Самоил Малчески
Скопје

ДОКАЖУВАЊЕ НЕРАВЕНСТВА СО РАЗЛОЖУВАЊЕ И СО ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВАТА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

Неравенствата имаат огромно значење како во математиката, така и во другите природни и технички науки. Тоа довело до огромен развој на оваа област, но сепак докажувањето на елементарните неравенства најчесто се сведува на користење на разложување на множители, користење на неравенствата меѓу средините и други познати класични неравенства. Во оваа статија ќе се задржиме на докажувањето на некои неравенства со помош на разложување и со користење не неравенствата меѓу срединиte. Притоа нема да ги докажуваме неравенсвата меѓу аритметичката, геометриската, хармониската и квадратната средина, а читателите кои подетално сакаат да се запознаат со докажување на овие неравенства може да ја консултираат литераурата која е наведена на крајот од оваа статија.

На почетокот ќе разгледаме три задачи за чие решавање ни се потребни само основните својства на неравенствата.

1. Броевите p и q се делители на природниот број n. Ако $p>q$, докажи дека $p>q+\frac{q^2}{n}$.

   Решение. Од $p>q$ следува $\frac{n}{q}>\frac{n}{p}$. Но, $\frac{n}{q}$ и $\frac{n}{p}$ се природни броеви, па затоа $\frac{n}{q}-\frac{n}{p}\geq 1$. Последното неравенсвто е еквивалентно со неравенството $p-q\geq\frac{pq}{n}$. Но, $p>q$, па затоа

$$p-q\geq\frac{pq}{n}>\frac{q^2}{n}\text{, т.е. } p>q+\frac{q^2}{n}.$$

2. Нека x,y,z се по парови различни реални броеви. Докажи дека

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5 \text{ и } (x-y)(y-z)(z-x)$$

   се истовремено позитивни или истовремено негативни.

   Решение. Нека $a=x-y,\ b=y-z,\ c=z-x$. Тогаш $a+b+c=0$ и $abc\neq 0$. Треба да докажеме дека $a^5+b^5+c^5$ и abc се со ист знак. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\geq b\geq c$. Тогаш од

$a+b+c=0$ следува $a>0, c<0$.

Ако $b>0$, тогаш $abc<0$ и $a^5+b^5+c^5<(a+b)^5+c^5=(-c)^5+c^5=0$.

Ако $b<0$, тогаш $abc>0$ и $a^5+b^5+c^5>a^5+(b+c)^5=a^5+(-a)^5=0$.

3. Докажи дека за секој природен број $n\geq 2$ постојат n последователни природни броја $a_i, i=1,2,...,n$ такви што

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{n}.$$

Решение. За n последователни природни броја $a_i, i=1,2,...,n$, од кои првиот број е $a_1=n^2+1$, најголемиот број е $a_n=n^2+n$, па затоа важи

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{n+1} \text{ и } \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}<\frac{n}{n^2+1}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

Следните неколку задачи ќе ги решиме со разложување на алгебарски изрази на множители или нивно запишување како збир на алгебарски изрази.

4. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+5k^2+9}<\frac{1}{6}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{k}{k^4+5k^2+9}=\frac{k}{k^4+6k^2+9-k^2}=\frac{k}{(k^2+3)^2-k^2}=\frac{k}{(k^2-k+3)(k^2+k+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+k+3-(k^2-k+3)}{(k^2-k+3)(k^2+k+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)+3}-\frac{1}{k(k+1)+3}\right),$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+5k^2+9}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k-1)+3}-\frac{1}{k(k+1)+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0\cdot 1+3}-\frac{1}{n(n+1)+3}\right)<\frac{1}{6}.$$

5. Нека x, y, z се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$3(x^2+y^2+z^2)+2xyz+1\geq 4(xy+yz+zx).$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $(x-1)(y-1)\geq 0$. Навистина, ако

$$(x-1)(y-1)<0,\ (y-1)(z-1)<0,\ (z-1)(x-1)<0,$$

тогаш множејќи ги овие неравенства добиваме

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2<0,$$

што е противреност. Понатаму, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+(z-1)^2+2z(x-1)(y-1)\geq 0,$$

кое е точно бидејќи сите собирци на левата страна се ненегативни. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.

