точките на допирните ѕидови на втората и третата коцка ќе биде поголем од 5. Значи, на горниот ѕид на првата коцка има 2 точки и на долниот ѕид на втората коцка има 3 точки. Според тоа, на горниот ѕид на втората коцка има $7-3=4$ точки. Затоа на долниот ѕид на третата коцка има $5-4=1$ точка. Конечно, на ѕидот X има $7-1=6$ точки.

28. Три коцки за играње се допираат една до друга, како што е прикажано на цртежот десно. Коцките се правилни, т.е. збирот на бројот на точките на спротивните страни е еднаков на 7. Колку е збирот на бројот на точките на ѕидовите по кои коцките се допираат?



A) 12 B)13 C) 14 D) 15 E) 16

Решение. **C).** Првата коцка е исто поставена како и третата коцка, па затоа на ѕидот со кој ја допира средната коцка има 4 точки. На ѕидот на третата коцка кој ја допира втората коцка има $7-4=3$ точки. Средната коцка ги допира другите две со два спротивни ѕида, па затоа збирот на точките на допирните ѕидови на оваа коцка е 7. Според тоа, збирот на точките на сите допирни ѕидови на трите коцки е еднаков на $4+7+3=14$.

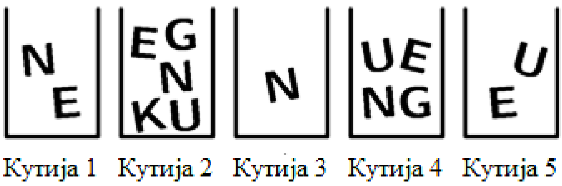
29. На ѕидовите на коцката се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (на секој ѕид еден број). Ѕидовите 1 и 6 имаат заеднички раб. Заеднички раб имаат и ѕидовите 1 и 5, ѕидовите 1 и 2, ѕидовите 6 и 5, ѕидовите 6 и 4 и ѕидовите 6 и 2. Кој број стои на ѕидот која е спротивен на ѕидот на кој е запишан бројот 4?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5

E) не може да се определи

Решение. **A).** Четирите соседни ѕида на ѕидот со број 6 се ѕидовите со броевите 1, 2, 4 и 5. Според тоа, спротивниот ѕид на ѕидот 6 е ѕидот 3. Спротивниот ѕид на ѕидот 6 е соседен на ѕидот 1, па значи четирите соседни ѕида на ѕидот 1 се 2, 3, 5 и 6. Според тоа, ѕидовите 1 и 4 се спротивни еден на друг.

30. Софија сака да го напише зборот KENGU користејќи ги буквите од кутиите прикажани на цртежот десно. Таа може да земе само по една буква од секоја кутија.

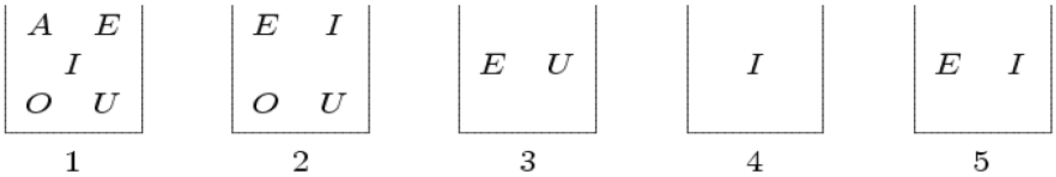


Која буква мора Софија да ја земе од кутија 4?

A) K B) E C) N D) G E) U

Решение. **D).** Од кутијата 3 мора да ја земе буквата N, па од кутијата 1 мора да ја земе буквата E, од кутијата 5 буквата U, од кутијата 4 буквата G и од кутијата 2 буквата K.

