Емилија Георгиева-Целакоска, Скопје

ПРИЗНАЦИ ЗА ВПИШАНОСТ НА ЧЕТИРИАГОЛНИК ВО КРУЖНИЦА

Вовед

Сигурно ќе се согласите дека кружницата е убава фигура. За секого се јасни нејзината едноставност, глаткост и елегантност (има безброј симетрии). За решавачите на проблеми таа е уште поубава заради својата корисност. Дава можности за конструкции, да се потсетиме на Талесовата теорема: Над еден дијаметар AB можеме да нацртаме безброј многу правоаголни триаголници, едноставно со поврзување на A и B со точки од кружницата. Дава нови толкувања: “точката е кружница со радиус 0” и “правата е кружница со бесконечен радиус”. Со тоа отвара и нови видици во поинакви геометрии од евклидската геометрија. Досега сигурно сте користеле некои од нејзините многубројни својства во решавањето задачи.

Овде сакаме да разгледаме едно мало делче од богатството на нејзините примени: за решавање задачи со помош на признаците на впишаност на четириаголник во кружница.

Досега терминот “признак” сте го спомнувале многупати: признаци за складност на триаголници, за сличност, за деливост, итн. Зборот “признак” има значење на “доволен услов”. Поимот *тетивен четириаголник* ви е исто така познат: тоа е четириаголник чии темиња лежат на една кружница. Неговите страни се тетиви во кружницата. За него се вели уште дека е *впишан во кружницата*.

Нека е даден конвексен четириаголник $ABCD$ и нека $AC \cap BD = C$. Секое од наредните шест тврдења е доволен услов (т.е. *признак*) за впишаност на четириаголникот $ABCD$ во кружница.

1° $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

2° $\angle BAC = \angle BDC$

3° $\Delta ABS \sim \Delta DCS$

4° $\overline{AS} \cdot \overline{SC} = \overline{BS} \cdot \overline{SD}$

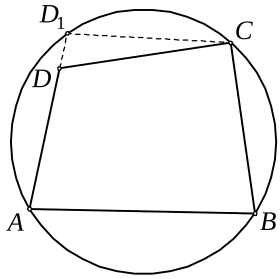
5° $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

6° *Подножјата на нормалите спуштени од* D *на* ΔABC *лежат на една права* (*Симпсонова права*).

Значи, ако е исполнет некој од условите $1^\circ - 6^\circ$, тогаш четириаголникот е тетивен. За сите шест признаци важи и обратното: ако четириаголникот е тетивен, тогаш важат $1^\circ - 6^\circ$.

Карактеристични својства на тетивниот четириаголник

Теорема 1. *Четириаголникот* $ABCD$ *е тетивен ако и само ако* $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.



Crt. 1

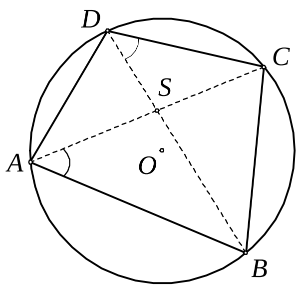
Доказ. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека O е центарот на опишаната кружница. Аголот $\angle BOD$ е централен, а $\angle BAD$ е периферен агол над истиот лак па, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$. Исто така, $\angle BCD = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOD)$. Значи

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD + \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOD) = 180^\circ.$$

(Да забележиме дека и другиот пар спротивни агли се суплементни. Зошто?)

Обратно, нека во четириаголникот $ABCD$ важи $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Ќе покажеме дека $ABCD$ е тетивен четириаголник. Да претпоставиме дека $ABCD$ не е тетивен четириаголник, т.е. нека точката D не лежи на кружницата k (црт. 1). Нека $D_1 = AD \cap k$. Четириаголникот $ABCD_1$ е тетивен, па од претходно докажаното следува дека $\angle BAD_1 + \angle BCD_1 = 180^\circ$. Но, $\angle BAD_1 = \angle BAD$ и $\angle BCD = \angle BCD_1$, па имаме: $\angle BAD + \angle BCD_1 = 180^\circ$, и $\angle BAD + \angle BCD < 180^\circ$. Последново е противречно со претпоставката дека $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$. Следствено, точката D мора да лежи на k, т.е. четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Аналогно се доаѓа до противречност ако се земе точката D да е надворешна за кружницата.

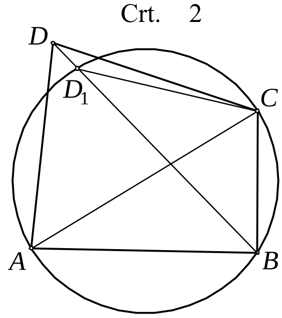
Теорема 2. *Четириаголникот* $ABCD$ *е тетивен ако и само ако* $\angle BAC = \angle BDC$.