6. Нека $a,b,c,d\in[2,4]$. Докажи дека

$$25(ab+cd)^2\geq 16(a^2+d^2)(b^2+c^2).$$

Решение. Ако x и y се два од дадените броеви, тогаш $2x\geq 4\geq y$. Затоа

$$(2a-d)(2d-a)\geq 0 \text{ и } (2c-b)(2b-c)\geq 0,$$

односно

$$5ad\geq 2a^2+2d^2 \text{ и } 5bc\geq 2b^2+2c^2. \qquad (1)$$

Секое од неравенствата (1) го множиме со 2, па добиените неравенства ги множиме и ако искористиме дека $2abcd\leq(ab+cd)^2$ добиваме

$$16(a^2+d^2)(b^2+c^2)\leq 100abcd\leq 25(ab+cd)^2.$$

7. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c важи

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab.$$

Решение. Ќе искористиме дека за секои реални бореви x,y,z е точно неравенсвтото

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx, \qquad (1)$$

кое е еквивалентно со неравенсвото

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0.$$

Ако во (1) ставиме $x=a^2$, $y=b^2$, $z=c^2$, добиваме

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2, \qquad (2)$$

а ако во (1) ставиме $x=ab,\ y=bc,\ z=ca$, добиваме

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab. \qquad (3)$$

Конечно, од неравенсвтата (2) и (3) следува бараното неравенство.

8. Нека a,b,c се реални броеви поголеми или еднакви на 1. ДОкажи

дека

$$3abc + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca)\,. \qquad (*)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно на равенствата

$$3abc + a + b + c - 2(ab + bc + ca) \geq 0,$$

$$abc + a - ab - ac + abc + b - ba - bc + abc + c - ca - cb \geq 0,$$

$$a(bc + 1 - b - c) + b(ac + 1 - a - c) + c(ab + 1 - a - b) \geq 0,$$

$$a(b-1)(c-1) + b(a-1)(c-1) + c(a-1)(b-1) \geq 0.$$

Од $a,b,c \geq 1$ следува точноста на посленото неравнество, што значи дека е точно неравенството (*). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако два од броевите a,b,c се еднакви на 1.

9. Определи ги сите парови реални броеви (a,b) такви што $a^2 + b^2 = 25$ и изразот $ab + a + b$ прима најмала можна вредност.

Решение. Последователно добиваме

$$(a + b + 1)^2 \geq 0,$$

$$a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b \geq 0,$$

$$2(ab + a + b) \geq -(a^2 + b^2 + 1)$$

$$ab + a + b \geq -13.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a + b + 1 = 0$, т.е. ако и само ако $b = -a - 1$. Со замена во $a^2 + b^2 = 25$ последователно добиваме

$$a^2 + (-a-1)^2 = 25,$$

$$2a^2 + 2a + 1 = 25,$$

$$a^2 + a - 12 = 0,$$

$$(a-3)(a+4) = 0,$$

од каде ги добиваме следниве решенија $(a,b) = (-4,3)$ и $(a,b) = (3,-4)$.

10. Нека $x, y, z > 0$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{1}{xy+yz+zx} - \frac{2}{x+y+z}\,.$$

Решение. Ако го искористиме неравенството

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, добиваме

$$\frac{1}{xy+yz+zx} \geq \frac{3}{(x+y+z)^2}. \qquad (1)$$

Од друга страна $3(\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{3})^2 \geq 0$, па затоа

$$\frac{3}{(x+y+z)^2}-\frac{2}{x+y+z}+\frac{1}{3} \geq 0. \qquad (2)$$

Ако ги собереме неравенствата (1) и (2), добиваме

$$\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{2}{x+y+z} \geq -\frac{1}{3},$$

при што знак за равенство важи за $x=y=z=1$. Конечно, бараната најмала можна вредност на дадениот израз е $-\frac{1}{3}$.

11. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}-\frac{2}{\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}}. \qquad (*)$$

Решение. Ставаме $x=\frac{a}{c}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{b}{a}$. Тогаш $xy=\frac{a}{b}, yz=\frac{c}{a}, zx=\frac{b}{c}$, што значи дека треба да ја определиме најмалата можна вредност на изразот $\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{2}{x+y+z}$, при услов $xyz=1$. Според задача 10 најмалата можна вредност на овој израз е $-\frac{1}{3}$ и таа се достигнува за $x=y=z=1$. Според тоа, најмалата можна вредност на изразот (*) е $-\frac{1}{3}$ и таа се достигнува за $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$, односно за $a=b=c$.

Во продолжение на ова наше дружење ќе разгледаме задачи за чие решавање ќе ги користиме неравенствата меѓу аритметичката, геометриската, хармониската и квадратната средина.

12. Дали постојат позитивни реални броеви a,b,c такви што

$$a(1-b) > \frac{1}{4},\; b(1-c) > \frac{1}{4},\; c(1-a) > \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решение. Ако такви реални броеви постојат, тогаш $a,b,c<1$ и од условот на задачата следува дека

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{64}.$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a(1-a)\le \frac{1}{4},\ b(1-b)\le \frac{1}{4},\ c(1-c)\le \frac{1}{4},$$

па затоа

$$\frac{1}{64}\ge abc(1-a)(1-b)(1-c)>\frac{1}{64},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постојат позитивни реални броеви a,b,c такви што се исполнети неравенсвата (1).

13. Ако a,b,c се должини на страни на триаголник, докажи дека

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3. \qquad (1)$$

Решение. Ставаме $b+c-a=x,\ c+a-b=y,\ a+b-c=z$. Бидејќи a,b,c се должини на страни на триаголник, важи $x>0, y>0, z>0$. Понатаму, $a=\frac{y+z}{2}, b=\frac{z+x}{2}, c=\frac{x+y}{2}$, па ако замениме во (1) добиваме дека дадeното неравенсвто е еквивалентно со неравенството

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\ge 3,$$

т.е. со неравенството

$$(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})+(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})\ge 6,$$

кое непосредно следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$, односно ако и само ако $a=b=c$, т.е. триаголникот е рамностран.

14. Определи ја најмалата можна вредност на $a+b+c+d$ каде a,b,c,d се природни броеви за кои важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{9}{14}$.

Решение. Од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина $\frac{a+b+c+d}{4}\ge \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$ следува

$$a+b+c+d\ge \frac{4^2\cdot 14}{9}=24\frac{8}{9}.$$

Според тоа, $a+b+c+d\ge 25$, при што за $a=b=c=6, d=7$ важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{6}+\frac{1}{7}=\frac{9}{14},$$

па зата бараната најмала вредност е $a+b+c+d=25$.

15. Ако $a>b>0$, определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{a^5}{16}+\frac{5}{ab-b^2}.$$

Решение. Од $ab-b^2=(a-b)b\leq\frac{a^2}{4}$ следува, дека

$$\frac{a^5}{16}+\frac{5}{ab-b^2}\geq\frac{a^5}{16}+\frac{20}{a^2}.$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^5}{16}+\frac{20}{a^2}=\frac{a^5}{32}+\frac{a^5}{32}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}$$
$$\geq 7\sqrt[7]{\frac{a^5}{32}\cdot\frac{a^5}{32}\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}\cdot\frac{4}{a^2}}=7.$$

Спорд тоа, $\frac{a^5}{16}+\frac{5}{ab-b^2}\geq 7$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a=2, b=1$.

16. Четириагоникот $ABCD$ е впишан во кружница со радиус 1. Определи ја најголемата можна вредност на производот

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{DA}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$

Решение. Да означиме $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=c, \overline{DA}=d, \overline{AC}=e, \overline{BD}=f$. Од теоремата на Птоломеј имаме

$$ac+bd=ef.$$

Понатаму, од неравенството меѓу средините следува

$$ef=ac+bd\geq 2\sqrt{abcd},$$

односно $(ef)^2\geq 4abcd$. Ако последното неравенство го помножиме со ef и земеме предвид дека дијагоналите e и f се помали или еднакви на дијаметарот на кружницата, добиваме

$$4abcdef\leq e^3f^3\leq 2^3\cdot 2^3=64,$$

односно $abcdef\leq 16$. Знак за равенство важи ако и само ако $e=f=2$ и $ac=bd$, т.е. ако и само ако четириаголникот е квадрат. Значи, бараната најголема можна вредност е 16.

17. Докажи дека за секои реални броеви x,y,z е исполенто неравенство-

то

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Во неравенството $a^2 + b^2 \geq 2ab$ кое е исполнето за секои реални броеви a и b прво ставаме $a = x^2, b = y^2$, а потоа $a = \sqrt{2}xy$, $b = z$ и добиваме

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq 2x^2y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{2x^2y^2z^2} = \sqrt{8}\,|\,xyz\,| \geq \sqrt{8}xyz\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x^2 = y^2, \sqrt{2}xy = z$ и $xyz \geq 0$. Од првите две равенства добиваме, дека ако $x = t$, тогаш $y = \pm t$ и $z = \pm\sqrt{2}t^2$. Тогаш $xyz = 2t^4 \geq 0$. Според тоа, сите тројки (x, y, z) за кои важи знак за равенстто се $(x, y, z) = (t, \pm t, \pm\sqrt{2}t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

18. Нека a, b, c, d се реални броеви такви што

$$a + b + c + d = 10,$$
$$ab + bc + cd + da = 25,$$
$$abc + bcd + cda + dab = 50.$$

Докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 30\,.$$

Решение. За дадените равенства имаме

$$(a + c) + (b + d) = 10,$$
$$(a + c)(b + d) = 25,$$
$$ac(b + d) + bd(a + c) = 50.$$

Броевите $a + c$ и $b + d$ имаат позитивен збир и позитивен производ, па затоа се позитивни. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од условите на задачата следува

$$25 = (a + c)(b + d) \leq (\tfrac{(a+c)+(b+d)}{2})^2 = (\tfrac{10}{2})^2 = 25\,,$$

што значи $a + c = b + d$. Според тоа, $a + c = b + d = 5$, па затоа од третото равенство во условот на задачата следува $5ac + 5bd = 50$, односно $ac + bd = 10$.

