ММО 2026

Задача 1. Некои клетки (1×1 квадратчиња) од правоаголна мрежа се обоени така што секоја редица и секоја колона не содржи повеќе од n обоени клетки, каде $n \geq 2$ е даден број. За множество M од обоени клетки велиме дека е **добро** доколку за секои две клетки од M кои лежат во различни редици и различни колони постои обоена клетка што е во иста редица со едната и во иста колона со другата клетка.

Одредете го, зависно од n, најголемиот можен број елементи во добро множество M.

Решение. Ќе докажеме дека најголемиот можен број елементи во добро множество изнесува n^2. **(1п)** Притоа, ако $|M| = n^2$ за некое добро множество M тогаш M се состои од пресекот на n редици и n колони.

Нека R (одн. C) го означува множеството редици (одн. колони) од правоаголната мрежа. Разгледуваме добро множество M. Ја моделираме правоаголната мрежа како едноставен бипартитен граф $G[R, C]$, чии ребра се обоените клетки; според условот, максимумот степен $\Delta(G) = n$. Да забележиме дека M е подмножество од $E(G)$ со следнава особина: за секои две несоседни ребра од M постои ребро во G соседно со двете.

Нека G' е подграфот од G индуциран од ребрата во M, т.е., $G' = G[M]$. Избираме $xy \in M = E(G')$ такво што $d = \deg_{G'}(x) = \Delta(G')$. **(1п)** Можеме да претпоставиме дека $x \in R, y \in C$. Нека $R' = N_G(y)$ и $C' = N_G(x)$. Со $E_G[A, B]$ (одн. $E_{G'}[A, B]$) го означуваме множеството од оние ребра во G (одн. во G') што имаат еден завршеток во A и еден завршеток во B. Според особината на M, имаме $E_{G'}[R - R', C - C'] = \varnothing$. **(1п)**

Тврдење. *Нека $x' \in R' - x$ е такво што $E_{G'}[x', C - C'] \neq \varnothing$. Тогаш $N_{G'}(x) \subseteq N_G(x')$.*

Доказ. Нека $x'z \in E_{G'}[z, C - C']$ и разгледуваме произволно теме $w \in N_{G'}(x)$. Со оглед дека $E_G[x, C - C'] = \varnothing$, особината на M применета врз ребрата xw и $x'z$ повлекува дека $w \in N_G(x')$. **(1п)** ◇

Следствено, за секое теме $x' \in R' - x$ најмногу $\Delta(G) - d$ ребра од $E_{G'}[R' - x, C - C']$ се инцидентни со x'. **(1п)** Комбинирајќи ги овие заклучоци со неравенствата $|R'| \leq \Delta(G)$ и $|C'| \leq \Delta(G)$, имаме

$$
\begin{aligned}
|M| = |E(G')| &= |E_{G'}[R, C']| + |E_{G'}[R' - x, C - C']| \\
&\leq d|C'| + (\Delta(G) - d)(|R'| - 1) \\
&\leq d\Delta(G) + (\Delta(G) - d)(\Delta(G) - 1) \\
&= \Delta^2(G) - \Delta(G) + d \\
&\leq \Delta^2(G). \quad \textbf{(3п)}
\end{aligned}
$$

Дополнително, можеме да забележиме дека: ако $M = n^2$ тогаш, ставајќи $C' = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, постојат n редици $r_1, r_2, \ldots, r_n$ така што $M = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \times \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. □

Задача 2. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажете дека

$$\frac{a(a-b)}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b(b-c)}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{c(c-a)}{\sqrt{a^2+1}} \geq 0\,.$$

Решение 1. Имајќи предвид дека неравенството е циклично, можеме без губење од општоста да претпоставуваме дека b е медијана на a, b, c, т.е., $(b-a)(b-c) \leq 0$. Имаме

$$2\left(\frac{a(a-b)}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b(b-c)}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{c(c-a)}{\sqrt{a^2+1}}\right) \overset{(1)}{=} \textbf{(2p)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}}+\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{\sqrt{b^2+1}} \geq$$

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b^2-c^2}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{c^2-a^2}{\sqrt{a^2+1}} \overset{(2)}{=} \textbf{(2п)}$$

$$\left(a^2-b^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)+\left(b^2-c^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

Со оглед дека $\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ монотоно опаѓа како фунција од x, првиот собирок во пртходниот израз е ненегативен. **(1п)**

Да забележиме дека и вториот собирок е ненегативен. Имено, изразот во првата заградата има ист знак со $b-c$, додека изразот во втората заграда има ист знак со $a-c$, што повлекува дека нивниот производ има ист знак со

$$(b-c)(a-c) = (b-c)^2-(b-a)(b-c) \geq 0\,.$$

Значи, обата собирока се ненегативни, оттаму и нивниот збир е ненегативен, од што следува посакуваното неравенство. **(3п)** $\square$

