Задачите се скенирани од книгата:
Републички натпревари по математика во СР Макесонија 1968-1977
Подготвена од
Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XVII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1974

1.(I,74). Еден од учениците Андон, Васил и Сотир згрешил. Кога ги прашале кој згрешил, одговориле:

Андон: Јас не згрешив. Васил згреши.

Васил: Андон не згреши. Сотир згреши.

Сотир: Јас не згрешив. Андон згреши.

Се дознало дека еден од нив двапати ја кажал вистината, другиот двапати излагал, а третиот еднаш излагал и еднаш ја рекол вистината.

Кој згрешил?

Решение. Да забележиме прво дека не е можно првата изјава да биде лажна, а втората вистинита на кој и да било од учениците.

Да претпоставиме дека двете изјави на Андон се вистинити. Од втората од неговите изјави следува дека Васил е виновникот. Тоа значи, првата изјава на Васил е вистинита, а втората лажна и првата изјава на Сотир е вистинита, а втората лажна. Овој случај отпаѓа, зашто двајца дале по една вистинита и по една лажна изјава.

Да претпоставиме дека двете изјави на Андон се лажни. Тогаш, според првата изјава, заклучуваме дека Андон е виновникот, па двете изјави на Васил би биле лажни. Така, и овој случај отпаѓа, зашто двајца од учениците даваат по две лажни изјави.

Нека, сега, првата изјава на Андон е вистинита, а втората лажна. Тогаш двете изјави на Васил се вистинити, а двете изјави на Сотир се лажни. Во овој случај се исполнети условите на задачата, па следствено, Сотир е виновникот.

2.(I,74). Еден човек, влегувајќи во берберницата, по 6 часот наутро, забележал дека стрелките на часовникот зафаќаат агол од 90°, а при излегувањето, нешто пред 7 часот, забележал дека стрелките зафаќаат агол од 75°. Колку време се задржал во берберницата?

Решение. Нека часовната стрелка за тоа време изминала x степени; тогаш минутната стрелка изминала, од една страна 12x степени, а од друга страна $90^\circ + x + 75^\circ$. Значи, $165^\circ + x = 12x$, од каде што добиваме $x = 15^\circ$, т.е. минутната стрелка изминала $165^\circ + 15^\circ = 180^\circ$. Бидејќи секои 6° чинат 1 минута, добиваме дека човекот се задржал 30 минути во берберницата.

3.(I,74). Даден е четириаголникот ABCD. Нека $E = BC \cap AD$, $F = AB \cap CD$, s_1 е симетралата на аголот AEB, а s_2 симетралата на аголот AFD. Да се изрази аголот x меѓу симетралите s_1 и s_2 со помош на аглите од четириаголникот ABCD.

Решение. Нека $H = s_1 \cap s_2$, $G = AB \cap s_1$ и нека $x = \sphericalangle EHF$, $\alpha = \sphericalangle EGA$. Аглите на четириаголникот ABCD да ги означиме со A, B, C и D, а аглите BEA и AFD да ги означиме со E и F (црт.1.74). Аголот α е надворешен за триаголникот FGH, па имаме

$$x = \alpha - \frac{1}{2}F.$$

Аголот A е надворешен за триаголникот AEG, па имаме

$$\alpha = A - \frac{1}{2}E,$$

од каде што добиваме

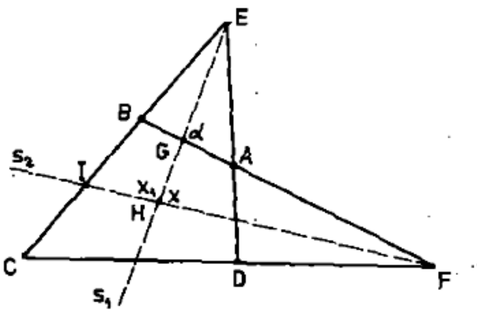
$$x = A - \frac{1}{2}(E + F). \tag{1}$$

Од триаголниците *CDE* и *BCF* добиваме:

$$E = \pi - C - D, \quad F = \pi - B - C,$$

па заменувајќи во (1) имаме:

$$x = A + C + \frac{1}{2}(B + D) - \pi. \tag{2}$$



Црт.1.74

Од друга страна имаме $A + B + C + D = 2\pi$, па $\frac{1}{2}(B + D) = \pi - \frac{1}{2}(A + C)$.

