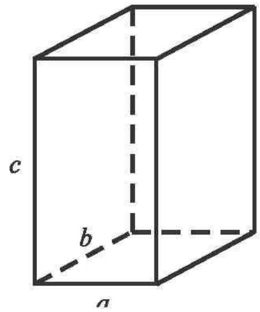
О КВАДРИМА С ИВИЦАМА ЦЕЛОБРОЈНИХ ДУЖИНА

Ратко Тошић, Нови Сад

КВАДАР

Међу геометријским фигурама у простору посебно се истиче квадар. То је права четворострана призма чија је основа правоугаоник (сл. 1). Запремину квадра је лако израчунати ако знамо дужине његових ивица. Наиме, запремина V квадра са ивицама дужина a, b и c израчунава се по формули $V = abc$. То знање користимо касније за одређивање запремина осталих геометријских тела. Специјалан случај квадра је коцка. То је квадар са ивицама једнаких дужина, тј. $a = b = c$. Запремина коцке са ивицама дужине 1 узима се за јединицу запремине којом се изражавају запремине осталих геометријских тела.



Сл. 1.

У овом чланку, кроз решавања неколико геометријско-комбинаторних задатака, упознаћемо неке интересантне особине квадра. Упоредо с тим, научићемо да решавамо неке типове диофантских једначина, тј. једначина са целобројним решењима. У нашем конкретном случају то су задаци са решењима у скупу природних бројева, јер геометријске величине са којим радимо (дужине дужи, површине, запремине) могу имати само ненегативне вредности.

Пример 1. Да ли постоји коцка са целобројном дужином ивице код које су мерни бројеви површине и запремине једнаки?

Решење. Нека ивица коцке има дужину a, где је a цео број. Тада је површина коцке $6a^2$, а запремина a^3. Из $6a^2 = a^3$ следи $a = 6$. Дакле, код коцке са ивицом дужине 6 мерни бројеви површине и запремине су једнаки.

□

Пример 2. Дрвена коцка са ивицом дужине a, где је a природан број, обојена је споља, а затим исечена на a^3 јединичних коцки (блокова). За који природан број a је број необојених блокова једнак броју блокова са бар једном обојеном страном?

Решење 1. Необојени блокови чине коцку ивице $a - 2$, па је њихов број једнак $(a-2)^3$. За тражену коцку треба да важи $a^3 = 2(a-2)^3$, односно $a^3 - 2(a-2)^3 = 0$.

Директно се проверава да за $a < 12$ важи $a^3 \neq 2(a-2)^3$, односно $a^3 - 2(a-2)^3 \neq 0$. С друге стране, $a^3 - 2(a-2)^3 = 0$ је еквивалентно са

$$a^2(a-12) + 8(3a-2) = 0.$$

Међутим, лако се види да је за $a \geq 12$, $a^2(a-12)+8(3a-2)>0$. Дакле, тражени број a не постоји.

Решење 2. Из услова $a^3 = 2(a-2)^3$ следи $\frac{a^3}{(a-2)^3} = 2$, односно $\frac{a}{a-2} = \sqrt[3]{2}$. Но, то је немогуће, јер је на левој страни рационалан, а на десној ирационалан број. Дакле, тражени број a не постоји.

□

КВАДРИ СА ИВИЦАМА ЦЕЛОБРОЈНИХ ДУЖИНА

Сада ћемо се позабавити квадрима код којих су дужине свих ивица цели бројеви.

Пример 3. Наћи све квадре са целобројним дужинама ивица код којих су мерни бројеви површине и запремине једнаки.

Решење. Нека су дужине ивица a, b и c. По услову задатка је

$$abc = 2(ab+bc+ca), \tag{1}$$

односно, након деобе леве и десне стране са $2abc$,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\,. \tag{2}$$

Из тога следи да бројеви a, b, c морају бити већи од 2. Због симетричности израза, можемо претпоставити да је $2 < a \leq b \leq c$. Тада је

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} > \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}\,, \tag{3}$$

па је $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{6}$, односно $a \leq 6$. Заиста, за $\frac{1}{a} < \frac{1}{6}$ из (3) следи

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = 2,$$

што је у контрадикцији са (1). Дакле, $2 < a \leq 6$, односно $a \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Размотримо сва четири случаја:

1° $a = 3$. Тада је, због (1), $3bc = 2(3b + bc + 3c)$, тј. $bc = 6b + 6c$, одакле је

$$c = \frac{6b}{b-6} = 6 + \frac{36}{b-6}\,.$$

С обзиром да је $b > 2$, следи $b - 6 > -4$. Како је c природан број, $b - 6$ може да узима вредности -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, односно b може да буде 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42, редом. Одговарајуће вредности за c су: -6, -12, -30, 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7. Како је $b \leq c$, добијамо да услов задатка задовољавају следеће тројке:

$$(a,b,c) \in \{(3,7,42),(3,8,24),(3,9,18),(3,10,15),(3,12,12)\}.$$

2° $a = 4$. На сличан начин добијамо да је $c = 4 + \frac{16}{b-4}$, одакле добијамо следеће тројке као решења:

$$(a,b,c) \in \{(4,5,20),(4,6,12),(4,8,8)\}.$$

3° $a = 5$. Тада је $3bc = 10b + 10c \leq 20c$. Отуда је $b \leq \frac{20}{3}$, односно $b \leq 6$. Како је $5 = a \leq b \leq 6$, следи $b = 5$ или $b = 6$. Кад то уврстимо у горњу једнакост добијамо да је $c = 10$, одосно $c = \frac{15}{2}$. Тако, за овај случај, имамо једно решење: $(a,b,c) = (5,5,10)$.

4° $a = 6$. Слично претходном, добијамо једно решење $(a,b,c) = (6,6,6)$.

Дакле, има укупно 10 различитих квадара са целобројним дужинама страница код којих су мерни бројеви површине и запремине једнаки.

□

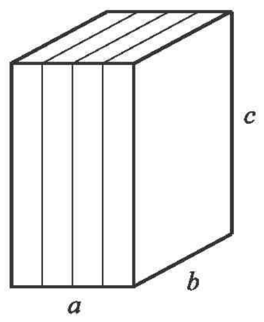
Следећи задатак је уопштење оног из примера 2.

Пример 4. Дрвени квадар са ивицама целобројних дужина a, b, c обојен је споља, а затим исечен на abc јединичних коцки (блокова). За које природне бројеве a, b, c је број необојених блокова једнак броју блокова са бар једном обојеном страном?

Решење. Без умањивања општости узмимо да је $a \leq b \leq c$. Укупан број блокова је abc, док је број необојених једнак $(a-2)(b-2)(c-2)$. По услову задатка је

$$abc = 2(a-2)(b-2)(c-2). \qquad (1)$$

Лако се види да једначина (1) нема решења за $a \leq 4$. Наиме, у том случају имамо највише 4 слоја са по bc коцкица. Необојени блокови леже у једном (за $a = 3$) или два средња слоја (за $a = 4$) (сл. 2). Притом, у средњим слојевима има и обојених блокова. Како је укупан број блокова у два средња слоја једнак броју блокова у два спољашња, број необојених блокова је увек мањи од броја оних са бар једном обојеном страном. За $a = 2$ или $a = 1$, необојених блокова уопште нема, па једначина (1) поготово нема решења. Дакле, $a \geq 5$.



Сл. 2.

Делећи (1) са $2abc$, добијамо да је

$$\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{2}{a}\right)\left(1 - \frac{2}{b}\right)\left(1 - \frac{2}{c}\right).$$

Како је, због $a \leq b \leq c$, $1 - \frac{2}{a} \leq 1 - \frac{2}{b} \leq 1 - \frac{2}{c}$, следи да је

$$\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{a}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)\left(1-\frac{2}{c}\right)\geq\left(1-\frac{2}{a}\right)^3,$$

тј. $1-\frac{2}{a}\leq\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Одатле се једноставно добија да је $a\leq 9{,}695$. Како је a природан број, следи $a\leq 9$.

Дакле, важи $5\leq a\leq 9$. Испитаћемо свих пет случајева.

1° $a=5$. Из (1) следи да је

$$5bc=2\cdot 3(b-2)(c-2)=6(bc-2b-2c+4).$$

Одатле је $bc-12b-12c+24=0$, односно $(b-12)(c-12)=120$. Анализирајући сва могућа представљања броја 120 у облику производа два чиниоца (табела 1) и имајући у виду да је $b-12\leq c-12$ добијамо 8 решења за b и c.