Решение 2. Имаме

$$2\left(\frac{a(a-b)}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b(b-c)}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{c(c-a)}{\sqrt{a^2+1}}\right) \overset{(1)}{=} \textbf{(2p)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}}+\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{\sqrt{b^2+1}} \geq$$

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b^2-c^2}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{c^2-a^2}{\sqrt{a^2+1}} \overset{(2')}{=} \textbf{(2п)}$$

$$= \sum_{cyc}\frac{a^2+1}{\sqrt{b^2+1}}-\sum_{cyc}\sqrt{a^2+1} \overset{(3)}{\geq} \textbf{(4п)}$$

$$\frac{\left(\sum_{cyc}\sqrt{a^2+1}\right)^2}{\sum_{cyc}\sqrt{a^2+1}}-\sum_{cyc}\sqrt{a^2+1} = 0\,,$$

каде последното неравенство следува од неравенството на Коши-Шварц во облик на Артур Енгелс. $\square$

Задача 3. Одредете ги сите позитивни цели броеви z за кои z, $z+7$ и $z+11$ се степени на прости броеви. (*Степен на прост број* е позитивен цел број од обликот p^n, каде што p е прост број, а n е позитивен цел број.)

Решение. Ги бараме позитивните цели броеви z такви што $z, z+7, z+11$ се степени на прости броеви (броеви од облик p^k каде p е прост и $k \geq 1$).

Најпрво аргументираме дека z не може да е непарен. Да претпоставиме, заради добивање противречност, дека z е непарен. Тогаш $z+7$ и $z+11$ се обата парни, што повлекува дека се степени на 2. Единствени степени на 2 кои се разликуваат за 4 се 4 и 8, бидејќи $2^m - 2^n = 4 \Rightarrow 2^n(2^{m-n}-1) = 2^2 \Rightarrow 2^n = 2^2, 2^{m-n}-1 = 1 \Rightarrow (2^n, 2^m) = (4, 8)$. Оттука $z+7 = 4, z+11 = 8$, па $z = -3$, противречност. Значи z е парен, што повлекува дека е степен на 2. Следствено, $z = 2^a$ за некој $a \geq 1$. **(1п)**

Модул 3, имаме $z \equiv_3 (-1)^a$. Значи, точно еден од $z+7, z+11$ е делив со 3: (i) ако a е непарен, тогаш $z+7 \equiv 0 \pmod 3$, па $z+7 = 3^b$; (ii) ако a е парен, тогаш $z+11 \equiv 0 \pmod 3$, па $z+11 = 3^b$. **(1п)**

Ги разгледуваме одделно овие два случаја.

Случај 1. *a е непарен.* Тогаш $2^a + 7 = 3^b$. Редуцираме модул 8. За $a \geq 3$ и непарен, $2^a \equiv 0 \pmod 8$, па $3^b \equiv 7 \mod 8$, што е невозможно бидејќи $3^b \equiv 1$ или $3 \pmod 8$. Значи $a \leq 1$, што повлекува $a = 1$, и $2^1 + 7 = 9 = 3^2$, па $b = 2$. Така $z = 2$, $z+7 = 9 = 3^2$ и $z+11 = 13$ (прост). Заклучуваме дека $z = 2$ задоволува. **(2п)**

Случај 2. *a е парен.* Тогаш $2^a + 11 = 3^b$. Забележуваме дека $a \neq 2$ со оглед дека $2^2 + 11 = 15$ не е степен на 3. Следствено, $a = 4$ или $a \geq 6$. Ако $a = 4$ тогаш $2^4 + 11 = 27 = 3^3$, па $b = 3$. Ова ни дава $z = 16$ и непосредно проверуваме дека $z+7 = 23$ (прост), $z+11 = 27 = 3^3$ (степен на прост). Заклучуваме дека $z = 16$ задоволува. **(1п)** Во продолжение претпоставуваме дека $a \geq 6$. Да се потсетиме дека за заемно прости цели броеви x и m, со $\mathrm{ord}_m(x)$ го означуваме најмалиот позитивен цел број k таков што $x^k \equiv 1 \pmod m$ (овој параметар се нарекува *ред на x модуло m*; следствено, $x^r \equiv x^s \pmod m \Leftrightarrow r \equiv s \pmod{\mathrm{ord}_m(x)}$; оттаму, $\mathrm{ord}_m(x) \mid \varphi(m)$. Сега, од $a \geq 6$, имаме $2^a \equiv 0 \pmod{64}$, па $3^k \equiv 11 \pmod{64}$. Имајќи предвид дека $\mathrm{ord}_{64}(3) = 16$ (непосредна проверка користејќи дека $\varphi(64) = 2^5$ имплицира $\mathrm{ord}_{64}(3) = 2^c$ за некој $1 \leq c \leq 5$) и $3^7 \equiv 11 \pmod{64}$, што ни дава дека $k \equiv 7 \pmod{16}$. Следствено, $3^k \equiv 3^7 \equiv 11 \pmod{17}$, па $17 \mid (3^k - 11) = 2^a$, противречност. **(2п)**