Замнувајќи во (2) добиваме

$$x = \frac{1}{2}(A + C).$$

Ако, пак, $x_1 = \measuredangle EHI$, тогаш имаме

$$x_1 = \pi - x = \pi - \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D).$$

<u>4.(I.74)</u>. Дадени се правите p_1, p_2 и p_3, коишто минуваат низ една иста точка O, како и точката A_1 од p_1. Да се конструира триаголник $A_1A_2A_3$, така што правите p_1, p_2 и p_3 се симетрали на неговите агли.

<u>Решение</u>. Пред да приjдеме кон решавањето на задачата, да видиме како треба да се расположени дадените прави за тие да бидат симетрали на внатрешните агли на некоj триаголник.

Нека $A_1A_2A_3$ е даден триаголник, s_1, s_2, s_3 нека се симетралите на внатрешните агли, а s_1', s_2' и s_3' симетралите на надворешните агли на триаголникот $A_1A_2A_3$ (црт.2.74). Да ги изразиме аглите x, x_1 и x_2 со помош на аглите α_1, α_2 и α_3 на триаголникот $A_1A_2A_3$. Од триаголникот A_2OA_3 добиваме

$$x+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{2}=\pi,$$

т.е.

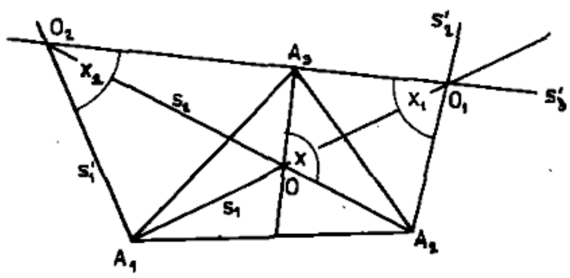
$$x=\pi-\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\alpha_1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha_1}{2}.$$

Од четириаголникот $A_2OA_3O_1$ добиваме

$$x_1=\pi-x=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2},$$

а за аголот x_2 имаме

$$x_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_2}{2}.$$



Црт.2.74

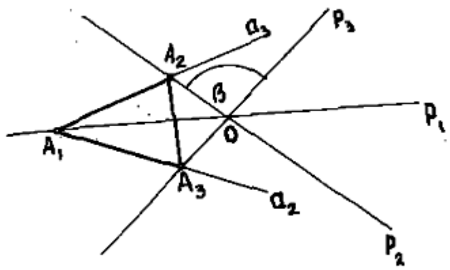
Бидејќи за аголот α_1 важи $0<\alpha_1<\pi$, следува дека аголот x е тап, а аглите x_1 и x_2 се остри. Од тоа следува следниов заклучок:

Правите p_1, p_2 и p_3 ќе бидат симетрали на внатрешните агли на триаголникот $A_1A_2A_3$ ако и само ако секоја од нив минува низ тапиот агол образуван од другите две.

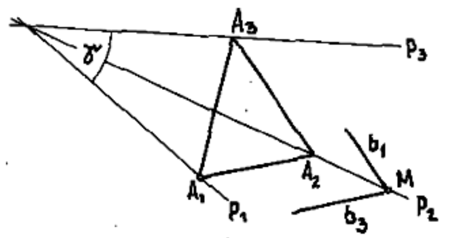
Сега ќе прејдеме кон решавањето на задачата. Притоа, ќе дадеме две решенија.

I) Да претпоставиме дека p_2 односно p_3 минува низ тапиот агол образуван од p_1 и p_3 односно p_1 и p_2. Во тој случај p_1 е симетрала на внатрешниот агол кај темето A_1, па, ако поголемиот од аглите меѓу p_2 и p_3 е β (црт.3.74), тогаш имаме:

$$\alpha_1 = 2\beta - \pi .$$



Црт.3.74



Црт.4.74

Нанесувајќи го α_1 кај точката A_1, така што p_1 да е негова симетрала, ги добиваме правите a_2 и a_3 на кои лежат страните A_1A_3 и A_1A_2 соодветно. Значи, $A_2 = a_3 \cap p_2$, $A_3 = a_2 \cap p_3$, т.е. триаголникот $A_1A_2A_3$ е конструиран.