$b-12$	1	2	3	4	5	6	8	10
$c-12$	120	60	40	30	24	20	15	12
b	13	14	15	16	17	18	20	22
c	132	72	52	42	36	32	27	24

Табела 1.

2° $a=6$. 2. У овом случају из (1) следи да је

$$6bc=2\cdot 4(b-2)(c-2)=8(bc-2b-2c+4),$$

одакле је $bc-8b-8c+16=0$, односно $(b-8)(c-8)=48$. Анализом делилаца броја 48 (табела 2), добијамо још 5 решења.

$b-8$	1	2	3	4	6
$c-8$	48	24	16	12	8
b	9	10	11	12	14
c	56	32	24	20	16

Табела 2.

3° $a=7$. Сада из (1) добијамо да је

$$7bc=2\cdot 5(b-2)(c-2)=10(bc-2b-2c+4),$$

одакле је $3bc-20b-20c+40=0$, односно $9bc-60b-60c+120=0$ и коначно $(3b-20)(3c-20)=280$. Као у претходним случајевима, анализом делилаца броја $280=2^3\cdot 5\cdot 7$ (табела 3), добијамо још 4 решења за b и c. (Како су b и c цели бројеви, узимају само оне вредности за $3b$ и $3c$ које су дељиве са 3.)

$3b-20$	1	2	4	5	7	8	10	14
$3c-20$	280	140	70	56	40	35	28	20
$3b$	21	22	24	25	27	28	30	34
$3c$	300	160	90	76	60	55	48	40
b	7		8		9		10	
c	100		30		20		16	

Табела 3.

4° $a=8$. Из (1) добијамо да је

$$8bc = 2\cdot 6(b-2)(c-2) = 12(bc-2b-2c+4),$$

одакле је $bc-6b-6c+12=0$, тј. $(b-6)(c-6)=24$. Анализом делилаца броја 24 (табела 4), добијамо још 4 решења међу којима је и $(8,7,30)$ које се поклапа с већ добијеним у случају $a=7$ (четврта колона за b и c у табели 3.)

$b-6$	1	2	3	4
$c-6$	24	12	8	6
b	(7)	8	9	10
c	(30)	18	14	12

Табела 4.

5° $a=9$. У овом случају из (1) добијамо да је

$$9bc = 2\cdot 7(b-2)(c-2) = 14(bc-2b-2c+4),$$

одакле је $5bc-28b-28c+56=0$ или $25bc-140b-140c+280=0$ тј. $(5b-28)(5c-28)=504$. При анализи делилаца броја 504 (табела 5) довољно је посматрати само случајеве $5b-28\geq 17$, за које је $b\geq 9$, јер је $b\geq a=9$. Имајући то у виду, из табеле 5 видимо да не постоје цели бројеви b и c који задовољавају (1) за $a=9$.

$5b-28$	18	21
$5c-28$	28	24
$5b$	46	49
$5c$	56	52

Табела 5.

Коначно, у табели 6 приказани су свих 20 добијених решења.

a	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6
b	13	14	15	16	17	18	20	22	9	10
c	132	72	52	42	36	32	27	24	56	32
a	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
b	11	12	14	7	8	9	10	8	9	10
c	24	20	16	100	30	20	16	18	14	12

Табела 6

□

Пример 5. Одредити све квадре са ивицама целобројних дужина код којих је мерни број запремине једнак збиру мерних бројева дужина свих ивица.

Решење. Означимо дужине ивица квадра са a, b, c, при чему је $a \geq b \geq c$. Треба да нађемо решења једначине

$$abc = 4(a+b+c) \tag{1}$$

у скупу природних бројева.

Доказаћемо прво да је $c \leq 3$. Претпоставимо супротно, тј. да је $c \geq 4$. Из неједнакости $a \geq b \geq c \geq 4$ добијамо да је

$$abc \geq a \cdot 4 \cdot 4 = 16a$$

$$4(a+b+c) \leq 4(a+a+a) = 12a$$

Имајући у виду (1) добијамо

$$16a \leq abc = 4(a+b+c) \leq 12a.$$

Одавде је $16a \leq 12a$, што је немогуће. Дакле, $c \leq 3$. Закључујемо да је довољно посматрати случајеве $c \in \{1, 2, 3\}$. Из (1) налазимо да је

$$a = \frac{4(b+c)}{bc-4}\,.$$

Размотрићемо три случаја:

1° $c = 1$. Тада је

$$a = \frac{4(b+1)}{b-4}\,.$$

Да би a био позитиван број, мора бити $b \geq 5$. С друге стране, из $a \geq b$ добијамо $4(b\ +\ 1) \geq b(b-4)$, тј. $b(b-8) \leq 4$, одакле је $b \leq 8$.