Crt. 2

Доказ. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник. Тогаш точките A, B, C, D лежат на иста кружница и аглите $\angle BAC$ и $\angle BDC$ се периферни агли над ист лак (црт.2), па $\angle BAC = \angle BDC$.

Обратно, нека $\angle BAC = \angle BDC$. Ќе покажеме дека тие агли се периферни агли над ист лак BC, на кружницата определена со точките A, B и C. Да претпоставиме дека тие не се периферни агли од една кружница, т.е. точката D не лежи на кружницата, туку надвор од неа (црт.3). Тогаш BD ја сече кружницата во точка D_1 и се формира триаголник ΔDD_1C при што $\angle BD_1C$ е надворешен за тој триаголник. Тоа значи дека $\angle BDC + \angle DCD_1 = \angle BD_1C$, т.е. $\angle BDC < \angle BD_1C$, т.е. $\angle BAC = \angle BDC < \angle BD_1C$. Но $\angle BAC$ и $\angle BD_1C$ се



Crt. 3

периферни агли над ист лак што значи би морале да се еднакви. Од добиените противречност следува дека $\angle BAC$ и $\angle BDC$ се периферни агли над ист лак, т.е. точките $A, B, C, D,$ лежат на иста кружница.

Овде признакот се состои во тврдењето:

Ако $\angle BAC = \angle BDC$, *тогаш ABCD е тетивен четираголник.*

Теорема 3. *Четириаголникот ABCD е тетивен ако и само ако* $\Delta ABC \sim \Delta DCS$.

Доказ. Ако $ABCD$ е тетивен тогаш, според ***Т.2***, $\angle BAC = \angle BDC$ и $\angle ASB = \angle CSD$ како накрсни агли (црт.2). Од признакот “агол-агол” за сличност на триаголници имаме $\Delta ABS \sim \Delta DCS$.

Обратно, нека $\Delta ABS \sim \Delta DCS$. Тогаш $\angle BAC = \angle BDC,$ па според ***Т.2*** следува дека $ABCD$ е тетивен. Значи: $\Delta ABS \sim \Delta DCS$ е доволен услов за четириаголникот $ABCD$ да е тетивен.

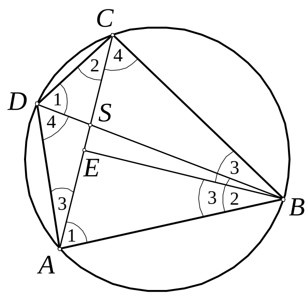
Теорема 4. *ABCD е тетивен четириаголник ако и само ако* $\overline{AS}\cdot\overline{SC} = \overline{BS}\cdot\overline{SD}$.

Доказ. $ABCD$ е тетивен четириаголник $\Leftrightarrow$ $\Delta ABS \sim \Delta DCS$ $\Leftrightarrow$ $\overline{AS}:\overline{SD} = \overline{BS}:\overline{SC}$

$\Leftrightarrow$ $\overline{AS}\cdot\overline{SC} = \overline{BS}\cdot\overline{SD}$. (Од сличноста на триаголниците важат и уште некои равенства. Најди ги!)

Теорема 5. (Птоломеј) *Четириаголникот ABCD е тетивен ако и само ако*

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{BC}\cdot\overline{AD} = \overline{AC}\cdot\overline{BD}. \qquad (1)$$



Crt. 4

Доказ. Ќе докажеме прво дека ако $ABCD$ е тетивен четириаголник тогаш важи равенството (1). Повлекуваме права BE, така што $E \in AC$ и притоа да е исполнето $\angle ABE = \angle DBC$. На црт. 4, со еднакви бројки се означени еднаквите агли како периферни агли над ист лак. $\Delta ABE \sim \Delta DBC \Rightarrow \overline{AB}:\overline{BD} = \overline{AE}:\overline{CD} \Rightarrow$ $\overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{BD}\cdot\overline{AE}$. Потоа, аналогно, $\Delta BCE \sim \Delta BDA$ $\Rightarrow \overline{BC}:\overline{BD} = \overline{CE}:\overline{AD} \Rightarrow \overline{BC}\cdot\overline{AD} = \overline{BD}\cdot\overline{CE}$. Значи,