Заклучок: Единствено за броевите $z = 2$ и $z = 16$ важи дека $z, z+7, z+11$ се степени на прости броеви. **(1п)** □

Задача 4. Нека ABC е триаголник со ортоцентар H, и нека ω е кружницата со дијаметар AH. Избрани се точки $P, Q \in \omega$, $M \in AB$, $N \in AC$ такви што $PQ \parallel MN \parallel BC$. Нека K е средишна точка на отсечката BC, $T = AK \cap \omega$ и $S = PM \cap QN$. Докажете дека правите AS, BH и QT се конкурентни, т.е., се сечат во една заедничка точка или се паралелни.

Решение. Ќе го користиме следново помошно тврдење:

Лема. Ако $ABCDEF$ е шестаголник таков што $ABEF$ и $BCDE$ се тетивни, и $AF \parallel CD$, тогаш $ABCDEF$ е вписан во коника.

Доказ: Нека $X = AE \cap BC, Y = DE \cap BF$ и $Z = DE \cap AF$.

Имаме

$$\angle BXE = 180^\circ - \angle XEB - \angle EBX = 180^\circ - \angle AFB - \angle EDC = \\ 180^\circ - \angle ZFY - \angle YZF = \angle FYZ = \angle BYE,$$

значи четириаголникот $BXYE$ е тетивен. **(1п)** Со оглед дека правите AF и BE се антипаралелни, следува дека $XY \parallel AF \parallel CD$, па за дадениот шестаголник е применлива теоремата на Паскал во однос на подредувањето $AEDCBF$. Од обратната теорема на Паскал, $AEDCBF$ е вписан во коника. **(2п)** $\square$

Нека $E = BH \cap AC$ и $F = CH \cap AB$. Овие точки лежат на кружницата ω, и четириаголникот $MNEF$ е тетивен бидејќи $MN \parallel BC$. Од лемата, применлива е теоремата Паскал за шестаголникот $PMFQNE$, што повлекува $S - A - (QF \cap PE)$. **(2п)**

Конечно, нека $X = QT \cap AS$ и $Y = QE \cap AS$. Бидејќе EF е антипаралелна на BC, AK е A-симедијана за $\triangle AEF$, па $(A, T; E, F) = -1$. Следствено,

$$-1 = (A, T; E, F) \stackrel{Q}{=} (A, X; Y, QF \cap AS) = \\ (A, X; Y, QF \cap PE) \stackrel{E}{=} (A, EX \cap \omega; Q, P) \;\textbf{(2п)}$$

Од друга страна, $APHQ$ е ромб, па $(A, H; Q, P) = -1$. Значи $EX \cap \omega = H$, што и требаше да се докаже. **(1п)** $\square$

Задача 5. Нека $n \geq 3$ е цел број. Секоја (единечна) клетка од $n \times n$ табла е обоена така што секои две соседни клетки (кои имаат заедничка страна) се различно обоени. Велиме дека боењето е **убаво** ако, за секоја клетка, ниту една боја не се појавува точно два пати ниту точно четири пати на нејзините соседни клетки.

Одредете го, зависно од n, најмалиот можен број бои при убаво боење.

Решение. Ќе докажеме дека за секој $n \geq 3$, најмалиот број бои доволни за убаво боење на $n \times n$ табла е 5. **(1п)** Најпрво демонстрираме дека 5 бои се секогаш доволни. За клетка (r, c) (со $1 \leq r \leq n$, $1 \leq c \leq n$) дефинираме боја $\varphi(r, c) \equiv r + 2c \pmod 5$. Така соседите на клетката (r, c) имаат бои $\varphi(r, c) \pm 1$ (вертикално) и $\varphi(r, c) \pm 2$ (хоризонтално). По модул 5, четирите вредности $\varphi(r, c) \pm 1$, $\varphi(r, c) \pm 2$ се порано различни и воедно се разликуваат од $\varphi(r, c)$. Значи, секоја внатрешна клетка гледа четири различно обоени соседни клетки, секоја рабна клетка гледа три различно обоени соседни клетки, и секоја аголна клетка гледа две различно обоени соседни клетки. Заклучуваме дека дефинираното φ е убаво 5-боење за секој $n \geq 3$. **(1п)**

За да докажеме дека 5 бои се секогаш потребни, аргументираме со противречност.

Да претпоставиме дека ϕ е убаво 4-боење на дадена $n \times n$ табла за некој $n \geq 3$.

Изведуваме противречност разгледувајќи два случаја во однос на парноста на n.

Случај 1. *n е непарен.* Да ја разгледаме следната низа од $n - 1$ парови единечни клетки (сп. Слика 1):

$$\{(1,2),(2,1)\}, \{(2,3),(3,2)\}, \ldots, \{(n-1,n),(n,n-1)\}.$$

Секои два последователни пара формираат околина на внатрешна клетка од главната дијагонала. Дополнително, двете клетки од првиот пар ја формираат околината на аголната клетка $(1,1)$; значи $\phi(1,2) \neq \phi(2,1)$. Следно, околината на внатрешната клетка $(2,2)$ повлекува $\phi(2,3) = \phi(3,2)$. Потоа, во однос на внатрешната клетка $(3,3)$, имаме $\phi(3,4) \neq \phi(4,3)$, итн. Заклучуваме дека паровите кои ја сочинуваат разгледуваната низа алтернираат помеѓу дихроматски и монохроматски. **(1п)**

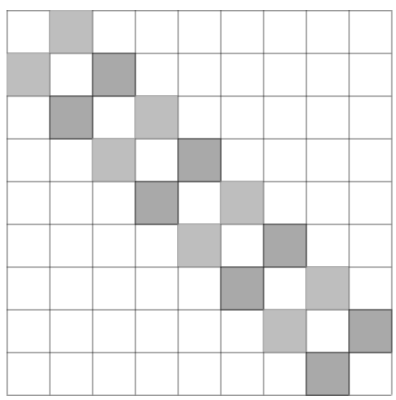

Figure 1. На дадената 9×9 табла, разгледуваните парови се наизменично прикажани како светло сиви и темно сиви. Забележуваме дека вкупниот број парови е парен (имено, $8 = 9 - 1$).

Оттука, со оглед дека правиот пар е дихроматски, последниот пар е монохроматски (тука користиме дека $n - 1$ е парен). Но, последниот пар, $\{(n-1,n),(n,n-1)\}$, ја формира околината на аголна клетка (имено, на клетката (n,n)); значи последниот пар не може да е монохроматски. Ова е посакуваната противречност. **(1п)**

Случај 2. *n е парен.* Да ја разгледаме следната низа од $n - 2$ парови единечни клетки (сп. Слика 2):

$$\{(1,3),(2,2)\}, \{(2,4),(3,3)\}, \ldots, \{(n-2,n),(n-1,n-1)\}.$$

Повторно, секои два последователни пара формираат околина на внатрешна точка, што повлекува дека паровите алтернираат помеѓу монохроматски и дихроматски (при ϕ). **(1п)** Земајќи ја предвид симетријата и фактот дека $n-2$ е парен, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека првиот пар е дихроматски.

Така, со пермутирање на боите доколку е потребно, имаме дека $\phi(1,1) = 1$, $\phi(1,2) = 2$, $\phi(1,3) = 3$ и $\phi(2,2) = 4$. Со оглед дека боењето е правилно (првиот услов), важи $\phi(2,1) = 3$. Применувајќи го вториот услов за рабната клетка $(2,1)$, добиваме $\phi(3,1) = 2$. Но, тогаш

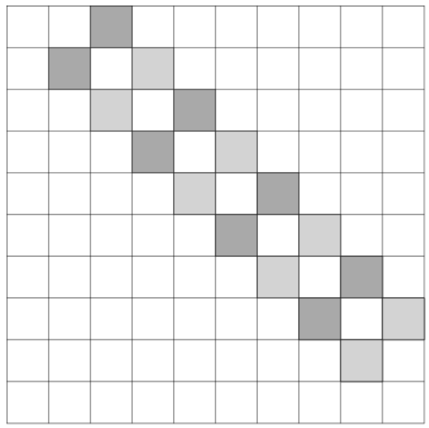

FIGURE 2. На дадената 10×10 табла, разгледуваните парови се наизменично прикажани како темно сиви и светло сиви. Забележуваме дека вкупниот број парови е парен (имено, $8 = 10 - 2$).

ϕ не може да се прошири врз клетките $(2,3)$ и $(3,2)$ и притоа да остане убаво. Навистина, околината на внатрешната клетка $(2,2)$ ја формираат клетките $(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)$, од кои првите две се обоени со 2 и 3, соодветно, што повлекува дека последните две се еднаквообоени во боја од множеството $\{2,3\}$; од друга страна, со оглед дека боењето е правилно, бојата 2 е забранета за $(3,2)$ (бидејќи $\phi(3,1) = 2$) и бојата 3 е забранета за $(2,3)$ (бидејќи $\phi(1,3) = 3$). Ова е посакуваната противречност. **(3п)** □