Дакле, треба испитати могућности $b \in \{5, 6, 7, 8\}$.

За $b = 5$ је $a = 24$.

За $b = 6$ је $a = 14$.

За $b = 7$ је $a = \frac{32}{3}$, што није цео број.

За $b = 8$ је $a = 9$.

2° $c = 2$. Тада је

$$a = \frac{4(b+2)}{2b-4}.$$

Да би a био позитиван број, мора бити $b \geq 3$. С друге стране, из $a \geq b$, добијамо $4(b + 2) \geq b(2b - 4)$, тј. $b(b-4) \leq 4$, одакле је $b \leq 4$.

Дакле, треба испитати могућности $b = 3$ и $b = 4$.

За $b = 3$ је $a = 10$.

За $b = 4$ је $a = 6$.

3° $c = 3$. Тада је

$$a = \frac{4(b+3)}{3b-4}.$$

Неједнакост $a \geq b$ даје $4(b + 3) \geq b(3b - 4)$, тј. $b(3b - 8) \leq 12$, одакле је $b \leq 3$. Како је $b \geq c = 3$, следи $b = 3$. Међутим, тада је $a = \frac{24}{5}$, што није цео број.

Сви резултати су дати у табели 7.

a	24	14	9	10	6
b	5	6	8	3	4
c	1	1	1	2	2

Табела 7.

Дакле, има укупно 5 квадара који задовољавају услове задатка.

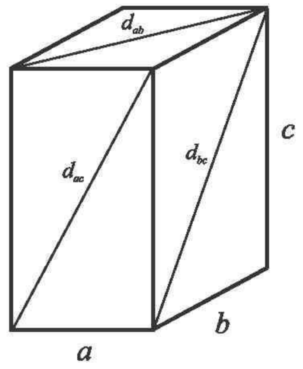
□

ОЈЛЕРОВ КВАДАР

За квадар са ивицама целобројних дужине кажемо да је ***Ојлеров квадар*** ако су дијагонале свих његових страна имају целобројне дужине.

Посматрајмо квадар са ивицама a, b, c, где је $a \geq b \geq c$ (сл. 3). Дијагоналу правоугаоника са страницама x и y означаваћемо са d_{xy}. По Питагориној теореми, за дијагонале његових страна важи:

$$d_{ab} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d_{ac} = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad d_{bc} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$



Сл. 3.

Ф. Хелениус је направио листу од неколико хиљада најмањих (са најмањом дужином најдуже ивице) Ојлерових квадара. Првих пет су:

a	240	275	693	720	792
b	117	252	480	132	231
c	44	240	140	85	160

Табела 8.

Решењем следећег примера долазимо до једне интересантне особине Ојлерових квадара.

Пример 6. Ако је квадар са ивицама дужина a, b, c Ојлеров, доказати да је онда и квадар са ивицама дужина $b \cdot c$, $a \cdot c$, $a \cdot b$ Ојлеров.

Решење. Како је квадар Ојлеров, a, b, c, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ су природни бројеви.

Дужина дијагонале стране квадра са ивицама $a \cdot c$ и $b \cdot c$ је

$$d_1 = \sqrt{(a \cdot c)^2 + (b \cdot c)^2} = \sqrt{c^2(a^2+b^2)} = c \cdot \sqrt{a^2+b^2}.$$

Како су c и $\sqrt{a^2+b^2} = d_{ab}$ природни бројеви, и њихов производ d_1 је природан број.

На исти начин доказујемо да су и друге две дијагонале страна тога квадра природни бројеви, чиме је тврђење доказано. □

Применом управо доказаног тврђења из најмањег Ојлеровог квадра $(a, b, c) = (240, 117, 44)$ (табела 8) добијамо нови Ојлеров квадар са ивицама:

$$a_1 = b \cdot c = 117 \cdot 44 = 5148$$

$$b_1 = a \cdot c = 240 \cdot 44 = 10560$$

$$c_1 = a \cdot b = 240 \cdot 117 = 28080.$$

Непосредним рачунањем налазимо да су дужине дијагонала страна тога квадра једнаке 11748, 25548 и 30000. Тако смо нашли још један Ојлеров квадар са ивицама 28080, 10560 и 5148.

Из напред доказаног тврђења непосредно следи да има бесконачно много Ојлерових квадара.

За Ојлеров квадар кажемо да је ***савршен*** ако је и дужина његове просторне дијагонале цео број. Питање да ли уопште постоји савршен квадар је отворено. Нико до сада није нашао ниједан савршен квадар, нити доказао да такав квадар не постоји. Упркос томе, доказано је да би такав квадар морао да поседује извесне особине, на пример:

Две ивице квадра морају бити парне, а једна непарне дужине.
Дужина једне ивице квадра мора бити дељива са 4, а једне са 16.
Дужина једне ивице квадра мора бити дељива са 3, а једне са 9.
Дужина једне ивице квадра мора бити дељива са 5.
Дужина једне ивице квадра мора бити дељива са 11.

Рачунарским методама је доказано да дужина најмање ивице савршеног квадра, уколико такав постоји, износи бар неколико милијарди.

ТРОУГЛОВИ СА СТРАНИЦАМА ЦЕЛОБРОЈНИХ ДУЖИНА

Применићемо сада резултате из решења задатка 5, на одређивање троуглова са страницама целобројних дужина код којих су мерни бројеви обима и површине једнаки.

Пример 7. Наћи све троуглове са страницама целобројних дужина код којих се обим (у јединицама дужине) и површина (у јединицама површине) изражавају истим мерним бројем.

Решење. Означимо са x, y, z дужине страница, са s полуобим и са o обим троугла. Дакле, $s=\frac{x+y+z}{2}$ и $o=2s$. Изразимо површину P троугла Хероновом формулом:

$$P=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}.$$

Ако уведемо нове непознате $a=s-x$, $b=s-y$, $c=s-z$, изједначимо површину и обим троугла и уврстимо нове непознате у ту једначину, добијамо

$$\sqrt{sabc}=2s.$$

Квадрирањем и скраћивањем са s, једначина постаје

$$abc=4s. \qquad (1)$$

Показаћемо да је $s=a+b+c$. Заиста, уз уведене ознаке важи:

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c, \tag{2}$$

одакле је

$$2s = x + y + z = (s - a) + (s - b) + (s - c) = 3s - (a + b + c),$$

тј. $s = a + b + c$. Сада једначина (1) постаје

$$abc = 4(a + b + c). \tag{3}$$

Показаћемо сада да из услова једнакости обима и површине троугла следи да су a, b и c природни бројеви. Заиста, ако је обим троугла $2s$ паран број, онда је и s природан број, па су бројеви $a = s - x$, $b = s - y$ и $c = s - z$ такође природни. Ако би $2s$ био непаран број, онда би бројеви a, b, c били облика

$$a = \frac{a_1}{2}, \quad b = \frac{b_1}{2}, \quad a = \frac{c_1}{2},$$

где су a_1, b_1, c_1 непарни природни бројеви. Уврштавањем у једначину (3) добијамо

$$\frac{a_1 b_1 c_1}{8} = 2(a_1 + b_1 + c_1),$$

што је немогуће, јер лева страна није цео број.

Једначину (3) смо већ решили у задатку 5. Из сваког целобројног решења једначине (3) по a, b, c, на основу веза (2), добијамо једно решење нашег задатка. Резутати су сумирани у табели 9.

a	b	c	s	$x = s - a$	$y = s - b$	$z = s - c$
24	5	1	30	6	25	29
14	6	1	21	7	15	20
9	8	1	18	9	10	17
10	3	2	15	5	12	13
6	4	2	12	6	8	10

Табела 9.

□

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Квадар са ивицама целобројних дужина има запремину 2015. Обојен је споља црвено, а затим исечен на јединичне коцке. Ако је при томе добијено тачно 8 коцкица са тачно три обојене стране, одредити број коцкица које немају ниједну обојену страну.

2. Обим и површина троугла изражавају истим мерним бројем (у одговара-јућим јединицама) ако и само ако је полупречник уписане кружнице тога троугла $r = 2$. Доказати.

3. Дрвена коцка са ивицом дужине a, где је a природан број, обојена је споља, а затим исечена на a^3 јединичних коцки (блокова). За које природне бројеве a је број необојених блокова делитељ укупног броја блокова a^3?

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2016/17 година