Да претпоставиме, сега, дека една од правите p_2, p_3 минува низ острiот агол образуван од другите две (црт.4.74). Можеме да земеме дека тоа е правата p_2. Во овој случај правата p_2 е симетрала на внатрешниот агол кај A_2. Ако острiот агол меѓу p_1 и p_3 е γ, тогаш имаме:

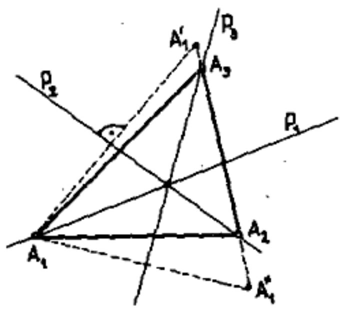
$$\alpha_2 = \pi - 2\gamma .$$

Нека M е произволна точка од p_2 и нека аголот α_2 го нанесеме кај M, така што p_2 е негова симетрала. Ако краците на α_2 се b_1 и b_3, тогаш нека a_3 е права низ A_1, паралелна со b_3. За темето

A_2 имаме $A_2 = a_3 \cap p_2$. Ако, сега, a_1 е права низ A_2, паралелна со b_1, тогаш имаме $A_3 = a_1 \cap p_3$, па, значи, триаголникот $A_1A_2A_3$ е конструиран.

Да забележиме дека, ако барем еден од аглите образуван од p_1 и p_2, p_2 и p_3, p_3 и p_1 е прав, тогаш задачата нема решение. Во спротивен случај задачата има единствено решение.

II) Да претпоставиме дека триаголникот $A_1A_2A_3$ е конструиран и да ставиме: $a_1 = A_2A_3$, $a_2 = A_3A_1$, $a_3 = A_1A_2$, а p_1, p_2 и p_3 се симетралите на внатрешните или надворешните агли на триаголникот $A_1A_2A_3$ (црт.5.74). Ако σ_2 и σ_3 се осните симетрии во однос на правите p_2 и p_3 соодветно, тогаш точките $\sigma_2(A_1) = A_1'$ и $\sigma_3(A_1) = A_1''$ припаѓат на правата a_1. Значи, $a_1 = A_1'A_1''$.



Црт.5.74

Од оваа дискусија следува следнава конструкција. Ако $A_1' = \sigma_2(A_1)$, $A_1'' = \sigma_3(A_1)$, тогаш $A_2 = A_1'A_1'' \cap p_2$, $A_3 = A_1'A_1'' \cap p_3$, со што триаголникот $A_1A_2A_3$ е конструиран.

Задачата ќе нема решение во случај кога правата A_1A_1' минува низ точката O, или, пак, е паралелна со една од правите p_2, p_3. Тоа е случај кога еден од аглите меѓу p_1 и p_2, p_2 и p_3, p_3 и p_1 е прав. Во спротивен случај задачата има единствено решение.

1.(II,74). Да се покаже дека во секоја група од шест ученика постојат барем три што меѓусебно се познаваат или три што меѓусебно не се познаваат.

Решение. Нека со А е означен еден од шесте ученици. Од останатите пет ученици можеме да формираме две множества:

- M_1 - множеството ученици што се познаваат со А;
- M_2 - множеството ученици што не се познаваат со А.

Да го означиме со $к_1$ бројот на учениците во M_1, а со $к_2$ бројот на учениците во M_2.

Ако $к_1 \leqslant 2$, тогаш во M_2 или постојат двајца што не се познаваат или, пак, сите се познаваат меѓусебно. Во првиот случај двајцата што не се познаваат, заедно со А формираат тројка ученици што не се познаваат меѓусебно, а во вториот случај, при кој сите во M_2 меѓусебно се познаваат, има барем тројца што меѓусебно се познаваат, зашто $к_2 \geqslant 3$.