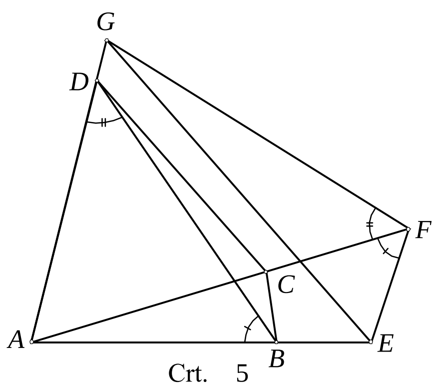
$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{BC}\cdot\overline{AD} = (\overline{AE} + \overline{CE})\cdot\overline{BD}$$
$$= \overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$

Обратно, нека важи (1). Ќе покажеме прво дека за кој било конвексен четириаголник важи

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{BC}\cdot\overline{AD} \geq \overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$

Ги избираме точките E, F и G (црт. 5), така што

$$\overline{AB}\cdot\overline{AE} = 1,\ \overline{AC}\cdot\overline{AF} = 1,\ \overline{AD}\cdot\overline{AG} = 1.$$



Crt. 5

Тогаш:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AE}=\overline{AC}\cdot\overline{AF}=\overline{AD}\cdot\overline{AG}=1 \qquad (2)$$

Од првото равенство, $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AF}:\overline{AE}$, а аголот $\angle CAB$ е заеднички агол за ΔABC и ΔAFE. Според тоа, $\Delta ABC\sim\Delta AFE$. Затоа, $\angle ABC=\angle AFE$ и $\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{EF}$, т.е. $\overline{EF}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{\overline{AC}}$. Поради $\overline{AE}=\frac{1}{\overline{AB}}$, добиваме $\overline{EF}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}$.

Од второто равенство во (2) ќе имаме $\overline{AD}:\overline{AC}=\overline{AF}:\overline{AG}$, а аголот $\angle CAD$ е заеднички агол за ΔACD и ΔAGF. Значи важи и $\Delta ADC\sim\Delta AFG$. И тука можеме да заклучиме дека $\angle ADC=\angle AFG$ и $\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AG}:\overline{GF}$, т.е. $\overline{GF}=\frac{\overline{AG}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Но, $\overline{AG}=\frac{1}{\overline{AD}}$, па $\overline{GF}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}$.

Конечно и од третото равенство во (2) добиваме $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AG}:\overline{AE}$, а аголот $\angle DAB$ е заеднички за ΔBAD и ΔGAE, па $\Delta BAD\sim\Delta GAE$. Значи $\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AE}:\overline{EG}$, т.е. $\overline{EG}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{AE}}{\overline{AD}}$. Но, $\overline{AE}=\frac{1}{\overline{AB}}$, па $\overline{EG}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}$.

Од својствата на триаголник, за конкретниот ΔGEF важи $\overline{EF}+\overline{GF}\geq\overline{EG}$. Ако ги замениме изразите што ги добивме за $\overline{EF}$, $\overline{GF}$ и $\overline{EG}$ ќе добиеме $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}\geq\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}$, т.е. $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

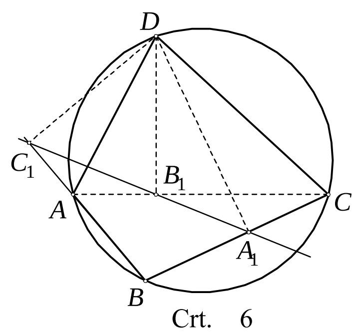
Очигледно, равенство во (2) важи ако $\overline{EF}+\overline{GF}=\overline{EG}$, а последново е точно ако збирот на двата агли кај F е 180°, односно ако $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$. Значи, ако важи равенството (1), тогаш четириаголникот $ABCD$ е тетивен. (Доказот на оваа теорема може да се види и во Сигма бр.37).

Теорема 6 (Симпсон). *Четириаголникот ABCD е тетивен ако и само ако подножјата на нормалите спуштени од D на страните од* ΔABC *се колинеарни.*

Доказ. Нека $ABCD$ е тетивен и нека подножјата на нормалите спуштени од темето D на страните BC, AC и AB се A_1, B_1 и C_1 соодветно (црт. 6). Ќе покажеме дека $\angle DB_1C_1+\angle DB_1A_1=180^\circ$. Бидејќи DC_1AB_1 е тетивен четириаголник,

$$\angle DC_1A+\angle DB_1A=90^\circ+90^\circ=180^\circ,$$

имаме $\angle DB_1C_1=\angle DAC_1$ е ***(Т.2)***. Бидејќи $ABCD$ е тетивен, $\angle DAC_1=180^\circ-\angle DAB=\angle DCB$. Бидејќи DB_1A_1C е тетивен ($\angle DB_1C=\angle DA_1C=90^\circ$), $\angle DB_1A_1=180^\circ-\angle DCA_1$. Но, $\angle DCA_1=\angle DCB$,



Crt. 6

па значи $\angle DB_1C_1+\angle DB_1A_1=\angle DCB+180^\circ-\angle DCB=180^\circ$, а тоа значи дека A_1, B_1 и C_1 лежат на една права.