Конечно,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + 2ac + c^2 - 2ac + b^2 + 2bd + d^2 - 2bd$$
$$= (a + c)^2 + (b + d)^2 - 2(ac + bd) = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 = 30.$$

19. Ако $a,b,c>0$ и $abc=3$, определи ја најголемата можна вредност (ако таква постои) на изразот

$$\frac{a^2b^2}{a^7+a^3b^3c+b^7}+\frac{b^2c^2}{b^7+b^3c^3a+c^7}+\frac{c^2a^2}{c^7+c^3a^3b+a^7}.$$

Решение. Имаме $(a^4-b^4)(a^3-b^3)\geq 0$, па затоа $a^7+b^7\geq a^3b^3(a+b)$. Според тоа,

$$\frac{a^2b^2}{a^7+a^3b^3c+b^7}\leq\frac{a^2b^2}{a^3b^3(a+b)+a^3b^3c}=\frac{a^2b^2c^3}{a^3b^3c^3(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}=\frac{c}{3(a+b+c)}.$$

Ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенсвтва, добиваме

$$\frac{a^2b^2}{a^7+a^3b^3c+b^7}+\frac{b^2c^2}{b^7+b^3c^3a+c^7}+\frac{c^2a^2}{c^7+c^3a^3b+a^7}\leq\frac{c}{3(a+b+c)}+\frac{a}{3(a+b+c)}+\frac{b}{3(a+b+c)}$$
$$=\frac{a+b+c}{3(a+b+c)}=\frac{1}{3}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$, што значи дека најголемата можна вредност е $\frac{1}{3}$.

20. Нека x,y,z се позитивни броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2.$$

Решение. Имаме

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}=x^3+y^3-\frac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{x^6+x^3y^3+y^6}\geq x^3+y^3-\frac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{3x^3y^3}=\frac{x^3+y^3}{3}.$$

Според тоа,

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{3}\geq\frac{2\cdot 3\sqrt[3]{xyz}}{3}=2.$$

21. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи ги неравенствата

$$\sqrt{2}(a+b+c)\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}<\sqrt{3}(a+b+c).\qquad(1)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{a^2+b^2},\ \frac{b+c}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{b^2+c^2},\ \frac{c+a}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{c^2+a^2}.$$

Ако ги собереме горните три неравенства, го добиваме левото неравенство во (1). Од друга страна, од $|a-b|<c$ последователно следува

$$(a-b)^2 < c^2,$$
$$a^2+b^2 < c^2+2ab,$$
$$\sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{c^2+2ab}.$$

Ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенства и го искористиме неравенсвтото меѓу аритметичката и квадратната средина, добиваме

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{c^2+2ab}+\sqrt{b^2+2ca}+\sqrt{a^2+2bc}$$
$$\leq \sqrt{3((c^2+2ab)+(b^2+2ca)+(a^2+2ba))}$$
$$= \sqrt{3(a+b+c)^2} = \sqrt{3}(a+b+c),$$

што и требаше да се докаже.

На крајот од ова наше дружење ви предлагаме самостојно да ги решите следниве задачи.

22. Дадена е низата $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, за $n \geq 2$. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенсвтото:

$$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}+\ldots+\frac{1}{F_n} < \frac{16}{5}.$$

23. За реалните броеви $a_i, b_i, i = 1,2,3$ важи $a_i + b_i > 0$. Докажи го неравенството

$$\frac{a_1b_1-b_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2-b_2^2}{a_2+b_2}+\frac{a_3b_3-b_3^2}{a_3+b_3} \leq \frac{(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)-(b_1+b_2+b_3)^2}{a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3}.$$

Литература

1. Ilišević, I., GH-nejednakost, Osječki matematički list, 8, 2008
2. Ilišević, I., KA-nejednakost, Osječki matematički list, 6, 2006
3. Mustafić, S., Geometrijski dokazi nejednakosti između brojevnih sredina, Evolventa, 2018
4. Арсланагић, Ш., Неједнакости између бројних средина и њихова примјена, Тангента, 1999
5. Малчески, Р., Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, Армаганка, Скопје, 2019

6. Малчески, Р., Неравенства меѓу средните, Нумерус/Математички талент, 2021
7. Мићић, Б., Класе средина и геометријска илустрација средина два броја (I део), Тангента, 2002
8. Мићић, Б., Класе средина и геометријска илустрација средина два броја (II део), Тангента, 2002