Ако $к_1 \geqslant 3$, тогаш во M_1 постојат двајца што се познаваат или, пак, сите меѓусебно не се познаваат. Во првиот случај двајцата што се познаваат, заедно со А формираат тројка ученици што меѓусебно се познаваат, а во вториот случај, бидејќи $к_1 \geqslant 3$, постојат тројца што меѓусебно не се познаваат.

2.(II,74). Страните на еден правоаголник П се а и b, $a<b$. Се бара правоаголник Г со страни x и y, $x<a$, $y<a$, таков што неговиот периметар е една третинка од периметарот на П, а неговата плоштина е една третинка од плоштината на П. Колку такви правоаголници можат да се формираат?

Решение. На оваа задача ќе дадеме две решенија.

I) Имаме $2(x+y)=\frac{2}{3}(a+b)$ и $xy=\frac{1}{3}ab$, т.е.

$$3(x+y)=a+b,\quad 3xy=ab.$$

Делејќи ја првата равенка со втората, добиваме:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}. \qquad (1)$$

Бидејќи $x<a<b$ и $y<a<b$, равенството (1) не е можно. Следствено, не може да се формира ниеден паравоаголник со наведените својства.

II) Ако x е едната страна на бараниот правоаголник, тогаш другата страна ќе биде $\frac{a+b-3x}{3}$, па ќе имаме

$$x(a+b-3x)=ab,$$

т.е.

$$3x^2-(a+b)x+ab=0, \qquad (2)$$

чии решенија се:

$$x_{1,2}=\frac{1}{6}(a+b\pm\sqrt{a^2+b^2-10ab}).$$

Ако $D=a^2+b^2-10ab$ е негативна, тогаш решенијата на (2) не се реални, па задачата нема решение.

Затоа, да претпоставиме дека $D>0$. Од $b^2-10ab+a^2=0$ добиваме

$$b_{1,2}=(5\pm\sqrt{24})a,$$

па $D>0$ ако и само ако $b\leqslant(5-\sqrt{24})a$ или $b\geqslant(5+\sqrt{24})a$. Но, бидејќи $a<b$, $D>0$ ако и само ако $b\geqslant(5+\sqrt{24})a$. Во овој случај имаме

$$x_1=\frac{1}{6}(a+b+\sqrt{D})\geqslant\frac{1}{6}(a+5a+a\sqrt{24}+\sqrt{D})>a,$$

па задачата нема решение. За $x_2=\frac{1}{6}(a+b-\sqrt{D})$ имаме:

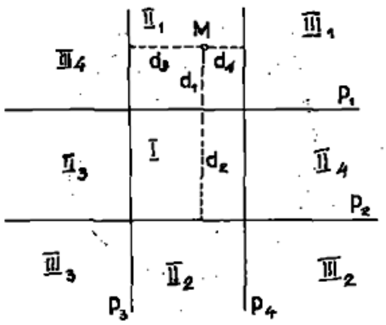
$$\frac{1}{3}(a+b-3x_2)=\frac{1}{6}(a+b+\sqrt{D})>a,$$

па, значи, и во овој случај задачата нема решение.

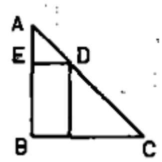
Од сето тоа следува дека не постои правоаголник со наведените својства.

3.(II,74). Даден е квадрат со страна 1. Да се најде геометриското место на точки во рамнината со својството збирот на растојанијата до правите, на кои лежат страните од квадратот, да изнесува 4.

Решение. Да ги означиме со p_1, p_2, p_3 и p_4 правите на кои лежат страните на квадратот, а областите на кои е разделена рамнината со тие прави да ги означиме како на црт.7.74. Нека M е точка од бараното геометриско место.



Црт.7.74



Црт.8.74

Ако M е во I, тогаш збирот на растојанијата од M до правите p_k, $k=1,2,3,4$, е секојпат 2, па, значи, во делот I нема ниедна точка од бараното геометриско место.

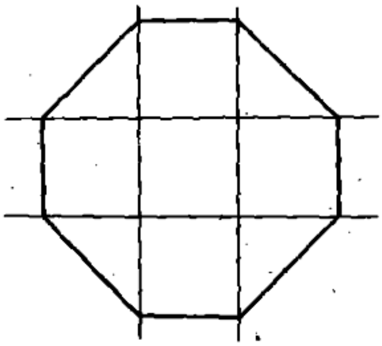
Да претпоставиме дека M е во II_1. Тогаш $d_3+d_4=1$, $d_2 = d_1+1$, па, од условот $d_1+d_2+d_3+d_4=4$, добиваме $d_1=1$. Значи, точката M лежи на права паралелна со правата p_1 и на растојание 1 од неа.

Нека, сега, ABC е рамнокрак правоаголен триаголник со катета 1 и нека D е произволна точка од хипотенузата AC (црт.8.74). Ако растојанијата од D до катетите BC и AB се d и d' соодветно, тогаш имаме $\overline{AE}=d'$, $\overline{BE}=d$, па $d+d'=1$.

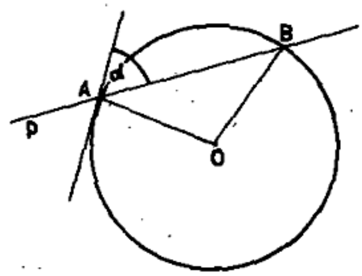
Да претпоставиме, сега, дека точката M е во делот III_1. То-

тогаш $d_2 = d_1 + 1$, $d_3 = d_4 + 1$, па, од условот $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 4$, добиваме $d_1 + d_4 = 1$. Од претходната дискусија следува дека точката M лежи на права, која со правите p_1 и p_4 образува рамнокрак правоаголен триаголник со катета 1.

Од сето тоа следува дека бараното геометриско место на точки е како на црт.9.74, т.е. множеството точки од еден осумаголник со страни 1 и $\sqrt{2}$.



Црт.9.74



Црт.10.74

4.(II,74). Нека правата p ја сече кружницата $k(O,r)$ во точките A и B. Ако аголот меѓу правата и кружницата е α, да се докаже дека $\sphericalangle AOB = 2\alpha$.

Користејќи го тоа, низ дадена точка P да се повлече права p, којашто кружницата $k(O,r)$ ја сече под агол α: $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Решение. Триаголникот AOB (црт.10,74) е рамнокрак. Бидејќи $\sphericalangle BAO = \frac{\pi}{2} - \alpha = \sphericalangle OBA$, добиваме:

$$\sphericalangle AOB = \pi - 2\sphericalangle BAO = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\alpha .$$

Нека, сега, $k(O,r)$ е дадена кружница, P - дадена точка и α даден агол при што $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Ако $\alpha = 0$, тогаш бараната права p е тангента на кружницата $k(O,r)$ повлечена од точката P.

Ако $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тогаш бараната права p е правата PO.

Затоа, да претпоставиме дека $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Нека A е произволна точка од кружницата $k(O,r)$ и нека B е онаа точка од таа кружница за која $\measuredangle AOB = 2\alpha$. Ако d е растојанието од O до тетивата AB, да ја конструираме кружницата $k(O,d)$. Нека a е тангента на кружницата $k(O,d)$ *повлечена од точката P. Ако a ја сече* кружницата $k(O,r)$ под агол β, тогаш, според првиот дел од задачата, централниот агол што одговара на тетивата на кружницата $k(O,r)$ и лежи на a е 2β. Но оваа тетива е еднаква на $\overline{AB}$, па, значи, $2\beta = 2\alpha$, т.е. $\alpha = \beta$.

Од сето тоа следува дека бараната права p е тангента на кружницата $k(O,d)$ повлечена од точката P.

Ако точката P е надворешна за кружницата $k(O,r)$ или лежи на неа, тогаш, поради $d < r$, следува дека задачата има две решенија. Ако P е внатрешна за кружницата $k(O,r)$, тогаш, во зависност од аголот α, задачата може да има две, едно или, пак, ниедно решение.

<u>1.(III,74)</u>. *Ако* $a_k = 1 - \frac{1}{k^2}$, $k = 2,3,\dots,n$ и $a = \frac{2cn}{n+1}$, $c > 0$, $c \neq 1$, да се докаже дека

$$S = \frac{1}{\log_{a_2} c} + \frac{1}{\log_{a_3} c} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} c} + \frac{1}{\log_a c} = 1.$$

<u>Решение</u>. Користејќи ја формулата

$$\log_y x \log_x y = 1,$$

за збирот S добиваме:

$$S = \log_c a_2 + \log_c a_3 + \dots + \log_c a_n + \log_c a =$$

$$= \log_c a_2 a_3 \dots a_n a \,.$$

Бидејќи $a_k = 1 - \frac{1}{k^2}$, $k = 2, 3, \dots, n$, имаме:

$$a_2 a_3 \cdots a_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}) =$$

$$= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdots \frac{n^2 - 1}{n^2} =$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1) \cdots n(n-1)(n+1)}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots (n-1)^2 n(n+1)}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2n} .$$

Користејќи го тоа и $a = \frac{2cn}{n+1}$, добиваме

$$S = \log_c a_2 a_3 \dots a_n a = \log_c \frac{n+1}{2n} \frac{2cn}{n+1} = \log_c c = 1,$$

што требаше да се докаже.

2.(III,74). Две тела под дејство на две сили почнуваат да се движат праволиниски во иста насока со брзини чијшто производ е осумпати поголем од нивниот збир. Ако брзините на двете тела се зголемат за по десет единици, тогаш збирот од квадратите на брзините ќе изнесува 2900. Колкави се почетните брзини на двете тела?.

Решение. Ако со x и y ги означиме брзините на двете тела, тогаш имаме:

$$\left. \begin{aligned} xy &= 8(x+y), \\ (x+10)^2 + (y+10)^2 &= 2900, \end{aligned} \right\} \qquad (1)$$

па за да ги најдеме брзините x и y треба да го решиме системот равенки (1).

Втората равенка од (1) може да се напише во обликот

$$(x+y)^2 - 2xy + 20(x+y) - 2700 = 0,$$

па, користејќи ја првата, добиваме

$$(x+y)^2+4(x+y)-2700 = 0,$$

т.е. $x+y=50$ и $x+y=-54$. Но x и y се брзини, што значи тие се позитивни броеви, па системот (1) е еквивалентен со системот

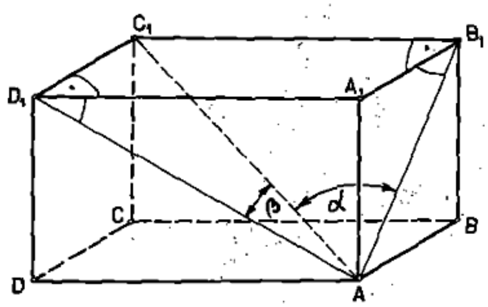
$$x+y = 50,$$
$$xy = 400,$$

чии решенија се $x=10$, $y=40$, односно $x=40$, $y=10$.

Значи, брзините на телата се 10 и 40.

3.(III,74). Да се докаже дека за аглите $\alpha = \measuredangle B_1AC_1$ и $\beta = \measuredangle C_1AD_1$ во квадарот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ важат неравенствата $0<\alpha+\beta<90^0$.

Решение. Да ставиме: $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=b$ и $\overline{AA_1}=c$ (црт.11.74). Тогаш $d=\overline{AC_1} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Бидејќи $\measuredangle AB_1C_1=90^0$ и $\measuredangle AD_1C_1=90^0$,



Црт.11.74

заклучуваме дека аглите α и β се остри и $\sin\alpha = \frac{a}{d}$, $\sin\beta = \frac{b}{d}$, а од тоа:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{a^2+b^2}{d^2} < 1,$$

$$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta > 0.$$

Од друга страна:

$$1-\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

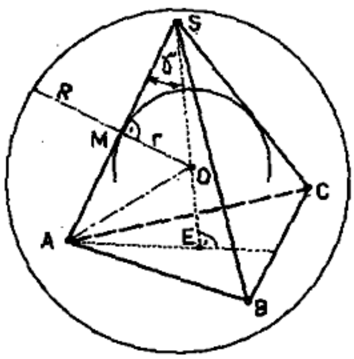
Бидејќи α и β се остри, земајќи,на пример $\alpha \geqslant \beta$, имаме

$0 \leqslant \alpha - \beta < 90^\circ$, од што следува дека $\cos(\alpha-\beta) > 0$, па неравенството $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) > 0$ е можно ако и само ако $0 < \alpha+\beta < 90^\circ$.

4.(III,74). Дадени се две концентрични сфери со радиуси R и r, $r<R$. Трите темиња од основата на правилен тетраедар лежат на сферата со радиус R, а бочните рабови ја допираат сферата со радиус r. Да се најде должината на работ од тетраедарот.

Каков резултат се добива во случај $R = r$?

Решение. Бидејќи тетраедарот е правилен, центарот O на сферите ќе лежи на висината спуштена од темето S, а подножјето E на таа висина е центар на рамностраниот триаголник ABC (црт.12.74).



Црт.12.74

Да ја означиме со x должината на работ од тетраедарот; тогаш имаме $x = \overline{AS} = \overline{AM} + \overline{MS}$, каде што M е допирната точка на работ AS со помалата сфера. Од триаголникот AMO имаме $\overline{AM}^2 = R^2 - r^2$. Да ставиме $\gamma = \measuredangle ASE$. Имаме:

$$\overline{MS} = \frac{r}{\operatorname{tg}\gamma},$$

а од триаголникот AES:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\overline{AE}}{\overline{SE}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{x\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Според тоа, $\overline{MS} = r\sqrt{2}$, па, значи:

$$x = r\sqrt{2} + \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Ако $R = r$, т.е. ако двете сфери се совпаѓаат, тогаш добиениот резултат покажува дека должината на работ од правилниот тетраедар, конструиран над сфера со радиус r, така што трите негови рабови да ја допираат сферата со темињата на основата, изнесува $r\sqrt{2}$.

1.(IV,74). Да се најдат сите целобројни решенија на равенката

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}} = y, \qquad (1)$$

каде што x се јавува 1974 пати.

Решение. Јасно е дека $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и дека $x = 0$ ако и само ако $y = 0$. Значи, $x = y = 0$ е решение на равенката (1).

Да претпоставиме дека x и y се природни броеви. Тогаш x мора да биде полн квадрат, т.е. $x = k^2$ за некој природен број k. Во тој случај имаме

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{k^2 + k},$$

од каде што следува дека бројот $k^2 + k$ е, исто така, полн квадрат, т.е. $k^2 + k = s^2$, за некој природен број s. Од ова следува дека

$$k = (s - k)(s + k). \qquad (2)$$

Но, бидејќи $s > k$, имаме $s + k > k$, т.е.

$$(s - k)(s + k) > k, \qquad (3)$$

што противречи на (2).

Од сето тоа следува дека единствено целобројно решение на равенката (1) е $x = y = 0$.

2.(IV,74). На секој вид од една коцка се дадени по n точки, така што кои било три не се колинеарни и ниедна не лежи на рабовите од коцката.

а) Колку прави што не лежат на ѕидовите од коцката се одредени со дадените точки?

б) Колку триаголници што не лежат на ист ѕид од коцката се одредени со дадените точки?

в) Ако сите ѕидови на коцката се обојат со различни бои, колку тетраедри со темиња во дадените точки имаат:

(1) три темиња од иста боја;

(2) две темиња од иста боја, а другите две темиња од друга иста боја?

Решение. а) Коцката има шест ѕида, па, значи, дадени се вкупно $6n$ точки. Бидејќи кои било три од точките на еден ѕид не се колинеарни, следува дека со $6n$ точки се одредени $\binom{6n}{2}$ прави. Бројот на правите што лежат на еден ѕид од коцката изнесува $\binom{n}{2}$. Значи, бројот на бараните прави е

$$\binom{6n}{2} - 6\binom{n}{2} = 15n^2.$$

б) На сличен начин добиваме дека бројот на триаголниците определени со $6n$ точки, а кои не лежат на ист ѕид од коцката, изнесува

$$\binom{6n}{3} - 6\binom{n}{3} = 5n^2(7n-3).$$

в) (1) За да бидат три темиња од иста боја, тие мора да лежат на ист ѕид од коцката. Според тоа, бројот на основите (од тетраедрите) чии темиња имаат иста боја е $\binom{n}{3}$, а бидејќи коцката има шест бои (ѕида), вкупниот број ќе биде $6\binom{n}{3}$. Еден од тие триаголници, заедно со која било точка од другите $5n$ точки, образува тетраедар. Значи, бројот на тетраедрите со наведеното својство е:

$$6\binom{n}{3}5n = 5n(n-1)(n-2).$$

(2) Слично како под (1) добиваме

$$\binom{n}{2}\binom{n}{2}\binom{6}{2} = \frac{15}{4} n^2(n-1)^2.$$

3.(IV,74). Да се докаже дека, ако еден триаголник е впишан во хиперболата $xy=1$, тогаш неговиот ортоцентар лежи на хиперболата.

Решение. Нека $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$ се темиња на триаголник впишан во хиперболата $xy=1$. Треба да покажеме дека координатите на пресекот H од правите на кои лежат висините на триаголникот ABC ја задоволуваат равенката $xy=1$.

Равенката на висината спуштена од темето A е

$$y-y_1 = -\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1),$$

т.е. поради $y_2=\frac{1}{x_2}$ и $y_3=\frac{1}{x_3}$,

$$y-y_1 = x_2x_3(x-x_1), \tag{1}$$

а равенката на висината спуштена од темето B е

$$y-y_2 = x_1x_3(x-x_2). \tag{2}$$

Одземајќи ја (2) од (1) добиваме:

$$y_2-y_1 = x_2x_3(x-x_1)-x_1x_3(x-x_2),$$

т.е.

$$x = -\frac{1}{x_1x_2x_3}. \tag{3}$$

Заменувајќи го тоа, на пример во (2), добиваме

$$y = -x_1x_2x_3. \tag{4}$$

Значи, координатите на H се определени со (3) и (4); очигледно тие ја задоволуваат равенката $xy=1$.

4.(IV,74). Во даден кружен конус, со радиус r и висина h, вписан е прав кружен цилиндар.

а) Да се изрази волуменот V на цилиндарот како функција од неговиот радиус x.

б) Да се определи x така што V да биде максимален.

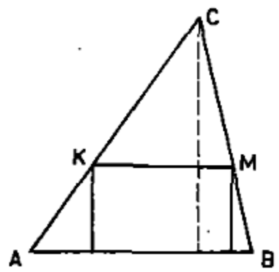
в) Да се скицира графикот на функцијата $V(x)$.

Решение. а) Нека висината на впишаниот цилиндар е y (црт. 13.74). Од сличноста на триаголниците ABC и KMC имаме

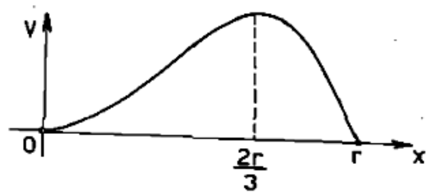
$$\overline{AB} : \overline{KM} = h : (h-y), \quad \text{т.е.} \quad 2r : 2x = h : (h-y),$$

од каде што $y = \frac{h}{r}(r-x)$, па:

$$V(x) = \frac{\pi h}{r}(rx^2 - x^3).$$



Црт.13.74



Црт.14.74

б) Функцијата $V(x)$ е дефинирана во сегментот $[0, r]$ (земајќи ги и дегенерираните случаи). Корените на равенката

$$V'(x) = \frac{\pi h}{r}(2rx - 3x^2) = \frac{\pi h}{r}x(2r - 3x) = 0$$

се $x_1 = \frac{2r}{3}$ и $x_2 = 0$, од кои само $x_1 \in (0, r)$. Од геометриски причини е јасно дека за $x = x_1$ функцијата $V(x)$ има максимум и притоа

$$V_{\text{макс}} = \frac{4}{27}\pi r^2 h.$$

в) Функцијата $V(x)$ монотоно расте во интервалот $(0,\frac{2r}{3})$, а монотоно опаѓа во интервалот $(\frac{2r}{3}, r)$. Нејзиниот график е претставен на црт.14.74.