Обратно, нека $ABCD$ е четириаголник и нормалите спуштени од D кон ΔABC ги сечат BC, AC и AB во A_1, B_1 и C_1 соодветно, т.ш. A_1, B_1 и C_1 се колинеарни. Тогаш, $\angle DB_1C_1 + \angle DB_1A_1 = 180^\circ$, па

$$\angle DB_1C_1 = 180^\circ - \angle DB_1A_1 = \angle DCA_1 \equiv \angle DCB$$

(затоа што DB_1A_1C е тетивен). Бидејќи и DC_1AB_1 е тетивен, следува дека $\angle DB_1C_1 = \angle DAC_1 = 180^\circ - \angle DAB$. След-ствено, $\angle DCB = 180^\circ - \angle DAB$, т.е $ABCD$ е тетивен четириаголник.

Користејќи ги овие признаци можеме да решиме многу задачи на тема: “Дали дадените точки лежат на една кружница?”.

Решени задачи

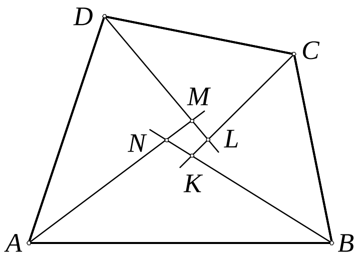
Задача 1. Симетралите на аглите на конвексен четириаголник $ABCD$ формираат конвексен четириаголник $KLMN$ (црт. 7). Докажи дека околу $KLMN$ може да се опише кружница.

Решение. Ќе покажеме дека во четириаголникот $KLMN$, $\angle L + \angle H = 180^\circ$. Да ги означиме и аглите во четириаголникот $ABCD$ со A, B, C и D соодветно. Од ΔBCL имаме

$$\angle L = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

и од ΔAHD имаме

$$\angle H = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\angle A + \angle D).$$

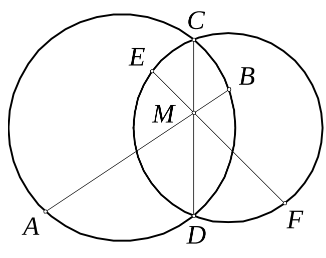


Crt. 7

Значи $\angle L + \angle H = 360^\circ - \tfrac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$,

т.е. околу $KLMN$ може да се опише кружница.

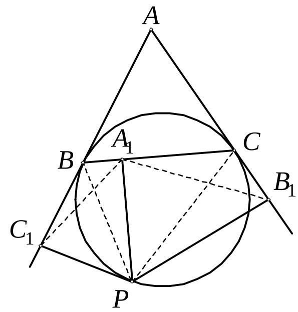
Задача 2. Две кружници се сечат во точките C и D. Низ произволна точка M од отсечката CD се повлечени отсечките AB и EF, т.ш. A и B лежат на едната кружница, а E и F на другата (црт. 8). Притоа, со A, B, E и F не лежат на иста права. Докажи дека A, B, E и F лежат на иста кружница.



Crt. 8

Решение. M е внатрешна точка за двете кружници, па од својствата на кружница имаме $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$. (Види Сигма 45, Степен на точка во однос на кружница). Аналогно имаме $\overline{ME} \cdot \overline{MF} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$. Значи $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{ME} \cdot \overline{MF}$. Бидејќи M е пресек на дијагоналите на четириаголникот $AFBE$, од признакот 4°, следува дека $AFBE$ е тетивен четириаголник, т.е. A, B, E и F лежат на иста кружница.

Задача 3. Во точките B и C од една кружница повлечени се тангенти кои се сечат во точката A. (црт. 9). Низ произволна точка P од кружницата, повлечени се прави PC_1 нормално на тангентата AB, PB_1 нормално на тангентата AC и PA_1 нормално на отсечката BC. Да се докаже дека $\overline{PA}^2 = \overline{PB}_1 \cdot \overline{PC}_1$.