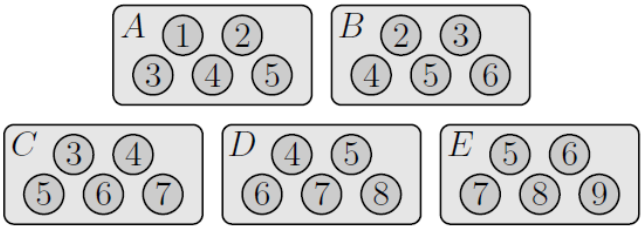
31. Во пет кутии означени со броевите од 1 до 5 се ставени по неколку карти кои се означени со буквите A, E, I, O, U (види цртеж). Павел тргнува карти од кутиите така, што на крајот во секоја кутија останува по една карта и во различните кутии се различни карти. Која е картата во кутијата 2?



A) A B) E C) I D) O E) U

Решение. D). Во кутијата 4 останува картата I, па затоа во кутијата 5 мора да е картата E. Сега, во кутијата 3 е картата U. Картите I, E и U веќе се останати во три кутии, па затоа во кутијата 2 мора да остане картата O.

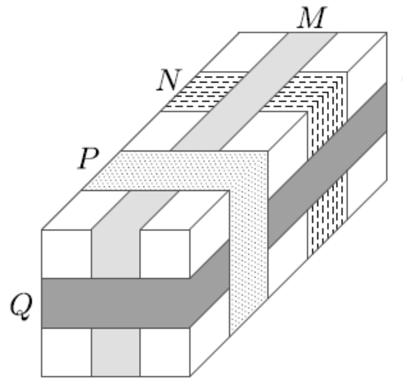
32. Во пет кутии A, B, C, D, E има по 5 топчиња, нумерирани како на цртежот десно. Од секоја кутија се извадени по 4 топчиња. Ако преостанатите топчиња се со броевите 1, 2, 3, 4 и 5, во која кутија е топчето 5?



A) A B) B C) C D) D E) E

Решение. E). Топчето 1 го има само во кутијата A, па мора во неа да е останато. Понатаму, топчето 2 го има во кутиите A и B, па како во A е останато топчето 1 топчето 2 мора да е останато од кутијата B. Слично, топчето 3 го има во кутиите A, B, C и како од првите две кутии се останати топчињата 1 и 2 топчето 3 мора да е останато од кутијата C. Слично топчето 4 е останато во кутијата D и топчето 5 е останато во кутијата E.

33. Пакетот на цртежот десно е завиткан со четири украсни ленти M, N, P и Q. По кој редослед од првата до последната се поставувани лентите околу пакетот?



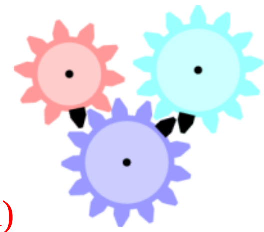
A) M, N, P, Q B) M, N, Q, P

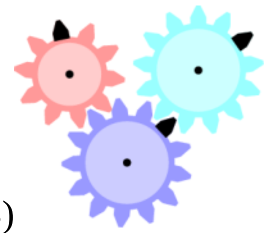
C) N, Q, M, P D) N, M, Q, P

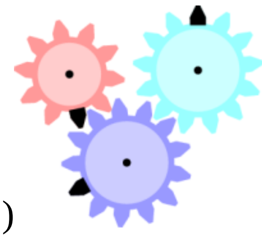
E) Q, N, M, P

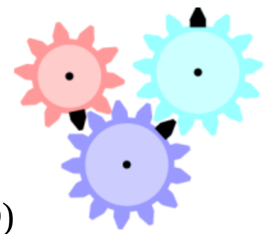
Решение. **D).** Од цртежот се гледа дека M ја покрива N, Q ги покрива M и N, а P ги покрива M и Q. Затоа прва е N, потоа следува M, па Q и на крајот P.

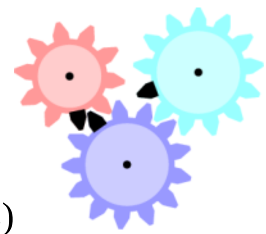
34. На цртежот десно се прикажани три запчаници и на секој од нив има еден црн забец. На кој цртеж од понудените пет е прикажана положбата на трите црни запци на запчаниците, откако најмалиот запчаник се завртел за еден цел круг во насока на движењето на стрелките на часовникот?


A)


B)

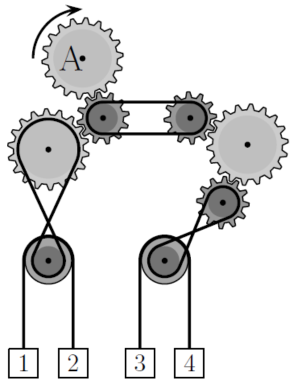

C)


D)

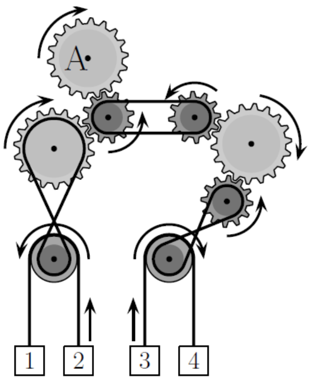

E)

Решение. **A).** Најмалиот запчаник се завртел еден цел круг, па затоа неговиот црн забец е во истата положба. Најмалиот запчаник има 10 запци, па затоа црниот забец се поместил 10 пати. Бидејќи при секое поместување за еден забец на малиот запчаник во насока на движење на стрелките на часовникот, сивиот запчаник се поместува за еден забец во обратната насока неговата положба точно е прикажана на цртежите A), B) и D). Сега синиот забец се поместува во насока на движењето на стрелките на часовникот за десет запци, па затоа положбата на неговиот црн забец точно е прикажана на цртежот A).

35. Во системот запчаници запчаникот означен со A се врти во насоката на сгтрелката на часовникот (види цртеж). Кои две кутии кои се закачени на јажињата ќе се поместат нагоре?

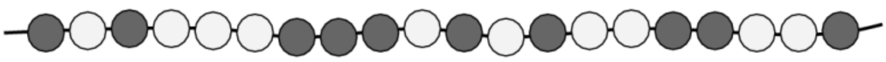


A) 1 и 4 B) 2 и 3 C) 1 и 3 D) 2 и 4
E) не може да се определи



Решение. **B).** На цртежот лево се прикажани вртењата на сите елементи на системот, кои се последица од вртењето на запчаникот A (секој следен елемент во системот се врти во спротивната насока од елементите со кои е поврзан). Тоа значи дека нагоре ќе се поместа кутиите 2 и 3.

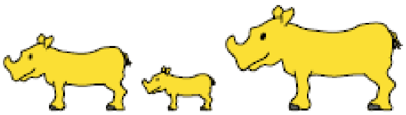
36. Еден ѓердан е направен од црни и бели бисери. Катерина сака да земе точно 5 црни бисери од него. Но таа може да зема бисери почнувајќи од краевите на герданот, со ред, па мора да зема и бели бисери. Кој е најмалиот број на бели бисери кои таа мора да ги земе?

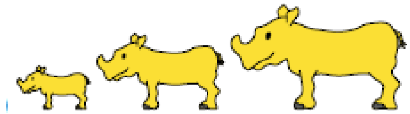


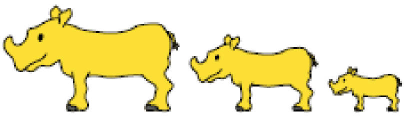
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

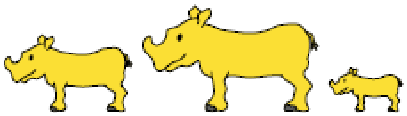
Решение. **B).** Ако ги земе два црни бисери од краевите на ѓерданот Катерина нема да земе ниту еден бел бисер. Сега, ако го земе белиот бисер на левата страна, ќе може да земе 1 црн бисер, па досега има земено $2+1=3$ црни бисери. Треба да земе уште 2 црни бисери, па затоа најмал број бели бисери ќе земе ако таа прво ги земе двата бели бисери на десната страна, а потоа двата црни бисери на истата страна. Така Катерина ќе земе $1+2=3$ бели и $3+2=5$ црни бисери.

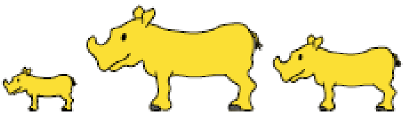
37. Носорозите Лено, Муро и Нор отишле на прошетка. Лено оди напред, Муро е во средината, а Нор оди последен. Лено има маса 500 *kg* повеќе од Муро. Муро има маса 1000 *kg* помалку од Нор. Која од следниве слики ги прикажува Лено, Муро и Нор подредени во правилен редоследот?

A) 

B) 

C) 

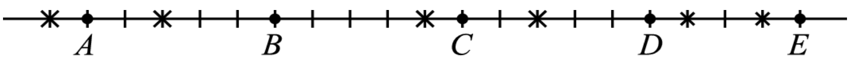
D) 



E)

Решение. **A).** Муро има помала маса и од Лено и од Нор, но од Лено има помала маса за 500 *kg*, а од Нор за 1000 *kg*. Значи, Муро има најмала маса, Нор има најголема маса и Лено е третиот носорог. Ваква распоред е прикажан на A).

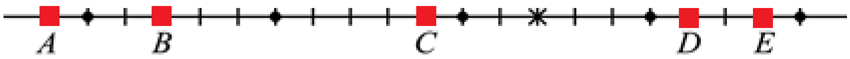
38. Пет верверици A, B, C, D и E се распоредени на права линија линија како на долниот цртеж.



На линијата има 6 лешници кои се означени со ѕвездички. Во еден момент секоја верверица почнала со иста брзина да трча кон најблискиот лешник. Откако верверицата ќе земе лешник, таа продолжува да трча кон следниот најблизок лешник. Која верверица ќе земе два лешника?

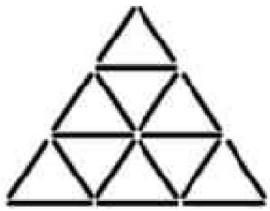
А) A	B) B	C) C	D) D	E) E

Решение. C). По првото трчање положбата на верверичките е прикажана на долниот цртеж, а земените лешници се означени со црвени квадратчиња.



До последниот лешник верверичката C е оддалечена 3 отсечки, а верверичката D е оддалечена 4 отсечки. Значи шестиот лешник ќе го земе верверичката C.

39. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од 18 еднакви дрвца и содржи вкупно 13 триаголници. Колку најмногу триаголници ќе се „растурат“ ако тргнеме само едно дрвце?



А) 10	B)2	C) 3	D) 4	E) 5

Решение. D). На цртежот имаме три вида триаголници: 9 триаголници со страна едно дрвце, 3 триаголници со страна две дрвца и 1 триаголник со страна три дрвца. Јасно, со отстранување на едно дрвце може да се „растурат“ најмногу два триаголника од ист вид. Значи, најмногу може да се „растурат“ 5 триаголника: 2 од првиот вид, 2 од вториот вид и 1 од третиот вид. Но, ниту едно дрвце кое е страна на два триаголника од првиот вид не лежи на страните на два триаголника од вториот вид. Значи, со отстранување на едно дрвце може да се „растурат“ најмногу 4 триаголници. Пример, за „растурање“ на четири триаголници е отстранувањето на било кое средно дрвце на големиот триаголник, при што се „растураат“ 1 мал, 2 средни и големиот триаголник.

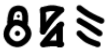
40. Во земјата Смешно стапало, левото стапало на секој жител е еден или два броја поголемо од неговото десно стапало. Сите жители носеле ист модел чевли и чевлите се продавале во парови со иста големина. За да заштедат, група пријатели заедно купиле чевли. Откако меѓу себе ги поделиле купените чевли, ним им останале два чевла: еден со број 36 и еден со број 45. Кој е најмалиот број луѓе кои купувале зедно?

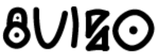
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Решение. **A).** За да добиеме најмал можен број луѓе кои купувале заедно треба да направиме најголем можен број парови со разлика 1 или 2 при што ќе останат броевите 36 и 45. Тоа може да се направи на два начина:

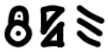
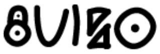
Прв начин. (45, 43), (43, 41), (41, 39), (39, 37) и (37, 36),

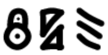
Втор начин: (36, 38), (38, 40), (40, 42), (42, 44) и (44, 45).

41. Филип си измислил своја азбука. Со буквите од таа азбука зборовите КУБ и СОНДА се запишуваат  и , соодветно. Како се запишува зборот КОНУС?

A)  B)  C) 

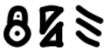
D)  E) 

Решение. **B).** Буквите К и У се првиот и вториот знак во , односно  и . Буквите С, О и Н се првиот, вториот и третиот знак во , односно ,  и . Значи, конус се пишува .

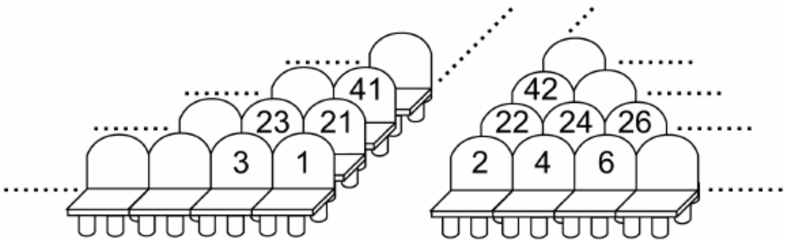
42. Филип си измислил своја азбука. Со буквите од таа азбука зборовите RED и BASIL се запишуваат  и , соодветно. Како се запишува зборот BREAD?

A)  B)  C) 

D)  E) 

Решение. **B).** Буквите R, E и D се првиот, вториот и третиот знак во , односно ,  и . Буквите B и A се првиот и вториот знак во , односно  и . Значи, зборот BREAD се пишува .

43. Ана за театарската претстава купила билет со место No 100. Кога Билјана отишла да си купи билет за истата претстава дознала дека слободни останале само местата со броевите 76, 94, 99, 104 и 118. Местата се нумерирани како на цртежот. Кој билет треба да го купи Билјана за да биде најблиску можно до Ана?



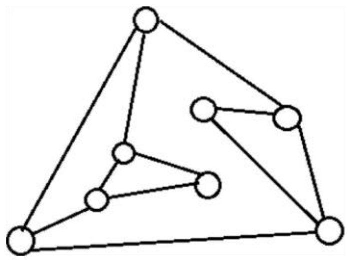
A) 76 B) 94 C) 99 D) 104 E) 118

Решение. **E).** Во секој ред на салата има по 20 места. Значи, местото со реден број 76 е во четвртиот ред, местата со редни броеви 94, 99 и 100 се во петтиот ред, при што местото 99 е на левата, а местата 94 и 100 се на десната страна, а местото број 118 е во шестиот ред. Распоредот на местата е даден во долната табела.

Ред 6	102	**104**	106	107	110	112	114	116	**118**	120
Ред 5	82	84	86	88	90	92	**94**	96	98	**100**
Ред 4	62	64	66	68	70	72	74	**76**	78	80

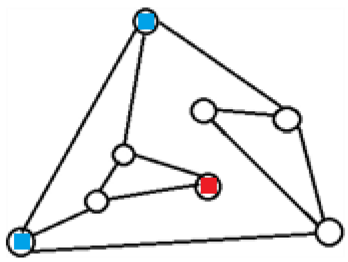
Сега е јасно дека Билјана треба да го купи местото со реден број 118.

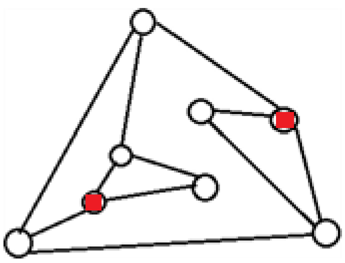
44. На цртежот десно со кружниците се прикажани светилки, некои од кои се поврзани меѓу себе. Кога ќе допреме една светилка, таа и сите светилки со кои непосредно е поврзана се палат. Кој е најмалиот број светилки што треба да го допреме за да сите светилки се запалени?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Решение. **A).** Ако допреме било која од надворешните светилки, тогаш сигурно црвената светилка на цртежот десно нема да светне. Ако допреме било која од внатрешните светилки, тогаш сигурно една од сините светилки нема да светне.

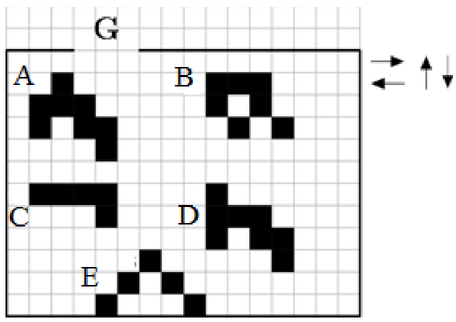




Значи, при допирање на една светилка нема сите светилки да се запалени.

На цртежот лево е даден пример како ќе ги запалиме сите светилки со допирање на точно две светилки.

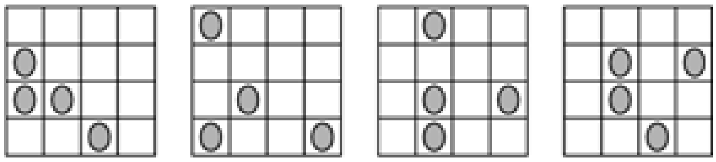
45. Петте фигури поставени на мрежата (цртеж лево) може да се движат само во насоките кои ги покажуваат црните стрелки. Која фигура може да излезе низ отворот G?



A) A B) B C) C D) D E) E

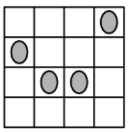
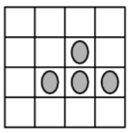
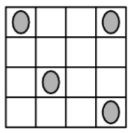
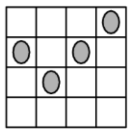
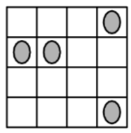
Решение. **B).** Бидејќи ширината на излезот е еднаква на ширината на три квадратчиња, а фигурите A, C, D и E во еден ред имаат ширина 4, 4, 4 и 5 квадратчиња, соодветно тие не може да излезат низ излезот G. Фигурата B може да излезе така што ќе оди 6 квадратчиња налево, па 3 квадратчиња нагоре, па 2 квадратче налево и 1 квадратче нагоре.

46. Четири кучиња се наоѓаат во различните полиња на квадратна 4×4 мрежа. Едно од кучињата спие и не се поместува од своето поле.



Почетна положба | После првото свирнување | После второто свирнување | После третото свирнување

Мартин ги издресирал кучињата така што при свирнување со свирче секое од преостанатите три кучиња се поместува во соседно поле (соседни се полиња кои имаат заедничка страна). Кучињата може да се движат горе, долу, лево и десно, но не смеат да се вратат во полето од кое дошле при претходниот свиреж на Мартин. На цртежот се дадени почетната и положбите на кучињата по три свирежи на Мартин. Кој цртеж може да ја прикажува положбата на кучињата по четвртиот свиреж на Мартин?

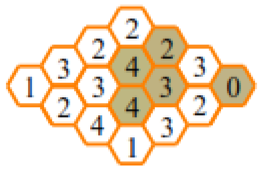
A)  B)  C)  D)  E) 

Решение. **A).** Состојбата B) отпаѓа бидејќи кучето во четвртата колона треба да се врати во полето од кое претходно дошло. Состојбата C) отпаѓа бидејќи не е можно да има куче во првото поле на првиот ред. Состојбата D) отпаѓа бидејќи кучето во третата колона од првиот ред трееба да премине во третиот ред. Состојбата E) отпаѓа бидејќи се поместило кучето кое спие (пресек на вториот ред и втората колона). Состојбата A) е можна: кучињата од третата и четвртата колона одат по едно поле нагоре, а преостанатото куче од вториот ред оди едно поле во лево.

47. На цртежот десно е прикажано саќе со 16 клетки. Некои од нив содржат мед. Бројот во секоја клетка покажува колку нејзини соседни клетки содржат мед. Клетките се соседни ако имаат заедничка страна. Колку клетки содржат мед?

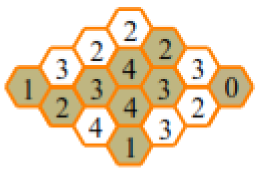
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. **C).** Да ги означиме клетките со буквите од A до P, како на цртежот десно. Во клетката A е 0, што значи дека во клетките B и C нема мед. Бидејќи во C нема мед, а во три клетки кои и се соедни има мед заклучуваме дека во A, D и E има мед. Две клетки соседни на C содржат мед, а тоа се A и E, па затоа F не содржи мед. Три соседни клетки на E содржат мед, па како D содржи мед, а B, C и F не содржат мед, па мора H и I да соржат мед (цртеж десно).

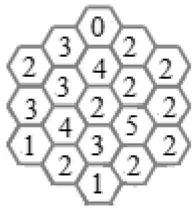


Сега, две соседни клетки на D содржат мед, па затоа G не содржи мед. Понатаму, бидејќи H и D содржат мед, а само две клетки соседни на G содржат мед заклучуваме дека K не содржи мед. Но, четири соседни клетки на H содржат мед, па затоа L содржи мед. Бидејќи L и H содржат мед, а само две соседни на K содржат мед заклучуваме дека N не содржи мед. Бидејќи само една соседна клетка на P содржи мед, тоа мора да е O (цртеж десно).

Сега, една соседна клетка на J содржи мед, па затоа M не содржи мед. Понатаму, четири соседни клетки на M содржат мед, па затоа мора J да содржи мед. Конечно, две соседни клетки на O и три соседни клетки на N содржат мед, па мора P да содржи мед (цртеж десно). Конечно, 9 клетки содржат мед.

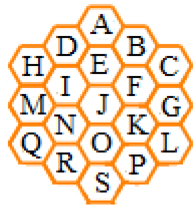


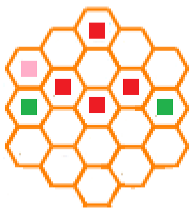
48. На цртежот десно е прикажано саќе со 19 клетки. Некои од нив содржат мед. Бројот во секоја клетка покажува колку нејзини соседни клетки содржат мед. Клетките се соседни ако имаат заедничка страна. Колку клетки содржат мед?



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Решение. **E).** Како и во претходната задача клетките да ги означиме со буквите од A до S. Во клетката A е бројот 0, што значи дека во соседните D, E и B клетки нема мед. Но, во клетката E е бројот 5, па затоа мед





има во клетките A, I, J и F. Сега во B е зашишан бројот 2, па затоа во C нема мед, а како во D е запишан бројот 3 заклучуваме дека во H има мед. Во H и C е запипшан бројот 2, па затоа во M и G има мед (цртеж лево).

Во клетката J е запишан бројот 2 и како таа клетка веќе има две соседни клетки со мед, во трите клетки под неа нема мед. Сега од броевите во клетките M и G заклучуваме дека во клетките Q и L има мед. Јасно, во полето R нема мед, па затоа мед мора да има во полето S, а како во полето K е запишпан бројот 5 мед мора да има и во полето P. Тоа е последната клетка во која има мед, што значи дека мед има во 11 клетки (цртеж десно).