Crt. 9

Решение. Ги поврзуваме отсечките PB, P, A_1C_1 и A_1B_1. Поради $\angle PA_1C + \angle PB_1C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ и $\angle PC_1B + \angle PA_1B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ следува дека PB_1CA_1 и PA_1BC_1 се тетивни четириаголници. Од вториот признак, за четириаголникот PB_1CA_1 важи $\angle PB_1A_1 = \angle PCA_1$ и за PA_1BC_1 важи $\angle C_1BP = \angle C_1A_1P$. Аналогно важи и $\angle PA_1B_1 = \angle PCB_1$, $\angle PBA_1 = \angle PC_1A_1$. Независно од оваа задача, користејќи ги својствата на централен и периферен агол, како и на тангента на кружница, можете да покажете дека за периферниот $\angle PCB$ и тангентата AB важи $\angle PCB = \angle C_1BP$. Слично, за периферниот $\angle PBC$ и тангентата AC важи $\angle PBC = \angle PCB_1$. Значи имаме:

$$\angle PB_1A_1 = \angle PCA_1 \equiv \angle PCB = \angle C_1BP = \angle C_1A_1P \quad \text{и}$$

$$\angle PC_1A_1 = \angle PBA_1 \equiv \angle PBC = \angle PCB_1 = \angle PA_1B_1.$$

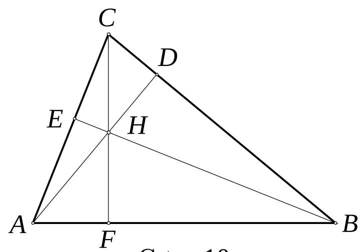
Сега од признакот за сличност на триаголници следува дека $\Delta A_1C_1P \sim \Delta B_1A_1P$.

Значи $\overline{PA}_1 : \overline{PB}_1 = \overline{PC}_1 : \overline{PA}_1$, т.е. $\overline{PA}^2 = \overline{PB}_1 \cdot \overline{PC}_1$.

Задача 4. Во ΔABC, AD, BE и CF се висини. Докажи дека:

а) $\angle BED = \angle BEF$;

б) $\Delta BFD \sim \Delta BCA$.



Crt. 10

Решение. а) Да го означиме ортоцентарот со H (црт. 10). $\angle AEH + \angle AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, па $AFHE$ е тетивен четириаголник. Значи, $\angle FAH = \angle HEF$. Аналогно, од тоа што и $ECDH$ е тетивен четириаголник, $\angle HED = \angle DCH$. Да забележиме дека:

$$\angle FAH \equiv \angle BAD,\ \angle HEF \equiv \angle BED \text{ и } \angle DCH \equiv \angle BCF.$$

Од ΔBAD имаме $\angle BAD = 90^\circ - \angle B$, т.е. $\angle BAD = \angle BCF$. Значи,

$$\angle BED = \angle BCF = \angle BAD = \angle BEF.$$

б) Бидејќи $\angle AFC = \angle ADC\ (= 90^\circ)$, $AFDC$ е тетивен четириаголник. Поради првиот признак,

$$\angle BFD = 180^\circ - \angle AFD = \angle DCA;\ \angle DCA \equiv \angle BCA,$$

па $\angle BFD = \angle BCA$; $\angle B$ е заеднички за ΔBFD и ΔBCA, па од признакот за сличност на триаголници следува $\Delta BFD \sim \Delta BCA$.

Задачи за самостојна работа

5. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека AE и CF се висините спуштени кон страните BC и AB соодветно. Нека AE и CF се сечат во точката P. Докажи дека $\angle ADC = \angle APC$.

6. Од произволна точка M во внатрешноста на даден остар агол A се спуштени нормали MP и MQ кон краците на аголот. Од точката A е спуштена нормала кон отсечката PQ. Да се докаже дека $\angle PAK = \angle MAQ$. (*Упатство*. Искористи го вториот признак.)

7. Да се докаже дека ако во еден конвексен петаголник $ABCDE$ важи $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, тогаш важи и $BAC = \angle DAE$. (*Упатство*. Означи го пресекот на BD и CE и согледај ги тетивните четириаголници што се формираат).

8. Даден е остроаголен триаголник ΔABC. Нека CD и AE се висините повлечени кон AB и BC соодветно. Нека K е произволна точка од DB и нека $H \in AE$, т.ш. E е точка од отсечката AH. Повлекуваме нормала од A кон HK. Пресекот на нормалата со CD го означуваме со M. Нека $P = NK \cap CD$ и $L = PK \cap BC$. Докажи дека $AMLC$ е тетивен четириаголник. (*Упатство*. Согледај дека M е ортоцентар на ΔAPK и употреби го шестиот признак).

Литература:

1. Ж. Мадевски, А. Самарџиски, Н. Целакоски: **Геометрија за II клас на средното образование**; "Просветно дело", Скопје 1975

2. **"Математика в школе" 2-90**, "Педагогика", Москва

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија