БРАНКО ТРПЕНОВСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ
ЃОРЃИ ЧУПОНА

ВИША МАТЕМАТИКА

КНИГА III

– ФУНКЦИИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ –

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО“
СКОПЈЕ, 1994

Уредник:
Кирил Милчев

Рецензенти:
д-р Пано Кржовски, редовен професор на Машинскиот факултет – Скопје
д-р Кирил Стојменовски, редовен професор на Технолошко-металуршкиот факултет – Скопје

Со одлука на Наставно-научниот совет на Машинскиот факултет во Скопје под број 08 - 1440/1 од 04.07.1994 година се одобрува употребата на оваа книга како основен универзитетски учебник.

П Р Е Д Г О В О Р

Третава книга од низата учебници под наслов "Виша математика" ги обработува следниве области: Гл.IV – Аналитична геометрија во простор; Гл. V – Диференцијално сметање на функциите од повеќе променливи; Гл. VI – интеграли на функциите од повеќе променливи.

При изработката и на оваа книга се користени соодветните делови од учебниците "Предавања по виша математика" (од истиве автори) излезени од печат во 1971-72 година, но овде материјалот е значително проширен и обработен со поинаков пристап.

Оваа книга (како и другите учебници од спомнатата низа) им е наменета пред сé на студентите од Машинскиот факултет. Главата IV (од оваа книга) заедно со Гл. I и II (од претходните книги) ја покриваат наставната програма од предметот математика I, додека Гл. V и VI (од оваа книга) заедно со Гл. III (од втората книга) ја покриваат програмата по предметот математика II. (Нумерацијата на главите во четирите книги е непрекината: Г. I ја сочинува целата прва книга, Гл. II и III – втората книга, Гл. IV, V и VI – третата книга, а Гл. VII –X – четвртата книга.) Со цел на читателите да им се олесни совладувањето на материјалот, а со тоа и успешното подготвување на испитите од соодветните предмети, во книгава се сместени значителен број примери и задачи за вежбање снабдени со одговори, а некои и со упатства. По наше мислење, задачите се доволни за подготвување на соодветните испити, но тоа не ја исклучува потребата од користење и на други збирки од задачи.

Покрај студентите од Машинскиот факултет книгава можат да ја користат и студентите од другите технички факултети како и студентие од соодветните групи на природно математичкиот факултет.

Повикувањата се вообичаени. На пример, Т. 4 од V.1.6 означува: теорема 4 од шестиот раздел на првиот параграф во петтата глава. При повикувањата во рамките на истата глава, римската цифра е изоставена. Во текстот ќе се сретнат и упатувања на некои резултати во други книги, но не е задолжително тие резултати и да се "консултираат". Некои од вежбите се означени со ѕвездичка (на пример: 10* во IV.3.2); читателот може нив да ги изостави при првото запознавање, зашто тоа нема да се одрази на успешното следење на натамошниот материјал или зашто се потешки.

Октомври 1994 Авторите
Скопје

С О Д Р Ж И Н А

Гл. IV. АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР

IV.1. ВЕКТОРИ И НИВНИ КООРДИНАТИ – – – – – 2

1.1. Насочени отсечки и поимот вектор – – – – – – 2
1.2. Собирање на вектори – – – – – – – – 6
1.3. Множење на вектор со реален број – – – – – 11
1.4. Колинеарни и компланарни вектори – – – – 14
1.5. Координати на вектори и нивни линеарни комбинации – – – – – – – – – – – 19

IV.2. ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД – – – – 26

2.1. Детерминанти од втор ред и нивна примена – – 26
2.2. Детерминанти од трет ред – – – – – – – 32
2.3. Систем од три линеарни равенки со три непознати 37

IV.3. СКАЛАРЕН, ВЕКТОРСКИ И МЕШАН ПРОИЗВОД – – 43

3.1. Скаларен производ – – – – – – – – – 43
3.2. Координантна форма на скаларниот производ – – 47
3.3. Векторски производ – – – – – – – – 50
3.4. Мешан производ – – – – – – – – – 55

IV.4. РАВЕНКИ НА РАМНИНА И ПРАВА – – – – – 57

4.1. Општа равенка на рамнина – – – – – – – 57
4.2. Други видови равенки на рамнина – – – – – 61
4.3. Однос меѓу рамнини – – – – – – – – 66
4.4. Видови равенки на права – – – – – – – 69
4.5. Однос меѓу две прави – – – – – – 72
4.6. Однос меѓу права и рамнина – – – – – – 76
4.7. Задачи за растојанија меѓу точки, прави и рамнини – – – – – – – – – – – – 70

IV.5. ПОВРШИНИ – – – – – – – – – – – – 85

5.1. Површини и нивни равенки – – – – – – 85
5.2. Цилиндрични и конусни површини – – – – – 90
5.3. Ротациони површини – – – – – – – – 94
5.4. Површини од втор ред – – – – – – – – 98
5.5. Равенки на крива во простор – – – – – – 102

IV.6. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ – – – – – – – 105

Гл. V. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

V.1. ФУНКЦИИ ОД n ПРОМЕНЛИВИ – – – – – – – 111

1.1. Евклидски простори – – – – – – – – 112
1.2. Важни множества од n–димензионални точки – – 115
1.3. Низи од n-димензионални точки – – – – – 121
1.4. Функции од две променливи – – – – – – 125
1.5. Граници на функции од две променливи – – – 130
1.6. Непрекинатост на функции – – – – – – – 134
1.7. Парцијални изводи – – – – – – – – – 140
1.8. Парцијални изводи од втор и повисок ред – – 143

V.2. ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИ ФУНКЦИИ – – – – – – 147

2.1. Поим за диференцијабилна функција – – – – 147
2.2. Тангентна рамнина и нормала на површина – – 152
2.3. Парцијални изводи од сложена функција – – – 154
2.4. Тотален диференцијал – – – – – – – – 156
2.5. Диференцијал од n–ти ред. Тејлорова формула – 160
2.6. Диференцијабилност на функции од повеќе променливи – – – – – – – – – – – 164
2.7. Имплицитни функции – – – – – – – – 166
2.8. Смена на променливите – – – – – – – – 174

V.3. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ – – – – – – – – 179

3.1. Неопходни услови за екстрем – – – – – – 179
3.2. Најголема и најмала вредност – – – – – – 182
3.3.* Метод на најмали квадрати – – – – – – 188
3.4. Доволни услови за екстрем – – – – – – – 192
3.5. Условни екстреми – – – – – – – – – 198

V.4. ЕЛЕМЕНТИ ОД ДИФЕРЕНЦИЈАЛНАТА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР И ОД ВЕКТОРСКИТЕ ПОЛИЊА – – – 203

4.1. Векторски функции од една реална променлива – 203
4.2. Криви во просторот – – – – – – – – 207
4.3. Кривина, торзија, основни прави и рамнини – – 214
4.4. Векторски функции од два аргумента. Мазни површини – – – – – – – – – – – 222
4.5. Градиент и извод во дадена насока – – – – 229
4.6. Векторски полиња – – – – – – – – – 232

V.5. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ – – – – – – – 237

Гл. VI. ИНТЕГРАЛИ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

VI.1. ЕДНОКАТНИ ИНТЕГРАЛИ – – – – – – – 245

1.1. Диференцирање под знакот за интеграл – – – 246
1.2. Неопределен интеграл – – – – – – – – 255
1.3. Интеграли на функции од три променливи – – – 260
1.4. Диференцијални равенки – – – – – – – 262

VI.2. ЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛИ – – – – – – – – 270

2.1. Линиски интеграл од прв и втор тип – – – – 270
2.2. Својства на линиски интеграли од прв тип – – 275
2.3. Својства на линиски интеграли од втор тип – – 280
2.4. Независност од патот на интеграцијата – – – 284
2.5. Линиски интеграли по просторни криви – – – 288

VI.3. ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ – – – – – – 291

3.1. Двоен интеграл како двокатен определен интеграл 291
3.2. Риманови двојни интеграли – – – – – – 298
3.3. Двојни интеграли во поларни координати – – – 303
3.4. Несвојствени двојни интеграли – – – – – – 308
3.5. Тројни интеграли – – – – – – – – – 311
3.6. Тројни интеграли во цилиндрични и сферни координатни системи – – – – – – 316
3.7. Општа смена на променливите при двојните и тројните интеграли – – – – – – – – 319
3.8. Неколку примени на тројни и двојни интеграли – 322

VI.4. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ – – – – – – – 328

4.1. Плоштина на крива површина – – – – – – 328
4.2. Површински интеграли од прв тип – – – – 332
4.3. Површински интеграли од втор тип – – – – 334
4.4. Формули на: Гаус-Остроградски, Грин и Стокс – 338
4.5. Векторска интерпретација на површинските и линиските интеграли – – – – – – – – 346

VI.5. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ – – – – – – – 349

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА – – – – – – – 355

ЛИТЕРАТУРА – – – – – – – – – – 403

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ И ИМИЊА – – – – – 405

IV АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР

Во математиката и во други науки најчесто се работи со разни величини, коишто се наполно определени со нивниот мерен број при избрана единична мерка: должина на отсечка, плоштина на рамнински лик, волумен на тело, време, температура и др. Тие се **скаларни величини**. Но, во физиката, механиката, ... се среќаваат величини, коишто не се наполно определени само со мерниот број. Такви се: сила, брзина, забрзување, транслација и др. Секоја од тие величини е наполно определена ако, покрај мерниот број, се знае нејзиниот правец и насоката. Тие се наречени **векторски величини** или кусо **вектори**.

Со поимот вектор и со елементи од алгебрата на векторите читателот е запознат во средношколскиот курс. Во оваа глава ќе се потсетиме на познатите факти за векторите и ќе ги прошириме сознанијата за векторската алгебра, а ќе ги разгледаме и основните својства на детерминантите од втор и трет ред. Потоа, тие резултати ќе ги искористиме за примени во геометријата, поточно – за разгледување на основните задачи на аналитичната геометрија во простор.

IV.1. ВЕКТОРИ И НИВНИ КООРДИНАТИ

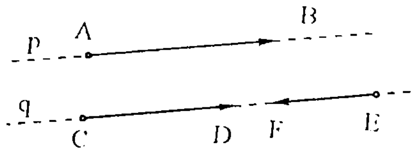
Во овој параграф ќе се потсетиме на поимот вектор, на собирањето на вектори и множењето на вектор со број, на некои факти за колинеарните и компланарните вектори, а ќе го воведеме и мошне важниот поим: координати на вектори.

1.1. Насочени отсечки и поимот вектор

Секој подреден пар точки A, B од просторот [1] го викаме **насочена отсечка** и го означуваме со $\overrightarrow{AB}$. Точката A се вика **почеток**, а B – **крај** на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$. Ако B се совпаѓа со A, тогаш за насочената отсечка $\overrightarrow{AA}$ (т.е. $\overrightarrow{BB}$) велиме дека е **нулта насочена отсечка**.

Секоја ненулта насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ графички ја претставуваме со стрелка, којашто тргнува од почетокот A и завршува во крајот B (црт. 1).

Црт. 1



Црт. 2

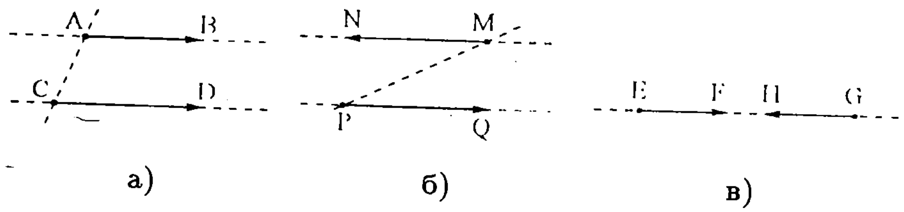
За две ненулти насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ќе велиме дека се **колинеарни**, ако правите AB и CD се паралелни (при што се допушта тие прави да се совпаѓаат); означуваме $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$. На пример, на црт. 2, правите p и q се паралелни; според тоа, насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ меѓусебно се колинеарни. Секоја нулта насочена отсечка ќе ја сметаме (т.е. по дефиниција е) колинеарна со секоја друга насочена отсечка.

За две колинеарни насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ велиме дека имаат **иста насока** ако полуправата AB има иста насока со

[1] Терминот простор ни означува овде исто што и во геометријата, т.е. обичниот тридимензионален ("физички") простор (в. V.1).

полуправата [2] CD; во спротивниот случај велиме дека $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имаат **спротивни насоки**. На нулта насочена отсечка не ѝ припишуваме никаква насока.

На црт. 3 е земено: $AB \| CD$ и $NM \| PQ$. Според тоа, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имаат иста насока, а $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$, односно $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{HG}$ имаат спротивни насоки.



Црт. 3

Должината на отсечката AB се вика **должина** (или **интензитет**) на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$; се означува со $|\overrightarrow{AB}|$. Според тоа, $|\overrightarrow{AA}| = 0$ и $|\overrightarrow{AB}| > 0$ секогаш кога $A \neq B$.

За две ненулти насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ велиме дека се **еднакви** и запишуваме: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако: i) се колинеарни, ii) имаат иста насока и iii) имаат еднакви должини.

Кои било две нулти отсечки ги сметаме за еднакви: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$.

Од оваа дефиниција следува дека: *релацијата еднаквост на насочени отсечки е релација за еквивалентност, т.е. таа е: рефлексивна* ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$), *симетрична* ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$) *и транзитивна* ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$). (Види 6) во I.1.1.)

Секоја класа од еднакви меѓу себе насочени отсечки се вика **вектор**. Векторите ќе ги означуваме со полуцрни [3] мали букви од латиницата: **a**, **b**, ...

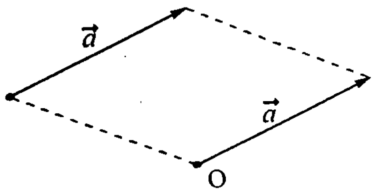
[2] За две полуправи велиме дека имаат **иста насока**, ако лежат на иста права и едната е подмножество од другата **или** пак ако лежат на различни паралелни прави и припаѓаат на иста полурамнина чијашто гранична права е правата што минува низ почетните точки на полуправите.

[3] Од технички причини, често се пишува $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ (на пример, во тетратките и на таблата), наместо полуцрни букби **a**, **b**, ...

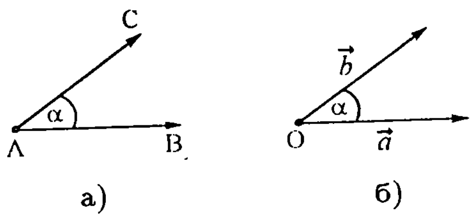
Еден вектор $\mathbf{a}$ е определен од кој било свој елемент (претставник). Така, можеме да кажеме дека, класата $\mathbf{a}$ од сите насочени отсечки еднакви со дадена насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ е **вектор со претставник** $\overrightarrow{AB}$. Можеме да запишеме $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{a}$.

Но, натаму, за да го упростиме запишувањето, векторот $\mathbf{a}$ со претставник $\overrightarrow{AB}$ многу често ќе го запишуваме пак со $\overrightarrow{AB}$, т.е. $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Во таа смисла, *насочените отсечки ќе ги викаме и вектори.* Во случаи кога е неопходно, записот "$\overrightarrow{AB}$" ќе биде придружен со зборовите "насочена отсечка", односно со "вектор".

Ако O е произволно избрана точка, тогаш конструкцијата на оној претставник на векторот $\mathbf{a}$, чија почетна точка е O, се вика **врзување** (или **прикачување**) на векторот $\mathbf{a}$ за точката O (црт. 4).



Црт. 4



Црт. 5

Класата од сите нулти насочени отсечки се вика **нулти вектор** и се означува со $\mathbf{o}$. Ако $\mathbf{a}$ е вектор со претставник насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, тогаш векторот со претставник насочената отсечка $\overrightarrow{BA}$ се вика **спротивен вектор** на $\mathbf{a}$ и се означува со $-\mathbf{a}$.

Должина (или: **интензитет, големина, модул**) на векторот $\mathbf{a}$ се вика должината на кој било негов претставник и се означува со $|\,\mathbf{a}\,|$ или со a.

Така, нултиот вектор $\mathbf{o}$ има должина 0, а векторот $\mathbf{a}$ и неговиот спротивен, $-\mathbf{a}$, имаат исти интензитети, $|-\mathbf{a}|=|\mathbf{a}|=a$.

Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се ненулти насочени отсечки, помалиот од двата агла што ги формираат полуправите AB и AC се вика **агол** меѓу насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (црт. 5а). Под **агол меѓу два ненулти вектори** се подразбира аголот определен од нивните претставници во произволна точка O (црт. 5б); тој агол не зависи од точката O. Агол меѓу два вектора од кои барем едниот е нулти не се дефинира.

На ист начин се воведува и поимот **колинеарни вектори**: тоа се вектори чии претставници, пренесени во една точка, лежат на иста права. Од оваа дефиниција направо следува: 1) *нултиот вектор е колинеарен со секој вектор*; 2) *аголот меѓу два ненулти колинеарни вектори е* 0^0 *ако имаат иста насока, а* 180^0 *ако имаат спротивна насока.* Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни вектори, тогаш запишуваме $\mathbf{a}||\mathbf{b}$.

Од дадената дефиниција за поимот вектор се гледа дека како претставници на еден вектор $\mathbf{a}$ можат да се земат безброј многу насочени отсечки. За да се избегне таа многузначност, корисно е да се избере една фиксна точка O, па како претставник на кој било вектор $\mathbf{a}$ да се избере насочена отсечка од обликот $\overrightarrow{OM}$.

Ако се има предвид фактот што две насочени отсечки $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ се еднакви ако и само ако точките M и N се совпаѓаат, доаѓаме до заклучокот дека, при избран фиксен почеток O, точката M е еднозначно определена со векторот $\mathbf{a}$, а и обратно.

Затоа, векторот $\overrightarrow{OM}$ се вика **радиус–вектор** на точката M; тој се означува и со $\mathbf{r}(M)$. Фактот што при избрана точка O, секој радиус –вектор има фиксен почеток сугерира да се вели дека *радиус–векторите се врзани за почетокот* O.

(За разлика од радиус–векторите, векторите што се претставени со произволни (еднакви) насочени отсечки се викаат **слободни вектори**.)

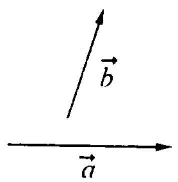
Вежби

1. Да се покаже подробно дека, во множеството од сите насочени отсечки, релацијата: "е еднаква со" е релација за еквивалентност, а релацијата "е колинеарна со" – не е.
2. Дали може аголот меѓу два вектора да изнесува: а) 270^0; б) 100^0; в) 360^0; г) 180^0?
3. Да се покаже дека ако насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се такви што $ABDC$ е паралелограм, тогаш $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
4. Дали важи обратното од тврдењето во вежбата 3?

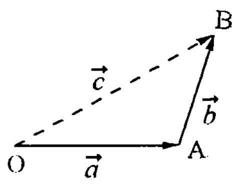
1.2. Собирање на вектори

Сега ќе дефинираме операција собирање на вектори.

Нека **a** и **b** се два зададени вектори (црт. 1). Векторот **a** да го прикачиме на произволно избрана точка O, а векторот **b** на последната точка A од векторот **a** (црт. 2); последната точка од **b**, по неговото врзување за A, да ја означиме со B. Тогаш векторот $\mathbf{c} = \overrightarrow{OB}$ го викаме **збир** (или **сума**) на векторите **a** и **b**; пишуваме: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

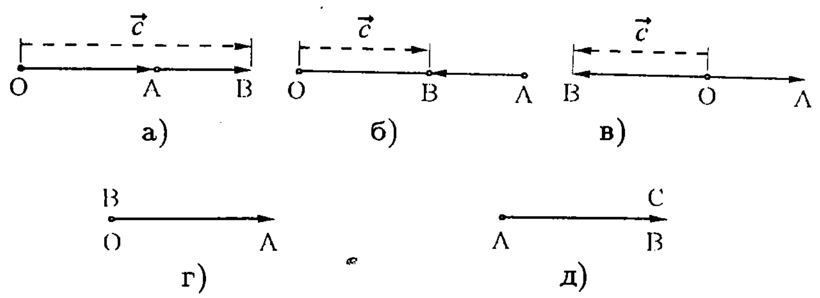


Црт. 1



Црт. 2

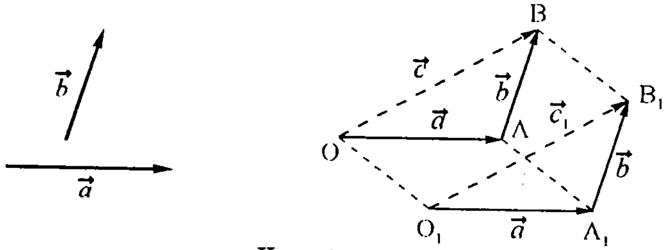
На црт. 3 а) - г) се претставени неколку случаи за збир на колинеарни вектори; во случајот г), при кој точката B се совпаѓа со O, како збир на векторите **a** и **b** се добива нултиот вектор (во тој случај **a** и **b** се спротивни вектори). Во случајот д), при кој $B = C$, имаме $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$; тоа значи дека збирот на еден вектор **a** и нултиот вектор е еднаков со векторот **a**, т.е $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a} = \mathbf{o} + \mathbf{a}$.



Црт. 3

За да сме сигурни дека вака дефинираната операција собирање на вектори е добра, треба да докажеме дека *добиениот вектор* **c** *не зависи од изборот на конкретните претставници на собироците* **a** и **b**.

За таа цел, покрај точката O, да избереме друга, произволна точка O_1. За поопределено, ќе земеме дека **a** и **b** не се колинеарни. На точката O_1 да го врземе векторот **a**, а векторот **b** - на последната точка A_1 од векторот **a**; притоа, последната точка на **b** да ја означиме со B_1 (црт. 4). Да го означиме со $\mathbf{c}_1$ векторот чиј претставник е насочената отсечка $\overrightarrow{O_1B_1}$.



Црт. 4

Отсечките OA и O_1A_1 се паралелни и еднакви, од што следува дека четириаголникот OO_1A_1A е паралелограм, а поради тоа, отсечките OO_1 и AA_1 се паралелни и еднакви. Од истите причини добиваме дека отсечките AA_1 и BB_1 се паралелни и еднакви. Од тие два заклучока следува дека четириаголникот OO_1B_1B е паралелограм, па отсечките O_1B_1 и OB се паралелни и еднакви, т.е. $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{O_1B_1} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{c}$.

Значи, збирот **c** на **a** и **b** не зависи од конкретно избраните претставници на **a** и **b**.

Горниот доказ важи само за случајот кога векторите **a** и **b** не се колинеарни. Случајот $\mathbf{a} \| \mathbf{b}$ му се остава на читателот (в. вежба 8).

Да забележиме дека погоре изнесеното правило за собирање на вектори е познато под името **правило на триаголник**, макар што во случајот кога **a** и **b** се колинеарни, векторите **a**, **b** и $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ не образуваат триаголник.

Ќе направиме уште една забелешка. За кое било непразно множество M, секое пресликување $f : M \times M \to M$ се вика **операција во** M (в. I. **1.3**). Ако со V го означиме множеството од сите вектори во просторот, тогаш е јасно дека со горното правило (според кое на секој пар вектори $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ му е придружен векторот $\mathbf{a} + \mathbf{b}$) е определено едно пресликување од $V \times V$ во V. Значи, *собирањето на вектори е операција во* V.

Ќе покажеме прво дека операцијата собирање на вектори ги има "обичните" својства на собирањето на броеви.

Теорема 1.

Нека V е множеството вектори. За кои било три вектори

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ *имаме:*

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (*комутативност*);

(ii) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (*асоцијативност*);

(iii) $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{o} (= \mathbf{o} + \mathbf{a})$ ($\mathbf{o}$ *е неутрален елемент*);

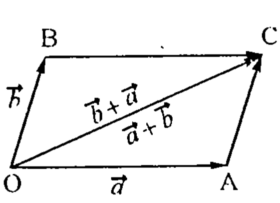
(iv) *За секој вектор* $\mathbf{a} \in V$ *постои еднозначно определен вектор* $\mathbf{d} \in V$, *таков што* $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{o}$.

Векторот $\mathbf{d}$ ќе го означуваме со $-\mathbf{a}$; тој е **спротивен** на $\mathbf{a}$.

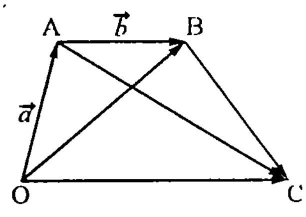
Доказ. (i) Да ја докажеме прво комутитативноста. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се произволни вектори и нека ги врземе во иста точка O. Притоа, крајот на $\mathbf{a}$ нека биде во точката A, а крајот на $\mathbf{b}$ во B, т.е. $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Да го конструираме паралелограмот $OACB$ (црт. 5). Тогаш, според дефиницијата за еднаквост на вектори, имаме: $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, па од триаголникот OAC добиваме дека $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, а од триаголникот OCB добиваме $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Така, значи, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Макар што при доказот на (i) претпоставивме (имплицитно) дека векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни, читателот може лесно да се увери дека тоа е точно и кога овие вектори се колинеарни.

Со горниот доказ е установено таканареченото **правило на паралелограм** за конструирање на збирот од два вектора: ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се два неколинерани вектори врзани на иста точка O, тогаш нивниот збир е векторот положен по дијагоналата на паралелограмот, кој е конструиран над векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, со почетна точка во O и крајна точка во темето од паралелограмот што е спротивно на O.



Црт. 5



Црт. 6

(ii) Нека сега $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се произволни вектори, нека O е произволна точка и нека $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$ (црт. 6). Тогаш

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \quad \text{и}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

т.е. точен е и асоцијативниот закон.

(iii) Од дефиницијата за собирање имаме $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ за секој вектор **a**.

(iv) На крајот, ако за кој било вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ го означиме со $-\mathbf{a}$ векторот $\overrightarrow{AO}$, ќе добиеме дека $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Со тоа теоремата е докажана. ◊

Ако се потсетиме на поимот група (в. **I.1.5**), докажаната теорема можеме да ја формулираме и на следниов начин:

Теорема 1′.

Множеството V од сите вектори е група[1] *во однос на операцијата собирање на вектори.* ◊

Да споменеме две последици од Т. 1.

Теорема 2.

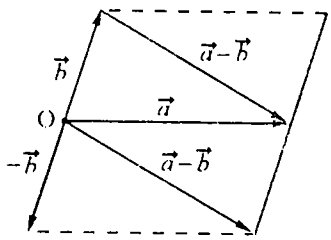
За кои било два вектора **a** *и* **b** *постои еднозначно определен вектор* **c** *таков што* $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Доказот на Т. 2 следува директно од Т. 1 и од вежбата 5 во **I.1.5.** ◊

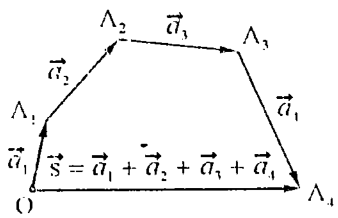
Векторот **c**, определен во Т. 2, го викаме **разлика** од векторите **a** и **b**; тој се добива како збир од векторите **a** и $-\mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{c} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$; натаму, наместо $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, ќе пишуваме $\mathbf{a} - \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Да забележиме дека $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ е векторот положен по дијагоналата на паралелограмот, конструиран над векторите **a** и **b**, која ги сврзува крајните точки на **a** и **b** (црт. 7).



Црт. 7



Црт. 8

[1] Да потсетиме дека, според договорот направен во I.1.5, комутативноста на операцијата кај една група се подразбира.

Како последица од асоцијативноста на собирањето се добива дека збирот на кој било конечен број вектори не зависи од распоредот на заградите, а поради комутативноста, тој не зависи ниту од распоредот на собироците (читателот може да ги докаже сам овие тврдења со помош на принципот на математичката индукција).

За да се конструира збирот на конечен број собироци може да се користи **правилото на полигон**, кое претставува обопштување на правилото на триаголник: збирот $\mathbf{s}$ на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ може да се добие ако првиот собирок се прикачи на произволна точка O, а секој нареден собирок треба да се надоврзи на крајната точка од претходниот собирок: векторот $\mathbf{s}$ тогаш има почеток во O а крај во крајната точка на последниот собирок (на црт. 8 е претставен случајот $n = 4$).

Вежби

1. Дадени се векторите $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n} + \mathbf{p}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n} - 2\mathbf{p}$. Да се определи трет вектор $\mathbf{c}$ кој со векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образува триаголник.

2. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Нека $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. Да се изразат со помош на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторите: $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DB}$.

3. Нека A, B, C се три произволно избрани точки и нека $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CA}$. Да се пресмета: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

4. Нека A, B, C, D се четири произволно избрани точки. Да се пресмета: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$.

5. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни вектори,
   а) со иста насока,

   б) со спротивни насоки.

   Да се одреди насоката и должината на векторот $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

6. Какви треба да бидат векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} (\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o})$ за да важат равенствата:

   а) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$; б) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$;

   в) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$; г) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

7*. Со помош на вектори, да се докаже дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали се преполовувааат.

8. Нека $\mathbf{a} \| \mathbf{b}$. Да се докаже дека збирот $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ не зависи од конкретно избраните претставници на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

1.3. Множење на вектор со реален број

Ќе дефинираме опрерација *множење на вектор со број.*

Под **производ** на реалниот број λ и векторот $\mathbf{a}$ го подразбираме векторот $\lambda\mathbf{a}$ таков што[1]):

(i) $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|$,

(ii) $\lambda\mathbf{a}$ е колинеарен со $\mathbf{a}$,

(iii) за $\lambda > 0$ векторот има иста насока како $\mathbf{a}$, а за $\lambda < 0$, $\lambda\mathbf{a}$ има спротивна насока од насоката на $\mathbf{a}$.

Од оваа дефиниција директно се добива дека:

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}; \qquad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}; \qquad 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o} = \lambda \cdot \mathbf{o}, \tag{1}$$

за кој било вектор $\mathbf{a}$ и реален број λ.

Според изнесената дефиниција, $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ се колинеарни вектори. Но, точно е и обратното:

Теорема 1.

За секој вектор $\mathbf{b}$ *колинеарен со векторот* $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ *постои реален број* λ, *таков што* $\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}$.

Доказ. За $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, ако ставиме $\lambda = 0$, ќе добиеме $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Нека $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$. Ако $\mathbf{b}$ има иста насока како и $\mathbf{a}$, тогаш бројот $\lambda = b/a$ го има својството $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, а ако $\mathbf{b}$ има спротивна насока од $\mathbf{a}$, тогаш тоа својство го има бројот $\lambda = -b/a$. Притоа: $b = |\mathbf{b}|$, $a = |\mathbf{a}|$. $\diamondsuit$

Операцијата множење на вектор со реален број го има и следново својство:

Теорема 2.

За кои било вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *и кои било реални броеви* λ *и* μ, *точни се следниве равенства*:

(а) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$; (б) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;

(в) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

Доказ. Точноста на овие три равенства лесно се покажува користејќи ја дефиницијата за производ на реален број и вектор. Ќе го докажеме само последното од тие равенства:

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

Да претпоставиме прво дека $\lambda > 0$. Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни, тогаш равенството (в) следува од (а) и (б); имено, за $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ тоа е очигледно, а за $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ можеме да ставиме $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, па тогаш

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}) = \lambda[(1 + \mu)\mathbf{a}] = [\lambda(1 + \mu)]\mathbf{a} =$$
$$= (\lambda + \lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

---

[1]) Наместо $\lambda\mathbf{a}$ можеме да пишуваме $\mathbf{a}\lambda$; но, ние ќе се држиме главно за ознаката $\lambda\mathbf{a}$.

Нека **a** и **b** не се колинеарни и нека $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ (црт. 1). Тогаш: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\lambda\mathbf{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \overrightarrow{OB_1}$, каде што $\vec{A}_1$ и $\vec{B}_1$ лежат на правите што минуваат низ O и A, односно низ O и B. Триаголниците OA_1B_1 и OAB се слични (бидејќи имаат заеднички агол при темето O и $\overline{OA_1} : \overline{OA} = \lambda = \overline{OB_1} : \overline{OB}$), па според тоа $\overline{A_1B_1} : \overline{AB} = \lambda$. Поради $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, имаме $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\mathbf{b}$. На тој начин добиваме дека

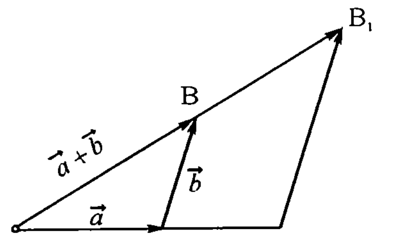
$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},$$

со што равенството (в) е докажано при $\lambda > 0$.

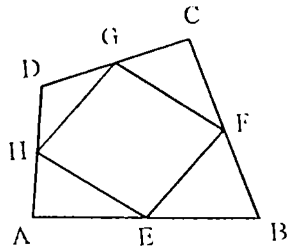
Нека е сега $\lambda < 0$. Од Т. 1 односно Т. 1′ во **1.2**, како и вежбите 5 и 6 во **I.1.5**, следува дека $-(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{b})$ (што е јасно и од геометриски причини). Имајќи го предвид тоа равенство, потоа равенството $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ од (1), како и равенството (в) од Т. 2 за случајот $\lambda > 0$, а ставајќи $\lambda = (-1)\mu$, $\mu > 0$, добиваме:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (-1)\mu(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (-1)[\mu(\mathbf{a}+\mathbf{b})] = -(\mu\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \\ &= [-\mu\mathbf{a})] + [-(\mu\mathbf{b})] = [(-1)(\mu\mathbf{a}) + [(-1)(\mu\mathbf{b})] = \\ &= [(-1)\mu]\mathbf{a} + [(-1)\mu]\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Со тоа доказот е завршен. ◊



Црт. 1



Црт. 2

Претходната теорема како и својствата за собирањето, натаму често ќе ги користиме; притоа, таму каде што ќе биде користено некое од овие својства нема секогаш посебно да се нагласува кое својство и врз основа на што е користено.

ПРИМЕР 1. Да изнесеме една примена на векторите во планиметријата. Имено, ќе докажеме дека сврзниците на средините на страните од произволен четириаголник формираат паралелограм.

За таа цел, да ги означиме темињата на четириаголникот и средините на страните како што е направено на црт. 2; добиваме:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Според тоа $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, а тоа значи дека две спротивни страни на четириаголникот $EFGH$ се паралелни и еднакви, т.е. тека тој е паралелограм.

За множењето на вектор со број, со помош на дефиницијата и својствата (1) и Т. 1, лесно се покажува почноста и на следново тврдење:

Тврдење 3 (закон за кратење).

Ако **a** *и* **b** *се вектори, а* λ *и* μ *се броеви, тогаш:*

а) $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \lambda = 0$ или $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

б) $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ и $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} \Rightarrow \lambda = \mu$.

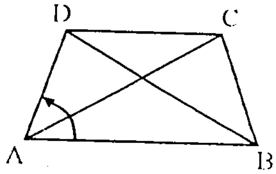
в) $\lambda \neq 0$ и $\lambda\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$. $\diamondsuit$

Забелешка 1. Со дефиницијата за моножење на реален број λ и вектор **a** е определено едно правило, според кое на секој подреден пар $(\lambda, \mathbf{a})$ му е придружен вектор $\lambda\mathbf{a}$, т.е. е определено едно пресликување $(\lambda, \mathbf{a}) \mapsto \lambda\mathbf{a}$ од $\mathbf{R}\times V$ во V. Затоа, можеме да сметаме дека, *множењето на реален број и вектор е "надворешна" операција во* V (зашто резултатот е во V, но првата компонента λ не е од V).

Забелешка 2. Скаларните величини се наполно окарактеризирани со нивниот мерен број, т.е. со реален број. Во таа смисла, за операцијата *"множење на реален број и вектор"* се употребува и терминот *"множење на скалар и вектор"*.

Вежби

1. Даден е $\triangle ABC$ и $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$. Да се изразат векторите, положени на тежишните линии $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ со помош на векторите **a** и **c**.
2. Да се покаже дека векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$, положени на тежинските линии од $\triangle ABC$, формираат триаголник.
3. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи $\overline{AB} = 16$ и $\overline{CD} = 8$, и нека $\overrightarrow{DC} = \mathbf{b}$. Да се изразат со помош на **b** векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$, каде што MN е средната линија на трапезот.
4. Во рамнокракиот трапез $ABCD$ е позната долната основа $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, бочната страна $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ и аголот меѓу нив $\angle A = \pi/3$. Да се изразат со **a** и **b** сите вектори што се положени на останатите страни и на дијагоналите (црт. 3).



Црт. 3

5. Да се упрости изразот $5(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) - 3(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 4(\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

6. Да се реши векторската равенка (по непознатиот вектор $\mathbf{x}$):
$2\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{x}) = 4\mathbf{a} + \mathbf{x} - \mathbf{b}$.

7. Даден е ромбот $ABCD$. Да се изразат векторите $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ со помош на векторите $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{BD}$.

8. Нека AB е дијаметар на една кружница со центар O и нека M е произволна точка. Да се докаже дека $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$.

9. Каква врска постои меѓу $\lambda, \mu, \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, ако е точно равенството $\lambda\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$?

10. Да се покаже дека за кои било вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и кои било скалари λ и μ, точни се следниве равенства:

а) $\lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$; б) $(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{a}$.

1.4. Колинеарни и компланарни вектори

Колинеарни ги нарековме оние вектори (в. **1.1**) чии претставници лежат на иста права. Притоа, нултиот вектор е колинеарен со секој друг вектор.

Компланарни, пак, ќе ги наречеме оние вектори, чии претставници, нанесени во една точка, лежат во иста рамнина. Очигледно, кои било два вектора се компланарни.

Ќе изнесеме неколку својства на колинеарните и компланарните вектори. Покрај самостојниот интерес, тие се важни и поради нивната натамошна примена.

Теорема 1.

Векторите $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *се колинеарни ако и само постојат два реални броја* λ *и* μ, *од кои барем едниот е различен од нула, такви што* $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Доказ. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни. Ако се нули, тогаш $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = 0$ за кои било $\lambda, \mu \neq 0$. Ако барем едниот од векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ е различен од нула, на пример $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, тогаш според Т. 1. од **1.3** постои λ, таков што $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ од каде што се добива $\lambda\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Обратно, нека $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{o}$ и, на пример $\mu \neq 0$. Тогаш $\mathbf{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\mathbf{a}$, па од дефиницијата за множење на вектор со реален број следува дека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни. ◊

Штотуку докажаната теорема има една важна

Последица 1. *Ако векторите* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *се неколинеарни, тогаш*

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{o} \Rightarrow \lambda = \mu = 0 .$$

Доказ. Спротивната претпоставка доведува до противречност со оглед на Т. 1. ◊

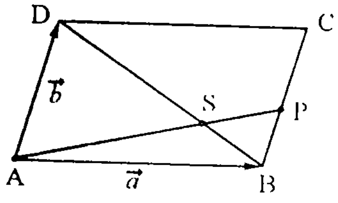
Овој резултат може да се искористи при решавањето на редица задачи од следниот вид.

ПРИМЕР 1. Нека $ABCD$ е паралелограм, $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ и нека P е точка на страната BC, таква што $\overline{BP} : \overline{BC} = 1 : 3$ (црт. 1). Да се најде односот $\overline{BS} : \overline{BD}$, каде што S е пресечната точка на отстечките на BD и AP.

Решение. Од една страна имаме $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AP} - \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}) - \mathbf{a}$, а од друга страна:

$$\overrightarrow{BS} = \mu\overrightarrow{BD} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

По изедначувањето на десните страни, добиваме



Црт. 1

$$\lambda(\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}) - \mathbf{a} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad \text{т.е.} \quad (\lambda + \mu - 1)\mathbf{a} + \left(\frac{1}{3}\lambda - \mu\right)\mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

Бидејќи векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни, според последицата од Т. 1. го добиваме следниот систем равенки (по λ и μ): $\lambda + \mu - 1 = 0$, $\mu - \lambda/3 = 0$. Решение на овој систем е $\lambda = 3/4$, $\mu = 1/4$. Значи, $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$, па $\overline{BS} : \overline{BD} = 1 : 4$.

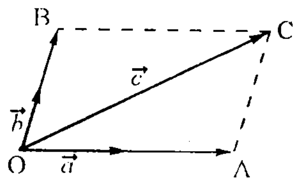
Уште неколку интересни примени на последицата 1 од Т. 1 ќе бидат изнесени во вежбите, а овде неа ќе ја искористиме при докажувањето на наредната теорема.

Теорема 2.

Нека $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *се неколинеарни вектори. За секој вектор* $\mathbf{c}$, *компланарен со* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *постојат еднозначно определени реални броеви* λ *и* μ, *такви што*

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

Доказ. Најнапред ќе докажеме дека постојат броеви λ и μ со изнесеното својство. Да ги врземе векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ на иста точка O (црт. 2) и рамнината во која лежат $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ да ја означиме со Σ. Поради



Црт. 2

неколинеарноста на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, правата што минува низ C (крајната точка на векторот $\mathbf{c}$) и е паралелна со $\mathbf{b}$, мора да лежи во Σ и со правата на која лежи векторот $\mathbf{a}$ се сече во некоја точка A. Слично, правата што минува низ C паралелно на $\mathbf{a}$ ја сече правата на која лежи $\mathbf{b}$ во некоја точка B. Бидејќи $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}$ и

$\overrightarrow{OB}$ се, по пар, колинеарни, постојат реални броеви λ и μ, такви што $\overrightarrow{OA} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mu\mathbf{b}$, а тогаш $\mathbf{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.

Да докажеме сега дека погоре определените λ и μ се единствените броеви со тоа својство. Навистина, ако $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b}$, тогаш од $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a} + \mu_1\mathbf{b}$ се добива $(\lambda - \lambda_1)\mathbf{a} + (\mu - \mu_1)\mathbf{b} = \mathbf{o}$, па според последицата 1 од Т. 1, од последното следува дека $\lambda - \lambda_1 = \mu - \mu_1 = 0$, т.е. $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, со што теоремата е докажана. $\diamondsuit$

Да забележиме дека обратното тврдење е, очигледно, точно, т.е. за кои било два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и кои било два реални броја λ и μ , векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ се компланарни. Со помош на теоремата 2 и последнава забелешка слично како и за теоремата 1, се докажува дека е точна и следнава:

Теорема 3.

Векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *се компланарни ако и само ако постојат реални броеви* λ, μ *и* ν, *од кои барем еден не е нула, такви што* $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{o}$. $\diamondsuit$

Аналогно на последицата 1, од Т. 3 се добива:

Последица 2. *Ако векторите* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *не се компланарни, тогаш*

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{o} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0. \quad \diamondsuit$$

Ќе изнесеме уште една, многу важна теорема.

Теорема 4.

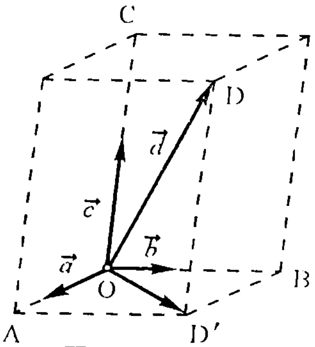
Нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *се три некомпланарни вектори; тогаш за секој вектор* $\mathbf{d}$ *постојат, притоа еднозначно определени, реални броеви* λ, μ *и* ν, *такви што*

$$\mathbf{d} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b} + \nu\,\mathbf{c}.$$

Доказ. Еднозначноста на λ, μ и ν со наведеното својство се докажува со помош на П. 2, слично како и еднозначноста на λ и μ во теоремата 2. За да го завршиме доказот на оваа теорема треба да ја установиме само егзистенцијата на λ, μ и ν за кои важи теоремата. Да ги врземе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ на иста точка O и да ја означиме со D крајната точка на векторот $\mathbf{d}$ (црт. 3). Ако низ D повлечеме рамнина паралелна со рамнината во која лежат векторите $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, тогаш поради некомпланарноста на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, таа рамнина ќе ја сече правата на која лежи векторот $\mathbf{a}$ во некоја точка A; притоа $\overrightarrow{OA} = \lambda\mathbf{a}$.

На ист начин се добиваат и точките B и C, такви што $\overrightarrow{OB} = \mu\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \nu\mathbf{c}$. Ако D' е проекцијата од D врз рамнината на векторите **a** и **b** земена паралелно со векторот **c**, тогаш $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}$. Поради $\overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{OC}$, добиваме

$$\begin{aligned}\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D} = \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \\ &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}.\end{aligned}$$



Црт. 3

Да забележиме дека истото ќе важи и кога **d** е компланарен со кои било два од векторите **a**, **b** и **c**. На пример, ако **d** е компланарен со **a** и **b**, тогаш $D' = D$, па $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$. ◊

Ќе изнесеме уште неколку резултати за колинеарност и компланарност на вектори.

Тврдење 5.

Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ *се вектори и* x_i, y_i $(i = 1, 2)$ *се броеви, такви што*

$$\mathbf{p} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b}, \qquad \mathbf{q} = y_1\mathbf{a} + y_2\mathbf{b}. \tag{$*$}$$

i) *Ако* **a** *и* **b** *се колинеарни, такви се и* **p** *и* **q**.

ii) *Ако* **p** *и* **q** *се неколинеарни, такви се и* **a** *и* **b**.

Доказ. i) За случајот кога барем еден од векторите **a** и **b** е нулти, тврдењето е непосредно јасно од $(*)$. Нека **a** и **b** се колинеарни, но различни од **o**. Според Т. 1 од **1.3**, постои скалар λ, таков што $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Заменувајќи во $(*)$ добиваме

$$\mathbf{p} = x_1\mathbf{a} + x_2(\lambda\mathbf{a}) = (x_1 + x_2\lambda)\mathbf{a}, \qquad \mathbf{q} = (y_1 + y_2\lambda)\mathbf{a}.$$

Значи, **p** и **q** се колинеарни со **a**, па следствено тие се и меѓусебно колинеарни.

ii) Точноста на тврдењето ii) следува од точноста на i), зашто ii) е контрапозиција на i) (в. **I.1.3**). ◊

Точно е следново, аналогно тврдење:

Тврдење 6.

Нека **a**, **b**, **c**, **p**, **q**, **r** *се вектори и* x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3)$ *се броеви такви што*

$$\mathbf{p} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c}, \qquad \mathbf{q} = y_1\mathbf{a} + y_2\mathbf{b} + y_3\mathbf{c}, \qquad \mathbf{r} = z_1\mathbf{a} + z_2\mathbf{b} + z_3\mathbf{c}.$$

i) *Ако* **a**, **b** *и* **c** *се компланарни, такви се и* **p**, **q** *и* **r**.

ii) *Ако* **p**, **q** *и* **r** *се некомпланарни, такви се и* **a**, **b** *и* **c**. ◊

На крајот од овој дел ќе изнесеме неколку важни поими што често ќе ги сретнуваме.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ се вектори и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ се реални броеви. Векторот

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$$

го викаме **линеарна комбинација** од векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ образувана со броевите $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ако барем еден од броевите $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ е различен од нула, а $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$, тогаш за векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ велиме дека се **линеарно зависни**. Во спротивниот случај, т.е. кога

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

за $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ велиме дека се **линеарно независни**.

Со помош на овие поими, можеме да ги искажеме Т. 1 до Т. 4, како и П. 1 и П. 2. На пример:

1⁰. **a** *и* **b** *се колинеарни* ⇔ **a** *и* **b** *се линеарно зависни* (Т. 1).

2⁰. **a**, **b** *и* **c** *се компланарни* ⇔ **a**, **b** *и* **c** *се линеарно зависни* (Т. 3).

3⁰. *Ако* **a**, **b** *и* **c** *се три линеарно независни вектори, тогаш секој вектор* **d** *може еднозначно да се претстави како нивна линеарна комбинација* (Т. 4).

4⁰. *Ако векторите* **a** *и* **b** *не се колинеарни, тогаш* $0\cdot\mathbf{a} + 0\cdot\mathbf{b}$ *е единствената линеарна комбинација на* **a** *и* **b** *што е еднаква со* **o** (П. 1).

5⁰. *Кои било четири (или повеќе) вектори се линеарно зависни.*

Вежби

1. Нека векторите **a** и **b** не се колинеарни. Да се определат непознатите x и y така што:

   а) $(3x - 2y)\mathbf{a} + (2x + y - 7)\mathbf{b} = \mathbf{o}$; б) $(3x - 2y)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (2 - 3y)\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

2. Даден е паралелограмот $ABCD$. Отсечката DS, каде што S е средната точка на AB, ја сече AC во точката T. Да се најде односот $\overline{AT} : \overline{AC}$.

3. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека M е средината на страната AB, а P е точката од страната DC, таква што $\overline{DC} : \overline{PC} = 3 : 1$. Нека S е пресекот на AC и MP. Да се најде односот $\overline{MS} : \overline{SP}$.

4. Нека векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се линеарно независни. Провери дали се линеарно зависни или независни векторите $\mathbf{p}$ и и $\mathbf{q}$, ако:
а) $\mathbf{p}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{q}=\mathbf{o}$; б) $\mathbf{p}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{q}=\mathbf{b}$; в) $\mathbf{p}=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{q}=-2\mathbf{a}+6\mathbf{b}$.

5. Знаејќи го разложувањето на векторите $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$, по трите некомпланарни вектори $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, да се провери дали $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$, се линеарно зависни:
а) $\mathbf{x}=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{y}=-4\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\mathbf{z}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$;
б) $\mathbf{x}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{y}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{z}=-\mathbf{a}+\mathbf{c}$.

6. Нека $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ се некомпланарни и $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ се три вектори. Да се покаже дека $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ се некомпланарни ако и само ако постојат броеви x_i, y_i, z_i $(i=1,2,3)$ такви што
$$\mathbf{a}=x_1\mathbf{p}+x_2\mathbf{q}+x_3\mathbf{r},\quad \mathbf{b}=y_1\mathbf{p}+y_2\mathbf{q}+y_3\mathbf{r},\quad \mathbf{c}=z_1\mathbf{p}+z_2\mathbf{q}+z_3\mathbf{r}.$$

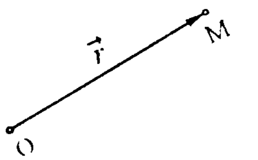
1.5. Координати на вектори и нивни линеарни комбинации

При работа со векторите понекогаш е корисно да се избере некој специјален претставник на даден вектор. Таков случај имаме, на пример, кога избереме една фиксна точка во просторот и секој вектор го приврзуваме за неа, т.е. O ја земаме за почетна точка на секој вектор. Ако $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$ е еден таков вектор (со почетна точка O и крајна точка M), тогаш $\mathbf{r}$ го нарековме (в. **1.1**) **радиус–вектор на точката** M (црт. 1). Јасно е дека $\mathbf{r}$ е еднозначно определен од точката M, а и обратно. Затоа можеме да пишуваме $\mathbf{r}(M)$ или $\mathbf{r}_M$ наместо $\mathbf{r}$.

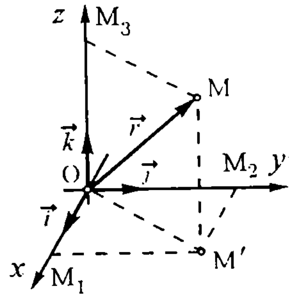
Поимот радиус–вектор ќе го искористиме за воведување на поимот координати на вектор односно координати на точка.

Како и во рамнината, еден од наједноставните и најчесто користени просторни координатни системи е правоаголниот декартов координатен систем. Да избереме во просторот една фиксна точка O и на неа да приврземе три заемно нормални и еднакви по должина вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Должината на овие вектори ќе ја избереме за единична мерка, т.е. $|\,\mathbf{i}\,|=|\,\mathbf{j}\,|=|\,\mathbf{k}\,|=1$.

Системот што се состои од точката O и трите прави низ O на кои се положени векторите $\mathbf{i},\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ ќе го викаме **просторен правоаголен декартов координатен систем** (но ние натаму ќе велиме кусо, само **координатен систем**). Точката O ја викаме **координатен почеток**, а правите од системот – **координатни оски**; притоа, правата Ox на која е положен векторот $\mathbf{i}$ ќе ја викаме x–**оска**, или **апсцисна оска**, правата Oy на која е положен векторот $\mathbf{j}$ – y–**оска** или **ординатна оска** и правата Oz на која е положен векторот $\mathbf{k}$ – z–**оска** или **апликатна оска**. За позитивна насока на секоја од овие оски ја земаме насоката на соодветниот од векторите $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Ако $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ се подредени како палецот, показалецот и средниот прст на десната рака, соодветниот координатен систем ќе го викаме **десен**.



Црт. 1



Црт. 2

На црт. 2 е претставен еден десен систем; ако не е поинаку кажано, натаму, под "координатен систем" ќе подразбираме "десен координатен систем", за разлика од **левиот** при кој **i**, **j** и **k** се подредени како палецот, показалецот и средниот прст од левата рака.

Нека сега **a** е произволен вектор. Според Т. 4 од **1.4**, постојат еднозначно определени броеви x, y, z такви што $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Обратно, со секоја тројка реални броеви x, y, z еднозначно е определен преку **i**, **j**, **k** векторот $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

На тој начин добиваме дека при избрани **i**, **j** и **k**, постои обратноеднозначно пресликување од множеството вектори на множеството подредени тројки реални броеви (x, y, z). Со други зборови, *секој вектор може да биде наполно окарактеризиран со една подредена тројка реални броеви.* За реалните броеви x, y z, такви што

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1}$$

велиме дека се **координати на векторот a** во однос на координатните вектори **i**,**j** и **k** и пишуваме

$$\mathbf{a} = (x, y, z)_{i,j,k}, \quad \text{или просто} \quad \mathbf{a} = (x, y, z), \tag{2}$$

ако однапред се знаат координатните вектори.

Да забележиме дека *координатите на еден вектор зависат само од координатните вектори, а не и од координатниот почеток.*

Непосредно од дефиницијата за еднаквост на два вектори следува дека *векторите* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *и* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *се еднакви ако и само ако соодветните координати им се еднакви*, т.е.

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \;\Leftrightarrow\; a_1 = b_1,\, a_2 = b_2,\, a_3 = b_3. \tag{3}$$

Да го разгледаме прашањето за воведување координати на точки. Нека M е произволно избрана точка во просторот и $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}$ (црт. 2), т.е. $\mathbf{r}_M$ е радиус–вектор на точката M. Како што споменавме погоре, со секоја точка M еднозначно е определен нејзиниот радиус–вектор $\mathbf{r}_M$, а и обратно, секој вектор $\mathbf{r}$, надоврзан на координатниот почеток, еднозначно определува со својот крај една точка M во просторот. Поради тоа сосема е природна следната дефиниција.

Под **координати на точката** M во однос на правоаголниот декартов координатен систем ќе ги подразбираме координатите на нејзиниот радиус–вектор, т.е. ако $\mathbf{r}_M = (x,\, y,\, z)$, тогаш x, y и z ќе ги викаме **координати на** M **и ќе пишуваме** $M(x, y, z)$.

Според доказот на Т. 4 од **1.4**, ако се земе предвид дека векторите $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ се заемно нормални и со должина 1, се добива дека x, по апсолутна вредност, е еднаков со должината на отсечката OM_1, каде што M_1 е ортогоналната проекција од M врз оската Ox; знакот на x е позитивен ако M_1 се наоѓа на позитивниот дел од таа оска, а негативен во спротивниот случај. Слична геометриска интерпретација се добива и за другите две координати на произволна точка M (црт. 2).

Координатите x, y, z на точката M се викаат соодветно и: **апсциса, ордината, апликата** на точката M.

Во врска со забелешката за независност на координатите на еден вектор од координатниот почеток, да уочиме дека со координатите на точките тоа не е случај. Имено, овде е важен изборот на координатниот почеток, бидејќи дефиницијата на радиус–вектор на една точка, преку кој го воведовме поимот за координати на точка зависи од изборот на координатниот почеток.

Да видиме сега како може да се добијат координатите на збирот од два вектора и на производот од вектор и реален број. Ќе ја покажеме точноста на следнава

Теорема 1.

Ако $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *и* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *се кои било вектори, а* λ *е произволен реален број, тогаш*

а) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1,\quad a_2+b_2,\quad a_3+b_3)$,

б) $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1,\, \lambda a_2,\, \lambda a_3)$.

Доказ. Имајќи ги предвид (2) и (1), добиваме:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})+(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = (a_1+b_1)\mathbf{i}+(a_2+b_2)\mathbf{j}+(a_3+b_3)\mathbf{k},$$

$\lambda\,\mathbf{a} = \lambda(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}) = \lambda(a_1\mathbf{i})+\lambda(a_2\mathbf{j})+\lambda(a_3\mathbf{k}) = (\lambda a_1)\mathbf{i}+(\lambda a_2)\mathbf{j}+(\lambda a_3)\mathbf{k}$, од што следува точноста на тврдењето. $\diamondsuit$

На читателот му оставаме да ја докаже, со помош на Т. 1, следнава:

Теорема 2.

Координатите на една линеарна комбинација од кој било конечен број вектори се исти такви комбинации (образувани со истите реални броеви) од координатите на векторите со кои е образувана линеарната комбинација, т.е. ако

$\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *тогаш*

$$\mathbf{c} = (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n, \quad \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n). \quad \diamondsuit$$

Порано (Т. 1 од **1.3**) видовме дека, ако $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, тогаш секој вектор $\mathbf{b}$, колинеарен со $\mathbf{a}$, може да се претстави во облик: $\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}$. Од ова, ако се има предвид дека $\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$, се добива дека е точна и следнава

Теорема 3.

Векторите $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *и* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *се колинеарни ако и само ако нивните соодветни координати се пропорционални, т.е.*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\,. \tag{4}$$

(Притоа, ако е, на пример, $b_3 = 0$, во (4) ќе имаме $a_3/0$; тоа е само ознака дека $a_3 = 0$; го исклучуваме случајот $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, зашто тогаш $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, па во тој случај секој вектор $\mathbf{a}$ е колинеарен со $\mathbf{b}$). $\diamondsuit$

Да разгледаме неколку примери.

ПРИМЕР 1. Да ги одредиме координатите на векторот $\overrightarrow{AB}$ ако се познати координатите на точките A и B: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ во однос на почетокот O (црт. 3).

Според дефиницијата за координати на точка, имаме

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)\,.$$

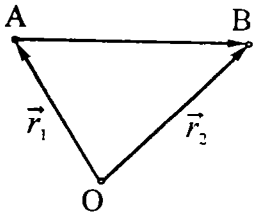
Бидејќи $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, според Т. 1 добиваме

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ ,z_2 - z_1). \tag{5}$$

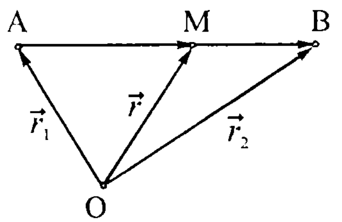
ПРИМЕР 2. Нека се дадени точките $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Да видиме кои се координатите на точката M, која лежи на правата AB

и ја дели отсечката AB во даден однос λ, т.е. $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ (црт. 4).

Јасно е дека точката M, од правата AB, е еднозначно определена со бројот λ, при што M лежи меѓу A и B кога $\lambda > 0$, а M е надвор од отсечката AB кога $\lambda < 0$.



Црт 3



Црт. 4

Да ги означиме со x, y, z координатите на точката M, т.е. $M(x, y, z)$. Според дефиницијата за координати на точка, можеме да ставиме $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Од црт. 4 гледаме дека $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \overrightarrow{AM}$. Поради $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ имаме,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \overrightarrow{MB} = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}),$$

од каде што $(1 + \lambda)\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2$, т.е. (при $\lambda \neq -1$):

$$\mathbf{r} = \frac{1}{1+\lambda}(\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2). \tag{6}$$

Според Т. 2, за координатите на $\mathbf{r}$ (а тие се координати и на M) ги добиваме формулите

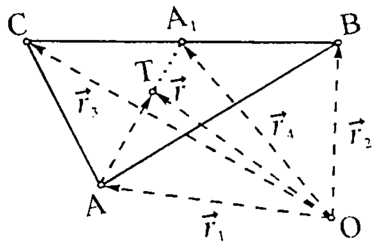
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}, \tag{7}$$

од кои за $\lambda = 1$ (кога M *е средина на отсечката* AB) се добива:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{8}$$

ПРИМЕР 3. Нека $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ се темињата на еден триаголник. Да ги одредиме координатите на неговото тежиште T.

Да ги означиме со x, y, z координатите на T, т.е. $T(x, y, z)$. Ставајќи $\overrightarrow{OT} = \mathbf{r} = (x, y, z)$ $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ и $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{r}_4$, каде што A_1 е средина на отсечката BC (црт. 5), добиваме



Црт. 5

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \overrightarrow{AT} = \mathbf{r}_1 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{r}_1 + \frac{2}{3}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{3}\mathbf{r}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{r}_4,$$

а бидејќи

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_3 + \overrightarrow{CA_1} = \mathbf{r}_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)$$

добиваме дека

$$\mathbf{r} = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3).$$

Преминувајќи на координати, ги добиваме формулите

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}, \tag{9}$$

На крајот ќе укажеме на неколку практични постапки за проверување дали дадени точки или вектори се колинеарни односно компланарни.

1) За да се провери дали се колинеарни (т.е. дали лежат на иста права) три точки A, B и C, дадени со нивните координати, доволно е да се установи дали векторите $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ се колинеарни. Притоа се користат формулата (5) и Т. 3.

2) Проверката дали се компланарни три вектори **a, b** и **c**, дадени со нивните координати, може да се изврши со помош на Т. 3 (т.е. **2⁰**) од **1.4**. Практично тоа значи дека треба да се провери дали системот од три равенки со три непознати λ, μ и ν, што се добива од векторската равенка

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{o}$$

има (или нема) ненулто решение.

3) За да се провери дали четири точки A, B, C, D се компланарни (т.е. дали лежат во иста рамнина), доволно е да се установи дали трите вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ се компланарни. Со тоа оваа задача се сведува на претходната.

Забелешка 1. Сите резултати од овој раздел важат и во случај кога координатните вектори се кои било три некомпланарни вектори. Исто така, за нивната валидност не е битно дали ќе се земе десен или лев координатен систем. Сепак, претпоставката дека координатните вектори се единични и заемно нормални ќе се покаже корисна за координатната форма на скаларниот производ (што ќе биде воведена во **3.2**), а ориентацијата на координатните вектори е битна за векторскиот и мешаниот производ (**3.3** и **3.4**).

Забелешка 2. При решавање на конкретни задачи, обично можеме да го бираме координатниот систем. Така, ако нé интересираат точки од една рамнина (или вектори паралелни со таа рамнина) ги бираме апсцисната и ординатната оска во таа рамнина. Од тоа ќе следува дека секој вектор **a**, паралелен со рамнината, да може да се изрази во облик

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}=(a_1,a_2,0) \tag{10}$$

т.е. неговата трета координата е нула.

Имајќи предвид дека координати на една точка M се координатите на радиус–векторот $\overrightarrow{OM}$, добиваме и дека за сите точки од рамнината третата координата е нула. Поради ова третата координата нема ни да ја пишуваме, т.е. ќе пишуваме $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, односно $M(x,y)$, ако M е точка од рамнината и $\overrightarrow{OM}=(x,y)$. За координати на точки не е ништо ново, бидејќи рамнински координатен систем воведовме уште во **I.1.12.**

Сите својства за координати на вектори разгледувани во овој раздел остануваат во сила за рамнинскиот случај, ако се има предвид дека третата координата е нула. На пример, Т. 3 би гласела:

Теорема 3'.

Два вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *и* $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *се колинеарни ако и само ако*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \quad \text{т.е.} \quad a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0. \quad \diamondsuit \tag{11}$$

(Да се видат и вежбите 11 до 14).

Вежби

1. При избран просторен правоаголен декартов координатен систем $Oxyz$, да се претставaт (со цртеж) следниве вектори:

   а) $\mathbf{a} = (3, 2, 4)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -4)$; б) $\mathbf{a} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 3)$;

   (сметајќи дека се нанесени во точката O).

2. Во избран координатен систем, да се претстави правата што минува низ точките $A(1, 0, 3)$ и $B(2, 4, 3)$.

3. Во избран координатен систем, да се претстави триаголникот

   ABC: $A(2, -1, 3)$, $B(-2, 1, -1)$, $C(2, 3, 4)$.

4. Дадени се точките $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(-1, 1, 1)$ и $D(2, 3, -2)$. Да се најде:

   а) $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$; б) $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$; в) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

5. Да се провери дали се компланарни векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ако:

   а) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (-1, 1, 1)$;

   б) $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, 2, 3)$.

6. Да се провери дали точките $A(2, 1, 3)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(0, 1, 5)$ и $D(1, 2, -1)$ лежат во иста рамнина.

7. Да се определат x и y така што векторот $\mathbf{a} = (x, y, 6)$ да биде колинеарен со векторот $\mathbf{b} = (1, 3, -2)$.

8. Да се провери дали е паралелограм четириаголникот

   $ABCD$: $A(-4, 0, 8)$, $B(-3, 8, 4)$, $C(-1, 5, -3)$ и $D(-2, -3, 1)$

9. Да се најдат координатите на тежиштето на триаголникот

   ABC: $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 5)$, $C(-3, 3, -3)$.

10. Дадени се точките $A(4, 6, 5)$ и $B(6, 4, 1)$. Да се најдат координатите на точката M, така што:

    а) M е средина на отсечката AB;

    б) B е средина на отсечката AM;

    в) M ја дели отсечката AB во однос $1 : 3$.

    Задачите 11-14 се сврзани со забелешката 2, т.е. во нив се работи за точки и вектори од иста рамнина.

11. Да се покаже дека плоштината на $\triangle ABC$: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ може да се пресмета со формулата

    $$P = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - y_3)(y_1 - y_3)|$$

    или

    $$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

    Помош. Да се уочи дека

$$P = \left|\frac{1}{2}ab\,\sin\gamma\right|,$$

каде што $b = \overline{CA}$, $a = \overline{CB}$ и γ е аголот меѓу отсечките CA и CB (црт. 6). Потоа, поради $\gamma = \psi - \varphi$ (каде што φ и ψ се аглите меѓу оската Ox и насочените отсечки CA и CB):

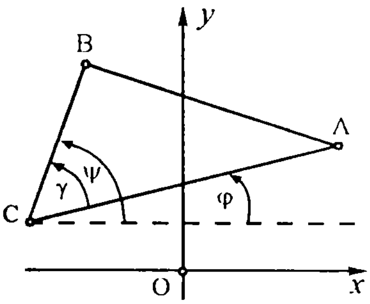
$$\frac{1}{2}ab\,\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\,\sin(\psi - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}(b\,\cos\varphi\, a\,\sin\psi - a\,\cos\psi\, b\,\sin\varphi);$$

на крајот да се стави:

$b\,\cos\varphi = x_1 - x_3$; $b\,\sin\varphi = y_1 - y_3$;

$a\,\cos\psi = x_2 - x_3$; $a\,\sin\psi = y_2 - y_3$.



Црт. 6

12. Да се пресмета плоштината на $\triangle ABC$, ако $A(-2, 1)$, $B(5, 2)$ и $C(3, 4)$.

13. Средините на страните на $\triangle$ се во точките $A_1(2, 3)$, $B_1(4, -1)$, $C_1(-2, 1)$.

Да се најдат:

а) координатите на темињата A, B, C б) плоштината на $\triangle ABC$.

14. Дадени се три темиња од еден паралелограм: $(2, 5)$, $(5, 1)$, $(0, -2)$. Да се најде четвртото теме. Колку решенија има?

IV.2. ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД

Во изнесувањето на некои делови од материјалот во оваа глава ќе ни бидат од полза детерминантните од втор и трет ред. Затоа овде, во овој параграф, ќе се потсетиме на нив, на нивните основни својства и на нивната примена при решавањето на системи линеарни равенки (со две или со три непознати).

2.1. Детерминанти од втор ред и нивна примена

Под **детерминанта** од втор ред се подразбира изразот

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\mathrm{df}}{=} ad - bc, \tag{1}$$

каде што a, b, c, d се дадени реални броеви.

Броевите a, b, c, d се викаат **елементи** на детерминантата; тие се распоредени во две **редици** и две **колони** (првата редица ја сочинуваат a и b, а втората – c и d; првата колона ја сочинуваат a и c, а втората - b и d). Формулата (1) кажува дека детерминантата е еднаква со разликата од производите на елементите од **главната** и **споредната дијагонала** (главната ја сочинуваат a и d, а споредната – c и b).

Неколку својства на детерминантите од втор ред се дадени во вежбата 3. Овде ќе го искористиме поимот детерминанта за да ја преформулираме Т.3 од **1.5** во следниов облик:

1⁰. *Векторите* $\mathbf{a} = a_1, a_2, a_3)$ *и* $\mathbf{b} = b_1, b_2, b_3)$ *се колинеарни ако и само ако*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

(*Според тоа,* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *се неколинеарни ако и само ако барем една од горните детерминанти е различна од нула*).

Со помош на детерминанти од втор ред е згодно да се решаваат **системи линеарни равенки** со две непознати:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 , \\ a_2x + b_2y &= c_1 . \end{aligned} \tag{2}$$

Да се потсетиме дека **решение на системот** (2) се вика секоја подредена двојка броеви (x_0, y_0), таква што по заменувањето на x со x_0 и на y со y_0, секоја од равенките во (2) станува точен исказ.

За системот (2) се вели дека е:

– **решлив**, ако тој има барем едно решение,

– **еднозначно решлив**, ако има едно и само едно решение,

– **нерешлив** (или **противречен**), ако нема ниедно решение.

Горните поими се воведуваат аналогно и за систем линеарни равенки со n непознати ($n \geq 3$).

За наоѓање решение на системот (2) можеме да го примениме *методот на исклучување*. Ако првата равенка од (2) ја помножиме со b_2 (при $b_2 \neq 0$), а втората со $-b_1$ (при $b_1 \neq 0$) и потоа ги собереме, ќе добиеме

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 . \tag{3}$$

Аналогно, множејќи ја првата равенка од системот (2) со $-a_2$, а втората со a_1 и потоа собирајќи ги, ќе имаме

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 . \tag{4}$$

Да ја означиме со D **детерминантата на системот** (2),

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} ,$$

а со D_x и D_y **детерминантите на непознатите**

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} , \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

Да забележиме дека дополнителните детерминанти D_x и D_y се добиваат од детерминантата D на системот (2), со заменување на коефициентите пред назначената непозната со соодветните слободни членови c_1, c_2.

Така, равенките (3) и (4) добиваат вид

$$D\cdot x = D_x , \qquad D\cdot y = D_y , \tag{5}$$

од каде што, кога $D \neq 0$, добиваме дека системот (2) има единствено решение

$$x = \frac{D_x}{D} , \qquad y = \frac{D_y}{D} . \tag{6}$$

Проверката дека овој пар броеви е решение на системот (2), може да се направи со заменување на (6) во (2), а образложение ќе дадеме во дискусијата по тврдењето **3⁰**.

Според тоа, точна е следнава **теорема на Крамер** за систем од две линеарни равенки со две непознати:

2^0. *Ако детерминантата D на системот* (2) *е различна од нула, тогаш тој систем има единствено решение определено со формулите* (6). $\diamond$

Формулите (6) се познати под името **Крамерово правило**.

Забелешка 1. *Ако $D = 0$, тогаш системот* (2) *нема решение* (т.е *е противречен) или има безброј многу решенија*, што може да се заклучи од (5). (Да се види и дискусијата по формулацијата на својството 3^0, во делот 2).)

Забелешка2. Имајќи го предвид фактот што една линеарна равенка $ax + by + c = 0$ (со две непознати x и y), во рамнински координатен систем, геометриски претставува **права** кога барем еден од коефициентите a, b не е нула, следува дека *решението* (x_0, y_0) *на системот равенки* (2) *при кој $D \neq 0$, ја претставува пресечната точка на соодветните прави.*

ПРИМЕР 1. За системот равенки

$$x - 2y = -1, \qquad 2x + 3y = 12$$

имаме:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \qquad D_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 21, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 14,$$

па според (6): $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ е негово (единствено) решение. Парот (3,2) ја претставува пресечната точка на правите определени со дадениот систем.

Да се вратиме на системот (2). Со помош на својствата на векторите од иста рамнина (в.забелешка 2 во **1.5**) се покажува дека е точно следново тврдење:

3^0. *Системот равенки* (2) *е еквивалентен со векторската равенка*

$$\mathbf{c} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b}, \qquad (2')$$

каде што $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ *се дадени вектори од рамнината* Oxy. $\diamond$

Ова тврдење овозможува да се направи комплетна *дискусија за решливоста на системот* (2), на поедноставен начин. Имено, поради својствата на векторите, равенката (2′) е поподесна за анализа отколку системот (2). Имаме два случаја: 1) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни и 2) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни.

1) Да го разгледаме прво случајот кога векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни. Од 1^0 можеме да заклучиме дека:

$1'$. *Два вектора* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *се неколинеарни ако и само ако*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad \diamond$$

Во тој случај векторот **c** може на единствен начин да се претстави во обликот (2′) (т.е. постои еднозначно определен пар броеви (x, y) таков што важи (2′)), а според $\mathbf{3^0}$, тоа значи дека и системот (2) има единствено решение $(x,\ y)$.

Овој факт може да се искористи да заклучиме дека (6) е решение на (2) без да се врши спомената проверка. Имено, (6) се добива од (2) со соодветни "елементарни трансформации", од што следува дека секое решение на (2) е решение и на (6). Но, од друга страна, (2) и (6) имаат само по едно решение, од што следува дека тие решенија се совпаѓаат. (Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата на Крамер, $\mathbf{2^0}$).

2) Да го разгледаме сега случајот кога **a** и **b** се колинеарни.

За $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{o}$, секој пар броеви x, y е решение на (2′), т.е. на (2).

За $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{o} \neq \mathbf{c}$, (2) нема решение (и покрај тоа што $D = D_x = D_y = 0$).

За $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, решение на (2) постои само ако **c** е колинеарен со **b**. Тогаш, постои единствен број y_0, таков што $\mathbf{c} = y_0\mathbf{b}$, па x, y_0 е решение на (2′), т.е. на (2), за секој x. Слична е ситуацијата и за $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

За $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, постои единствен β таков што $\mathbf{b} = \beta\,\mathbf{a}$. Решение постои ако и само ако и **c** е колинеарен со **a**, па во тој случај $\mathbf{c} = \gamma\,\mathbf{a}$ за единствен скалар γ. Тогаш, парот x, y е решение на (2) ако и само ако постои скалар t, таков што $x = \gamma - t\,\beta$, $\quad y = t$.

Со тоа е направена комплетна анализа на решливоста на (2).

Ќе покажеме сега дека е точно следново тврдење:

$\mathbf{4^0}$. *Три вектори* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\quad \mathbf{b} = b_1, b_2, a_3)$, $\quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *се компланарни ако и само ако е точно равенството*

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 = a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1\,. \tag{7}$$

Доказ. Ако **a** и **b** се колинеарни, тогаш според 1^0 имаме: $a_1b_2 = a_2b_1$, $a_2b_3 = a_3b_2$, $a_1b_3 = a_3b_1$ од што следува дека равенството (7) е исполнето. Слично се покажува и во случајот кога **a** и **c**, односно **b** и **c** се колинеарни.

Затоа да претпоставиме дека векторите **a**, **b**, **c** се два по два неколинеарни. Во тој случај **a**, **b**, **c**, се компланарни ако и само ако постојат (единствени) скалари x и y такви што

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}.$$

Оваа равенка е еквивалентна со следниов истем од три линеарни равенки со две непознати x, y:

$$a_1x + b_1y = c_1\,, \qquad a_2x + b_2y = c_2\,, \qquad a_3x + b_3y = c_3\,. \tag{8}$$

Според 1^0, поради неколинеарноста на **a** и **b** можеме да претпоставиме дека, на пример, $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогаш системот од првите две равенки на (8) има единствено решение определено со (6). Заменувајќи во третата равенка од (8), по соодветно средување, се добива (7). А и обратно, претпоставувајќи дека е (7) точно, како и дека $D \neq 0$, лесно се покажува дека x и y определени со (6) се решение на (8), од што следува дека **a**, **b** и **c** се компланарни. ◇

Слично како во $\mathbf{3^0}$, може да се изврши *испитување на систем од две линеарни равенки со три непознати* x, y, z:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1\,, \qquad a_2x + b_2y + c_2z = d_2\,, \tag{9}$$

претпоставувајќи дека $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ зашто, ако тоа не е исполнето, системот (9) ќе има само две непознати. Притоа ќе го користиме следниов факт:

5^0 *Системот* (9) *е еквивалентен со векторската равенка*

$$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}\,, \tag{9'}$$

каде што $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ и $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$, *и* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *се ненулти вектори.* ◇

Да претпоставиме прво дека $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се колинеарни. Тогаш постојат еднозначно определени броеви β и γ, такви што $\mathbf{b} = \beta\mathbf{a}$ и $\mathbf{c} = \gamma\mathbf{a}$, па равенката (9′) е еквивалентна со равенката

$$\mathbf{d} = (x + y\beta + z\gamma)\mathbf{a}\,,$$

од што следува дека решение на (9′) постои само ако $\mathbf{d}$ е колинеарен со $\mathbf{a}$. Тогаш постои единствен број δ таков што $\mathbf{d} = \delta\mathbf{a}$. Според тоа, во овој случај, тројката x, y, z е решение на (9′) ако и само ако

$$x + y\beta + z\gamma = \delta\,. \tag{10}$$

Да претпоставиме сега дека барем два од векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ се неколинеарни, и дека тоа се $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Тогаш, при кој било број z, постои единствен пар броеви x, y такви што тројката x, y, z е решение. За да ги најдеме решенијата, да ставиме

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Бидејќи $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни, следува дека $D \neq 0$. Според тоа, x и y се определени, со помош на произволен избор на z, на следниов начин:

$$D\cdot x = \begin{vmatrix} d_1 - c_1 z & b_1 \\ d_2 - c_2 z & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D\cdot y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & d_2 - c_2 z \end{vmatrix}. \tag{11}$$

ПРИМЕР 2. Да го решиме системот

$$2x - 3y - z = 6\,, \qquad 3x - y - 5z = -5\,.$$

Имаме: $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 7$, па според (11):

$$7x = \begin{vmatrix} 6 + z & -3 \\ -5 + 5z & -1 \end{vmatrix} = 14z - 21\,. \qquad 7y = \begin{vmatrix} 2 & 6 + z \\ 3 & -5 + 5z \end{vmatrix} = 7z - 28\,,$$

т.е. $x = 2z - 3$, $y = z - 4$. Значи, решенија на системот се тројките $x = 2t - 3$, $y = t - 4$, $z = t$, за секој $t \in \mathbf{R}$.

На крајот ќе извршиме подетална *дискусија за решливоста на системот* (9) *кога тој е хомоген*

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0\,, \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0\,, \tag{12}$$

допуштајќи ги и равенствата $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$. *Системот* (12) *е еквивалентен со векторската равенка*

$$x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} + z\,\mathbf{c} = \mathbf{o}\,, \tag{12'}$$

каде што $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2), \mathbf{c} = (c_1, c_2)$, при што се допушта $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, $\mathbf{c} = \mathbf{o}$.

За $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{o}$, решение на (12′) (па значи и на (12)) е секоја тројка броеви x, y, z.

За $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{o}$ и $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, тројката броеви x, y, z е решение ако и само ако $x = 0$.

За $\mathbf{c} = \mathbf{o}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, тројката броеви x, y, z е решение на (12) ако и само ако двојката броеви x, y е решение на системот

$$a_1x + b_1y = 0\,, \qquad a_2x + b_2y = 0\,. \tag{13}$$

Ако, притоа, $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, тогаш $(0, 0)$ е единственото решение на (13), па x, y, z е решение на (12) ако и само ако $x = y = 0$. За $D = 0$ (т.е. ако **a** и **b** се колинеарни), постои единствен број $\beta \neq 0$, таков што $\mathbf{b} = \beta\,\mathbf{a}$, т.е. $b_1 = \beta\,a_1$ и $b_2 = \beta\,a_2$, па (13) се сведува на равенката $x + \beta\,y = 0$. Според тоа, во овој случај, тројката x, y, z е решение на (12) ако и само ако $x = -\beta\,y$.

Преостанува уште случајот кога $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ и $\mathbf{c} \neq 0$, па можеме да ги искористиме резултатите од дискусијата на системот (9) за $d_1 = d_2 = 0$. Според тоа, ако постојат скалари β и γ, такви што $\mathbf{b} = \beta\,\mathbf{a}$ и $\mathbf{c} = \gamma\,\mathbf{a}$ (т.е $b_i = \beta\,a_i$ и $c_i = \gamma\,a_i$, за $i = 1, 2$), тогаш добиваме дека: тројката x, y, z е решение на системот (12) ако и само ако $x + \beta\,y + \gamma\,z = 0$.

Во случај кога $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, тројката x, y, z е решение на (12) ако и само ако

$$D\cdot x = z\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad D\cdot y = z\cdot\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

ПРИМЕР 3. Да го решиме хомогениот систем равенки

$$2x - y - 2z = 0\,, \qquad 3x + y - z = 0\,.$$

Имаме:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\,; \qquad 5x = z\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad 5y = z\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},$$

т.е. $5x = 3z$, $5y = -4z$. Значи, решение на дадениот систем е секоја тројка x, y, z: $x = 3t$, $y = -4t$, $z = 5t$ за секој $t \in \mathbf{R}$.

Вежби

1. Да се пресметаат детерминатите од втор ред:

а) $a)\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1,3 \\ 2,3 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

2. Да се решат равенките

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2x \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2x & 3x \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1/4 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

3*. Да се докаже дека:

а) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$;

в) $k\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix}$, $k \in \mathbf{R}$.

г) $\begin{vmatrix} a+u & b \\ c+v & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix}$, $k \in \mathbf{R}$.

4. Со помош на детерминанти, да се реши системот:

а) $x + 2y = 2$, $x - y = 5$.

б) $4x + 2y = 1$, $6x + 3y = 2$.

в) $3x - 6y = 9$, $-x + 2y = -3$.

5. Да се реши системот

$$x-2y=1\,,\quad 3x-6y=\alpha \qquad (\alpha \text{ е параметар}).$$

6. Да се најде пресекот на правите

$3x+\alpha y=1\,,\quad x-3y=5 \qquad (\alpha$ е параметар).

7. Да се реши системот од две равенки со три непознати:

а) $6x-5y-4z=1\,,$ б) $3x-5y-z=0\,,$

$3x-2y+z=0\,;$ $9x+11y-7z=0\,.$

Во задачите 8 – 12 да се провери дали векторите $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ (односно точките A,B,C,D) се компланарни.

8. $\mathbf{a}=(2,1,-3),\quad \mathbf{b}=(-3,-2,5),\quad \mathbf{c}=(-1,-2,3)\,.$

9. $\mathbf{a}=(0,5,-2),\quad \mathbf{b}=(0,10,-4),\quad \mathbf{c}=(10,15,20)\,.$

10. $\mathbf{a}=(3,6,-1),\quad \mathbf{b}=(4,-3,2),\quad \mathbf{c}=(-3,2,-2)\,.$

11. $A(0,1,2),\quad B(0,-1,-2),\quad C(2,3,4),\quad D(-2,-3,-4)\,.$

12. Дали постои број a таков што точките $A(a,1,2),\ B(0,1,1),\ C(-1,1,2),\ D(1,2,1)$ да се компланарни?

13. Да се покаже дека формулата за плоштина на триаголник чии темиња се дадени со нивните координати (вежба 11 од 1.5) може да се претстави со помош на детерминанта од втор ред:

$$P=\pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}\,,$$

при што се зема знакот "+" ако детерминантата е позитивна, а знакот "−" ако е негативна.

2.2. Детерминанти од трет ред

Детерминанта од трет ред се вика изразот

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\,. \tag{1}$$

Броевите $a_i,b_i,c_i \quad (i=1,2,3)$ се викаат **елементи** на детерминантата; тие се распоредени во **редици** (хоризонтално) и во **колони** (вертикално). Елементите a_1,b_2,c_3 ја сочинуваат **главната дијагонала**, а a_3,b_2,c_1 - **споредната**.

ПРИМЕР 1. Да ја пресметаме детерминантата

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}\,.$$

Со помош на формулата (1), добиваме

$$D=3\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2\end{vmatrix}=-18-28+10=-36\,.$$

Ако ги пресметаме детерминантите од втор ред во формулата (1) и го извршиме собирањето, ќе добиеме дека детерминантата од трет ред претставува збир од шест собироци:

$$D=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1\,, \tag{2}$$

од кои три се земени со знак плус, а три со знак минус.

Како последица од (2) и од тврдењето 4^0 во **2.1** го добиваме следниов:

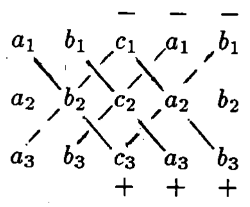
Критериум за компланарност. *Векторите* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *се компланарни ако и само ако*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Според тоа: четири точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *и* $M_3(x_3, y_3, z_3)$ *лежат во една рамнина ако и само ако*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Пресметувањето на една детерминанта од трет ред може да се изврши со помош на дефиничкото равенство (1), како и во Пр. 1, или со помош на (2). Но, потешко се помни, па затоа се користи следниов начин познат под име **Сарусово правило**.



Шема 1

Според ова правило, за да ја пресметаме вредноста на детерминантата, десно од нејзината шема ќе ги допишеме првите две колони, а потоа елементите од новата шема ќе ги поврземе со две фамилии паралелни отсечки, како што е покажано на шемата 1.

Елементите што се наоѓаат на една отсечка се множат, а добиените шест производи се собираат, притоа земени со знак + или со − како што е покажано на шемата 1.

Со тоа ќе се добие збирот

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1,$$

а тоа е десната страна од равенството (2).

Забелешка 1. При пресметувањето на детерминанта со помош на Сарусовото правило, допишувањето на двете колони обично се врши "напамет". На пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 3\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 2 - 5\cdot 1\cdot 3 = -15.$$

Користејќи го равенството (2), лесно се докажуваат **својствата на детерминантите** од трет ред што ќе ги формулираме подолу. Притоа, со D означуваме која било детерминанта од трет ред.

1^0. (Теорема за рамноправност меѓу редиците и колоните). *Детерминантата не се менува ако редиците и колоните ги разменат местата, т.е. ако се изврши симетрија во однос на главната дијагонала.*

Со други зборови:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \diamondsuit$$

2^0. (Промена на знакот при размена на две различни редици.) *Ако при разменување на две различни редици во D се добие детерминантата D', тогаш $D' = -D$.* $\diamondsuit$

3^0. (Множење на детерминанта со број).

Ако D' се добие од D кога сите елементи од една редица на D се помножат со ист број k, тогаш $D' = kD$. $\diamondsuit$

4^0. (Разложување на детерминанта како збир од две детерминанти). *Ако D, D' и D'' се детерминанти такви што, за дадено (фиксно) i, i–тата редица на D е збир од i–тите редици на D' и D'', а другите две редици на D, D' и D'' се еднакви, тогаш $D = D' + D''$.* $\diamondsuit$

Пред да формулираме уште едно својство ќе ги дефинираме и поимите минор, односно алгебарски комплемент. За таа цел елементот од i–тата редица и j–тата колона на една детерминанта D од трет ред ќе го означуваме со a_{ij}. Според тоа:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ако ја прецртаме i–тата редица и j–тата колона, преостанатите елементи определуваат детерминанта Δ_{ij} од втор ред, за која велиме дека е **минор соодветен на елементот** a_{ij}. Така, добиваме девет минори, а подолу ги наведуваме $\Delta_{11}, \Delta_{13}, \Delta_{32}$:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

За бројот $a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ ќе велиме дека е **алгебарски комплемент соодветен на** a_{ij}.

Равенството (1) можеме да го напишеме во облик:

$$D = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{11}a^*_{11} + a_{12}a^*_{12} + a_{13}a^*_{13}, \qquad (1')$$

и велиме дека D *е развиена по својата прва редица.* Лесно се покажува дека детерминантата може да се развие по која било редица, т.е. дека:

5^0. (Разложување на детерминанта по редици). *За секој $i = 1, 2, 3$, точна е формулата*

$$D = a_{i1}a^*_{i1} + a_{i2}a^*_{i2} + a_{i3}a^*_{i3} = 0. \quad \diamondsuit \qquad (3)$$

Да забележиме дека:

$$D = a_{i1}a^*_{k1} + a_{i2}a^*_{k2} + a_{i3}a^*_{k3} = 0, \quad \text{за} \quad i \neq k. \qquad (3')$$

Забелешка 2. Според 1^0, точни се и својствата $\mathbf{2', 3', 4'}$, $\mathbf{5'}$ што се добиваат кога во $\mathbf{2^0, 3^0, 4^0, 5^0}$ "редица" се замени со "колона". Истото се однесува и за својствата што ќе ги докажеме подолу.

6^0. **(Еднакви редици).** *Ако соодветните елементи од две различни редици на една детерминанта D се еднакви, тогаш $D = 0$.*

Доказ. Според 2^0 имаме $D = -D$, па значи $D = 0$. ◇

7^0. **(Нулта редица).** *Ако елементите од една редица на D се нули, тогаш $D = 0$.*

Доказ. Ставајќи $k = 0$ во 3^0, добиваме: $D = 0 \cdot D = 0$. ◇

8^0. **(Пропорционални редици).** *Ако соодветните елементи од две различни редици се пропорционални, тогаш $D = 0$.*

Доказ. Да се примени прво 3^0, а потоа 6^0. ◇

9^0. **(Елементарни трансформации).** *Една детерминанта D не се менува ако сите елементи од една колона се помножат со ист број k и производите се додадат на соодветните елементи од друга колона.*

Доказ. Да ја означиме добиената детерминанта со D^*. Според 4^0 имаме: $D^* = D + D''$, каде што во D'' елементите од две различни колони се пропорционални, па од 8^0 имаме $D'' = 0$, т.е. $D^* = D$. ◇

Забелешка 3. Трансформациите на детерминанти опишани во 9^0 (при што може "колона" да се замени со "редица") се викаат **елементарни трансформации**. Елементарните трансформации овозможуваат пресметување на една детерминанта да се сведе на пресметување на друга (обично поедноставна) детерминанта.

ПРИМЕР 2. Со користење на својството 9^0 да се пресмета детерминантата

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -8 & 5 & 15 \\ 14 & 9 & -23 \end{vmatrix}.$$

Ако првата редица ја помножиме со 4 и ја додадеме на втората, а потоа, ако првата редица ја помножиме со -7 и ја додадеме на третата, ќе добиеме

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-18 - 6) = -48.$$

Забелешка 4. Општиот поим за детерминанта од n-ти ред ќе биде дефиниран во **Гл. VII**, но равенството (1) со кое го дефиниравме поимот детерминанта од трет ред ја сугерира следнава дефиниција на **детерминанта од четврти ред**:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Продолжувајќи на тој начин можеме да дефинираме детерминанти со ред $5, 6, 7, \ldots$. Или, претпоставувајќи дека имаме дефинирано поим за детерминанта од n–ти ред, каде што $n \geq 2$, можеме да дефинираме поим за детерминанта од $n+1$. Ние, сепак, овде ќе се задоволиме со изнесеното, бидејќи, како што споменавме, посебен параграф од **Гл. VII** ќе биде посветен на детерминантите од n–ти ред, за произволен природен број n, напомнувајќи само дека: *својствата* 1^0–9^0 *на детерминантите од трет ред важат и за детерминанти од произволен ред* n.

Вежби

Да се пресмета, по дефиниција дадената детерминанта од трет ред (1–3):

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$.

Со помош на Сарусовото правило, да се пресметаат детерминантите:

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} a & b & -c \\ -b & c & a \\ c & -a & b \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Со помош на својството 5^0 или $5'$ и одбирајќи го најповолното од нив, да се пресмета детерминантата (7-8):

7. $\begin{vmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 0 & -4 & -7 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Да се реши по x равенката (9-10):

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$. **10.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Користејќи елементарни трансформации, да се пресметаат детерминантите (11-13).

11. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Во задачите 14-16, не развивајќи ја детерминантата, а користејќи ги својствата на детерминантите, да се покаже дека:

14. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$. **15.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$. **16.** $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0$.

Користејќи ги основните својства, да се пресметаат детерминантите (17-20):

17. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} a+b & b & a \\ a & a+b & b \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

21. Нека $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Да се покаже дека $D = 0$ ако и само ако постојат броеви x, y, z, од кои барем еден не е нула, такви што $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{o}$.

22. Да се покаже дека равенката на правата што минува низ точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ е

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

23. Да се покаже дека три точки од рамнината, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$, се колинеарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

24. Да се пресмета детерминантата од четврти ред:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

25*. Да се докажат својствата $1^0 - 5^0$.

Помош. Сите својства можат да се докажат користејќи го равенството (2), или Сарусовото правило, или равенството (1). Така, може да се рече дека: 1^0 се добива најлесно со помош на Сарусовото правило, а 3^0 и 4^0 со помош на (2). При докажувањето на 2^0 не мора да се разгледаат сите три можни промени, туку само две, т.е. кога ги разменат заемно местата првата и втората, односно втората и третата колона. Тогаш:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

При докажано 2^0, и докажано некое од својствата 3^0, 4^0 за првата колона, со примена на 2^0 се добива точноста и за која било друга колона. Потоа, ако е познато својството i^0, i' се добива како последица од 1^0 и i^0. И, на крајот, покрај директно, својството 5^0 може да се докаже со помош на 2'. Така:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \left(a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 \cdot a_2^* + b_2 \cdot b_2^* + c_2 \cdot c_2^*$$

2.3. Систем од три линеарни равенки со три непознати

Слично како што детерминантите од втор ред ги искористивме за решавање на линеарен систем од две равенки со две непознати, така и детерминантите од трет ред можат да се искористат за *решавање на следниов систем од три линеарни равенки со три непознати* x, y, z:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3.$$

Броевите a_i, b_i, c_i (**коефициентите на системот**) и d_i (**слободните членови на системот**) ги сметаме за познати.

Системот (1) ќе го испитуваме со помош на векторска равенка што е еквивалентна со него на сличен начин како во 3^0 од **2.1.** Имено, (1) е еквивалентен со следнава равенка:

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=\mathbf{d} \tag{1'}$$

каде што векторите **a**, **b**, **c**, **d** се определени со:

$$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3), \quad \mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3), \quad \mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3), \quad \mathbf{d}=(d_1,d_2,d_3).$$

Значи, во натамошната дискусија на системот (1), ќе ја користиме и равенката (1′), а важна улога ќе имаат и следниве детерминанти:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{2'}$$

За D велиме дека е **детерминанта на системот** (1), а D_x, D_y, D_z се **детерминантите на непознатите** x, y, z – соодветно.

Нека $D \neq 0$. Според критериумот за компланарност споменат во **2.2**, векторите **a**, **b** и **c** се некомпланарни, од што следува дека равенката (1′) има точно едно решение, па значи истото важи и за (1). (Притоа, **решение на системот** (1) се вика секоја подредена тројка (x_0, y_0, z_0) таква што по заменувањето на x со x_0, на y со y_0 и на z со z_0, секоја од равенките во (1) станува точен исказ).

Од неколинеарноста на векторите **b**, **c**, следува дека барем едно од следниве неравенства важи:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Да претпоставиме дека $\Delta \neq 0$. Тогаш системот од последните две равенки на (1) е еднозначно решлив по y, z и притоа:

$$\Delta\cdot y=\begin{vmatrix} d_2-a_2x & c_2 \\ d_3-a_3x & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Delta\cdot z=\begin{vmatrix} b_2 & d_2-a_2x \\ b_3 & d_3-a_3x \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Множејќи ја првата равенка од (1) со Δ, и заменувајќи ги $\Delta\cdot y$ и $\Delta\cdot z$ со нивните десни страни од (3), по соодветно трансформирање на добиените детерминанти од втор ред и средување, ќе добиеме:

$$\left(a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)\cdot x=$$
$$=d_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\cdot\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\cdot\begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Имајќи ја предвид дефиницијата на детерминанта од трет ред, добиваме дека во (4) D е коефициентот пред x, а D_x е слободниот член. Со тоа го докажавме првото од следниве три равенства:

$$D\cdot x=D_x, \qquad D\cdot y=D_y, \qquad D\cdot z=D_z. \tag{5}$$

На сосема ист начин се добиваат и другите две равенства.

Со спроведената дискусја го докажавме следното правило, наречено **Крамерово правило** за систем од три линеарни равенки со три непознати.

Теорема 1 (на Крамер).

Ако детерминантата D на системот (1) *е различна од нула, тогаш со равенствата:*

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \tag{6}$$

е определено решение на системот (1), *а тоа е единственото решение на системот.* ◇

Да го разгледаме сега случајот кога $D = 0$, т.е. кога векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се компланарни. Да претпоставиме дека барем два (на пример $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) од тие вектори се неколинеарни. Тогаш постојат (еднозначно определени) броеви α и β такви што: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Заменувајќи во (1′) добиваме:

$$(x + \alpha z)\mathbf{a} + (y + \beta z)\mathbf{b} = \mathbf{d},$$

т.е. $u\mathbf{a} + v\mathbf{b} = \mathbf{d}$, ако ставиме $u = x + \alpha z$, $\quad v = y + \beta z$. Равенката (1′) има решение само ако $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}$ се компланарни, а во тој случај постои единствено решение (u_0, v_0). Според тоа со:

$$x = u_0 - \alpha t, \quad y = v_0 - \beta t, \quad z = t, \tag{6′}$$

е определено множеството од сите решенија на (1), при што t е кој било број.

Преостана случајот кога $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се колинеарни. Во случај сите тие да се нула, решение постои само ако $\mathbf{d} = 0$, т.е. $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, а тогаш секоја тројка броеви x, y, z е решение на (1). Затоа да претпоставиме дека $\mathbf{a} \neq 0$. Тогаш, постојат еднозначно определени броеви β и γ, такви што $\mathbf{b} = \beta\mathbf{a}$, $\quad \mathbf{c} = \gamma\mathbf{a}$. Во тој случај (1′) има решение само ако и $\mathbf{d}$ е колинеарен со $\mathbf{a}$, а тогаш постои (единствен) број δ, таков што $\mathbf{d} = \delta\mathbf{a}$. Заменувајќи во (1′) добиваме

$$\delta\mathbf{a} = (\alpha + \beta y + \gamma z)\mathbf{a}, \quad \text{т.е.} \quad x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

Според тоа, со:

$$x = \delta - \beta u - \gamma v, \quad y = u, \quad z = v, \tag{6″}$$

е определено множеството од сите решенија на (1′), при што u и v се кои било броеви.

Како резиме на дискусијата во случајот $D = 0$, го добиваме следниов резултат:

Теорема 2.

Ако детерминантата на системот (1) *е нула, тогаш тој систем има безброј многу решенија, или ниедно.* ◇

ПРИМЕР 1. Да го решиме системот

$x - 3y - 2z = 1$, $\quad 2x - y + 2z = 1$, $\quad 3x - 3y + 3z = 0$. Имаме

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 36 = 9;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 18;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9.$$

Според Крамеровото правило, добиваме: $x = 2$; $y = 1$; $z = -1$.

Системот линеарни равенки

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

во кој слободните членови се еднакви со нула, се вика **хомоген линеарен систем**. Очигледно, тројката $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ е решение на (7), наречено **нулто решение**. Значи, хомогениот систем секогаш е решлив.

Меѓутоа важно е да се согледаат случаите кога хомогениот систем има ненулти решенија. Потребен и доволен услов за тоа е содржан во следнава

Теорема 3 (**за хомогени системи**).

Хомогениот линеарен систем (7) *од три равенки со три непознати има ненулти решенија ако и само ако детерминантата* (2) *на системот* (7) *е нула, т.е.* $D = 0$.

Доказ. Да претпоставиме дека системот (7) има ненулто решение (x_1, y_1, z_1). Кога детерминантата D не би била нула, т.е. $D \neq 0$, тогаш, според Крамеровите формули (6), би добиле дека системот (7) има само нулто решение, што противречи на претпоставката дека (7) има и ненулто решение. Следствено, $D = 0$.

Обратно, нека $D = 0$. Тогаш, според Т.2, системот (7) е или противречен или има безброј многу решенија. Но, нашиот систем не е противречен, зашто го има нултото решение. Следствено, системот (7) има безброј многу решенија, а меѓу нив и нултото. ◇

На еден конкретен пример ќе покажеме како се наоѓаат ненулти решенија на хомоген систем (во типичен случај: кога $D = 0$, а има барем еден негов минор од втор ред што не е нула).

ПРИМЕР 2. Да го решиме хомогениот систем

$$x - 2y + 3z = 0, \quad 2x + 3y - 4z = 0, \quad 3x + y - z = 0. \tag{*}$$

Имаме:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 7 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

и, на пример, минорот на -1 е: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Да го разгледаме потсистемот составен од првите две равенки:

$$x - 2y + 3z = 0, \quad 2x + 3y - 4z = 0.$$

Тој е еднозначно решлив по x и y, а имено:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & -2 \\ 4z & 3 \end{vmatrix}}{7} = -\frac{z}{7}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 2 & 4z \end{vmatrix}}{7} = \frac{10z}{7}.$$

Заменувајќи ги добиените вредности за x и y во третата равенка ќе видиме дека и таа е задоволена за секој z. Според тоа, со:

$$x = -t, \quad y = 10t, \quad z = 7t,$$

е определено множеството од сите решенија на дадениот систем, при што $t \in \mathbf{R}$ е произволен.

Ќе се задржиме и на проблемот за решавање на **системи линеарни равенки во кои непознатите се вектори**. Имено, ќе го разгледаме системот линеарни равенки

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{x} + b_1\mathbf{y} + c_1\mathbf{z} &= \mathbf{d}_1, \\ a_2\mathbf{x} + b_2\mathbf{y} + c_2\mathbf{z} &= \mathbf{d}_2, \\ a_3\mathbf{x} + b_3\mathbf{y} + c_3\mathbf{z} &= \mathbf{d}_3. \end{aligned} \tag{8}$$

каде што a_i, b_i, c_i се познати скалари, $\mathbf{d}_i$ познати вектори, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ непознати вектори. И во овој случај ќе формираме три детерминанти D, $\mathbf{D_x}$, $\mathbf{D_y}$, $\mathbf{D_z}$, при што

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} \mathbf{d}_1 & b_1 & c_1 \\ \mathbf{d}_2 & b_2 & c_2 \\ \mathbf{d}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} a_1 & \mathbf{d}_1 & c_1 \\ a_2 & \mathbf{d}_2 & c_2 \\ a_3 & \mathbf{d}_3 & c_3 \end{vmatrix}, \mathbf{D_z} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{d}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{d}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{d}_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Притоа, смислата на D (т.е. **детерминанта на системот**) е јасна, но смислата на $\mathbf{D_x}$, $\mathbf{D_y}$, $\mathbf{D_z}$ (т.е. **детерминантите на непознатите**) треба допрва да се објасни, бидејќи досега работевме со детерминанти чии елементи се скалари. За натаму ќе допуштаме и детерминанти во кои елементи од една колона (или редица) се вектори, а од преостанатите колони (т.е. редици) се скалари. Во тој случај: детермнантата е вектор кој се добива на тој начин што таа се развива по соодветната колона. Така, на пример, имаме:

$$\mathbf{D}_x = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{d}_1 - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{d}_2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{d}_3. \tag{10'}$$

Имајќи го тоа предвид, на потполно ист начин како и кај системите линеарни равенки со скаларни непонзнати, ја добиваме следната варијанта на теоремата на Крамер.

Теорема 4 (за систем равенки со векторски непознати).

Ако $D \neq 0$, тогаш системот (8) *има единствено решение* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, *определено со*:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{D}\mathbf{D}_x \quad \mathbf{y} = \frac{1}{D}\mathbf{D}_y \quad \mathbf{z} = \frac{1}{D}\mathbf{D}_x. \quad \diamondsuit$$

Во случај кога $D = 0$, важат формално исти резултати како и во "скаларниот случај", но овде нема да го образложуваме ова тврдење.

Вежби

Со помош на Крамеровото правило да се решат системите (1–4)

1. $$x + 2y + z = 4,\quad 3x - 5y + 3z = 1,\quad 2x + 7y - z = 8.$$

2. $$2x + y = 5,\quad x + 3z = 16,\quad 5y - z = 10.$$

3. $$x + 4y - 3z = 0,\quad 2x - 3y + z = -1,\quad x + y + z = 6.$$

4. $$4x + 2y + z = 4,\quad 6x + 3y + 2z = 4,\quad -x + 4y - 3z = 1.$$

Да се решат следните линеарни системи (5–12)

5. $$2x - y + z = -2,\quad x + 2y + 3z = -1,\quad x - 3y - 2z = 3.$$

6. $$2x + 3y + z = 4,\quad x + 6y + 2z = 2,\quad -x + 8y + 4z = 2.$$

7. $$x + 2y - 4z = 1,\quad 2x + y - 5z = -1,\quad x - y - z = -2.$$

8. $$x + y + z = 1,\quad 2x + 2y + 2z = 3,\quad 3x + 3y + 3z = 4.$$

9. $$x - y + z = 1,\quad -x + y + z = 2,\quad -x + y + 5z = 7.$$

10. $$-x + y + z = 3,\quad x + y + z = 1,\quad y + z = 2.$$

11. $$ax + y + z = 1,\quad x + ay + z = a,\quad x + y + az = a^2.$$

12. $$ax + by + (a+b)z = 0,\quad bx + ay + (a+b)z = 0,\quad x + y + 2z = 0.$$

Да се најдат сите решенија на системот (13–14)

13. $$2x + y - z = 0,\quad x + 2y + z = 0,\quad 2x - y + 3z = 0.$$

14. $$x - y - z = 0,\quad x + 4y + 2z = 0,\quad 3x + 7y + 3z = 0.$$

15. Да се покаже дека: ако три прави $a_i x + b_i y + c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ во рамнината се сечат во една точка, тогаш

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

16. Да се напишат системите од вежбите: а) 5; б) 8 и в) 9 во векторска форма и да се анализираат порано добиените резултати.

17. Да се покаже дека: ако системот од три равенки со две непознати

$$a_1x + b_1y = c_1\,, \quad a_2x + b_2y = c_2\,, \quad a_3x + b_3y = c_3\,, \tag{11}$$

има решение, тогаш

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{12}$$

Дали од (12) следува решливост на (11)?

18. Да се реши системот од две линеарни равенки со две векторски непознати **x** и **y**:

$$\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{c}\,, \quad 2\mathbf{x} + 4\mathbf{y} = \mathbf{d}\,, \quad \mathbf{c} = (2,\, -1), \quad \mathbf{d} = (2,\, 0).$$

IV.3. СКАЛАРЕН, ВЕКТОРСКИ И МЕШАН ПРОИЗВОД

Покрај операциите собирање на вектори и множење на вектор со реален број, важно место во векторската алгебра имаат операциите скаларен, векторски и мешан производ на вектори. Во овој параграф ќе се запознаеме со основните својства на овие операции и со некои нивни едноставни примени.

3.1. Скаларен производ

Скаларен производ a, b на ненултите вектори **a**, **b** го викаме производот од нивните должини и косинусот на аголот α меѓу нив (црт. 1):

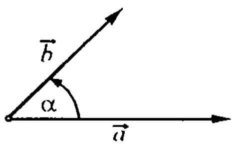
$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,|\cos\alpha\,. \tag{1}$$

Скаларниот производ на нултиот вектор **o** со кој било вектор по дефиниција е бројот 0.

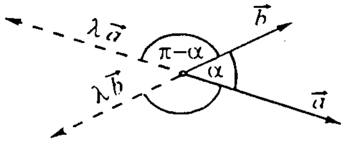
Штотуку воведениот поим се вика производ зашто (како што ќе видиме подолу) тој има некои својства како операцијата множење при бројните множества, додека додатокот "скаларен" иде оттаму што, по дефиниција, тој е реален број, а во векторската алгебра (како што спомнавме и порано, во **1.3**), тие броеви, обично, се наречуваат скалари. Ќе докажеме неколку својства на скаларниот производ.

1⁰. *Скаларниот производ има својство на комутативност, т.е.* $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\,\mathbf{a}$.

Ова е, имено, непосредна последица од (1) и од комутитативноста на операцијата множење на реални броеви. ◇



Црт. 1



Црт. 2

2^0. *За секој реален број* λ *и кои било вектори* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$:

$$\lambda(\mathbf{a}\,\mathbf{b}) = (\lambda\,\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\,\mathbf{b}).$$

Доказ. За $\lambda > 0$, аголот меѓу $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е ист како и меѓу $\lambda\,\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. како и меѓу $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{b}$, па ако се имаат предвид (1) и дефиницијата за производ на вектор со скалар се добива дека горните равенства се точни.

За $\lambda < 0$, ако α е аголот меѓу $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, тогаш аголот меѓу $\lambda\,\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е $\pi - \alpha$, а исто така и меѓу $\mathbf{a}$ и $\lambda\,\mathbf{b}$ (види црт. 2). Според тоа:

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{a}\,\mathbf{b}) &= \lambda\,|\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,|\,\cos\alpha = -\,|\,\lambda\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,|\,\cos\alpha \\
&= |\,\lambda\,\mathbf{a}\,|\,|\,\mathbf{b}\,|\,\cos(\pi-\alpha) \;= -\,|\,\mathbf{a}\,|\,|\,\lambda\,\mathbf{b}\,|\,\cos\alpha \\
&= |\,\mathbf{a}\,|\,|\,\lambda\,\mathbf{b}\,|\,\cos(\pi-\alpha)
\end{aligned}$$

од што следуваат равенствата $\lambda(\mathbf{a}\,\mathbf{b}) = (\lambda\,\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\,\mathbf{b})$, што и сакавме да докажеме. ◇

За еден вектор $\mathbf{e}$ велиме дека е **орт** (или **единичен вектор**), ако неговата должина е 1, т.е. ако $|\,\mathbf{e}\,| = 1$. При $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, јасно е дека векторот $\frac{1}{a}\cdot\mathbf{a}$ е орт. (Притоа: $a = |\,\mathbf{a}\,|$.) Овој орт ќе го означуваме со $\mathbf{a}^0$. Според тоа:

3^0. *За секој ненулти вектор* $\mathbf{a}$ *имаме* $\mathbf{a} = |\,\mathbf{a}\,|\,\mathbf{a}^0$. ◇

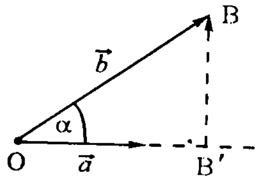
Да претпоставиме сега дека векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се доведени во заеднички почеток O, и крајната точка од $\mathbf{b}$ ја проектираме нормално на правата што е носител на $\mathbf{a}$ (црт. 3). Ако B' е проекција од B, тогаш векторот $\overrightarrow{OB'}$ е колинеарен со $\mathbf{a}$, па значи и со $\mathbf{a}^0$ (т.е. со ортот на $\mathbf{a}$), од што следува дека постои реален број (скалар) λ таков што $\lambda\mathbf{a}^0 = \overrightarrow{OB'}$. За овој број λ ќе велиме дека е **проекција од векторот b врз векторот a** и ќе пишуваме $\lambda = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Ако α е аголот меѓу $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, јасно е дека е точно следново равенство:

4^0. $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\,\mathbf{b}\,|\,\cos\alpha$.

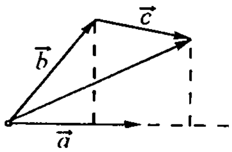
Лесно се докажува точноста на следното равенство:

5^0. $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$.

И навистина, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ е вектор чија почетна точка е почетната точка на $\mathbf{b}$, а крајна точка му е крајната точка на $\mathbf{c}$ (црт. 4). ◊



Црт. 3



Црт. 4

Користејќи го поимот проекција, дефиницијата на скаларниот производ можеме да ја формулираме и на следниов начин:

6^0. $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\,\mathbf{b}\,|\,\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$. ◊

Ако се искористат последните две својства. се добива дека:

7^0. *Скаларниот производ на вектори е дистрибутивен спрема собирањето на вектори, т.е.*

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,\mathbf{b}+\mathbf{a}\,\mathbf{c}, \qquad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\,\mathbf{c}+\mathbf{b}\,\mathbf{c},$$

Доказ. Според 5^0 и 6^0, имаме:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= |\,\mathbf{a}\,|\;\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = |\,\mathbf{a}\,|\;(\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}) = \\ &= |\,\mathbf{a}\,|\;\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + |\,\mathbf{a}\,|\;\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{c} = \\ &= \mathbf{a}\,\mathbf{b}+\mathbf{a}\,\mathbf{c}. \qquad \Diamond\end{aligned}$$

Како последица на 1^0, 2^0 и 7^0 се добива дека *скаларниот производ на две линеарни комбинации од вектори може да се изврши формално исто како множењето на алгебарски полиноми.* На пример:

$$(\lambda\,\mathbf{a}+\mu\,\mathbf{b})(\nu\,\mathbf{c}+\tau\,\mathbf{d}) = \lambda\,\nu(\mathbf{a}\,\mathbf{c})+\lambda\,\tau(\mathbf{a}\,\mathbf{d})+\mu\nu(\mathbf{b}\,\mathbf{c})+\mu\,\tau(\mathbf{b}\,\mathbf{d}). \quad (2)$$

Да забележиме дека погоре докажаните равенства, аналогни на соодветни равенства во обичната алгебра, не смеат да не̂ наведат на заклучокот дека и сите равенства и својства за производите во обичната алгебра имаат соодветни аналози при скаларниот производ.

На пример, во обичната алгебра, од $ab = 0$ секогаш следува дека барем еден од броевите a, b е нула; но, скаларниот производ на два вектора може да е нула и кога тие се ненулти – попрецизно: кога се заемно нормални. Имено, точно е следново тврдење:

8^0. *Скаларниот производ на два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *е нула ако и само ако барем еден од нив е нула или ако тие се заемно нормални; со симболи*

$$\mathbf{a}\mathbf{b}=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{o} \quad \textit{или} \quad \mathbf{b}=\mathbf{o} \quad \textit{или} \quad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}. \qquad \diamondsuit$$

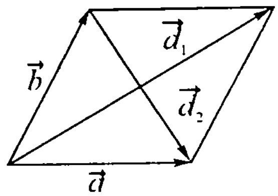
Да забележиме и тоа дека скаларниот производ: $\mathbf{a}\mathbf{a}=a^2$ е еднаков со квадратот од должината a на векторот $\mathbf{a}$

$$|\,\mathbf{a}\,|^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \qquad \text{т.е.} \qquad |\,\mathbf{a}\,|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}. \tag{3}$$

ПРИМЕР 1. Како една примена на скаларниот производ ќе ја добиеме добро познатата теорема од геометрија дека дијагоналите кај ромбот се меѓусебе нормални. За таа цел, на две соседни страни да ги нанесеме векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, како што е покажано на црт. 5. Тогаш

$$\mathbf{d}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{d}_2=\mathbf{a}-\mathbf{b}$$

се векторите на дијагоналите.



Црт. 5

Имајќи предвид дека $|\,\mathbf{a}\,|=|\,\mathbf{b}\,|$ и применувајќи го равенството (2), добиваме

$$\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\mathbf{b}+\mathbf{a}\mathbf{b}-\mathbf{b}^2=0\,,$$

т.е. $\mathbf{d}_1\perp\mathbf{d}_2$, што и сакавме да докажеме.

ПРИМЕР 2. Над векторите $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{AD}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$, каде што $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ се заемно нормални вектори и $|\,\mathbf{p}\,|=2$, $|\,\mathbf{q}\,|=3$, конструиран е паралелограм $ABCD$. Да ги пресметаме: а) должината на неговите дијагонали и б) аголот φ меѓу нив.

Имаме:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}\,,$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=3\mathbf{q}-4\mathbf{p}\,,$$

па според (3):

а) $|\,\overrightarrow{AC}\,|=|\,2\mathbf{p}-\mathbf{q}\,|=\sqrt{(2\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}=\sqrt{4\mathbf{p}^2-4\mathbf{p}\mathbf{q}+\mathbf{q}^2}=\sqrt{16-0+9}=5\,,$

$|\,\overrightarrow{BD}\,|=|\,3\mathbf{q}-4\mathbf{p}\,|=\sqrt{(3\mathbf{q}-4\mathbf{p})^2}=\sqrt{145}\,.$

б) Од формулата (1), при $|\,\mathbf{a}\,|\neq 0\neq|\,\mathbf{b}\,|$, добиваме

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{|\,\mathbf{a}\,|\cdot|\,\mathbf{b}\,|}\,, \tag{4}$$

па

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\,\overrightarrow{AC}\,|\cdot|\,\overrightarrow{BD}\,|}=\frac{(2\mathbf{p}-\mathbf{q})(3\mathbf{q}-4\mathbf{p})}{5\cdot\sqrt{145}}=$$

$$=\frac{-8\mathbf{p}^2-3\mathbf{q}^2+10\mathbf{p}\mathbf{q}}{5\cdot\sqrt{145}}=\frac{-59}{5\cdot\sqrt{145}}\,,\,,$$

што значи дека $\varphi=\arccos\left(\frac{-59}{5\cdot\sqrt{145}}\right)$.

Вежби

1. Да се провери дали се точни следниве равенства:
а) $a^2 \mid \mathbf{a} \mid = \mid \mathbf{a} \mid^3$; б) $\mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2\mathbf{b}$; в) $\mathbf{a}^2\mathbf{b} = (\mathbf{a}\mathbf{a})\mathbf{b}$;
г) $(\mathbf{a}\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$ д) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$;
ѓ) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mid \mathbf{a} \mid^2 - \mid \mathbf{b} \mid^2$; е) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 4\mathbf{a}\mathbf{b}$.
(Притоа $\mathbf{x}\lambda$ означува исто што и $\lambda\mathbf{x}$).
2. За равенствата д), ѓ) е) од вежбата 1 да се даде геометриско толкување, сметајќи дека $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ во паралелограмот $OACB$.
3. Дадени се векторите $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n} + 2\mathbf{p}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n} - \mathbf{p}$, каде што $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}$ се заемно нормални единични вектори. Да се пресмета:
а) $\mathbf{a}\mathbf{b}$; б) модулот на $\mathbf{a}$; в) аголот меѓу $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
4. Да се најде аголот α меѓу векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ако се знае дека:
а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, $\mid \mathbf{m} \mid = \mid \mathbf{n} \mid = 2$, $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \pi/3$;
б) $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n} + \mathbf{p}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{p}$, $\mid \mathbf{m} \mid = 2$, $\mid \mathbf{n} \mid = \mid \mathbf{p} \mid = 1$, $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \pi/3$, а $\mathbf{p}$ е нормален на $\mathbf{m}$ и на $\mathbf{n}$.
5. Во правоаголен рамнокрак триаголник се повлечени тежишните линии од темињата на острите агли. Да се пресмета аголо φ меѓу нив.
6. Да се докаже косинусната теорема.
7. Да се покаже дека висините (односно продолженијата на висините) на произволен триаголник се сечат во иста точка.
8. Над векторите $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, каде што $\mid \mathbf{m} \mid = 4$, $\mid \mathbf{n} \mid = 3$ и $\alpha = \angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \pi/3$, конструиран е паралелограм $ABCD$. Да се пресметаат:
а) должината на дијагоналите AC и BD;
б) аголот меѓу дијагоналите.
9. Даден е $\triangle ABC$ со $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ и висината $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Да се најде: а) $\overline{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

3.2. Координантна форма на скаларниот производ

Да видиме како се пресметува скаларниот производ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се зададени со своите координати. Пред сé, од дефиницијата на скалараниот производ добиваме дека:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{k} = 1; \qquad \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{k} = 0.$$

Користејќи ги овие равенства и (2), т.е. 7^0 од **3.1** добиваме:

1^0. Ако $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, *тогаш*

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 . \qquad \diamondsuit \tag{1}$$

Да изнесеме неколку последици од својството 1^0. Притоа како и порано, a е должината на векторот $\mathbf{a}$, т.е.

$$a = |\,\mathbf{a}\,| .$$

Бидејќи $\mathbf{a}\,\mathbf{a} = a\,a \cos 0^0 = a^2$, добиваме:

2^0. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. $\diamondsuit$

Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се дадени точки, тогаш растојанието d меѓу овие две точки е еднакво со должината од векторот $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1)$, па поради 2^0 имаме:

3^0. *Растојанието d меѓу точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се пресметува по формулата*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \qquad \diamondsuit \tag{2}$$

Од дефиницијата на скаларниот производ следува дека косинусот на аголот α меѓу двата (ненулти) вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ може да се пресмета по формулата

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{a\,b} .$$

Од 1^0 и 2^0 тогаш добиваме:

4^0. *Ако $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и α е аголот меѓу векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, тогаш:*

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} . \qquad \diamondsuit \tag{3}$$

Од својството 8^0 во **3.1**, а според (1) (или пак директно од 4^0) следува дека:

5^0. *Векторите $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ се заемно нормални ако и само ако* $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$. $\diamondsuit$

Ако $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ тогаш, според (1) имаме

$$\mathbf{a}\,\mathbf{i} = a_1 = |\,\mathbf{i}\,|\ \mathrm{pr}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{a} = \mathrm{pr}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{a} \quad \text{и} \quad a_2 = \mathrm{pr}_{\mathbf{j}}\,\mathbf{a}, \quad a_3 = \mathrm{pr}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}.$$

Според тоа, точно е следново својство:

6^0. *Координатите на еден вектор $\mathbf{a}$ се еднакви со неговите проекции на соодветните координатни вектори.* $\diamondsuit$

Да претпоставиме сега дека $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ е единичен вектор (т.е. орт) и нека α, β, γ се аглите што ги зафаќа со координатните вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соодветно. Според (3) имаме:

$$\cos\alpha = e_1,\ \cos\beta = e_2,\ \cos\gamma = e_3,\ \text{т.е. } \mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \quad (4)$$

Од тоа, поради $|\,\mathbf{e}\,| = 1$, добиваме:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,. \quad (5)$$

Точно е, значи, следново својство:

7^0. *Ако α, β и γ се аглите што даден вектор* $\mathbf{a}$ *ги зафаќа со координатните вектори, тогаш е точно равенството* (5).

За да се дојде до тоа равенство, имено, треба да се уочи дека $\mathbf{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, каде што $\mathbf{a}^0$ е ортот на $\mathbf{a}$. ◊

Забелешка 1. За векторите од иста рамнина (в. забелешка 2 во **1.5**), формулите односно тврдењата 1^0–7^0 имаат "скратен" облик. На пример:

$1'$. *Ако* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *и* $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, *тогаш:*

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2\,. \qquad \diamond$$

Вежби

1. Точките $A(2,\ 1,\ 0)$, $B(3,\ 5,\ -1)$, $C(-1,\ 2,\ 1)$ се темиња на еден триаголник. Да се одреди:
   а) положбата на точките A, B, C (цртеж);
   б) должината на секоја од страните AB, BC, CA;
   в) скаларниот производ на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
   г) аголот α кај темето A.
2. Да се најде единичен вектор $\mathbf{x}$ кој е нормален на $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ -3)$ и на оската Oz.
3. Да се определи вектор $\mathbf{a} = (a_1, 2, -3)$, така што $a = 7$.
4. Да се определи единичен вектор којшто е колинеарен со $\mathbf{b} = (2,\ -1,\ -2)$.
5. Да се најде вектор $\mathbf{a}$ што е нормален на $\mathbf{b} = (1,\ -2,\ 2)$, има иста должина како $\mathbf{b}$ и лежи во рамнината O_{yz}.
6. Дадени се точките $A(-3,\ 1,\ 2)$ и $B(1,\ 3,\ -2)$. Да се најде $\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, каде што $\mathbf{a} = (1,\ 1,\ -3)$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$.
7. Да се најде векторот $\mathbf{x}$ кој е нормален на векторите $\mathbf{a} = (2,\ -3,\ 1)$ и $\mathbf{b} = (1,\ -2,\ 3)$, и го задоволува условот $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k})\mathbf{x} = 10$.
8. Да се формулираат својствата $2^0 - 7^0$ за вектори што лежат во иста координатна рамнина (в. забелешка 1).
9. Ако $\mathbf{a}$ е ненулти вектор во рамнината Oxy што зафака агол α со x–оската, тогаш за неговиот орт важи: $\mathbf{a}^0 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.

10*. Да се докаже равенството: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$, при претпоставка дека $0 \le \alpha, \beta \le \pi\,, \quad \beta < \alpha$.

3.3. Векторски производ

Резултатот од скаларното множење на два вектора е скалар. Сега ќе дефинираме операција множење на вектори што ќе ја наречеме векторски производ при која резултатот ќе биде вектор.

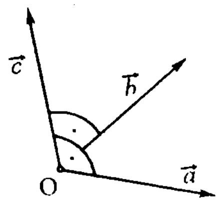
Под **векторски производ** на неколинеарните вектори **a** и **b** го подразбираме векторот **c** (го означуваме со **a** × **b**) определен на следниов начин:

(i) правецот на **c** е нормален на рамнината во која лежат векторите **a** и **b**;

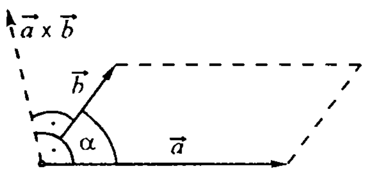
(ii) ако **a** е насочен како палецот, а **b** како показалецот на десната рака, тогаш **c** е насочен како средниот прст на истата рака (в. црт. 1);

(iii) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\alpha$, каде што α е аголот меѓу **a** и **b**.

Ако векторите **a** и **b** се колинеарни, тогаш нивниот векторски производ, по дефиниција, е нула.



Црт. 1



Црт. 2

Според (iii) од дефиницијата на векторскиот производ можеме да уочиме дека должината $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, т.е. производот $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\alpha$ претставува плоштината P на паралелограмот на чии две соседни страни се положени векторите **a** и **b** (црт. 2). Значи:

1⁰. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\alpha = P.$ ◊

Од дефиницијата на скаларен и векторски производ се добива следното равенство, наречено **Лагранжов идентитет**:

2⁰. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\,\mathbf{b})^2$ *за кој било пар вектори* **a**, **b** (види вежба 2.) ◊

Директно од дефиницијата на векторскиот производ се добива точноста на следниве три својства:

3⁰. *Ако* $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, *тогаш* $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$. ◊

4^0. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, *за кој било пар вектори* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

5^0. $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\,\mathbf{b})$ *за секој реален број* λ *и кој било пар вектори* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. ◇

Поради својството 5^0 (според кое скаларот λ може "да се прошета" низ векторскиот производ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$), секој од трите изрази од 5^0 можеме да го запишеме без какви било загради, како на пример:

$$\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

Ќе докажеме дека е точна и следната теорема позната како **дистрибутивност на векторското множење спрема векторското собирање:**

6^0. *За кои било вектори* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *точни се равенствата*

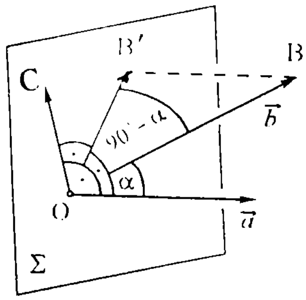
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \tag{1}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}\,. \tag{2}$$

Доказ. За да го докажеме (1), прво ќе претпоставиме дека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни и ќе го формираме векторскиот производ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ на посебен начин. За таа цел, низ заедничиот почеток O на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ поставуваме рамнина Σ нормална на $\mathbf{a}$ (црт. 3) и ја проектираме крајната точка B од $\mathbf{b}$ ортогонално на Σ, при што, ја добиваме точката B'. Векторот $\overrightarrow{OB'}$ како проекција на $\mathbf{b}$, има интензитет

$$|\,\overrightarrow{OB'}\,| = |\,\mathbf{b}\,| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = |\,\mathbf{b}\,| \sin\alpha$$

(каде што α е аголот меѓу $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$). Ако



Црт. 3

го завртиме $\overrightarrow{OB'}$ за 90^0 во позитивна насока гледано од врвот на $\mathbf{a}$, го добиваме векторот $\overrightarrow{OC}$, кој (како што се гледа од црт. 3) има иста насока како векторскиот производ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, а интензитет $|\,\mathbf{b}\,| \sin\alpha = |\,\overrightarrow{OB'}\,|$. Според тоа, ако го помножиме $\overrightarrow{OC}$ со $|\,\mathbf{a}\,|$, ќе го добиеме векторскиот производ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Потоа ќе ставиме

$$\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{d}\,. \tag{3}$$

Векторите $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ сочинуваат (затворен)) триаголник. Проекциите на $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ врз Σ исто така сочинуваат (затворен) триаголник, па тогаш и векторските производи $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{d}$, формирани на опишаниот начин, сочинуваат (затворен) триаголник, т.е.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{d}\,. \tag{4}$$

Заменувајќи го (3) во (4), го добиваме равенството (1).

Равенството (2) следува од (1) и 4^0 . Имено:

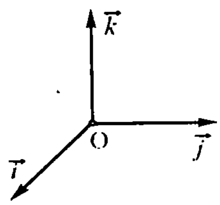
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (-\mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (-\mathbf{c}) \times \mathbf{b} =$$
$$= -(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Во горниот доказ е претпоставено дека $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ и $\mathbf{b}$ не е колинеарен ни со $\mathbf{a}$, ни со $\mathbf{c}$. За $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, (1) е очигледно, а за $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{c}$, следува од 5^0. Во случајот $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, (1) се сведува на: $\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c}$. Лесно се проверува дека правците и насоките на векторите $\mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c})$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ се исти, а интензитетите им се еднакви на $|\mathbf{a}|\ h$, каде што h е висината на секој од паралелограмите, конструирани над а и с, односно а и $\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}$. ◇

Да видиме, сега, како се пресметува *векторскиот производ на два вектора зададени со нивните координати.* За таа цел ќе видиме, прво, како се пресметуваат векторските производи од координатните вектори. Пред сè, имаме

$$\mathbf{o} = \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k}.$$



Црт. 4

Од дефиницијата на векторскиот производ и фактот што $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ се меѓусебно нормални ортови, при што ориентацијата е десна (црт. 4), добиваме:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k};\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i};\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j};\ \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k};\ \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i};\ \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}. \quad (5)$$

Имајќи го сето тоа предвид, како и 5^0 и 6^0, добиваме

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = \\ &= a_1b_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) + a_2b_1(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + \\ &+ a_2b_3(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) + a_3b_1(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Со помош на ознаките од разделот **2.1** (детерминанти од втор ред), т.е. ставајќи

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

добиениот резултат можеме да го формулираме вака:

7^0. *Ако* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, *тогаш*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \quad ◇ \qquad (6)$$

Се покажува за позгодно равенството (6) да се напише во облик:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

при што "детерминантата" од десната страна е само кондензиран облик за

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \qquad (7')$$

(види (10′) во **2.3**).

За кои било три вектори **a**, **b**, **c** можеме да ги формираме изразите

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

(Секој од овие изрази можеме да го наречеме **двоен векторски производ**.) Природно се наметнува прашањето дали тие се еднакви меѓу себе. Се покажува дека:

8⁰. *За кои било три вектори* **a**, **b**, **c**, *р точни се равенствата:*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}\,\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\,\mathbf{c})\mathbf{a}, \qquad (8)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\,\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\,\mathbf{b})\mathbf{c}. \qquad (9)$$

(Од (8) и (9) се гледа дека *векторското множење не е асоцијативно.*)

Доказ. Да ставиме $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ и $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Според (6), имаме:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1) = \mathbf{d},$$

а бидејќи $\mathbf{p} = \mathbf{d} \times \mathbf{c}$, по истата формула наоѓаме

$$p_1 = (\mathbf{d} \times \mathbf{c})_1 = (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 =$$

$$= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - a_1(b_2c_2 + b_3c_3).$$

Додавајќи и одземајќи $a_1b_1c_1$, добиваме

$$p_1 = b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - a_1(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = b_1(\mathbf{a}\,\mathbf{c}) - a_1(\mathbf{b}\,\mathbf{c}).$$

Аналогни формули добиваме и за p_2, p_3:

$$p_2 = b_2(\mathbf{a}\,\mathbf{c}) - a_2(\mathbf{b}\,\mathbf{c}), \quad p_3 = b_3(\mathbf{a}\,\mathbf{c}) - a_3(\mathbf{b}\,\mathbf{c}).$$

Заменувајќи ги добиените вредности за p_1, p_2, p_3 во $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$, добиваме

$$\mathbf{p} = (\mathbf{a}\,\mathbf{c})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) - (\mathbf{b}\,\mathbf{c})(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}),$$

т.е.

$$\mathbf{p} = (\mathbf{a}\,\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\,\mathbf{c})\mathbf{a}.$$

Со тоа го докажавме (8). Аналогно за (9). ◇

Вежби

1. Над векторите $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, каде што $|\mathbf{m}| = 4$, $|\mathbf{n}| = 3$ и $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \pi/3$, конструиран е паралелограм $ABCD$. Да се пресмета:
   а) плоштината на паралелограмот;
   б) висината на паралелограмот (од D кон AB).
2. Да се докаже Лагранжовиот идентитет **2⁰**: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\,\mathbf{b})^2$.

3. За која вредност на λ векторите $\mathbf{x} = 2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ и $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{a}-\mathbf{b}$ се колинеарни, ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни?

4. Да се покаже точноста на равенството $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и да се објасни неговата геометриска смисла, претставувајќи ги векторите $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ како дијагонали на паралелограм.

5*. Со помош на вектори (за $\alpha, \beta \le \pi$, $\alpha > \beta$) да се изведе формулата

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

6. Дадени се точките $A(2, 1, -1)$, $B(3, 2, 1)$, $C(4, 0, 1)$ и $D(3, -1, -1)$. Да се пресмета:

а) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC}$;

в) плоштината на четириаголникот $ABCD$;

г) висината на $\triangle ABC$, спуштена од темето C.

7. Да се најде единичен вектор $\mathbf{a}$ којшто ќе биде колинеарен со векторскиот производ на $\mathbf{b} = (4, 1, -1)$ и $\mathbf{i}$.

8. Дадени се векторите $\mathbf{a} = (3, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 4, 3)$, $\mathbf{c} = (-1, 3, 2)$ и $\mathbf{d} = (2, 0, 1)$.
Да се пресмета: а) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$; б) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$; в) $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})$.

9. При кои услови постои вектор $\mathbf{x}$ којшто ги задоволува равенствата $\mathbf{x}\,\mathbf{a} = \alpha$ и $\mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ истовремено, каде што $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ се дадени вектори и α – даден скалар?

10. Да се наведе кои од аксиомите за прстен (в. **I.1.5**) се задоволени за множеството V од сите вектори во однос на операциите собирање $(+)$ и векторско множење $(\times)$.

11. Да се докаже равенството (9) со помош на равенството (8).

12*. Ако $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ се кои било вектори, тогаш постојат скалари x, y, u, v такви што

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} = u\,\mathbf{c} + v\,\mathbf{d}.$$

Помош. Да се искористат формулите (8) и (9).

Во задачите 13–16 да се докажат наведените својства на детерминанти од втор ред (в. вежба 3 во **2.1**), користејќи ги својствата на векторскиот производ на вектори што лежат во иста координатна рамнина. Притоа, да се има предвид дека за $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, формулата (7′) добива облик

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \tag{10}$$

13. Ако две редици си ги разменат местата, тогаш детерминантата го менува знакот (вежба 3 б) во **2.1**).

14. Детерминанта се множи со број λ, ако со тој број се помножи едната од редиците или од колоните (вежба 3 в) во **2.1**).

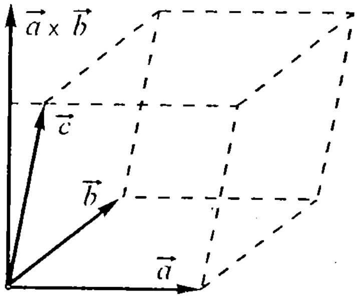
15. Ако елементите од некоја редица на детерминантата претставуваат збир од два собирока, $a_1 + c_1$ и $a_2 + c_2$, тогаш детерминантата може да се разложи како збир од две соодветни детерминанти; на пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

16. Ако елементите од една редица се пропорционални со соодветните елементи на другата редица, тогаш детерминантата е нула.

3.4. Мешан производ

Ако се дадени три вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, тогаш можеме да го формираме производот $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$, кој ќе го означиме со $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ и ќе го наречеме **мешан производ** на векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Значи



Црт. 1

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}\,.$$

Притоа, $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ е скалар, бидејќи е скаларен производ на векторите $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Да претпоставиме дека векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се некомпланарни и да го разгледаме паралелопипедот чии рабови се $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (црт. 1). Според 1^0 од **3.3** должината на векторскиот производ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ е еднаква со плоштината на основата чии рабови се $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Проекцијата од $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ е (по апсолутна вредност) еднаква со висината на паралелопипедот спуштена на споменатата основа. Одовде следува

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = |\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}\,|\, \mathrm{pr}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c} = \pm V\,,$$

каде што V е волуменот на споменатиот паралелопипед. Точно е, значи, следново својство:

1^0. *Мешаниот производ* $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ *е еднаков , по апсолутна вредност, со волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$. $\diamondsuit$

За тројката вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, велиме дека е **позитивно** (или **десно**) **ориентирана** ако соодветниот производ $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ има позитивна вредност, **а негативно ориентирана** – ако таа вредност е негативна. (Притоа, како и погоре, претпоставуваме дека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се некомпланарни вектори.)

Да уочиме дека порано воведениот поим за десен координатен систем (**1.5**) е специјален случај од горниот поим за десно ориентирана тројка вектори (т.е. векторите $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ чинат десна тројка).

Се покажува дека сите три тројки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$; $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ имаат иста ориентација и дека таа е спротивна од ориентацијата на $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$; $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$; $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$

Имајќи го предвид и својството 1^0, лесно се докажува дека:

2^0. $\quad (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}) = (\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b})\,, \quad (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = -(\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b})\,.$ $\diamondsuit$

Ако равенството $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a})$ го напишеме во вид $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a}$, тогаш, според 1^0 од **3.1** добиваме дека $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Значи, во мешаниот производ можеме да им ги промениме местата на знаците за векторски и скаларен производ, ако притоа го оставиме истиот редослед на векторите **a**, **b**, **c**, а заградите ги поместиме.

На крајот да забележиме дека:

3^0. *Равенството* $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = 0$ *е потребен и доволен услов за компланарност на векторите* **a**, **b**, **c**. ◇

За пресметување на мешаниот производ од три вектори, зададени со нивните координати

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3),$$

ќе ја искористиме формулата (1) од **3.2** и (6) од **3.3** (за пресметување скаларен односно векторски производ на два вектора) и ќе добиеме

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (c_1, c_2, c_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 .$$

Имајќи предвид дека последниот израз претставува детерминанта од трет ред (развиена по третата редица), за мешаниот производ на векторите **a**, **b**, **c** го добиваме следното својство:

4^0. $$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Вежби

1. Дадени се векторите $\mathbf{a} = (3, 1, 4)$; $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ и $\mathbf{c} = (-2, 1, 1)$. Да се пресмета $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$.
2. Да се провери дали се компланарни векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, ако:
   а) $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (-1, 1, 1)$;
   б) $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, 2, 3)$.
3. Да се провери дали точките $A(2, 1, 3)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(0, 1, 5)$, $D(1, 2, -1)$, лежат во иста рамнина.

Во задачите 4–7 векторите **m**, **n** и **p** се заемно нормални ортови.

4. Да се пресмета волуменот V на паралелопипедот конструиран на векторите $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n} - \mathbf{p}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n} + 5\mathbf{p}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{m} - 3\mathbf{p}$.
5. Да се пресмета волуменот V на триаголната призма конструирана на векторите $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n} + 3\mathbf{p}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n} + \mathbf{p}$ и $\mathbf{c} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$.

6. Да се пресмета волуменот V и должината на висината H, спуштена кон ѕидот ABC од пирамидата $ABCD$, ако $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} = -2\mathbf{m} + 6\mathbf{p}$ и $\overrightarrow{AD} = 3\mathbf{n} + 8\mathbf{p} = \mathbf{a}$.

7. Да се најде висината H на паралелопипедот, конструиран на векторите $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n} + \mathbf{p}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n} + 4\mathbf{p}$ и $\mathbf{c} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{p}$, кон основата конструирана на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

8. Темињата на една пирамида се: $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 6)$, $D(2, 3, 9)$. Да се пресмета волуменот V на пирамидата и должината H на висината спуштена од D на ѕидот ABC.

9. Точките $O(0, 0, 0)$, $A(5, 2, 0)$ и $B(2, 5, 0)$ се темиња на долната основа од една триаголна призма, а $C(1, 2, 4)$ е теме од горната основа што формира со O еден бочен раб на призмата. Да се пресмета:

а) волуменот V; б) плоштината P на ѕидот OAB;

в) должината H на висината спуштена од C на OAB;

г) аглите на $\triangle ABC$: $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$.

10*. Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ се три некомпланарни вектори. Да се покаже дека за секој вектор $\mathbf{d}$ е точно равенството:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})}\left[(\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\,\mathbf{d}\,\mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d})\mathbf{c}\right].$$

Помош. Да се искористи резултатот од вежбата 12 во **3.3**.

11. На што се сведува равенството во вежбата 10, ако $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ се координатните вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ соодветно?

12*. Својствата за детерминанти од втор ред, формирани во вежбите **2.1**: а) 13; б) 14; в) 15; г) 16, да се преформулираат за детерминатни од трет ред и (за разлика од доказите во **2.3**) овде да се докаже нивната точност со помош на равенството 4^0 и други својства на мешаниот производ.

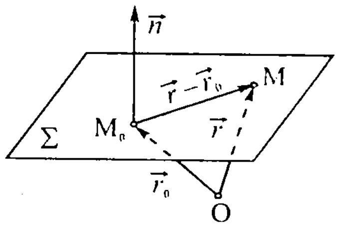
IV.4. РАВЕНКИ НА РАМНИНА И ПРАВА

Во овој параграф ќе ги разгледаме разните видови равенки на рамнина и права, како и односите меѓу прави и рамнини (од гледна точка на аналитичната геометрија) користејќи ги притоа резултатите од претходните три параграфи (од векторската алгебра и детерминатите).

4.1. Општа равенка на рамнина

Положбата на една рамнина во просторот може да се определи на повеќе начини, меѓу кои најважни се: со помош на три неколинеарни точки или пак со една точка од таа рамнина и еден ненулти вектор, нормален на таа рамнина. Последниов начин на определување ќе го искористиме за претставување на дадена рамнина со помош на равенка.

За таа цел, нека е избран просторен правоаголен декартов координатен систем $Oxyz$ и нека Σ е рамнина, определена со една нејзина точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и еден ненулти вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$ (значи: $A^2+B^2+C^2 \neq 0$), нормален на таа рамнина.



Црт. 1

Нека $M(x, y, z)$ е произволна точка од рамнината Σ (црт. 1). Кога точката M се менува во рамнината Σ, се менува и векторот $\overrightarrow{M_0M}$, останувајќи нормален на векторот $\mathbf{n}$, па според 8^0 од **3.1**, векторите $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ го задоволуваат равенството

$$\mathbf{n}\,\overrightarrow{M_0M} = 0\,, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0\,, \tag{1}$$

каде што $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ се радиус–векторите на точките M и M_0 соодветно.

Равенството (1) го задоволува секоја точка M од рамнината Σ, а ако M не лежи на рамнината, тогаш тој услов се нарушува. Според тоа, равенството (1) искажува едно својство, заедничко за сите точки од рамнината Σ и само за нив. Затоа е природно условот (1) да го наречеме **равенка на рамнината Σ во векторска форма.**

Бидејќи $\mathbf{n} = (A, B, C)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0)$, според 5^0 од **3.2**, го добиваме условот

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

и го викаме **равенка на рамнината Σ во координатна форма.**

ПРИМЕР 1. Да ја најдеме равенката на рамнината што минува низ точката $M_0(1,\ 4,\ -5)$ и е нормална на векторот $\mathbf{n} = (2,\ 3,\ -2)$.

Според (2), ќе имаме:

$$2\cdot(x-1) + 3\cdot(y-4) - 2\cdot(z+5) = 0\,, \quad \text{т.е.} \quad 2x + 3y - 2z - 24 = 0\,.$$

Значи, равенката на рамнината што минува низ дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е нормална на даден ненулти вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$ може да се напише во облакот (2). Таа равенка можеме да ја трансформираме во обликот

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\,. \tag{3}$$

каде што $D = -A\,x_0 - B\,y_0 - C\,z_0$, т.е. во равенка што е линеарна во однос на x, y, z. Според тоа, точна е следнава

Теорема 1.

Секоја рамнина Σ може да се претстави со линеарна равенка во однос на тековните координати x, y, z. $\diamondsuit$

Да покажеме дека важи и обратното:

Теорема 2.

Ако A, B, C и D се четири дадени реални броеви, при што барем еден од броевите A, B, C не е нула, а $Oxyz$ е даден декартов правоаголен координатен систем, тогаш множеството точки $M(x, y, z)$, чиишто координати ја задоволуваат равенката (3), претставува една рамнина.

Доказ. Да ја разгледаме равенката (3), во која барем еден од коефициентите A, B, C е $\neq 0$. Нека (x_0, y_0, z_0) е едно решение на равенката (3), т.е.

$$A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D = 0\,. \tag{3'}$$

(Такво решение постои поради условот барем еден од A, B, C да е различен од нула; на пример, ако $A \neq 0$, избирајќи ги y_0 и z_0 произволно, може да се определи x_0, така да важи (2').) Со одземање на (3') од (3) ја добиваме равенката

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,, \tag{4}$$

која ја задоволуваат сите точки (и само тие) што лежат во рамнината која минува низ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и стои нормално на $\mathbf{n} = (A, B, C)$, т.е. (4) е равенка на таа рамнина. Бидејќи пак, очигледно, равенките (3) и (4) се еквивалентни, следува дека равенката (3) е равенка на рамнината што минува низ M_0 и стои нормално на $\mathbf{n}$, со што теоремата е докажана. ◊

За (3) велиме дека е **општа равенка на рамнина**.

Да разгледаме неколку специјални случаи што се добиваат кога некои од коефициентите во равенката (3) се нули.

1) За $D = 0$ ја добиваме равенката $A\,x + B\,y + C\,z = 0$. Очигледно, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ е едно нејзино решение, па значи таа е равенка на рамнина што минува низ координатниот почеток.

2) Ако $A = 0$, т.е. ако ја имаме равенката $B\,y + C\,z + D = 0$, тогаш со неа е претставена рамнината нормална на векторот $\mathbf{n} = (0, B, C)$. Но, $\mathbf{n}$ е нормален на векторот $\mathbf{i}$ и, значи, оваа равенка претставува равенка на рамнина паралелна со оската Ox. Ако е, покрај $A = 0$, уште и $D = 0$, тогаш ја добиваме равенката $B\,y + C\,z = 0$ на рамнина што минува низ оската Ox.

3) Нека сега $A = B = 0$, т.е. нека е дадена равенката $C\,z + D = 0$. Со неа е претставена рамнина нормална на векторот $\mathbf{n} = (0, 0, C)$, кој пак е колинеарен со векторот $\mathbf{k}$. Тоа значи дека $C\,z + D = 0$ претставува равенка на рамнина, паралелна на рамнината образувана од оските Ox и Oy (т.е. рамнина паралелна со координатната рамнина Oxy). Ако уште и $D = 0$, ја добиваме равенката $z = 0$, која претствува равенка на координатната рамнина Oxy.

4) На сличен начин може да се дискутира и секоја од равенките

$$Ax + Cz + D = 0, \quad Ax + D = 0, \quad Ax + By + D = 0, \quad By + D = 0.$$

Резимирајќи, можеме да речеме:

Теорема 3.

Ако во (3) ***некој од коефицентите*** A, B, C ***е нула, тогаш рамнината е паралелна со координатната оска што е "соодветна" на тој коефициент.***

Ако пак точно еден од тие коефициенти не е нула, тогаш рамнината е паралелна со координатната рамнина "соодветна" на тој коефициент. ♢

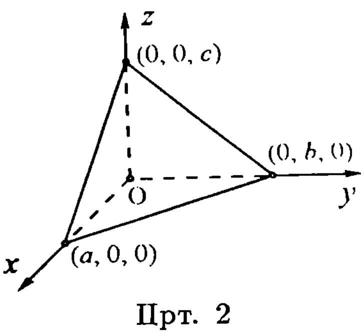
5) Да претпоставиме, сега, дека сите коефициенти во равенката (3) се различни од нула. Тогаш равенката (3) може да се доведе во обликот

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{5}$$

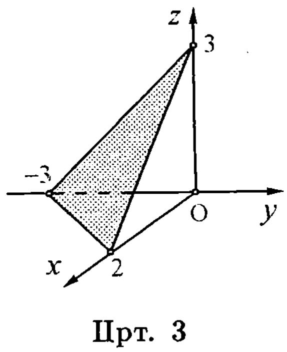
познат како **сегментен вид на равенка на рамнина**; притоа

$$a = -\frac{D}{A}, \qquad b = -\frac{D}{B}, \qquad c = -\frac{D}{C}.$$

Терминот "сегментен" иде оттаму што a, b, c геометриски означуваат сегменти[1] што на координатните оски ги отсечува рамнината (на црт. 2 е претставен еден дел од рамнината). Навистина заменувајќи, на пример, $y = z = 0$ во (5), добиваме дека $x = a$, т.е. точката $A(a, 0, 0)$ лежи на рамнината.



Црт. 2



Црт. 3

[1] Овие "сегменти" можат да бидат и негативни.

ПРИМЕР 2. Да ја претставиме во сегментен вид равенката

$$3x - 2y + 2z - 6 = 0.$$

За таа цел ќе ја поделиме со 6 и ќе добиеме

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{3} = 1.$$

На црт. 3 е претставен дел од таа рамнина.

Вежби

1. Да се даде геометриско толкување на следниве равенки:

а) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{i} = 2$; б) $\mathbf{r}\,(\mathbf{i}+2\mathbf{j}) = 0$; в) $\mathbf{r}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 1$,
каде што $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$.

2. Да се состави равенката на рамнината што е нормална на векторот $\mathbf{n} = (3,\ -1,\ 2)$ и минува низ точката $M_0(5,\ 4,\ -3)$. Дали на таа рамнина лежат точките $P(2,\ 1\ -1)$, $Q(3,\ 1,\ -2)$ и $R(5,\ 2,\ -4)$?

3. Да се напише равенката на рамнината, паралелна со z–оската, а на оските Ox и Oy отсечува отсечки 2 и -3 соодветно.

4. Да се напише равенката на рамнината која минува низ точката $M(7,\ -5,\ 1)$ и на координатните оски отсечува (позитивни) меѓусебно еднакви отсечки.

5. Да се состави равенката на рамнината

а) што минува низ точката $M(3,\ -2,\ 1)$ и е нормална на x–оската;

б) што минува низ точката $N(2,\ 3,\ -4)$ и низ z–оската;

в) што е нормална на y–оската и на неа отсечува (негативна) отсечка, -5.

6. Да се најдат сегментите што ги отсечува рамнината $4x - 5y + 8z - 4 = 0$ на координатните оски.

7. Да се најде равенката на множеството точки $M(x,\ y,\ z)$ еднакво оддалечени од точките $A(2,\ 1,\ -1)$ и $B(1,\ -4,\ 1)$. Дали на тоа множество му припаѓаат точките $C(-1,\ 1,\ 5)$ и $D(3,\ 0,\ 2)$?

8. Да се претстави во координатен систем дел од рамнината

а) $3x + 2y + 4z = 12$; б) $3x + 2y - 6 = 0$;

в) $x - 2y = 0$; г) $4y + 9 = 0$.

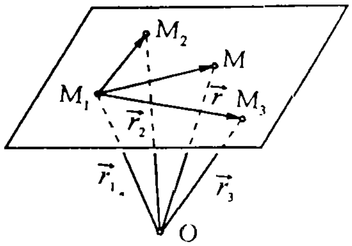
9. Да се состави равенката на рамнината што минува низ точките $(5,\ -4,\ -2)$, $(1,\ -2,\ 6)$ и отсекува еднакви (позитивни) отсечки на оските Ox и Oy.

4.2. Други видови равенки на рамнина

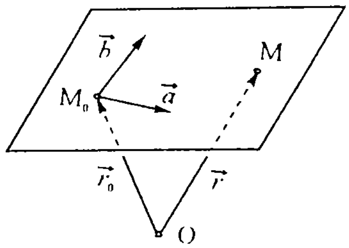
Да си поставиме сега задача да најдеме равенка на рамнина што минува низ три неколинеарни точки (т.е. точки што не лежат на иста права). Ако радиус–векторите на дадените точки M_1, M_2, M_3 ги означиме со $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ соодветно, а радиус–векторот на произволна точка M од рамнината со $\mathbf{r}$ (црт. 1), тогаш векторите $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ се компланарни, па нивниот мешан производ е еднаков со нула, т.е.

$$((\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)) = 0\,, \tag{1}$$

што претставува **векторска форма** *на равенката на рамнината што минува низ трите дадени точки* M_1, M_2, M_3.



Црт. 1



Црт. 2

Преминувајќи на координати, ја добиваме равенката на рамнината во **координатна форма**:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{2}$$

каде што $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\quad \mathbf{r}_i = (x_i,\, y_i,\, z_i)$ $i = 1, 2, 3$.

ПРИМЕР 1. Да провериме дали се компланарни точките $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, 3, 5)$, $M_3(-1, -2, 5)$, $M_4(0, 2, -2)$. Во потврден случај да се најде равенка на рамнината во која лежат.

Да ја пресметаме левата страна од (2), при што наместо x_i, y_i, z_i ги заменуваме соодветните координати на $M_i (i = 1, 2, 3)$, а наместо x, y, z – координатите на M_4

$$\begin{vmatrix} 0-1 & 2-2 & -2-3 \\ 2-1 & 3-2 & 5-3 \\ -1-1 & -2-2 & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Значи, точките се компланарни. Равенката на рамнината во која лежат, според (2), е:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{т.е.} \quad 5x-3y-z+4=0\,.$$

Да претпоставиме, сега, дека имаме работа со рамнина Σ што минува низ дадена точка M_0 и е паралелна со неколинеарните вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (црт. 2). Тогаш векторот $\overrightarrow{M_0M}$, при што M е која било точка од Σ, е компланарен со $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, па значи постојат скалари u и v такви што $\overrightarrow{M_0M} = u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}$. Од тоа, поради $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$, каде што $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ се радиус–векторите на M и M_0 соодветно, имаме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}\,. \tag{3}$$

Обратно, ако $\mathbf{r}$ е определен со (3), тогаш за кои било u, v од $\mathbf{R}$ соодветната точка лежи на Σ. Значи, равенството (3) го задоволуваат радиус–векторите на точките од Σ и само тие, па затоа, за (3) велиме дека е **векторска равенка на рамнината** Σ.

Ако е избран координатен систем $Oxyz$ чиј почеток се совпаѓа со почетокот на радиус–векторите, тогаш равенката (3) може да се напише во облик на три скаларни равенки:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u\,a_1 + v\,b_1\,, \\ y &= y_0 + u\,a_2 + v\,b_2\,, \\ z &= z_0 + u\,a_3 + v\,b_3\,, \end{aligned} \tag{4}$$

за кои велиме дека се **параметарски равенки на рамнината**, а за u и v – **параметри**.

Да забележиме дека можевме **и директно** да ја напишеме општата равенка на рамнината, а тоа е

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0\,, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕР 2. Да ги запишеме параметарските равенки на рамнината што е определена со $\triangle PQR$: $P(3,\,1,\,1)$, $Q(4,\,2,\,1)$, $R(-1,\,2,\,3)$.

За таа цел, ќе ги формираме векторите $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = (1,\,1,\,0)$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{PR} = (-4,\,1,\,2)$, и радиус–векторот $\mathbf{r}_0 = (3,\,1,\,1)$. Тогаш, според (3), ќе имаме

$$\mathbf{r} = (3,\,1,\,1) + u\cdot(1,\,1,\,0) + v(-4,\,1,\,2)\,,$$

од каде што ги добиваме бараните параметарски равенки (4):

$$x = 3 + u - 4v\,, \quad y = 1 + u + v\,, \quad z = 1 + 2v\,.$$

(Од овие равенки можеме да ја добиеме општата равенка на рамнината со елиминирање на параметрите u и v:

$$v = \frac{z-1}{2}\,; \quad x = 3 + u - 2(z-1)\,, \quad u = x + 2z - 5\,;$$

$$y = x + 2z - 4 + \frac{z-1}{2}\,, \quad \text{т.е.} \quad 2x - 2y + 5z - 9 = 0\,.)$$

До уште еден вид равенка на рамнина Σ доаѓаме ако претпоставиме дека во векторската равенка $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ на Σ (в. (1) од **4.1**) $\mathbf{n}$ е единичен вектор. Имајќи предвид дека, во тој случај,

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma),$$

каде што α, β, γ се аглите меѓу $\mathbf{n}$ и оските Ox, Oy, Oz соодветно, добиваме

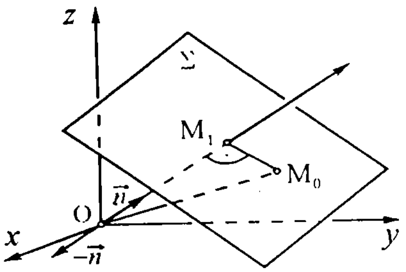
$$\mathbf{n}\,\mathbf{r} - \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0 = 0\,, \tag{5}$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,, \tag{5'}$$

каде што $p = \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0 = \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OM}_0$.

За равенката $(5')$ велиме дека е **нормирана равенка на рамнината** Σ. За смислата на α, β, γ кажавме погоре, а останува да видиме какво геометриско толкување има скаларот p.

Ако Σ минува низ координатниот почеток, тогаш $p = \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0 = 0$, па затоа ќе претпоставиме дека $p \neq 0$, т.е. Σ не минува низ координатниот почеток (црт. 3).



Црт. 3

Нека M_1 е точката од рамнината Σ низ која минува нормалата на Σ повлечена од координатниот почеток. Ако векторите $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{OM}_1$ имаат иста насока, тогаш

$$p = \mathbf{n}\,\mathbf{r}_0 = \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OM}_0 = \overline{OM}_0\cdot\cos\varphi = \overline{OM}_1\,, \tag{6}$$

при што $\varphi = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{r}_0)$, а

$$p = \overline{OM}_0\cdot\cos\varphi = -\overline{OM}_1 \tag{6'}$$

во случај кога $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{OM}_1$ имаат спротивна насока (види црт. 3). Имајќи предвид дека $\overline{OM}_1 = d$ е растојанието од координатниот почеток до рамнината Σ, добиваме дека бројот p по апсолутна вредност е еднаков со растојанието од координатниот почеток до рамнината Σ. Притоа, $p > 0$ ако и само ако нормалниот вектор $\mathbf{n}$, земајќи го координатниот почеток за почеток на $\mathbf{n}$, е насочен од O кон рамнината.

Имајќи предвид дека на нормалата од една рамнина постојат два меѓу себе спротивни ортови, $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и $-\mathbf{n} = (\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta), \cos(\pi-\gamma))$, добиваме дека постојат две форми на нормираната равенка на рамнината, при што, множејќи со -1, преминуваме од едниот облик во другиот. Така, ако Σ е определен со својата општа равенка

$$Ax + By + Cz + D = 0\,,$$

тогаш нејзината нормирана равенка е дадена со:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0\,. \tag{7}$$

зашто $\mathbf{n} = (A, B, C)$ е вектор на нормалата со интензитет $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Од (7) следува дека:

$$d_0 = \frac{|\,D\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{8}$$

е растојанието од координатниот почеток до рамнината.

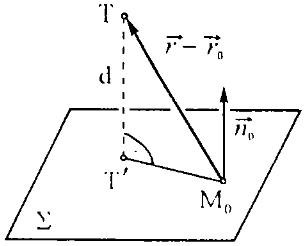
ПРИМЕР 3. Равенката $x - 2y + 2z - 15 = 0$ во нормиран вид е:

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 5 = 0\,,$$

а растојанието на рамнината $x - 2y + 2z - 15 = 0$ до координатниот почеток е $d = 5$.

Равенката (7) може згодно да се искористи за пресметување *растојание од точка до рамнина.*

Нека $T(x_1, y_1, z_1)$ е дадена точка и Σ е рамнина, зададена со равенката (5). Да го најдеме растојанието d од точката T до рамнината Σ (црт. 4).



Црт. 4

Можеме да ставиме $d = \overline{TT'}$, каде што $T' \in \Sigma$ и $TT' \perp \Sigma$ и да го разгледаме векторот

$$\overrightarrow{M_0T} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\,,$$

каде што $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ се радиус–векторите на точките $M_0 \in \Sigma$ и T соодветно. Од $\triangle M_0TT'$, имајќи предвид дека $TT' \parallel \mathbf{n}$, наоѓаме

$$d = |\mathrm{pr}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)| = |\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|\,, \qquad \text{т.е.}$$

$$d = \frac{|A\,x_1 + B\,y_1 + C\,z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \tag{9}$$

Така, го добивме следново правило:

За да се најде растојанието од дадена точка до дадена рамнина Σ треба во левата страна од нејзината нормирана равенка (7) да ги замениме координатите од дадената точка и да ја земеме апсолутната вредност на добиениот резултат.

ПРИМЕР 4. Да го најдеме растојанието d на точката (3, 4, −5) до рамнината Σ: $2x + y - 2z - 8 = 0$ и растојанието d_0 од координатниот почеток до Σ. Според (9) и (8), добиваме:

$$d = \frac{|\,2\cdot 3 + 4 - 2\cdot(-5) - 8\,|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4\,, \qquad d_0 = \frac{|\,-8\,|}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}\,.$$

Вежби

1. Да се запише равенката на рамнината на која лежи $\triangle ABC$: $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(3,\ 2,\ 2)$, $C(-2,\ 3,\ 1)$.
2. Да се провери дали се компланарни следниве четири точки:

   а) (0, −1, −1), (4, 5, 1), (3, 9, 4), (−4, 4, 4);

   б) (1, 2, 3), (−1, 0, 0), (3, 0, 1), (0, −1, −1);

в) (3, 4, 2), (1, 2, 1), (2, 3, 2), (1, 1, 1).

Во потврден случај да се најде равенката на рамнината во која лежат.

3. Да се запишат
а) параметарски равенки, б) нормираната равенка
на рамнината определена во зад. 1.

4. Да се пресмета растојанието од точката (4, 3, −1) до рамнината
а) $x - 2y + 2z - 5 = 0$; б) $3x - 4y = 0$; в) $4z - 1 = 0$.

5. Даден е тетраедар со темиња $A(-1, 0, -1)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(2, 2, -1)$, $D(1, 4, 5)$. Да се најде должината на висината, спуштена од темето D кон ѕидот ABC.

6. На оската Oz да се најде точка што е еднакво оддалечена од двете рамнини $x + 2y - 2z + 12 = 0$, $2x - 2y + z - 3 = 0$.

4.3. Однос меѓу рамнини

Ќе го разгледаме овде прашањето за: **агол меѓу две рамнини**, паралелност, нормалност и пресек на три рамнини.

За **агол меѓу две рамнини**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,, \tag{1}$$

овде ќе го прифатиме помалиот од аглите α и $\pi - \alpha$, каде што α е аголот меѓу кои било два вектора, нормални на дадените рамнини на пример, меѓу векторите

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \qquad \text{и} \qquad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)\,.$$

(Да забележиме дека α и $\pi - \alpha$ се два агла, во општ случај еден остар и еден тап, кои се дополнуваат до π, а тие се еднакви со двата соседни диедарски агли што се формираат при пресек на две рамнини.)

Според формулата (3) од **3.2**, аголот меѓу дадените рамнини можеме да го пресметуваме со помош на формулата

$$1^0. \qquad \cos\alpha = \frac{|\,A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\,|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{2}$$

ПРИМЕР 1. Да го најдеме аголот меѓу рамнините

$$-x + y + 4z - 11 = 0\,, \qquad 2x + y - 2z - 3 = 0\,.$$

Според 1^0, имаме:

$$\cos\alpha = \frac{|\,-1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-2)\,|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2\cdot 2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Значи, аголот меѓу рамнините е $\alpha = \pi/4$.

Ако рамнините, определени со (1) се паралелни, односно нормални, тогаш и векторите $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ се паралелни, односно нормални меѓу себе, а и обратно. Имајќи ја предвид Т.3 од **1.5** и 5^0 од **3.2**, добиваме дека се точни наредните две својства.

2⁰. *Рамнините определени со* (1) *се паралелни ако и само ако*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k\,. \tag{3}$$

Специјално, ако е уште и $D_1/D_2 = k$, *тогаш рамнините се совпаѓаат.*

(Притоа се допушта некои од именителите да се нули, но во тој случај треба да се нули и соодветните броители.) ◇

Според (3), равенките на две паралелни рамнини секогаш може да се запишат во обликот

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0\,, \qquad Ax + By + Cz + D_2 = 0\,. \tag{3'}$$

3⁰. *Рамнините определени со* (1) *се нормални ако и само ако*

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0\,. \quad \diamond \tag{4}$$

Да разгледаме неколку примери.

ПРИМЕР 2. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M(1, -2, 1)$ и е паралелен со рамнината $2x + 3y - 4z + 5 = 0$.

Равенката ќе ја бараме во обликот:

$$A(x-1) + B(y+2) + C(z-1) = 0\,.$$

Според (3′), бараната равенка ќе гласи: $2(x-1) + 3(y+2) - 4(z-1) = 0$, т.е $2x + 3y - 4z + 8 = 0$.

ПРИМЕР 3. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точките $M_1(1, 0, -1)$ и $M_2(2, 1, 1)$, а е нормална на $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Рамнината минува низ M_1, па $A(x-1) + By + C(z+1) = 0$. Од тоа што M_2 лежи на рамнината добиваме $A + B + 2C = 0$, а од нормалноста со рамнината $x + 2y - 2z + 3 = 0$, според (4), добиваме $A + 2B - 2C = 0$. Од системот

$$A + B + 2C = 0\,, \qquad A + 2B - 2C = 0\,,$$

со три непознати A, B, C, добиваме $A = -6C$, $B = 4C$. Значи нормалниот вектор $\mathbf{n}$ на рамнината (чија равенка се бара) е колинеарен со векторот $(-6C, 4C, C)$. Можеме да ставиме $C = 1$, т.е. $\mathbf{n} = (-6, 4, 1)$, па бараната равенка е $-6(x-1) + 4y + (z+1) = 0$, т.е. $-6x + 4y + z + 7 = 0$.

ПРИМЕР 4. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $M(2, 1, -1)$ и е нормална на рамнините $2x+y-z+3 = 0$, $x-y+2z = 0$.

Имаме: $A(x-2)+B(y-1)+C(z+1) = 0$, при што векторот $\mathbf{n} = (A, B, C)$ е нормален на векторите $\mathbf{n}_1 = (2, 1, -1)$ и $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 2)$. Можеме да земеме $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Го пресметуваме $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ според (6) од **3.3** и добиваме $\mathbf{n} = (1, -5, -3)$, па бараната равенка гласи: $(x-2) - 5(y-1) - 3(z+1) = 0$, т.е. $x - 5y - 3z = 0$.

Задачата за пресек на две, односно на три рамнини се сведува на задача за решавање на систем од две, односно од три, равенки со три непознати, разгледани во **2.1**, односно во **2.3**.

Така, пресекот (т.е. множеството заеднички точки) на рамнините:

$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0\,, \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_1 &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

е:

а) *множеството точки од една права, ако дадените рамнини не се паралелни;*

б) *празното множество, ако тие рамнини се паралелни, но не се совпаѓаат;*

в) *сите точки на рамнината Σ, ако и двете равенки* (5) *определуваат една иста рамнина Σ.*

За конкретно даден систем равенки, својството $\mathbf{2^0}$ ни кажува како да провериме кој од тие три случаи важи. Да спомeнеме дека случајот **а)** ќе го разгледаме во **4.4**, а другите два не се од особен интерес.

При определување на пресек на три рамнини дадени со равенките:

$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0\,, \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0\,, \\
A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

можеме да се ограничиме на случајот кога две по две се непаралелни. (Причината за тоа е јасна, бидејќи ако две од тие рамнини се паралелни, но не се совпаѓаат, тогаш пресекот е празен, а ако две рамнини се совпаѓаат, тогаш задачата се сведува на пресек од две рамнини.)

Според теоремата на Крамер за системи равенки со три непознати (Т.1 од **4.3**) *пресекот се состои само од една точка* (x_0, y_0, z_0) *ако и само ако детерминантата на системот е различна од нула*, т.е:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0\,.
$$

Тогаш, x_0, y_0, z_0 се определуваат според формулите на Крамер (в.(3) од **4.3**), што овде нема да ги наведеме, туку ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 5. Да се најде пресечната точка на рамнините:

$$
x - 2y + 2z + 4 = 0, \qquad 2x - z - 6 = 0, \qquad x + 3y + 2z - 1 = 0.
$$

Со помош на правилото на Крамер, или без тоа правило, лесно се проверува дека $M(2,\, 1,\, -2)$ е единствената пресечна точка на дадените три рамнини.

Ако $D = 0$, тогаш можни се два случаја:

1) рамнините немаат заедничка точка, а тоа е случај кога пресечната права на кои било две од дадените рамнини е паралелна со третата рамнина;

2) пресекот на трите рамнини е права низ која минуваат сите три рамнини.

Вежби

Во задачите 1-3 да се најде аголот α меѓу дадените рамнини.

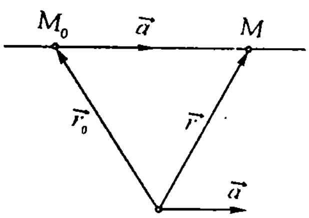
1. $x + 2y - 2z = 0$ и $4x + y + 3z + 5 = 0$.
2. $x - y - 3 = 0$ и $x - z - 2 = 0$.
3. $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и $x + 2y + 2z - 9 = 0$.
4. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точката $(-3, 2, 5)$ и е нормална на рамнините $2x + y + 3z - 1 = 0$, $3x - y + 2z + 4 = 0$.
5. Да се најде равенката на рамнината што минува низ координатниот почеток и е нормална на рамнините $9x+5y+7z = 21$, $4x+2y+3z+15 = 0$.
6. Да се напише равенката на рамнината што минува низ точката $(3, 1, 2)$ и е паралелна со рамнината $x + 2y - z = 4$.
7. Да се најде равенката на рамнината што минува низ точките $P(0, 0, 1)$ и $Q(3, 0, 0)$, а со рамнината Oxy образува агол $\alpha = \pi/3$.

Да се најде пресечната точка на рамнините (8-10):

8. $x + y + 3z + 1 = 0$, $2x - y + 3z = -8$, $2x + y + z = -4$;
9. $x + 2y - 3z = 9$, $2x + 4y + 5z = 12$, $3x + 6y + 2z = 21$;
10. $x - y + z = 1$, $x + y - z = 2$, $5x + y - z = 7$.

4.4. Видови равенки на права

Нека p е права што минува низ дадена точка M_0 и е паралелна со даден ненулти вектор $\mathbf{a}$ (црт. 1). Ако $\mathbf{r}_0$ е радиус–векторот



Црт. 1

на точката M_0, а $\mathbf{r}$ е радиус–векторот на произволна точка M од (p), тогаш

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}.$$

Бидејќи векторот $\overrightarrow{M_0M}$ е колинеарен со $\mathbf{a}$ ($\neq \mathbf{o}$), следува дека постои скалар t, таков што $\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}$ (Т.1 во **1.3**), па

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}. \qquad (1)$$

Јасно е дека важи и обратното, т.е. ако $\mathbf{r}$ е определен со (1), тогаш за секој $t \in \mathbf{R}$ соодветната точка лежи на правата (p). Значи, условот (1), кога t се менува во $\mathbf{R}$, го задоволуваат радиус–векторите на точките од (p) и само тие. Затоа велиме дека равенството (1) е **равенка на правата во векторска форма.**

Ако во однос на еден избран декартов правоаголен координатен систем (чиј координатен почеток се совпаѓа со почетокот на радиус–векторите) имаме $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\mathbf{r} = (x, y, z)$, тогаш равенката (1) може да се замени со трите равенки

$$x = x_0 + a_1 t\,, \quad y = y_0 + a_2 t\,, \quad z = z_0 + a_3 t\,, \tag{2}$$

наречени **параметарски равенки на правата** (p). (Притоа, (x, y, z) се *тековни координати*, а a_1, a_2, a_3 *се координатите на векторот* $\mathbf{a}$ *кој го определува правецот на правата* (p)).

Од (2) се добиваат равенките

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}\,, \tag{3}$$

кои се наречуваат **канонични равенки на правата** (p).

Ако некој од броевите a_1, a_2, a_3 во равенките (2) е нула, тогаш тие равенки не можат да се доведат во вид на (3). Меѓутоа, ако е, на пример, $a_1 = 0$, тогаш од (2) добиваме дека $x - x_0 = 0$, па по договор во тој случај равенките на правата формално ќе ги запишуваме во обликот (3), при што

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad \text{ќе значи:} \quad x - x_0 = 0\,, \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}\,.$$

Слично кога е $a_2 = 0$, односно $a_3 = 0$, или кога два од броевите a_1, a_2, a_3 едновремено се нули (сите три не може да бидат нули истовремено, зашто $\mathbf{a}$ е ненулти вектор).

ПРИМЕР 1. Да ја претставиме во избран декартов правоаголен координатен систем правата (p) што минува низ точката $M(1, -1, 5)$, и е паралелна со векторот $\mathbf{a} = (1, 4, 0)$. Потоа да ги запишеме нејзините а) параметарски, б) канонични равенки.

Правата (p) е претставена на црт. 2.

а) Според (2), параметарските равенки се

$$x = 1 + t\,, \; y = -1 + 4t\,, \; z = 5\,.$$

б) Каноничните равенки се:

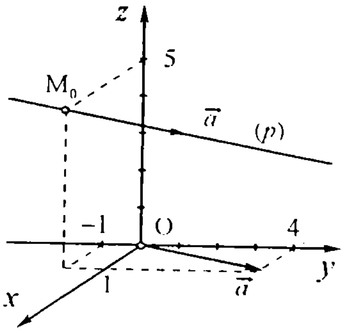
$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 5}{0}\,.$$

Да ја разгледаме сега задачата за добивање **равенки на права определена со две точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Правата е паралелна со векторот $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и минува низ точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$, па бараните равенки на правата ќе бидат

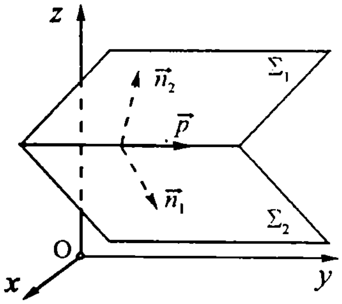
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,. \tag{4}$$

На пример, равенките на правата што минува низ точките (2, 1, −3) и (3, 2, −1) ќе бидат

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}.$$



Црт. 2



Црт. 3

Правата (*p*) во просторот може да се зададе и **како пресек меѓу две непаралелни рамнини**, Σ_1 и Σ_2 (црт. 3). Нека Σ_1 и Σ_2 се зададени со равенките

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\,.$$

Координатите на секоја точка од таа права мора да ги задоволуваат и двете равенки, а и обратно, со секоја тројка броеви x, y, z што ги задоволуваат овие две равенки е определена точка од пресечната права. Според тоа, пресечната права може да биде претставена со равенките

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\,, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\,. \end{cases} \tag{5}$$

Да видиме како можеме *да преjдеме од обликот* (5) *во каноничен облик на равенки на правата.* Пред сè, векторите $\mathbf{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ не се колинеарни (црт. 3) (зашто во спротивниот случај рамнините претставени со тие равенки би биле паралелни). Тогаш нивниот векторски производ претставува вектор паралелен со пресечната права, чии координати можат да се пресметаат со помош на формулата (6) во **3.3**:

$$\mathbf{p}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Векторот **p** не е нулти, па барем една од детерминантите што ги даваат неговите координати е различна од 0. Ако е, на пример,

$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогаш избирајќи го x_0 произволно, по правилото на Крамер ((3) во **2.3**) можат да се определат такви y_0 и z_0 кои заедно со x_0 ги задоволуваат равенките (5). Со тоа е добиена една точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на пресечната права, па каноничните равенки на правата се

$$\frac{x - y_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} . \tag{6}$$

ПРИМЕР 2. Да ги запишеме каноничните равенки на правата

$$2x - 3y + z = 5\,, \quad 3x + y - 2z = 4\,.$$

Избирајќи една координата произволно, на пример $y = 0$, имаме $2x + z = 5$, $3x - 2z = 4$, па $x = 2$, $z = 1$, т.е. ја добиваме точката (2, 0, 1) која лежи на правата. Векторскиот производ на векторите (2, −3, 1) и (3, 1, −2) е векторот (5, 7, 11), па бараните равенки се

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{11}\,.$$

Вежби

1. Да се запишат равенките на правата што минува низ точката $M(1, 2, 3)$ и низ пресекот S на рамнините
$$x + 3y + 2z = 4\,, \quad 2x + 6y + z = 2\,, \quad 4x + 8y - z = 2\,.$$
во а) каноничен, б) параметарски облик.

2. Една права (p) минува низ точката $M(2, 4, 3)$ и низ координатниот почеток. Да се претстави (p): а) со цртеж, б) со канонични равенки, в) како пресек на две рамнини.

3. Да се напишат каноничните равенки на правата
$$2x + y + z = 1\,, \quad x - 2y - z = 3\,.$$

4. Да се даде геометриско толкување на следниве равенки

а) $\mathbf{r} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; б) $\mathbf{r} \times (\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

каде што $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

4.5. Однос меѓу две прави

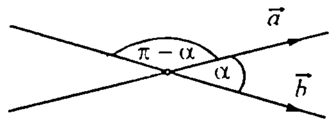
Две прави во просторот може: а) да се паралелни, б) да се сечат и в) да се разминуваат. За **агол меѓу две прави**,

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}\,, \qquad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}\,, \tag{1}$$

овде ќе прифатиме да биде помалиот од аглите α и $\pi - \alpha$, каде што α е аголот меѓу кои било два ненулти вектори што лежат (по еден) на правите; на пример:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

(Да воочиме дека α, и $\pi - \alpha$ се два агла, во општ случај едниот остар,а другиот тап, што се дополнуваат до π, а тие се еднакви со соседните агли што се образувани од две прави, повлечени низ произволна точка од просторот паралелно со дадените прави: црт. 1.)



Црт. 1

Според тоа:

1^0. *Аголот меѓу две прави се пресметува со помош на формулата за агол меѓу два вектора* (в.(3) од **3.2**):

$$\cos\alpha = \frac{|\, a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \,|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad \diamond \tag{2}$$

ПРИМЕР 1. Да го најдеме аголот меѓу правите

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-4}, \quad x = 1+t, \quad y = -2t, \quad z = 5+2t.$$

Според формулата 1^0, ќе добиеме

$$\cos\alpha = \frac{|\, 1\cdot 1 + 1\cdot(-2) - 4\cdot 2 \,|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-9|}{3\cdot\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значи, аголот меѓу правите е $\alpha = \pi/4$.

Од условите за паралелност и нормалност на два вектора добиваме:

2^0. *Правите* (p) *и* (q) *се паралелни, ако и само ако*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \quad \diamond \tag{3}$$

3^0. *Правите* (p) *и* (q) *се нормални ако и само ако*

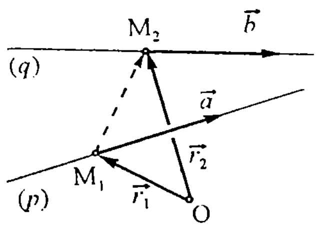
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \quad \diamond \tag{4}$$

ПРИМЕР 2. Да ги запишеме равенките на правата (p) што минува низ точката $(-2, 3, -1)$ и е паралелна со правата (q) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$.

За вектор $\mathbf{a}$ на правецот на правата (p) можеме да го земеме векторот на правецот на правата (q), т.е. $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, па бараните равенки се

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$

Ако две (различни) прави се паралелни или ако се сечат, тогаш тие лежат во иста рамнина. Да видиме при каков услов правите (p) и (q), определени со (1), лежат во иста рамнина.



Црт. 2

Да ги означиме векторите на правците на (p) и (q) со **a** и **b** соодветно, со $\mathbf{r}_1$ радиус–векторот на точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$, која лежи на (p), со $\mathbf{r}_2$ радиус–векторот на точката $M_2(x_2, y_2, z_2)$, која лежи на (q), и да го формираме векторот
$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (црт. 2). Јасно е дека (p) и (q) лежат во иста рамнина ако и само ако векторите $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, **a** и **b** се компланарни. Тогаш според 3^0 од 3.4 мешаниот производ на овие вектори е нула:

$$\big((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{a}\,\mathbf{b}\big) = 0\,,\ \text{т.е.}\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

што претставува бараниот *(потребен и доволен) услов двете прави да лежат во иста рамнина.*

ПРИМЕР 3. Да провериме дали лежат во иста рамнина правите

$$(p):\quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \qquad \text{и} \qquad (q)\quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

и, во потврден случај, да ја запишеме равенката на рамнината во која лежат. Според (5), ќе имаме:

$$\begin{vmatrix} 6-1 & -1-7 & -2-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & -8 & 27 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 0\,,$$

што значи дека правите лежат во иста рамнина.

Рамнината во која, лежат минува низ точката $M(1, 7, 3)$ од (p) и е нормална на векторот $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 1, 4) \times (3, -2, 1) = (9, 10, -7)$, па нејзината равенка е

$$9(x-1) + 10(y-7) - 7(z-3) = 0, \quad \text{т.е.} \quad 9x + 10y - 7z = 58\,.$$

ПРИМЕР 4. Да ја најдеме пресечната точка S на правите (p) и (q) од примерот 3.

Правите (p) и (q) лежат во иста рамнина и, очигледно, не се паралелни (зошто?), па тие се сечат. За да ја најдеме нивната пресечна точка, нивните равенки ќе ги запишеме во облик (со различни ознаки на параметрите):

$(p)\quad x = 1 + 2t, \quad y = 7 + t, \quad z = 3 + 4t,$

$(q)\quad x = 6 + 3s, \quad y = -1 - 2s, \quad z = -2 + s.$

(t и s се параметри.) Ако ги изедначиме соодветните координати, ќе го добиеме системот (од три равенки со две непознати):

$$1 + 2t = 6 + 3s, \quad 7 + t = -1 - 2s, \quad 3 + 4t = -2 + s.$$

Исклучувајќи го t од првите две равенки ќе добиеме $7s = -21$, од каде што $s = -3$. Од првата равенка на системот добиваме $1 + 2t = 6 + 3\cdot(-3)$, т.е. $t = -2$. (Третата равенка, за најдените вредности на s и t станува идентички точно равенство.)

Ако добиената вредност за t ја замениме во равенките на првата права (или за s – во равенките на втората), ќе ја добиеме пресечната точка $(-3, 5, -5)$.

Вежби

Во задачите 1–4, да се најде аголот меѓу дадените прави.

1. $x = 1 + 2t, y = -2 - 8t, z = 7t$ и $x = 3 - 8t, y = 1 - 7t, \ z = 11t$.
2. $x = 1 + t, \quad y = -3 - 4t, \quad z = t$ и $x = -1 + 2s, \quad y = -2 - 2s, \quad z = -s$.
3. $\begin{cases} x + 2y - 2z = 8, \\ 2x + y - z = 1, \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 15, \\ 3x + y + 4z = 21. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 3x - y + 4z = 13, \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ x - 2z = 0. \end{cases}$
5. Да се напишат равенките на правата што минува низ точката $A(-4, 3, 0)$ и е паралелна со правата $x - 2y + z = 4, \quad 2x + y - z = 0$.
6. На рамнината $3x - 4y + 7z = 30$ да се најде точката M, таква што правата OM да зафаќа еднакви агли со координатните оски.
7. Да се најде точка T на рамнината $y + z = 2$, така што правата OT да зафаќа агли од 60^0 со оските Oy и Oz

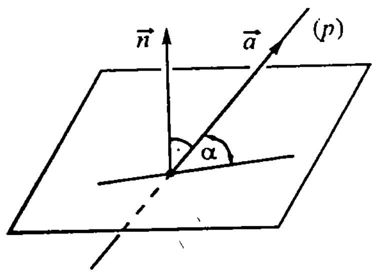
Во задачите 8-11 да се испита заемната положба на дадените прави.

8. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$.
9. $x = 2 + t, \quad y = 3 + \frac{t}{2}, \quad z = \frac{t}{3}$ и $4x - 11 = 4y - 13 = 3z$.
10. $x = 1+2t, \quad y = 5+3t, \quad z = t$ и $x = 10+5t, \quad y = -7+4t, \quad z = t$.
11. $\frac{x-7}{-1} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-9}{2}$ и $\begin{cases} 2x + 2y - z + 6 = 0, \\ -2x - z + 8 = 0. \end{cases}$
12. Да се напишат равенките на нормалата (n) повлечена од точката $M(2, 3, 1)$ кон правата $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.
13. Да се состави равенката на правата што минува низ точката $M(2, -1, 0)$ и е нормална на правите

$$\frac{x+7}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-6} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

4.6. Однос меѓу права и рамнина

Права (p) и рамнина (Σ) може: а) да се паралелни (специјално: правата да лежи на рамнината) или б) да имаат точно една заедничка точка (специјално: да се заемно нормални). Ќе разгледаме неколку задачи во врска со тоа.



Црт. 1

Нека правата и рамнината се зададени соодветно со равенките:

$$(p): \quad \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3},$$

$$\Sigma: \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Агол меѓу правата (p) и рамнината Σ се вика помалиот од двата соседни агли што ги формира (p) со својата ортогонална проекција [1] врз Σ (црт. 1). Тие се суплементни. Бидејќи синусите на два агли што се дополнуваат до π се еднакви, можеме да сметаме дека α не е поголем од $\pi/2$.

Ќе го пресметаме синусот на аголот α. Аголот меѓу правата (p) и нормалата на рамнината Σ е $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (црт. 1), па имајќи предвид дека $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, според (3) од **3.2**, за аголот $\frac{\pi}{2} - \alpha$ меѓу векторите $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{n} = (A, B, C)$, добиваме:

1^0. $$\sin\alpha = \frac{|\, a_1A + a_2B + a_3C \,|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1}$$

(Броителот е земен по апсолутна вредност бидејќи $\sin\alpha \geq 0$.)

Јасна е точноста на следниве две тврдења:

2^0. *Правата (p) е нормална на рамнината Σ ако и само ако* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{n}$ *се колинеарни, т.е.*

$$\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}. \tag{2}$$

3^0. *(p) е паралелна со Σ ако и само ако* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{n}$ *се нормални, т.е.*

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0. \tag{3}$$

ПРИМЕР 1. Да ја најдеме равенката на рамнината Σ што минува низ точките $M_1(-2, 3, 2)$ и $M_2(3, -1, 1)$, а е паралелна со правата $4(x-3) = y = -4z$.

Бараната рамнина минува низ точката M_1 и е нормална на векторот $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \overrightarrow{M_1M_2}$, каде што $\mathbf{a} = (1, 4, -1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = (5, -4, -1)$. По пресметувањето добиваме $\mathbf{n} = (-8, -4, -24) = -4(2, 1, 6)$, па равенката на рамнината е

[1] Проекцијата е точка само кога (p) е нормална на Σ.

$$2(x+2)+(y-3)+6(z-2)=0, \quad \text{т.е.} \quad 2x+y+6z-11=0\,.$$

Ако една права не е паралелена со дадена рамнина, и не лежи во неа, тогаш тие имаат една **заедничка точка**, наречена **пробод**.

ПРИМЕР 2. Да го најдеме прободот на рамнината $2x+y-z+4=0$ со правата $2(x-2)=y-1=-2(z+1)$.

Ќе ги напишеме параметарските равенки на правата

$$x=2+t\,, \quad y=1+2t\,, \quad z=-1-t\,.$$

Заменувајќи во равенката на рамнината, добиваме

$$2(2+t)+(1+2t)-(-1-t)+4=0\,, \quad \text{т.е.} \quad t=-2\,,$$

па бараната точка е $S(0,\,-3,\,1)$.

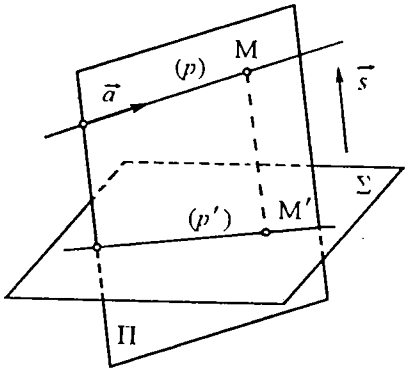
Да видиме сега, како се наоѓа проекцијата на права (p) врз рамнината (Σ), паралелно со даден правец.

Нека правата и рамнината се зададени соодветно со равенките

$$(p)\ \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}\,,$$

$$\Sigma: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

и нека $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$ е вектор што не е паралелен со (p).



Црт. 2

Проекцијата на правата (p) врз рамнината Σ е права[2)] (p') што се добива како пресек на Σ со рамнината П којашто минува низ (p) и е паралелна со векторот $\mathbf{s}$ (црт. 2). (Рамнината П се вика **проектирачка рамнина.**)

Бидејќи рамнината П минува низ точката $M(x_0,y_0,z_0)$ од правата (p) и е паралелна со векторите $\mathbf{a}=(a_1,\,a_2,\,a_3)$ и $\mathbf{s}=(s_1,\,s_2,\,s_3)$, следува дека нејзината равенка е

$$\Pi: \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (4)$$

(Да се види и примерот 1.)

Значи, *равенките на проекцијата* (p) *се определени со равенката* (4) *и со равенката на рамнината* Σ.

Во случаите кога $\mathbf{s}\perp\Sigma$, проектирачката рамнина П е нормална на Σ и добиената проекција се вика **ортогонална проекција** на (p) врз Σ.

ПРИМЕР 3. Да ги најдеме равенките на ортогоналната проекција на правата $4(x-3)=5y=-10(z+1)$ врз рамнината $\Sigma:\ 2x-3y+z-6=0$.

2) Освен во случајот кога (p) и $\mathbf{s}$ се истовремено паралелни со Σ.

За таа цел, да ја составиме равенката на рамнината П што минува низ (p) и е нормална на Σ.

Нека $M(x,y,z)$ е произволна точка од П, а $M_0(3,\,0,\,-1)$ е точка од правата (p) што ѝ припаѓа на П. Тогаш векторите $\overrightarrow{M_0M}=(x-3,\;y,\;z+1)$, $\mathbf{a}=(5,\,4,\,-2)$, $\mathbf{n}=(2,\,-3,\,1)$ се компланарни, па нивниот производ е нула:

$$(\overrightarrow{M_0M}\,\mathbf{a}\,\mathbf{n})=0\,,\qquad \text{т.е.}\quad \Pi:\ \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1\\ 5 & 4 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=0\,.$$

По средувањето, ја добиваме равенката на П : $2x+9y+23z+17=0$.

Така, бараната проекција е определена со равенките

$$2x-3y+z-6=0,\qquad 2x+9y+23z+17=0.$$

На крајот да видиме како може множеството рамнини што минуваат низ дадена права да се претстави аналитично.

Множеството од сите рамнини што минуваат низ дадена права (p) се вика **прамен рамнини**. Правата (p) се вика **оска** или **носач на праменот**.

Нека е зададена права (p) како пресек на две (непаралелни) рамнини:

$$Ax+By+Cz+D=0\,,\qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\,.$$

Линеарната равенка

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0\,,\tag{5}$$

при определена вредност на константата λ, определува рамнина (Т. 2 од **4.1**). Координатите на која било точка од (p) ги задоволуваат двете равенки со кои е определена правата (p), па значи ја задоволуваат и равенката (5) при каква било вредност на λ. Според тоа, со равенката (5) се определени рамнини што минуваат низ правата (p). Обратно, која било рамнина што минува низ (p), е определена со точка $T(x_1,\,y_1,\,z_1)$, што не лежи на (p). Ако $A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1\neq 0$, тогаш вредноста на λ што одговара на таа рамнина ја наоѓаме од условот

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D+\lambda(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)=0.$$

Значи, со равенката (5) при соодветен избор на λ е определена секоја рамнина што минува низ (p), со исклучок на едната од дадените рамнини, имено рамнината $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$. [3] Поради тоа можеме да кажеме дека (5) е **равенка на праменот рамнини** чиј носач е правата (p).

Да разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 4. Да ја најдеме равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,\,1,\,-1)$ и низ правата $x-2y-z-3=0\,,\quad 2x-y+z-1=0\,.$

---

[3] Би можеле да сметаме дека "исчезнатата" рамнина се добива од (5) за $\lambda=+\infty$. Имено, ако поделиме со λ, што е можно за $\lambda\neq 0$, добиваме $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+(Ax+By+Cz+D)/\lambda=0$ па пуштајќи λ да се стреми кон ∞, ја добиваме $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

Равенката на рамнината се добива од равенката
$$x - 2y - z - 3 + \lambda(2x - y + z - 1) = 0$$
за некоја вредност на λ. Од тоа што рамнината минува низ точката $M(2,\,1,\,-1)$ добиваме $-2+\lambda=0$, т.е. $\lambda=2$, па бараната равенка е $5x-4y+z-5=0$.

Вежби

1. Да се најде аголот меѓу рамнината $2x+3y+z=4$ и правата $-6(x+3)=3y=2(z+1)$.
2. Да се најде равенката на рамнината што минува низ правата $x-2=-2(y+1)=z-3$ и е паралелна со правата $x=1,\ y=t,\ z=-t$.
3. Да се најде прободот на дадената рамнина со дадената права:
   а) $5x+3y-4z+16=0$; $x=8-3t,\quad y=-6+2t,\quad z=7-t$.
   б) $x-2y+2z=6$; $2(x-2)=6(y-1)=3(z+2)$.
4. Да се најде ортогоналната проекција на точката $M(-3,\,2,\,1)$ врз:
   а) рамнината $3x-y+6z=41$; б) правата $3(x-1)=6(y-8)=2(z-1)$.
5. Да се најде точка S, симетрична на точката $(2,\,-4,\,5)$ во однос на правата $3(x+3)=4(y+1)=-12(z-2)$.
6. Да се најде точка T, симетрична на точката $P(1,\,2,\,7)$ во однос на рамнината $x+y-4z+7=0$.
7. Да се најде ортогоналната проекција на правата $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ врз рамнината $x-y+3z+8=0$.
8. Да се најде равенката на рамнината, која минува низ правата определена со равенките $x+2y-3z=2,\ 2x+y+z=-3$ и
   а) минува низ координатниот почеток; б) минува низ точката $(2,\,1,\,0)$; в) нормална е на рамнината $x+y+z=0$; г) отсечува еднакви сегменти на оските Oy и Oz.

4.7. Задачи за растојанија меѓу точки, прави и рамнини

Во разделот **4.2** ја решивме задачата за пресметување на растојанието од дадена точка до дадена рамнина. На таа задача се сведуваат и задачите за:

1) растојание меѓу две паралелни рамнини,

2) растојание меѓу права и рамнина, кога правата е паралелна со рамнината.

Но, може да се постават и други, слични задачи за растојание, како на пример:

3) растојание од точка до права,

4) растојание меѓу две (различни) паралелни прави,

5) растојание меѓу две разминувачки прави,

коишто можат да се решат со "аналитични средства".

Во врска со задачите 1) и 2) ќе сметаме дека **растојание меѓу паралени рамнини** Σ_1 и Σ_2 (односно **меѓу права** (p) **и**

рамнина Σ, такви што $(p) \parallel \Sigma)$, е должината на векторот $\overrightarrow{MN}$ што е нормален на Σ_1 и на Σ_2 (односно на (p) и Σ), при што $M \in \Sigma_1$ и $N \in \Sigma_2$ (односно $M \in (p)$ и $N \in \Sigma$).

Според тоа, секоја од задачите 1), 2) се сведува на наоѓање растојание од точка до рамнина.

Ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 1. Да го најдеме растојанието меѓу:

а) рамнините $\Sigma_1 : 6x - 3y + 6z - 21 = 0, \quad \Sigma_2 : 2x - y + 2z - 1 = 0;$

б) рамнината $\Sigma: 4x + 8y - z - 5 = 0$, и правата $(p) : \frac{x+1}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-1}$.

Рамнините под а) се паралелни (зошто?). Да избереме точка на Σ_1, на пример $M(1, 1, 3)$. Растојанието d меѓу Σ_1 и Σ_2 е еднакво со растојанието од M до Σ_2, па според формулата (9) од 4.2:

$$d = \frac{|\,2\cdot 1 - 1 + 2\cdot 3 - 1\,|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2\,.$$

Во б), правата (p) е паралелна со рамнината Σ, а точката $M(-1, 0, 0)$ ѝ припаѓа на (p), па растојанието d меѓу (p) и Σ е:

$$d = \frac{|\,4\cdot(-1) + 8\cdot 0 - 0 - 5\,|}{\sqrt{4^2 + 8^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{9} = 1\,.$$

Во врска со задачата 3), ќе разгледаме два примера.

ПРИМЕР 2. Да го најдеме растојанието од точката $M(2, -1, 0)$ до правата (p): $4(x-7) = 3(y-1) = 6(z-3)$.

За таа цел ќе поставиме во M рамнина Σ, нормално на (p) (црт. 1). Прободот на Σ со (p) е ортогоналната проекција на M врз (p), па растојанието од M до (p) ќе го најдеме како растојание меѓу двете точки M и M'. Значи, равенката на Σ е:

$$3(x-2) + 4(y+1) + 2z = 0\,, \quad \text{т.е.} \quad 3x + 4y + 2z - 2 = 0\,.$$

Параметарските равенки на (p) се:

$$x = 7 + 3t\,, \qquad y = 1 + 4t\,, \qquad z = 3 + 2t\,.$$

Заменувајќи во равенката на Σ, добиваме

$$3(7+3t) + 4(1+4t) + 2(3+2t) - 2 = 0\,, \quad \text{т.е.} \quad t = -1\,,$$

па координатите на M' се: $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$. Бараното растојание е:

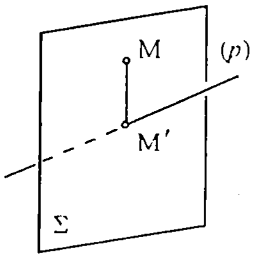
$$\overline{MM'} = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + 1^2} = 3\,.$$

Оваа задача може да се реши и поинаку.

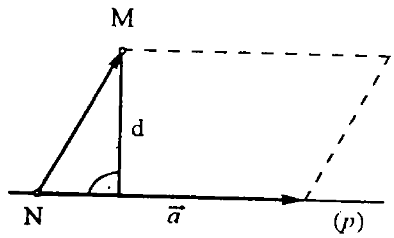
Имено, да го означиме со d растојанието од дадената точка M до дадената права (p). Потоа, избираме точка N од правата (p) и го формираме векторот $\overrightarrow{NM}$ (црт. 2). Должината на висината на паралелограмот (спуштена од темето M кон правата (p)), конструиран над векторите $\overrightarrow{NM}$ и $\mathbf{a}$ е еднаква со бараното растојание.

Бидејќи плоштината P на паралелограмот, од една страна е $P = |\mathbf{a}| \cdot d$, а од друга страна е $P = |\mathbf{a} \times \overrightarrow{NM}|$, следува дека за растојанието d ќе имаме:

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \overrightarrow{TM}|}{|\mathbf{a}|}. \qquad (1)$$



Црт. 1



Црт. 2

ПРИМЕР 3. Да го примениме изложениот метод за задачата од примерот 2. Имаме: $M(2, -1, 0)$, $N(7, 1, 3)$, $\overrightarrow{NM} = (-5, -2, -3)$, $\mathbf{a} = (3, 4, 2)$, $\mathbf{a} \times \overrightarrow{NM} = (-8, -1, 14)$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{29}$; $|\mathbf{a} \times \overrightarrow{NM}| = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$. Така, според формулата (1), ќе добиеме $d = 3\sqrt{29}/\sqrt{29} = 3$.

Да ја разгледаме сега задачата за пресметување на *растојанието меѓу две прави.* Ако правите лежат во иста рамнина, тогаш тие или се сечат или се паралелни. Во случајот кога се сечат, растојанието меѓу нив го сметаме за нула, а ако се паралелни, растојанието меѓу нив го сметаме за еднакво со растојанието од произволно избрана точка на едната права до другата права.

Поопшто, **растојание меѓу две прави** (p) и (q) што не се сечат е должината на векторот $\overrightarrow{M^*M^{**}}$ што е нормален на двете прави, при што M^* е точка од (p), а M^{**} – од (q). Да покажеме дека такви точки M^* и M^{**} постојат.

Имено, ако (p) и (q) се паралелни, тогаш за секоја точка M^* од (p) постои единствена точка M^{**} од (q) со спомнатото својство (зашто секоја точка M^* од (p) има еднозначно определена ортогонална проекција – точка M^{**} на (q); црт. 3). Според тоа, задачата за пресметување на растојанието меѓу две паралелни прави (p) и (q) се сведува на задачата за наоѓање растојание од (која било) точка на (p) до правата (q), т.е. се постапува како во примерот 2 или 3.

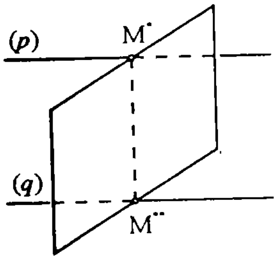
Затоа, да претпоставиме дека правите (p) и (q) се разминувачки, зададени со соодветни равенки

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}, \qquad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3},$$

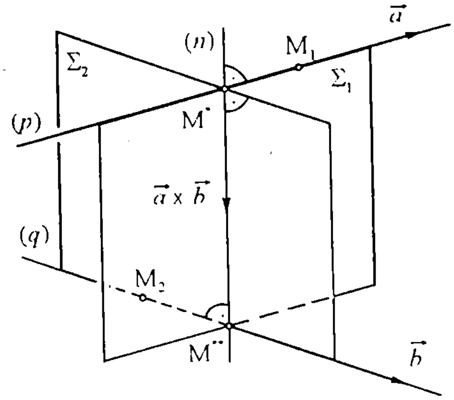
каде што $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е која било точка од (p) и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ од (q), а $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ се ненулти вектори што лежат на (p) и (q) соодветно. Како што знаеме (в. (5) од **4.5)**, *правите (p) и (q) се разминувачки ако и само ако мешаниот производ $\big((\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})\mathbf{a}\,\mathbf{b}\big)$ е различен од нула* $\big(\mathbf{r_1} = \mathbf{r_1}(M_1),\ \mathbf{r_2} = \mathbf{r_2}(M)\big)$, *т.е.*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{2}$$

Во тој случај постои единствен пар рамнини Σ_1 и Σ_2 што минуваат низ правите (p) и (q) соодветно, а се паралелни со векторот $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Нивниот пресек е права (n) што е паралелна со векторот $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, па значи е нормална и на (p) и на (q) (црт. 4); затоа и се вика **заедничка нормала** на тие разминувачки прави. Прободот на Σ_2 со (p) е точката M^*, а на Σ_1 со (q) е точката M^{**}, при што е јасно дека и двете точки лежат на заедничката нормала (црт. 4).



Црт. 3



Црт. 4

Заедничката нормала има равенки што се составени од равенките на рамнините Σ_1 и Σ_2. Имено, бидејќи Σ_1 минува низ точката M_1, а е паралелна со векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, а Σ_2 низ M_2 и е паралелна со $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, нормалата (n) има равенки:

$$\big((\mathbf{r} - \mathbf{r_1})\,\mathbf{a}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\big) = 0 , \quad \big((\mathbf{r} - \mathbf{r_2})\,\mathbf{b}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\big) = 0 , \tag{3}$$

или, во координатна форма:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{3'}$$

каде што $n_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$, $n_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$, $n_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 4. Да ги најдеме равенките на заедничката нормала (n) на правите

$$(p): \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-9}{-3}=\frac{z+1}{2}, \quad (q): \quad \frac{x+15}{7}=\frac{y-9}{-5}=\frac{z-3}{-2},$$

како и точките M^* и M^{**} во кои (n) ги сече правите (p) и (q) соодветно.

Задржувајќи го значењето на ознаките како погоре, имаме:

$$M_1(1,\,9,\,-1), \quad M_2(-15,\,9,\,3), \quad \overrightarrow{M_1M_2}=4\cdot(-4,\,0,\,1),$$

$$\mathbf{a}=(1,\,-3,\,2), \quad \mathbf{b}=(7,\,-5,\,-2), \quad \mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=16\cdot(1,\,1,\,1)\,.$$

Според (2), веднаш се уверуваме дека правите (p) и (q) се разминуваат; имено,

$$\begin{vmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -192 \neq 0\,.$$

Равенките на нормалата (n) се определени со (3'):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-9 & z+1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} x+15 & y-9 & z-3 \\ 7 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

т.е $\{-5x+y+4z=0,\; x+3y-4z=0\}$ или, во канонична форма: $x=y=z$.

За точките M^* и M^{**}, работејќи како во примерот 4 од **4.5** наоѓаме: $M^*(3,\,3,\,3)$, $M^{**}(-1,\,-1,\,-1)$.

Да се вратиме на задачата за пресметување на *растојанието d меѓу две разминувачки прави.* Сега таа задача можеме да ја решиме на неколку начини.

i) Да се најдат точките M^* и M^{**}; тогаш растојанието меѓу (p) и (q) е $d=\overline{M^*M^{**}}$.

ii) Да се постават паралелни рамнини Π_1 и Π_2 што минуваат низ правите (p) и (q) соодветно (црт. 5):

$$\Pi_1: \quad \big((\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\big)=0\,, \qquad \Pi_2: \quad \big((\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\big)=0\,. \tag{4}$$

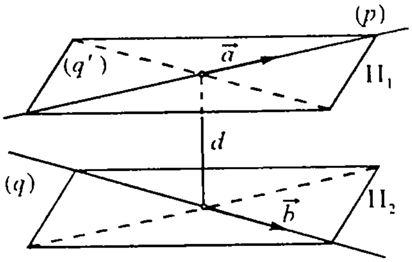
каде што $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(M_1)$ и $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2(M_2)$; тогаш растојанието меѓу (p) и (q) се пресметува како растојание меѓу две паралелни рамнини.

iii) Да се формира паралелопипед со рабови $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{M_1M_2}$ (црт. 6) и да се уочи дека $\overline{M^*M^{**}}$ е висина на тој паралелопипед, од што следува дека растојанието меѓу (p) и (q) е

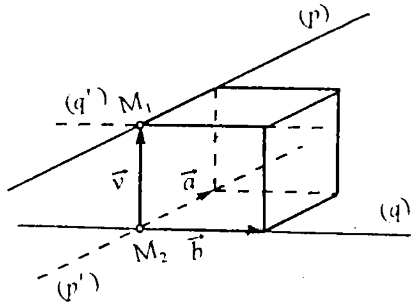
$$d=\frac{|\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{v})\,|}{|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,|}\,. \tag{5}$$

iv) Да се уочи дека векторот $\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ е нормален на двете рамнини Π_1 и Π_2, а точките M_1 и M_2 лежат на Π_1 и Π_2 соодветно (црт. 6); тогаш растојанието меѓу (p) и (q) можеме да го пресметаме како апсолутна вредност од проекцијата на векторот $\mathbf{v}=\overrightarrow{M_1M_2}$ врз векторот $\mathbf{n}$, т.е.

$$d = | \, \mathrm{pr}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} \, | = \frac{|\,\mathbf{v}\,\mathbf{n}\,|}{|\,\mathbf{n}\,|}\,. \tag{6}$$



Црт. 5



Црт. 6

ПРИМЕР 5. Да го пресметаме растојанието $d = \overline{M^*M^{**}}$ меѓу правите (p) и (q) од примерот 4.

Во примерот 4 се најдени точките $M^*(3,\,3,\,3)$ и $M^{**}(-1,\,-1,\,-1)$, па

$$d = \overline{M^*M^{**}} = \sqrt{(3+1)^2 + (3+1)^2 + (3+1)^2} = 3\sqrt{3}\,.$$

ПРИМЕР 6. Да го пресметаме растојанието d меѓу разминувачките прави

$$(p):\quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{0}\,, \qquad (q)\quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-7}{-2}\,,$$

на секој од начините ii) – iv).

а) Како растојание меѓу две паралелни рамнини, т.е. според ii), имаме:

$$\Sigma_1 : \quad \big((\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\big) = \mathbf{0}\,, \qquad \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-8 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}\,,$$

т.е. $\Sigma_1 : 2x + 3y + 6z - 67 = 0$. Избираме точка на Σ_2 на пример $M_2(1,\,3,\,7)$ (којашто лежи и на правата (q)) и го наоѓаме растојанието d од M_2 до Σ_1

$$d = \frac{|\,2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 6\cdot 7 - 67\,|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{|-14|}{7} = 2\,.$$

б) Како висина d на паралелопипед, т.е. според iii), имаме:

$$\mathbf{v} = -(1,\,2,\,1),\quad (\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{v}) = 28\,,\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -2(2,\,3,\,6),\ \text{ па }\ d = \frac{|(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{v})|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{28}{2\cdot 7} = 2.$$

в) Како апсолутна вредност од проекцијата на $\overrightarrow{M_1M_2}$ врз нормалниот вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, според iv), имаме

$$\mathbf{n}\,\mathbf{v} = -2(2,\,3,\,6)\cdot(-1)(1,\,2,\,1) = 28\,, \qquad pa \quad d = \frac{|\,\mathbf{n}\,\mathbf{v}\,|}{|\,\mathbf{n}\,|} = 2\,.$$

Вежби

1. Дадена е точката $M(5,\,2,\,-3)$ и рамнината $\Sigma : x + 2y - 2z + 3 = 0$. Да се најде растојанието од M до Σ: а) со помош на формулата (9) од **4.2**; б) како растојание меѓу две точки M и M', каде што M' е ортогоналната проекција на M врз Σ.

2. Да се најде волуменот на коцка, чии два ѕида лежат на рамнините $2x - 3y + 6z = 2$, $\quad 4x - 6y + 12z - 11 = 0$.

3. Да се провери дали се паралелни рамнината $4x - 4y + 7z - 1 = 0$ и правата $x = 1+7t$, $\quad y = -2$, $\quad z = 1-4t$. Потоа да се најде растојанието од правата до рамнината.

4. Да се најде растојанието од дадената точка M до дадената права (p):

а) $\quad M(2, 1, 3)$, $\qquad (p): \quad x - 1 = 2y = 2z$;

б) $\quad M(4, 1, 1)$, $\qquad (p): \quad x + y + z = 4, \quad x - 2y - z = 4$.

Во задачите 5-8, да се најде растојанието меѓу дадените прави. За правите што се разлминуваат, да се примени секој од начините i)–iv).

5. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ $\quad$ и $\quad x + 3 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-2}$.

6. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{2} = z$ $\quad$ и $\quad \frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{-4} = z$.

7. $4x = 3y = -z$ $\quad$ и $\quad 3(x-1) = -y - 2 = 2 - 4z$.

8. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ $\quad$ и $\quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

9. Да се пресмета висината на тетраедарот $ABCD$, спуштена од темето D кон ѕидот ABC, ако: $A(-2,3,1)$, $B(1,-2,-3)$, $C(2, 0, -1)$, $D(4, 3, -2)$

10*. Да се најде растојанието од точката $M(3, 2, 1)$ до правата (p) што минува низ точката $(1, 1, 1)$, ја сече правата $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$ и е нормална на правата $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + 4t$.

11*. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се два неколинеарни вектори и $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Нека λ_0 и μ_0 се скалари определени со равенствата

$$\begin{aligned} c^2\lambda_0 &= (\mathbf{a}\,\mathbf{b})(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{b} - b^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{a}, \\ c^2\mu_0 &= (\mathbf{a}\,\mathbf{b})(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{a} - a^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{b}, \end{aligned} \tag{7}$$

каде што a, b, c се интензитетите на векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ соодветно. Да се покаже дека $\overline{M^*M^{**}}$ е растојанието меѓу правите (p): $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a}$ и (q): $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu\mathbf{b}$, при што $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_1 + \lambda_0\mathbf{a}$, $\mathbf{r}^{**} = \mathbf{r}_2 + \mu_0\mathbf{b}$ се радиус–векторите на M^*, M^{**} соодветно.

12. Да се најдат точките M^*, M^{**} на заедничката нормала од правите Π_1 и Π_2 во примерот 6, користејќи ги резултатите од претходната задача.

IV.5. ПОВРШИНИ

Овде ќе го разгледаме прашањето за претставување на дадена површина со помош на равенка, задржувајќи се посебно на цилиндричните, конусните и ротационите површини, а ќе направиме краток преглед и на т.н. површини од втор ред. Во **5.5** се разгледуваат криви во простор како пресек на две површини.

5.1. Површини и нивни равенки

Во разделот **1.5** видовме дека, при избран декартов координатен систем, на секоја точка од просторот ѝ одговара една подредена тројка од реални броеви и, обратно, на секоја таква тројка ѝ одговара определена точка од просторот. Од друга страна пак знаеме дека *секоја геометриска фигура, на пример, линија и површина, може да се разгледува како множество точки.* Тоа овозможува линиите и површините да се испитуваат со средства на алгебарската анализа. Имено, на кривите во рамнина им одговараат равенки со две променливи, [1]

а на површините – равенки со три променливи. Таа врска меѓу површините и равенките овозможува изучувањето на геометриските својства на површините да се сведе на испитување на соодветните равенки.

Во аналитичната геометрија, како што рековме погоре, секоја површина се разгледува како множество точки. Во таквата дефиниција на површина се содржи некое "карактеристично својство", т.е. својство што е заедничко за сите точки од површината и само за нив.

Така, на пример, *сфера со центар во точката C и радиус R* може да се разгледува како: "*множеството од сите точки во просторот што се наоѓаат на растојание R од точката C*". Тоа значи дека: за секоја точка M што лежи на сферата важи равенството $\overline{CM} = R$, а ако M не лежи на сферата, тогаш $\overline{CM} \neq R$.

Да ги означиме со x, y, z координатите на произволна точка M од дадена површина во однос на некој правоаголен декартов координатен систем. Ако таа точка се "преместува" по дадената површина, тогаш нејзините координати x, y, z ќе се менуваат но сепак ќе остануваат меѓусебно сврзани со некој услов што ги карактеризира точките од таа површина. Со тоа ќе добиеме некоја врска (равенство) меѓу x, y и z, којашто ќе биде задоволена само кога точката "ќе се движи" по површината, а ќе се наруши ако точката "е надвор" од површината.

Според тоа, *на дадена површина во просторот ѝ одговара некоја равенка со три променливи x, y, z.* Таква равенка меѓу променливите x, y, z којашто ја задоволуваат координатите на која било точка од површината и не ја задоволуваат координатите на ниедна точка што не лежи на неа, се вика **равенка на дадената површина**. Координатите x, y, z на произволна точка

[1] Скоро секогаш во овој параграф наместо "непозната" ќе велиме "променлива", а како оправдување за ова може да се смета фактот што во една равенка со три непознати, две од нив обично може да се менуваат произволно, па тогаш и третата се менува во зависност од промената на првите две.

од површината што влегуваат во таа равенка се викаат **тековни координати**.

Да разгледаме неколку примери за составување равенки на зададени површини.

ПРИМЕР 1. Да ја составиме равенката на сферата со центар C и радиус R.

Да избереме произволно координатен систем. Тогаш C ќе има некои координати a, b, c. Означувајќи ги со x, y, z координатите на произволна точка M од сферата, да го изразиме аналитички својството што е заедничко за сите точки M: растојанието на точката M до центарот C е постојано, еднакво на радиусот R, т.е.

$$\overline{CM} = R. \tag{1}$$

Според формулата за растојание меѓу две точки (3^0 во **3.2**), равенството (1) ќе го изразиме со помош на тековните координати на точката M:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R. \tag{1'}$$

Со квадрирање на двете страни, од (1') ќе ја добиеме равенката на сферата со центар $C(a, b, c)$ и радиус R во обликот

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2 \tag{2}$$

или

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2 = 0\,.$$

Да потсетиме дека со задачи од ваков вид веќе се среќававме во **4.1** и **4.2** во врска со равенки на рамнини.

ПРИМЕР 2. Да го определиме множеството точки $M(x, y, z)$ со својството $\overline{AM} = \overline{BM}$, каде што $A(2, -1, 1)$ и $B(3, 4, 5)$.

Користејќи ја формулата за растојание меѓу две точки, од $\overline{AM} = \overline{BM}$, по квадрирањето и средувањето ќе добиеме

$$x + 5y + 4z - 22 = 0\,.$$

Според тоа, бараното множество точки е рамнина. (Инаку, до овој резултат можевме да дојдеме полесно ако претходно согледавме дека се работи за рамнина нормална на векторот $\overline{AB} = (1, 5, 4)$ и минува низ средината $C(5/2, 3/2, 3)$ на отсечката AB).

ПРИМЕР 3. Множеството точки што се наоѓаат на растојание 5 од рамнината Oxz, во позитивната насока на y–оската, е рамнината $y = 5$.

Погоре видовме дека секоја површина, разгледувана како множество точки од просторот, може да се претстави со равенка меѓу координатите x, y, z на нејзините точки; таа равенка може да се запише во обликот

$$F(x, y, z) = 0\,, \tag{3}$$

каде што F е ознака за функција од трите променливи x, y, z.

Но, и обратно, една равенка од променливите x, y, z, т.е равенка од обликот (3), *во општ случај, определува површина како множество точки чии координати x, y, z ја задоволуваат таа равенка.*

Според тоа, се поставуваат следниве *две основни задачи*:

I. Дадена е површина како множество точки. Да се состави равенка на таа површина.

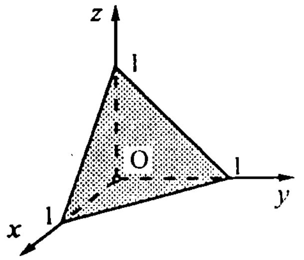
II. Дадена е равенка меѓу координатите x, y, z. Да се испита формата на површината што е определена со таа равенка.

Во тесна врска со втората задача е поимот график на функција од две променливи. Имено, нека f е функција од две променливи x и y со домен D. Множеството Γ од точки од просторот определено со:

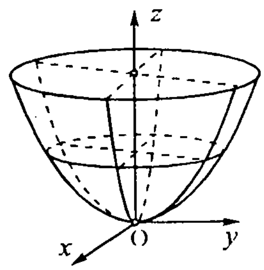
$$\Gamma \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(x, y, z) | (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\} \tag{4}$$

се вика **график на функцијата** f (в. **I.2.7**). Равенката $z = f(x, y)$ го претставува суштинскиот дел од дефиницијата на множеството Γ, па според тоа *графикот на функција од две променливи, геометриски, обично е некоја површина.* Да разгледаме два примера.

ПРИМЕР 4. Графикот на функцијата $f(x, y) = 1 - x - y$ (т.е. равенката $z = 1 - x - y$) геометриски претставува рамнина, чиј еден дел е засенчениот триаголник на црт. 1.



Црт. 1



Црт. 2

ПРИМЕР 5. Графикот на функцијата $f(x, y) = x^2 + y^2$ (т.е. равенката $z = x^2 + y^2$) ја определува површината позната под името (ротационен) **параболоид** (црт. 2).

(За претставување на таа површина полезно е да се уочат некои нејзини пресеци, најчесто со рамнини што се паралелни на координатните рамнини. Така, за $z = 1$ ја добиваме кружницата $x^2 + y^2 = 1$ и, општо, за $z = c$ $(c > 0)$ – кружницата $x^2 + y^2 = c$. Потоа, пресекот со рамнината $x = 0$ е параболата $z = y^2$, а со рамнината $y = 0$ – параболата $z = x^2$.)

Во некои случаи при составување равенки на површини тековните координати не се сврзуваат со една равенка, туку секоја координата одделно се изразува како функција од две нови променливи, на пример, u и v. Имено, ако $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ се три функции од две променливи (u, v), со домени D_1, D_2, D_3 соодветно, тогаш множеството Γ од точки во просторот, определено со:

$$\Gamma = \{(x, y, z) | x = \varphi(u, v), \quad z = \chi(, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D\},$$

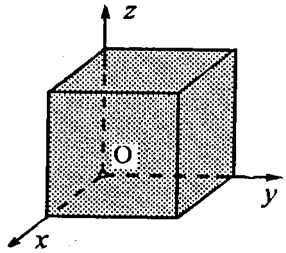
каде што $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$, во општ случај претставува површина. Равенките

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(x, y), \quad z = \chi(u, v) \tag{5}$$

се викаат **параметарски равенки на таа површина**, а u и v се параметри.

Да забележиме дека параметарските равенки на рамнина, со кои се сретнавме во **4.2**, се еден пример на параметарски равенки на површина. Еве уште еден пример.

ПРИМЕР 6. $x = \sqrt{u} \cos v$, $y = \sqrt{u} \sin v$, $z = u (u \geq 0)$ се параметарски равенки на параболоидот, претставен на црт. 2. Навистина, со елиминација на параметрите u и v од дадените три равенки се доаѓа до равенката $z = x^2 + y^2$.



Црт. 3

Општо, со елиминација на параметрите u и v од равенките (5) обично се доаѓа до некоја врска меѓу променливите x, y, z од обликот (3).

Да забележиме дека, при дадена функција $F(x, y, z)$, множеството точки $M(x, y, z)$ чии координати ја задоволуваат равенката $F(x, y, z) = 0$, не мора да е површина. На пример, равенката $xyz - |xyz| = 0$ ја задоволуваат сите точки од паралелопипедот во првиот октант, даден на црт. 3.

Вежби

1. Да се состави равенката на сферата што минува низ координатниот почеток и центарот ѝ е во точката (1, 2, 2).
2. Да се најде центарот C и радиусот R на сферата
   а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z + 13 = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x - 8 = 0$.
3. Да се најде равенката на сферата што минува низ координатниот почеток и низ точките (1, 0, 1), (0, −1, 1), (0, 0, 2).
4. Да се најде равенката на рамнината што го преполовува диедарскиот агол меѓу координатните рамнини Oxz и Oyz, а минува низ: а) првиот октант, б) вториот октант.
5. Да се скицира површината определена со равенката
   а) $x^2 + 2y^2 - z = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
6. Да се скицира графикот на функцијата
   а) $z = |x^2 + y^2 - 1|$; б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
7. Да се скицира површината
   $$z = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1, & \text{за} \quad x^2 + y^2 \leq 2, \\ 1, & \text{за} \quad x^2 + y^2 > 2. \end{cases}$$
8. Да се состави равенка од облик $F(x, y, z) = 0$ на површината определена со параметарските равенки $x = \sqrt{u + v}$, $y = \sqrt{u - v}$, $z = \frac{u}{v}$.

Да се скицира делот на површината што се наоѓа меѓу рамнината $z=-1$ и $z=1$.

9. Да се воведат параметарски равенки за површината определена со равенката $(x-y)(z-2x)=x+y$.

10. Да се опишат "површините": а) $x^2+y^2+z^2+1=0$;
б) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$; в) $xyz-xy\mid z\mid=0$.

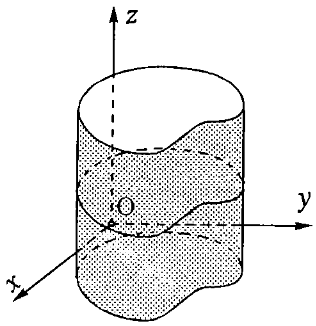
5.2. Цилиндрични и конусни површини

Да ја разгледаме равенката

$$F(x,y)=0\,, \tag{1}$$

во која не се содржи променливата z. Во рамнината Oxy, т.е. во $z=0$, оваа равенка (обично) претставува некоја линија (L). Покрај точките од (L), равенката ја задоволуваат и координатите на сите точки од просторот чии први две координати се совпаѓаат со координатите на која било точка од (L).

Значи, со равенката (1) е окарактеризирано множеството од оние точки во просторот што лежат на прави, кои минуваат низ која било точка од (L) и се паралелни со оската Oz. Тоа множество точки претставува една цилиндрична површина (црт. 1).



Црт. 1

Поопшто, секоја површина образувана од правите што сечат дадена линија (L), а се паралелни со даден вектор **a**, се вика **цилиндрична површина**. Линијата (L) се вика **директриса**, а правите што ја образуваат површината се викаат **генератриси.**

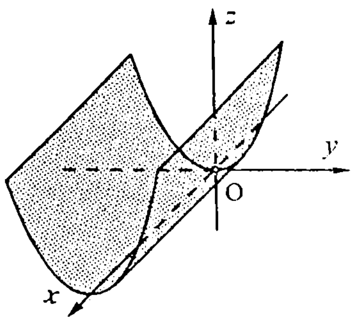
Значи, равенката (1) определува цилиндрична површина чии генератриси се паралелни со векторот **k** (т.е. со оската Oz). Но и обратно, секоја цилиндрична површина со генератриси паралелни со векторот **k** може да се претстави со равенка од видот (1), бидејќи за нејзина директриса може да се земе линија во рамнината Oxy; равенката на таа линија, која е од видот (1), ќе биде равенка и на цилиндричната површина.

Аналогно заклучуваме дека равенката

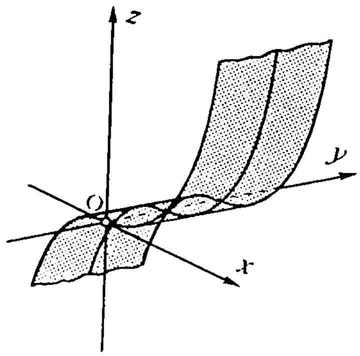
$$G(y,z)=0\,,\quad \text{односно}\quad H(x,z)=0\,,$$

определува (обично) цилиндрична површина, чии генератриси се паралелни со оската Ox (црт. 2) односно Oy (црт. 3).

ПРИМЕР 1. Со равенката $z = y^2$, во рамнината Oyz е определена парабола. Во простор, таа претставува цилиндрична површина, чија директриса е параболата $z = y^2$, $x = 0$, а генетриси се правите, паралелни со оската Ox (црт. 2).



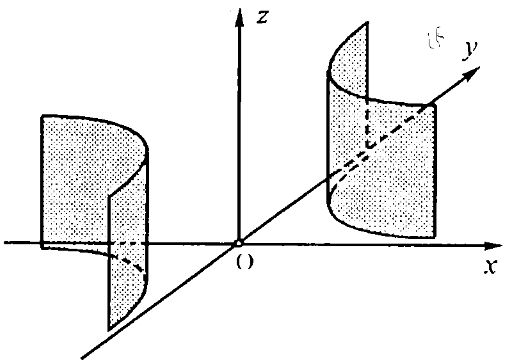
Црт. 2



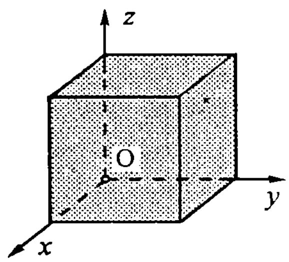
Црт. 3

ПРИМЕР 2. Со равенката $z = x^3$ е определена цилиндрична површина чија директриса е кубната парабола $z = x^3$, $y = 0$, а генератрисите се прави паралелни со оската Oy (црт. 3).

ПРИМЕР 3. Со равенката $xy = 1$ е определена цилиндрична површина, чија директриса е хиперболата $xy = 1$, $z = 0$, а генератрисите се прави паралелни со оската Oz (црт. 4).



Црт. 4



Црт. 5

Во врска со горното да напомниме дека некоја равенка од облик $F(x, y) = 0$ не мора да претставува цилиндрична површина. Така, на пример, равенката $xy - |xy| = 0$ ги определува сите точки од просторот при кои x и y имаат исти знаци. На пример, сите точки од скицираниот паралелопипед на црт. 5 ја задоволуваат таа равенка.

Ако равенката (1) односно (2) е алгебарска равенка од втор степен, тогаш соодветната цилиндрична површина се вика **ци-**

линдар од втор ред. Според тоа, ги имаме следниве видови цилиндри од втор ред:

1) **Елиптичен цилиндар**; неговата наједноставна равенка е:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,;$$

директрисата е елипса на рамнината Oxy, со полуоски a и b; специјално, при $a=b$, се добива **кружен цилиндар.**

2) **Хиперболичен цилиндар**; меѓу неговите наједноставни равенки се

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad xy=1\,;$$

директрисата е хипербола во рамнината Oxy. На црт. 4 е претставен хипреболичен цилиндар со генератриси – паралелни со z–оската.

3) **Параболичен цилиндар**; неговата најпроста равенка е

$$y^2=2px \quad \text{или} \quad y=ax^2\,.$$

На црт. 2 е претставен параболичен цилиндар, со директриса $z=y^2$, $x=0$, а генератриси – паралелни со x–оската.

4) **Пар рамнини**; наједноставната равенка е

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\,, \quad \text{т.е.} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\,, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\,.$$

Сега ќе изведеме поопшт вид равенка на цилиндрична површина. Во рамнината Oxy нека е дадена кривата $y=f(x)$ и низ секоја точка од таа крива да повлечеме права, паралелна со векторот $\mathbf{a}=(a_1,\,a_2,\,a_3)$, $a_3\neq 0$ (црт. 6). Тогаш добиваме цилиндрична површина, чии генератриси се определени со следниве канонични равенки

$$\frac{X-x}{a_1}=\frac{Y-f(x)}{a_2}=\frac{Z}{a_3}=v\,, \tag{3}$$

каде што $\big(x,\,f(x),0\big)$ е произволна точка од директрисата, а $X,Y,\,Z$ се тековни координати. Ставајќи $x=u$, добиваме

$$X=u+a_1v\,, \quad Y=f(u)+a_2v\,, \quad Z=a_3v\,, \tag{4}$$

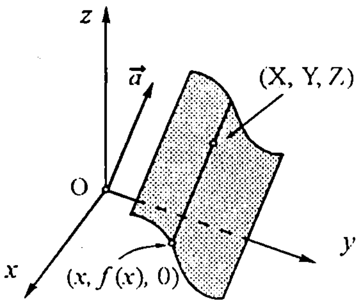
а тоа се *параметарските равенки на цилиндричната површина.* Ако од тие равенки се елиминираат параметрите u и v, ќе се добие равенката на цилиндричната површина во имплицитен облик $F(X,Y,\,Z)=0$.

Во случајот кога директрисата се наоѓа во некоја од другите координатни рамнини, се работи аналогно.

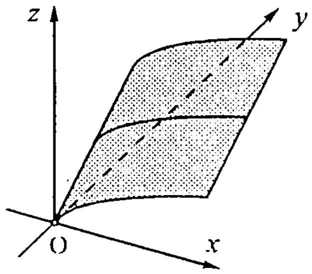
ПРИМЕР 4. Ќе ја најдеме равенката на цилиндричната површина, чија директриса е $y=\sqrt{x}$, $z=0$, а генетрисите се паралелни со векторот $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Ставајќи $x=u$, имаме $X-u=Y-\sqrt{u}=Z$, од каде што $Y-\sqrt{X-Z}=Z$, т.е. $X=(Y-Z)^2+Z$ (црт. 7).

Тековните координати често се означуваат пак со x, y, z наместо со X, Y, Z соодветно. Во таков случај, равенката на цилиндричната површина од последниот пример ќе биде $x = z + (y - z)^2$.

По начинот на формирањето, слични на цилиндричните се конусните површини.

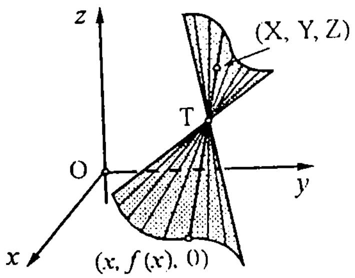


Црт. 6

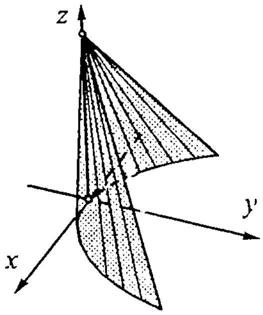


Црт. 7

Површината образувана од сите прави што минуваат низ дадена точка T и сечат дадена линија (L), се вика **конусна површина** (црт. 8). Линијата (L) се вика **директриса**, правите се викаат **генератриси**, а точката T – **врв** (или **теме**) на конусната површина.



Црт. 8



Црт. 9

Да ја изведеме равенката на конусната површина, чија директриса е $y = f(x)$, $z = 0$, а генетрисите минуваат низ точката $T(a, b, c)$, $c \neq 0$ (црт. 8). Каноничните равенки на генератрисите на конусот, како прави што минуваат низ точката (a, b, c) и низ точката $\big(x, f(x), 0\big)$ од директрисата, се

$$\frac{X-a}{x-a} = \frac{Y-b}{f(x)-b} = \frac{Z-c}{-c} = v\,, \tag{5}$$

каде што X, Y, Z се тековни координати. Ставајќи $x = u$, добиваме

$$X = a + (u-a)v\,, \quad Y = b + \big(f(u) - b\big)v\,, \quad Z = c - c\,v\,. \tag{6}$$

што претставуваат *параметарски равенки на конусната површина*. Ако ги елиминираме од (6) параметрите u и v, ќе ја добиеме равенката на конусната површина во имплицитен облик $F(X, Y, Z) = 0$.

Ако директрисата се наоѓа во **рамнина** $z = k$, тогаш врвот на конусната површина може да биде и во точката $T(a, b, 0)$, ако $k \neq 0$. Во тој случај, ставајќи $x = u$, ќе имаме

$$\frac{X-a}{u-a} = \frac{Y-b}{f(u)-b} = \frac{Z}{k} = v\,.$$

ПРИМЕР 5. Да ја најдеме равенката на конусната површина со директриса $y = x^2$, $z = 0$, и врв $A(0, 0, 1)$ (црт. 9). Имаме:

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{u^2} = \frac{z-1}{-1} = v\,; \quad x = uv\,, \quad y = u^2 v\,, \quad z = 1 - v\,.$$

Да ги елиминираме параметрите u и v. Од $y = ux$, при $x \neq 0$ имаме $u = \frac{y}{x}$, па заменувајќи го ова и $v = 1 - z$ во $x = uv$, добиваме $x = \frac{y}{x}(1-z)$, т.е. $x^2 + yz - y = 0$. Да уочиме дека оваа равенка е "добра" и за $x = 0$. (Тековните координати во овој пример се означени со x, y, z наместо со X, Y, Z.)

Аналогно се работи и во случајот кога директрисата се наоѓа во некоја од другите координатни рамнини.

Вежби

Во задачите 1–6 дадената равенка определува цилиндрична површина. Да се одреди: а) директрисата; б) правецот на генетрисите, в) видот на цилиндричната површина и да се скицира.

1. $x^2 + y^2 = 4x\,.$ 2. $x^2 + 4z^2 = 4\,.$ 3. $x^2 - 2x - z + 1 = 0\,.$
4. $x^2 = y^2$ 5. $4y^2 - 9z^2 - 8y + 36z - 68 = 0$ 6. $xz + 2 = 0\,.$

Во задачите 7–9 да се најде равенката на цилиндричната површина при дадена директриса и правец на генератрисите.

7. $x^2+z^2 = 1$, $y = 0$; $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$. 8. $x^2+y^2 = 25\,,$ $z = 0\,;$ $\mathbf{a} = (5, 3, 2)$.

9*. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x$; генератрисите – нормални на рамнината во која лежи директрисата.

Во задачите 10–12 дадена е директрисата и врвот на конусната површина, а се бара нејзината равенка.

10. $y^2 + z^2 = 1\,,$ $x = 0\,;$ $T(2, 2, 1)$.
11. $x^2 + y^2 - 2x = 0\,;$ $z = 0\,;$ $T(a, b, c)$ $c \neq 0\,.$
12. $x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 25\,,$ $y = 3\,;$ $T(0, 0, 0)$.

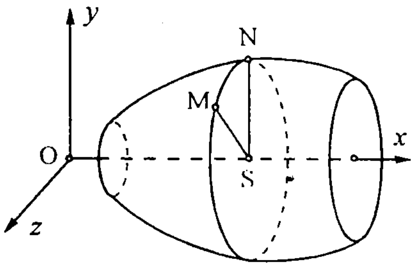
5.3. Ротациони површини

Површина што се добива со ротација на рамнинска крива околу дадена права што лежи во истата рамнина, се вика **ротациона** (или **обртна**) површина; притоа, правата се вика **оска на ротацијата**.

Ако една ротациона површина се пресече со рамнина, поставена нормално на оската на ротацијата, се добива кружница со центар на оската. Имајќи го предвид тоа, ќе изведеме правило за добивање на равенка на површина образувана со ротација на дадена линија околу координатните оски.

Нека во рамнината Oxy е зададена линија (L) со равенката

$$F(X, Y) = 0\,.\ ^{1)} \qquad (1)$$



Црт. 1

Да ја најдеме равенката на ротационата површина што се добива со ротација на (L) околу оската Ox (црт. 1).

Нека $M(x, y, z)$ е произволна точка од таа површина. Да поставиме во M рамнина нормална на оската Ox. Јасно, нејзината равенка ќе биде $X = x$, а пресекот со површината е кружница со центар S (на оската Ox). Точката во која рамнината $X = x$ ја сече линијата (L) да ја означиме со N. Координатите на S се x, 0, 0, па радиусот на споменатата кружница, како растојание меѓу точките M и S, е $\overline{MS} = \sqrt{y^2 + z^2}\,.$

Од друга страна, радиусот $\overline{MS}$ е еднаков со апсолутната вредност од ординатата на точката N, па значи координатите на N се: x, $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$, 0. т.е.

$$N\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\,,\ 0\right).^{2)}$$

Според тоа, ако во равенката $F(X, Y) = 0$ ставиме

$$X = x \quad \text{и} \quad Y = \sqrt{y^2 + z^2}\,,$$

ја добиваме бараната **равенка на ротационата површина:**

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0^{\ 2)}\,. \qquad (2)$$

---

1) Тековните координати овде ги означуваме со големи букви X, Y (но, само привремено!) за да биде попрегледно наредното разгледување.

2) Знакот "+" треба да се земе кога точката N (т.е. делот од линијата (1)) се наоѓа "над x–оската" (тоа значи: во I или во II квадрант), а со знакот "−" кога тоа е "под x–оската" (во III или во IV квадрант). На пример, за $x - \sqrt{y} = 0$ ќе се стави $+\sqrt{y^2 + z^2}$ наместо y (јасно е дека не може $-\sqrt{y^2 + z^2}$), а за $x + y + \ln(-y) = 0$ наместо y ќе се стави $-\sqrt{y^2 + z^2}$ (овде не може $+\sqrt{y^2 + z^2}$).

Така, значи доаѓаме до следново правило: *за да се добие равенката на ротационата површина што се добива со ротација на линијата* (L), *која лежи во рамнината* Oxy, *околу оската* Ox *и има равенка* $F(x, y) = 0$, *потребно е во равенката на таа линија* y *да се замени со* $\sqrt{y^2+z^2}$, *или со* $-\sqrt{y^2+z^2}$.

ПРИМЕР 1. Да ја најдеме равенката на површината што се добива со ротација на параболата $y^2 = x$ околу оската Ox (црт. 2).

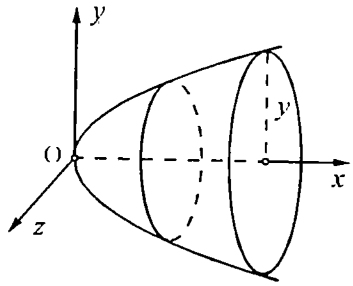
Според формулата (2), имаме:

$$\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\,,0\right) = x\,,$$

т.е.

$$x = y^2 + z^2$$

е бараната равенка.



Црт. 2

Аналогни правила важат и за површини што се добиваат со ротација на рамнински линии околу другите координатни оски. Така, на пример, ако една линија со равенки

$$F(x, y) = 0\,, \quad z = 0 \tag{3}$$

ротира околу оската Oy, равенката на обртната површина ќе биде

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\,,\, y\right) = 0\,.^{3)} \tag{4}$$

Ако линија со равенки

$$G(y, z) = 0\,, \quad x = 0\,, \tag{5}$$

ротира околу оската Oy, тогаш равенката на обртната површина ќе биде

$$G\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right) = 0.^{3)} \tag{6}$$

Ако, пак, линијата (5) ротира околу оската Oz, тогаш равенката на обртната површина ќе биде

$$G\left(\pm\sqrt{y^2+x^2}\,,\, z\right) = 0\,. \tag{7}$$

---

[3] Во врска со изборот на знакот "$\pm$" се постапува аналогно како во (2); (в. фуснота 2).

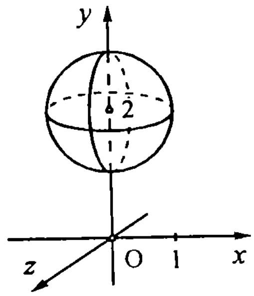
Да разгледаме неколку примери.

ПРИМЕР 2. Ако кружницата

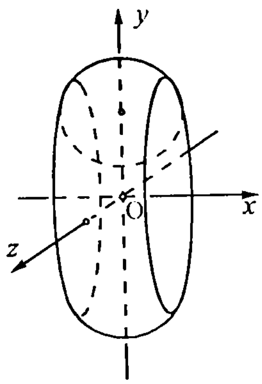
$$x^2 + (y-2)^2 = 1\,, \quad z = 0 \tag{8}$$

ротира околу оската Oy, тогаш обртната **површина** е сфера (црт. 3), чија равенка е

$$\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 + (y-2)^2 = 1\,, \quad \text{т.е.} \quad x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1\,.$$



Црт. 3



Црт. 4

Ако, пак, истата кружница (8) ротира околу оската Ox, тогаш равенката на добиената површина е

$$x^2 + \left(\sqrt{y^2+z^2} - 2\right)^2 = 1\,.$$

Оваа површина (којашто многу личи на ѓеврек или автомобилска гума) се вика **торус** (црт. 4).

ПРИМЕР 3. Хиперболата

$$y^2 - z^2 = 1\,, \quad x = 0$$

ротира околу а) оската Oz, б) оската Oy. Да ја најдеме равенката на добиената ротациона површина и да ја скицираме.

а) Имаме: $\left(\pm\sqrt{y^2+x^2}\right)^2 - z^2 = 1$, т.е.

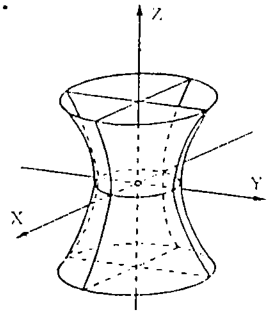
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Оваа површина се вика **еднокрилен ротационен хиперболоид** (црт. 5).

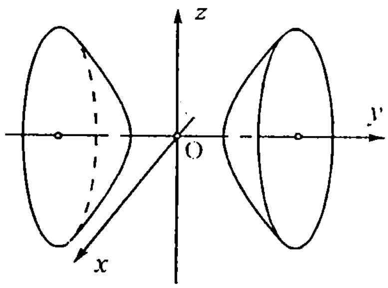
б) При ротација околу Oy, го заменуваме z со $\pm\sqrt{z^2+x^2}$:

$$y^2 - \left(\pm\sqrt{z^2+x^2}\right)^2 = 1\,, \quad \text{т.е.} \quad x^2 + y^2 - z^2 = -1\,.$$

Оваа површина се вика **двокрилен ротационен хиперболоид** (црт. 6).



Црт. 5



Црт. 6

ПРИМЕР 4. Со ротација на правата

$$z = 2y\,,\quad x = 0\,,$$

околу оската Oz се добива **ротационен конус**, со равенка

$$z = 2\cdot\left(\pm\sqrt{y^2+x^2}\right)\,,\quad \text{т.е.}\quad z^2 = 4(x^2+y^2)\,.$$

Вежби

Во задачите 1–6 да се најде равенката на површината што се добива со ротација на дадената крива, околу назначената оска и да се скицира.

1. $z = x^3\,,\quad y = 0\,;\quad$ а) $Ox\,;\quad$ б) $Oz\,.$

2. $y^2 = 2x\,,\quad z = 0\,;\quad$ а) $Oy\,;\quad$ б) $Ox\,.$

3. $y = 2x\,,\quad z = 0\,;\quad Oy\,.$

4. $z = |\,y\,|\,,\quad x = 0\,;\quad$ а) $Oy\,;\quad$ б) $Oz\,.$

5. $z = 1/(y^2-1)\quad x = 0\,;\quad Oz\,.$

6. $x^2 - z^2 = 1\,,\quad y = 0\,;\quad Ox\,.$

5.4. Површини од втор ред

Во пртетходниот раздел видовме дека со ротација на крива од втор ред (кружница, парабола, хипербола) се добиваат разни ротациони површини (сфера, параболоид, хиперболоиди), чијашто равенка е полиномна равенка од втор степен по променливите x, y, z. Тие површини се специјални случаи од т.н. површини од втор ред.

Овде ќе извршиме краток преглед на **површините од втор ред**, т.е. површините чии равенки може да се запишат во обликот

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2xz + b_3yz + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0\,, \quad (1)$$

при што барем еден од броевите a_i, $b_i\,(i = 1, 2, 3)$ не е нула, т.е. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0$.

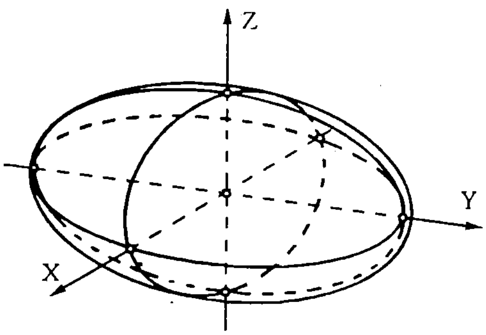
1) Ако $a_3 = b_2 = b_3 = c_3 = 0$ (отсуствува променливата z), тогаш ќе имаме цилиндрична површина со директриса елипса, хипербола или парабола. Во овој случај можеме да имаме и пар рамнини (на пример $y^2 - x^2 = 0$ определува две рамнини $y = x$, $y = -x$), една "двојна" рамнина (на пример $y + x - 1)^2 = 0$), една права (на пример $(x-1)^2 + y^2 = 0$ е правата $x - 1$, $y = 0$), па дури таа равенка може да не претставува ништо (на пример $x^2 + y^2 + 1 = 0$).

Во наредните примери 2)–7), земаме константите a, b, c да се позитивни.

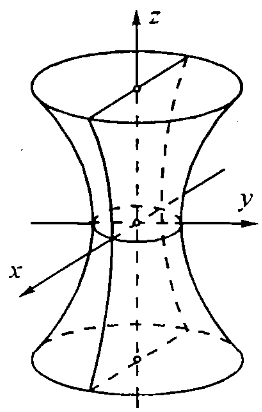
2) Површината определена со равенката $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ се вика **елипсоид** (црт. 1). Јасно е дека:

$$-a \leq x \leq a\,, \quad -b \leq y \leq b\,, \quad -c \leq z \leq c\,.$$

Пресек на елипсоидот со некоја од координатните рамнини (а и со која било рамнина, ако таков пресек постои) е елипса. Ако $a = b = c$, тогаш добиваме $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, што претставува равенка на **сфера**.



Црт. 1



Црт. 2

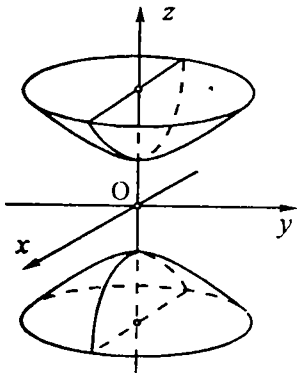
3) Со равенката $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ е определена површина, наречена **еднокрилен хиперболоид** (црт. 2; в. и црт. 5 во **5.3**). Ставајќи $z =$ конст. како пресек добиваме елипси.

Ставајќи $x =$ конст. или $y =$ конст. добиваме хиперболи. За $y = b$ добиваме

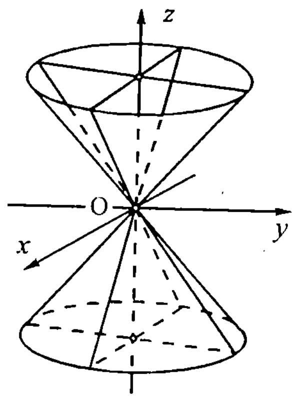
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0,$$

т.е. две прави. Може да се покаже дека низ која било точка на еднокрилниот хиперболоид минуваат две прави што лежат на хиперболоидот.

4) Површината со равенката $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ е наречена **двокрилен хиперболоид** (црт. 3; в. и црт. 6 во **5.3**). Јасно е дека треба да биде $z \geq c$ или $z \leq -c$. Притоа, пресеците со рамнини $z = z_0$ ($| z_0 | > c$) се елипси, а пресеците со рамнини $x =$ конст., $y =$ конст. се хиперболи.



Црт. 3



Црт. 4

5) Ќе покажеме дека равенката $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ определува **конусна површина** со врв во координатниот почеток и директриса – елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$ (црт. 4).

Да ги напишеме параметарските равенки на оваа елипса: $x = a\,cos\,u$, $y = b\,sin\,u$, $z = c$. Тогаш параметарските равенки на конусната површина се:

$$x = av\cos u\,, \quad y = bv\sin u\,, \quad z = cv\,,$$

а со елиминација на u и v лесно се добива равенката

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,,$$

што и сакавме да докажеме.

6) Површината определена со равенката $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ се вика **елиптичен параболоид** (црт. 2 од **5.1**). Притоа имаме $z \geq 0$.

Пресеците со рамнини $z = k > 0$ се елипси, додека пресеците со рамнини $x =$ конст или $y =$ конст се параболи. Јасно е каква положба ќе има параболоидот

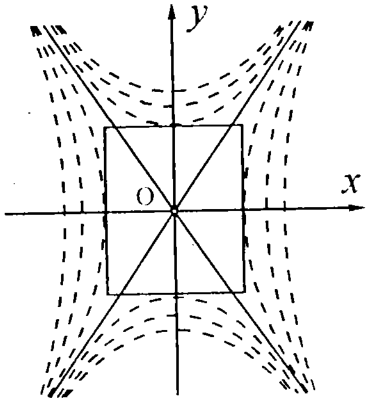
$$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\,.$$

7) Најпосле, површината определена со равенката

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

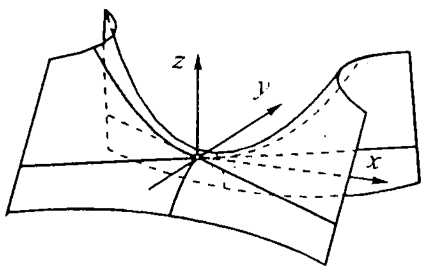
е наречен **хиперболичен параболоид.**

За да добиеме подобра претстава за формата на оваа површина, ќе ја пресечеме со рамнини паралелни со рамнината Oxy и нив ќе ги проектираме на Oxy. (На црт. 5 се прикажани проекциите на неколку такви пресеци.)

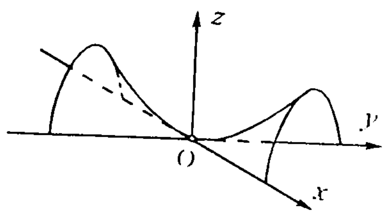


Црт. 5

Јасно е дека тие пресеци се хиперболи со равенки $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c$, $z = c$, освен за $z = 0$, кога се добиваат две прави. Ако ставиме $y = 0$, ќе ја добиеме параболата $z = \frac{x^2}{a^2}$, а за $y = \pm b$ ја добиваме параболата $z = \frac{x^2}{a^2} - 1$. Ако ги нанесеме тие параболи и ја земаме предвид горната дискусија, ќе ја добиеме формата на хиперболичниот параболоид (црт. 6).



Црт. 6



Црт. 7

Може да се покаже [1] дека со изнесеното се исцрпени сите

[1] Да се види, на пример, Ј. Улчар: "Аналитична геометрија", § 125 или П. С. Александров: "Лекции по аналитической геометрии", Гл.XX, §7, Т. 3.

видови површини од втор ред. Равенките од посложен вид ги определуваат истите површини, но само во поинаков однос спрема координатниот систем. Така на пример, со равенката

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

е определен елипсоидот со центар во точката (x_0, y_0, z_0). За $a=b=c=r$, добиваме сфера со центар во (x_0, y_0, z_0) и радиус r.

Да споменеме дека равенката (1) може да претставува и точка; така на пример, со $x^2+y^2+z^2=0$ е определен координатниот почеток.

Вежби

Која е геометриската смисла (во просторот) на дадената равенка (1–6)?

1. $x^2+2y^2+3z^2=0$. **2.** $x^2+2y^2-3z^2=0$. **3.** $x^2+2y^2=0$.

4. $x^2+y=0$. **5.** $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=2$. **6.** $4x^2-y^2=0$.

Да се опишат (т.е. да се утврди формата и положбата), а потоа да се скицираат површините (7–14)

7. $x^2+2y^2+z^2-4y-2z=1$, **8.** $y^2-z^2=x^2$.

9. $2x^2-y^2+z^2-9=0$. **10.** $x^2+y^2-2y-z+1=0$.

11. $z^2-x^2+y^2+4=0$. **12.** $2x^2-y+z^2-8x-6z+17=0$.

13. $x^2+4y^2=4$. **14.** $x^2-y-z^2=0$.

15*. Да се напише равенката на рамнината којашто ја допира сферата $x^2+y^2+z^2-8x-4z=205$ и е паралелна со рамнината $10x-11y-2z+8=0$.

16. Да се најде равенката на рамнина што ја допира сферата $x^2+y^2+z^2=1$ и минува низ правата $2x-y-z-1=0$, $x-3y+z-4=0$.

5.5. Равенки на крива во простор

Пресекот на две рамнини (што не се паралелни) е права и, како што видовме во разделот **4.4**, равенките на таа права се определени со системот равенки на дадените рамнини:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Во претходните раздели (**5.1**–**5.3**) работевме и со линии, претставени како пресек на површина и рамнина (најчесто паралелна со некоја од координатните рамнини: пример 5 од **5.1**, вежба 9 од **5.2** и др.); равенките на таа линија ги сочинуваат: равенката на површината и равенката на рамнината, т.е. $F(x, y, z)=0$ и $Ax+By+Cz+D=0$.

Но, и општо, *секоја линија во просторот може да се разгледува како пресек на две површини.* Нека

$$F(x, y, z)=0 \quad \text{и} \quad G(x, y, z)=0 \qquad (1)$$

се равенките на површините чиј пресек е кривата (L). Ако M е произволна точка од кривата (L), тогаш M лежи и на едната и на другата површина, па според тоа, нејзините координати ги задоволуваат двете равенки (1). Значи, *крива се разгледува како множество од сите точки во просторот чии координати го задоволуваат системот* (1). Обратно, ако M е произволна точка од просторот чии координати ги задоволуваат равенките (1), тогаш таа лежи на пресекот од двете површини што се определени со равенките (1). Значи, системот равенки (1) определува крива во просторот како множество од сите точки чии координати го задоволуваат тој систем равенки. Равенките (1) се викаат **равенки на кривата** (L) **во просторот.**

Да забележиме дека површините чиј пресек е кривата (L) може да се избираат на разни начини. Тоа значи дека наместо системот равенки (1) може да се земе кој било друг систем од две равенки, што е еквивалентен со него.

ПРИМЕР 1. Равенките на централната кружница во z–рамнината се $x^2+y^2=1$, $z=0$. Истата кружница ја определуваат и равенките

$$z=x^2+y^2-1\,,\quad z=1-x^2-y^2\,.$$

Во таа смисла, наместо произволни површини, за определување на кривата (L) можеме да земеме поедноставни површини, какви што се цилиндричните.

За таа цел, низ линијата (L) да поставиме две цилиндрични површини со генератриси паралелни на оските Oz и Oy. Равенките на тие цилиндрични површини ќе имаат вид $F_1(x,y)=0$ и $G_2(x,z)=0$. *Кривата* (L) *може да се разгледува како пресек на тие цилиндрични површини, па според тоа, системот равенки*

$$F(x,y)=0\,,\quad G(x,z)=0 \tag{2}$$

ја определува кривата (L).

Секоја од равенките (2), разгледувана во соодветната координатна рамнина претставува **проекција на кривата** (L) врз рамнината Oxy, Oxz соодветно.

(Равенките (2) аналитички може да се добијат од равенките (1) со исклучување на променливите z и y.)

ПРИМЕР 2. Да се напишат во обликот (2) равенките на кривата што се добива како пресек на површините $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ и $x^2+y^2-z^2=1$ (полусфера и хиперболоид).

За да ги елиминираме z и y, ќе ја квадрираме првата равенка и: а) ќе ја додадеме на втората – ќе добиеме $x^2+y^2=2$, б) од неа ќе ја одземеме втората – ќе добиеме $z=1$ ($z=-1$ отпаѓа, зашто $z\geq 0$). Значи, бараните равенки на кривата се:

$$x^2+y^2=2\,,\quad z=1$$

(проекцијата на кривата врз Oxy е кружницата $x^2 + y^2 = 2$, а врз Oxz е отсечката $z = 1$, $-1 \leq x \leq 1$.)

Забелешка 1. *Еден систем равенки од обликот* (1) (*или* (2)) *не мора да определува крива, дури и кога секоја од равенките* $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ *претставува површина.* Имено: а) може да се работи за равенки на иста (или делови од иста) површина, така што тогаш (1) ќе биде систем равенки на површина (на пример: $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $z^2 - x^2 - y^2 = 1$); б) може да нема точка што ги задоволува двете равенки ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ – празно множество); в) може да има само една точка (или само конечен број точки) што ги задоволуваат двете равенки ($x^2 + y^2 - z = 0$, $z + x^2 + y^2 = 0$ – само координатниот почеток).

Забелешка 2. Како што една права може да биде дадена со систем параметарски равенки $x = x_0 + a_1t$, $y = y_0 + a_2t$, $z = z_0 + a_3t$, така и секоја тројка функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ претставуваат *параметарски равенки* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ *на крива во просторот.* Се разбира, притоа треба дадените функции да задоволуваат соодветни услови (како што, на пример, кај параметарските равенки на правата треба барем еден од броевите a_1, a_2, a_3 да не е нула). Во V.4 ќе биде извршено поопстојно изучување на површините и кривите, користејќи ги нивните параметарски равенки.

Вежби

1. Равенките на y–оската се: $x = 0$, $z = 0$. Да се најде (барем еден) друг систем од две равенки што ја определува истата права.
2. Да се напишат во обликот (2) равенките на кривата што се добива како пресек на: а) сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и рамнината $z = 1$; б) елипсоидот $x^2 + y^2 + 2z^2 = 9$ и рамнината $z = 2$.
3. Да се докаже дека следните два системи равенки се еквивалентни, т.е. определуваат иста крива (L):

   1) $z = x^2 + y^2$, $\quad z = 2 - x^2 - y^2$; $\quad$ 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $\quad z = 1$.

   Потоа, да се најдат ортоголналните проекции од (L) на координатните рамнини.
4. Кривата (L) е зададена со равенките $x^2 + z^2 = 25$, $\quad y^2 + z^2 = 16$. Да се најде нејзината проекција врз рамнината а) Oxy, б) Oxz.
5.* Сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 9y$ е осветлена со зраци, паралелни со правата $x = 0$, $y = z$. Да се најде формата на нејзината сенка врз рамнината Oxz и да се состави равенката на периферијата на сенката.
6. Да се напишат параметарски равенки на кривите од вежбата:

   а) 1; б) 2; в) 4.
7. Да се напишат параметарски равенки на кривата $x^2 + y^2 = 16$, $\quad y^2 + z^2 = 16$.

IV.6. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

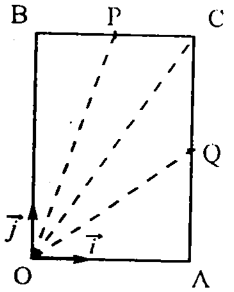
1. Дадени се: $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 20$. Да се пресмета $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.
2. Дадени се: $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 22$. Да се пресмета $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.
3. Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се заемно нормални, при што $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 24$.

   Да се пресмета: а) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$; б) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.
4. Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ формираат агол од 60^0, при што $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 8$.

   Да се најде: а) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$; б) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.
5. На три некомпланарни вектори $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ е конструиран паралелопипед. Да се посочат оние негови вектор–дијагонали што се еднакви соодветно на: $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}$.
6. По дадени вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ да се конструира секој од следниве вектори:

   а) $2\mathbf{a}$; б) $-\frac{1}{3}\mathbf{b}$; в) $3\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$; г) $\frac{1}{2}\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.
7. Дадени се векторите $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Векторот $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ е тежишната линија на $\triangle OAB$. Да се разложи геометриски (т.е. со помош на цртеж) и алгебарски (т.е. со алгебарски израз):

   а) $\mathbf{c}$ по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; б) $\mathbf{a}$ по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.
8. Во правоаголникот $OACB$ (црт. 1) P и Q се средини на страните BC и AC соодветно, при што $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 4$ ($\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ се единични вектори на $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соодветно). Да се разложи геометриски (со цртеж) и алгебарски (со алгебарски израз) векторот $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ по векторите $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b}$.



Црт. 1

9. Дадени се векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при што $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, и аголот меѓу нив 120^0. Да се конструира векторот $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ и да се најде неговиот модул.
10. Точката B го дели кружниот лак $AC = 90^0$ во однос 1:2. O е центар на кружницата. Да се разложи векторот $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ по векторите $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.
11. Ако за четириаголникот $ABCD$ важи равенството: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, каде што O е произволна точка, тогаш тој четириаголник е паралелограм. Докажи!
12. Да се конструира паралелограм над векторите $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{k}-3\mathbf{j}$ и да се определеат неговите дијагонали AB и OC.
13. На рамнината Oxy да се конструираат векторите:

   $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}$ и $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$.

   Да се разложи геометриски и алгебарски (види задача 7) векторот $\mathbf{c}$ по векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

14. Три сили **F**, **G** и **H** нанесени во една точка, се заемно нормални и
а) $|\mathbf{F}|=3$, $|\mathbf{G}|=4$, $|\mathbf{H}|=12$, б) $|\mathbf{F}|=2$, $|\mathbf{G}|=10$, $|\mathbf{H}|=11$.
Да се најде големината на нивната резултанта **R**.

15. Да се провери колинеарноста на векторите $\mathbf{a}=(-6,4,2)$ и $\mathbf{b}=(3,-2,-1)$. Да се установи кој од нив е подолг (колкупати) и како се насочени (исто или спротивно).

16. Да се провери дали четирите точки $A(-3,1,-1)$, $B(3,-5,3)$, $C(2,-1,3)$, $D(-1,2,1)$ се темиња на трапез.

Да се реши равенката (17–18):

17. $\begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & 4\cos x \end{vmatrix} = 0.$ **18.** $\begin{vmatrix} \sin 5x & -\cos 5x \\ \cos 8x & \sin 8x \end{vmatrix} = 0.$

Да се реши неравенката (19–20):

19. $\begin{vmatrix} 2x-1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} < 1.$ **20.** $\begin{vmatrix} x & 1 & -x \\ 0 & -x & -1 \\ -x & 1 & x \end{vmatrix} > 0.$

Да се упростат и да се пресметаат детерминантите (21–24):

21. $\begin{vmatrix} ka & a^2+k^2 & 1 \\ kb & b^2+k^2 & 1 \\ kc & c^2+k^2 & 1 \end{vmatrix}.$ **22.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \end{vmatrix}.$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$ **24.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$

Да се докаже равенството (25–26):

25. $\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ z & 0 & -y \\ 0 & -z & -x \end{vmatrix} = 0.$ **26** $\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$

Да се реши системот равенки (27–30):

27. $3x-4y+2z=1,$ $5x-y+3z=2,$ $4x-2y+z=3.$

28. $x-y+z=a,$ $x+y-z=b,$ $-x+y+z=c.$

29. $4x-2y-z=-1,$ $5x-y-2z=1,$ $x+y-z=2.$

30. $3x+2y+z=-1,$ $x-y+2z=-2,$ $2x+3y-z=-3.$

31. За кои вредности на параметрите a и b системот равенки
$ax+y+2z=-1$, $x-2y+3z=b$, $9x-8y+5z=3$.
а) има единствено решение; б) нема решение;
в) има бесконечно многу решенија?

32. За која вредност на a системот хомогени равенки
$x+2y+3z=0$, $2x+3y+4z=0$, $5x+6y+az=0$
има ненулто решение?

33. Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се заемно нормални, а векторот $\mathbf{c}$ со секој од нив зафаќа агол од 60^0. Знаејќи дека $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$ и $|\mathbf{c}|=6$, да се пресмета

а) $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{c})$; б) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$.

34. Да се докаже дека $-ab \leq \mathbf{a}\,\mathbf{b} \leq a\,b$. Во кои случаи важи равенство?

35. Дадено е $a=4$, $b=3$. При кои вредности на λ векторите $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}$ се заемно нормални? (Притоа: $x=|\mathbf{x}|$.)

36. Векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ го задоволуваат условот $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$. Да се пресмета изразот $\mathbf{a}\,\mathbf{b}+\mathbf{b}\,\mathbf{c}+\mathbf{c}\,\mathbf{a}$, ако: а) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се единични; б) $a=2$, $b=3$, и $c=5$.

37. Даден е $\triangle OAB$ $[O(0,0,0),\ A(2,0,0),\ B(1,-1,0)]$. Да се најде аголот φ меѓу страната AB и тежишната линија AM.

38. Дадени се темињата на еден четириаголник

$A(3,-5,-5)$, $B(1,1,-4)$, $C(0,4,1)$ и $D(2,-2,1)$.

а) Да се најде аголот меѓу дијагоналите AC и BD.

б) Дали четириаголникот $ABCD$ е ромб?

39. Дадени се три последователни темиња на еден паралелограм: $A(2,0,5)$, $B(1,-3,3)$, $C(0,-2,-3)$. Да се најде четвртото теме D и аголот φ меѓу векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

40. Да се пресмета внатрешниот агол на $\triangle ABC$ при темето B, ако $A(1,-2,3)$, $B(0,-2,4)$, $C(4,-2,-1)$.

41. Дадени се векторите $\mathbf{a}=(-5,-22,18)$ и $\mathbf{b}=(2,2,3)$. Да се најдат координатите на векторот $\mathbf{x}$ којшто е нормален на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, има должина 14 и зафаќа тап агол со оската Oy.

42. Дадени се векторите $\mathbf{a}=(2,3,-2)$ и $\mathbf{b}=(4,1,1)$. Да се најде вектор $\mathbf{x}$ којшто е нормален на оската Oy и ги задоволува условите $\mathbf{a}\mathbf{x}=3$, $\mathbf{b}\mathbf{x}=11$.

43. Дадени се векторите $\mathbf{a}=(2,-4,3)$, $\mathbf{b}=(4,1,-1)$ и $\mathbf{c}=(4,-3,1)$. Да се пресмета проекцијата од $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

44. Дадени се векторите $\mathbf{a}=(1,-2,3)$, $\mathbf{b}=(3,-1,4)$ и $\mathbf{c}=(2,-2,1)$. Да се пресмета проекцијата од $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$ врз $\mathbf{c}$.

45. Аголот меѓу векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е $\frac{2\pi}{3}$, а нивните должини се $a=1$, $b=2$. Да се пресмета: а) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2$; б) $[(\mathbf{a}+3\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}-\mathbf{b})]^2$.

46. Векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ зафаќаат агол од 45^0 и $a=b=5$. Да се пресмета плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$.

47. Кој услов треба да го задоволуваат векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ за да бидат колинеарни $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}-\mathbf{b}$?

48. Да се докаже дека $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 \leq a^2b^2$; во кој случај ќе важи равенство?

49. Векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ се сврзани со врските $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}$. Да се докаже дека векторите $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ се колинеарни.

50. Дадени се векторите $\mathbf{a}=(1,-3,2)$, $\mathbf{b}=(3,-2,1)$ и $\mathbf{c}=(-7,2,1)$. Да се најде вектор $\mathbf{x}$ таков што е нормален на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а $\mathbf{x}\mathbf{c}=10$.

51. Да се најде плоштината на паралелограмот конструиран над векторите

$\mathbf{a}=2\mathbf{m}+\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{m}+2\mathbf{n}$, каде што $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ се единични вектори што зафаќаат агол од 30^0.

52. Да се покаже дека векторите $\mathbf{a}=(-4,-3,2)$, $\mathbf{b}=(2,3,-1)$ и $\mathbf{c}=(6,12,-3)$ се компланарни и да се разложи $\mathbf{c}$ по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

53. Да се докаже дека векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ што го задоволуваат условот $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{o}$ се компланарни.

54. Да се покаже дека

а) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})]=(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$;

б) $[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c})=3(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$.

55. Дадени се темињата на еден тетраедар:

$A(-2,1,4)$, $B(1,3,2)$, $C(7,3,6)$ и $D(8,-4,-5)$.

Да се најде неговата висина спуштена од темето D.

56. Да се пресмета волуменот на паралелопипедот $OABCO_1A_1B_1C_1$, во кој се дадени трите темиња на долната основа $O(0,0,0)$, $A(2,-3,0)$, $C(3,2,0)$ и темето на горната основа $B_1(3,0,4)$ што лежи на бочниот раб BB_1 спротивен на работ OO_1.

57. Три темиња на тетраедар се точките $A(1,3,0)$, $B(3,2,-1)$, $C(-1,2,1)$, а волуменот е $V=5$. Да се најде четвртото теме D, ако се знае дека тоа лежи на оската Oz.

58. Дадени се произволни вектори $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$. Да се докаже дека векторите $\mathbf{a}=\mathbf{n}\times\mathbf{p}$, $\mathbf{b}=\mathbf{n}\times\mathbf{q}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ се компланарни.

59. Од точката $M(3,-2,4)$ се спуштени нормалите кон координатните рамнини. Да се состави равенката на рамнината што минува низ нивните подножја.

60. Да се состави равенката на рамнината што минува низ координатниот почеток и е нормална на рамнините $x-3y-2z-1=0$, $2x+y+z-5=0$.

61. На рамнината $5x-2y-2z-5=0$ да се најде точка M таква што правата OM да зафаќа еднакви агли со координатните оски (O е координатниот почеток).

62. Да се најде множеството точки што се еднакво оддалечени од точките $P(1,-5,7)$ и $Q(-4,2,1)$.

63. Да се најде равенката на рамнината што минува низ пресечната точка на рамнините $2x+y+z-7=0$, $x-3y-2z+3=0$, $5x-2y+4z-12=0$ и низ правата $x-3=-2y=-2z$.

64. Да се состави равенката на рамнината што минува низ пресекот на рамнините $x+y+z+1=0$ и $2x+2y+(1+\sqrt{2})z-4=0$, а со рамнината Oyz зафаќа агол од 60^0.

65. Да се испита односот на трите рамнини:

$2x+3y-z+5=0$, $x-2y+z+2=0$, $4x+y+z+9=0$.

66. Да се испита за кои вредности на m и n рамнините

$2x-y+z+m=0$, $nx-6y+z+10=0$, $x-3y-2z+1=0$

а) имаат единствена заедничка точка, б) припаѓаат на ист прамен, в) се сечат по три различни паралелни прави.

67. Да се најде точка на x–оската што е еднакво оддалечена од точката $(1,4,2)$ и од рамнината $2x-y+2z+11=0$.

68. Да се состават равенките на рамнините што ги преполовуваат диедарските агли, формирани од рамнините:

$2x+5y-z+3=0$, $2x-4y+10z-1=0$.

69. Да се установи дали точките $P(1,-2,3)$ и $Q(-1,2,5)$ лежат на иста или на различни страни од дадената рамнина:

а) $2x+5y-z+3=0$; б) $x-3y+z+6=0$.

70. Во секој од следните случаи да се установи дали точките $P(1,2,-1)$ и $O(0,0,0)$ лежат во ист диедарски агол, во соседни или во накрсни диедарски агли што ги формираат рамнините:

а) $\begin{matrix} x+2y-z+2=0, \\ 4x-y+2z+3=0; \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} 3x-2y-4z=1, \\ x+5y+3z=2; \end{matrix}$ в) $\begin{matrix} x+y-4z=5, \\ 2x-y-z=-4. \end{matrix}$

71. Да се состави равенката на рамнината што го преполовува диедарскиот агол меѓу рамнините $3x-2y+6z-6=0$, $2x+y-2z+2=0$.

72. Да се состават равенки на правата што е формирана како пресек на рамнината $x+5y-z-4=0$ со рамнината што минува низ точката $P(2,3,1)$ и низ оската Oz.

73. Да се состави равенката на рамнината што ја проектира ортогонално правата $x=4+8t$, $y=7+13t$, $z=t$ врз рамнината $2x+3y+z=5$.

74. Да се состават равенките на ортогоналната проекција на правата

$x=\frac{y-4}{8}=\frac{z-7}{13}$ врз рамнината $x+2y+3z-5=0$.

75. Темињата на $\triangle ABC$ се пресечните точки на рамнината $2x+4y+z-8=0$ со координатните оски. Да се најдат равенките на средната линија на триаголникот што е паралелна со рамнината Oxz и аглите што ги зафаќа таа средна линија со координатните оски.

76. Да се состават каноничните равенки на симетралата на надворешниот агол при темето C на $\triangle ABC$: $A(2,-7,5)$, $B(11,6,-7)$ и $C(-1,-3,2)$.

77. Дадени се темињата на $\triangle ABC$: $A(1,2,-2)$, $B(1,4,-3)$ и $C(-3,-2,1)$. Да се состават параметарските равенки на неговата висина спуштена од темето C и аголот меѓу неа и тежишната линија CC_1.

78. Дадени се равенките на движење на точката $M(x,y,z)$: $x=2t-3$, $y=5-t$, $z=5-2t$. Да се пресмета растојанието d што ќе го помине точката M во временскиот интервал од $t_1=0$ до $t_2=7$.

79. Да се состават каноничните равенки на правата што минува низ точката $M(2,-3,-1)$, нормално на правата $x=2t-1$, $y=3t$, $z=-6t+1$ и ја сече правата $x=2t-1$, $y=3-5t$, $z=3t+1$.

80. Да се состават параметарските равенки на правата што минува низ точката $P(-4,-1,2)$, и низ средината на отсечката на правата

$4x+5y+3z-26=0$, $3x+2y-3z+5=0$,

зафатена меѓу рамнините $3x-4y+5z+11=0$ и $3x-4y+5z-41=0$.

81. Да се најде ортогоналната проекција на точката $M(3,2,-1)$ врз правата $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+7}{5}$.

82. Да се најде точка N симетрична на точката $M(1,6,4)$ во однос на правата $x=2t-5$, $y=7-2t$, $z=t$.

83. Да се најде точка N симетрична на точката $M(3,-4,1)$ во однос на рамнината $x-2y+3z=0$.

84. Да се најде точка N симетрична на точката $M(5,-3,2)$ во однос на рамнината што минува низ правите

$4x-y+2z-3=0$, $2x+5y-3z+5=0$;

$3x-y+2z-5=0$, $3x+3y+z+7=0$.

85. На дадената рамнина Σ да се најде точка P, таква што збирот од растојанијата до двете дадени точки A и B да биде најмал.

а) $\Sigma: x+2y-3z+10=0, \quad A(2,1,-2), \quad B(8,-7,8)$;

б) $\Sigma: 2x+y-2z+3=0, \quad A(3,2,1), \quad B(5,-3,-4)$.

86. На дадената рамнина Σ да се најде точка P, таква што разликата од растојанијата до дадените точки A и B да биде најголема:

а) $\Sigma: 2x+3y+z-1=0, \quad A(1,-1,0), \quad B(0,1,-6)$;

б) $\Sigma: 2x-y+3z+23=0, \quad A(-3,6,-13), \quad B(8,-5,4)$.

87. Да се состави равенката на сферата што ги допира рамнините $2x-2y+z-2=0$, $2x-2y+z+4=0$, а центарот ѝ лежи на правата $4x-y+2z-7=0, \quad 5x+y+4z-14=0$.

88. Да се состават параметарските равенки на дијаметарот на сферата $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ што е нормален на рамнината $x-2y+3z-4=0$.

89. Да се пресмета најкусото растојание од точката $A(5,1,-1)$ до сферата $x^2+y^2+z^2-14x-8y-10z+86=0$.

90. Да се состави равенка на сферата што минува низ точките $A(1,1,-3)$, $B(3,2,2)$ и $C(-4,1,2)$, а центарот ѝ се наоѓа на рамнината Oyz.

91. Да се установи дали дадената права ја прободува дадената сфера, ја допира или минува надвор од неа:

а) $x=2t,\ y=-25-2t,\ z=5+3t, \quad x^2+y^2+z^2-9x+2y-4z-67=0$;

б) $x+2=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+7/2}{3}, \quad x^2+y^2+z^2-3x+y-4z+\frac{1}{2}=0$.

92. На сферата $x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z-11=0$ да се најде точката T што е најблиска до рамнината $4y-3z-19=0$ и да се пресмета растојанието d од T до таа рамнина.

93. За кои вредности на a рамнината $x+y+z=a$ ја допира сферата $x^2+y^2+z^2=12$?

94. Да се најдат равенките на рамнините што ја допираат сферата $(x-1)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=49$ во прободните точки со правата $\frac{x+11}{5}=\frac{y-9}{-4}=\frac{z+5}{3}$.

95. Да се покаже дека елипсоидот $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ допушта задавање со следниве равенки во параметарска форма:

$$x=a\cos u\cos v, \quad y=b\cos u\sin v, \quad z=c\sin u.$$

96. Да се најдат вредностите на m за кои рамнината $x+mz=1$ го сече двокрилниот хиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$ а) по елипса, б) по хипербола.

97*. За која вредност на m рамнината $x-2y-2z+m=0$ го допира елипсоидот $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$?

98. Да се состави равенка на конусната површина со врв во точката $T(5,0,0)$, а генератрисите ја допираат сферата $x^2+y^2+z^2=9$.

99. Да се установи какви површини се определени со следниве равенки:

а) $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$,

б) $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$,

в) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$.

100. Да се најдат координатите на центарот C и радиусот r на кружницата определена со равенките: $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z-86=0, \quad 2x+y-2z-9=0$.

V ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

Во првите три параграфи од овој дел ќе ги изучуваме реалните функции од повеќе реални променливи. Самиот поим за реална функција од повеќе реални променливи беше воведен во **I.2.7**, а во **IV.5.5** беше изнесена една геометриска интерпретација на функциите од две реални променливи.

Поради едноставност, и тука ќе работиме главно со функции од две променливи. Притоа, повеќето од дефинициите и својствата што ќе ги изнесеме заваквите функции можат да се обопштат и за функциите од повеќе променливи, при што доказите на обопштените својства можат да се добијат со едноставна модификација на доказите за соодветните својства на функциите од две променливи.

V.1. ФУНКЦИИ ОД n ПРОМЕНЛИВИ

Во овој параграф ќе ги воведеме поимите граница, непрекинатост и извод на функција од n променливи, задржувајќи се главно на случајот $n = 2$, а како помошен апарат, претходно ќе го воведеме поимот n–димензионален простор и ќе разгледаме некои важни множества n–димензионални точки.

1.1. Евклидски простори

Секоја точка од една рамнина може да биде окарактеризирана со една подредена двојка реални броеви (x, y), а како што видовме во **IV.1.5** и секоја точка во просторот [1] може да се окарактеризира со помош на една подредена тројка реални броеви (x, y, z); притоа, потребно е во рамнината, односно во просторот, да се избере координатен систем. Во иста смисла постои обратно–еднозначна кореспонденција и меѓу множеството точки од една права и множеството реални броеви (види на пример, **I.1.8**). Ако го имаме предвид изнесеното, тогаш сосема природна е следнава дефиниција:

Секоја подредена n–ка реални броеви $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ја викаме **n–димензионална точка** (или кусо: **точка**). n–димензионалните точки ги означуваме со големите букви од латиницата, а ако X е точката $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, пишуваме

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{1}$$

За реалниот број x_i, $1 \le i \le n$, велиме дека е **i–та проекција** од X и пишуваме

$$x_i = \mathrm{pr}_i X .$$

Ако $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и ако за некој $i = (1, 2, \dots, n)$, $\mathrm{pr}_i X \neq \mathrm{pr}_i Y$, точките X и Y ги сметаме за различни, т.е.

$$X = Y \Leftrightarrow \mathrm{pr}_i X = \mathrm{pr}_i Y , \quad \text{за секој} \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

За $n = 2$ и $n = 3$, секоја n–димензионална точка може да се смета за вектор во рамнината односно во просторот, па во таа смисла природни се следниве дефиниции за **собирање на n–димензионални точки** и **множење** на n–димензионална точка со реален број:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n), \tag{3}$$

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n). \tag{4}$$

Од својствата на операциите собирање и множење на реалните броеви, лесно се добива точноста на следниве две својства:

Теорема 1.

Множеството од сите n–димензионални точки е комутативна група во однос на операцијата собирање.

---

[1] Како и порано, овде и натаму, под "простор" се подразбира "обичниот", т.е. "тридимензионалниот простор".

(Неутралниот елемент на групата е точката $O(0,0,\ldots,0)$, а инверзниот елемент на $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е точката $-X = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.) $\diamondsuit$

Теорема 2.

За кои било реални броеви a, b и кои било n–димензионални точки X и Y точни се равенствата:

$$a(X+Y) = aX + aY\,; \qquad (a+b)X = aX + bX\,; \qquad (ab)X = a(bX)\,;$$

$$1 \cdot X = X\,; \qquad (-1)X = -X\,; 0X = n \cdot O = O\,. \qquad \diamondsuit$$

Од горното е јасно дека поимот n– димензионална точка може да се смета како обопштение и на поимот вектор. Имено, во **IV.1.5** видовме дека постои обратно–еднозначна коресподенција меѓу векторите (во простор) и подредените тројки реални броеви, па во таа смисла, за $n = 3$, дефинициите (3) и (4) ги искажуваат правилата за координати на збир од два вектора и координати на вектор помножен со реален број (в.**IV.1.5**). Поради тоа, ако сакаме посебно да ги истакнеме операциите (3) и (4), n–димензионалните точки ги викаме **n–димензионални вектори**. (Подетална анализа на поимот *вектор* ќе направиме во Гл.**VII.**)

Формулите за растојание меѓу две точки во рамнина и во простор ја сугерираат следнава дефиниција.

Под **растојание** меѓу n–димензионалните точки

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

го подразбираме реалниот број

$$\overline{XY} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots (x_n - y_n)^2}\,. \tag{5}$$

Множеството од сите n–димензионални точки за кои со (5) е воведен поимот растојание, го викаме **евклидски n–димензионален простор**; него ќе го означуваме со $\mathbf{R}^n$.

Овој поопшт поим за растојание ги има сите својства на растојанието во специјалните случаи $n = 1, 2, 3$; притоа, за $n = 1$ имаме $\overline{XY} = | x - y |$, каде што $X = (x)$, $Y = (y)$. Навистина, за кои било n–димензионални точки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ точни се својствата:

1^0. $\overline{XY} \geq 0\,; \quad \overline{XY} = 0 \Leftrightarrow X = Y.$

2^0. $\overline{XY} = \overline{YX}\,.$

3^0. $\overline{XZ} \leq \overline{XY} + \overline{YZ}\,.$

Својствата **1^0** и **2^0** се непосредни последици од дефиницијата (5), додека **3^0**, познато како **неравенство на триаголник**, се добива како последица на следнава

Теорема 3 (неравенство на Коши–Буњаковски [2] **)**

Ако $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *се реални броеви, тогаш е точно неравенството*

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}. \tag{6}$$

Доказ. Да ја разгледаме функцијата $f(t)$ од реалниот аргумент t, определена со

$$f(t) = (a_1t+b_1)^2+\cdots+(a_nt+b_n)^2$$

која може да се напише и на следниов начин:

$$f(t) = (a_1^2+\cdots+a_n^2)t^2+2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)t+(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

Очигледно е дека $f(t) \ge 0$ за секој $t \in \boldsymbol{R}$, па за дискриминантата на триномот $f(t)$ имаме (в. $\mathbf{2^0}$ – $\mathbf{5^0}$ од **I.2.5**)

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2-(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2) \le 0.$$

Оттука го добиваме неравенството

$$|\, a_1b_1+\cdots+a_nb_n \,| \le \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2} \tag{7}$$

познато како **неравенство на Коши-Буњаковски** или (**Коши–Шварц** [3]). Множејќи го (7) со 2 и додавајќи му го изразот $a_1^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+\cdots+b_n^2$ од двете страни, добиваме

$$(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2 \le \left(\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\right)^2,$$

па по коренувањето, го добиваме неравенството (6). ♢

Ставајќи во (6): $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, добиваме

$$\sqrt{(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2} \le$$
$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+\cdots+(y_n-z_n)^2},$$

а тоа е неравенството $\mathbf{3^0}$: $\overline{XZ} \le \overline{XY}+\overline{YZ}$, при $X = (x_1, \cdots, x_n)$, $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ и $Z = (z_1, \cdots, z_n)$.

Забелешка 1. Поимот евклидски простор што го воведовме погоре, како и неколкуте поими што ќе ги воведеме во врска со него во наредниот раздел, имаат помошна улога за функциите од n променливи.

---

[2] Виктор Буњаковски (*Виктор Буняковский*, 1804-1889) – руски математичар.

[3] Херман Шварц (*Hermann Schwarz*, 1843–1921) - германски математичар.

Ќе напомниме уште дека евклидските простори се специјален вид метрични простори (што ќе ги разгледуваме подетално подоцна, во посебна глава (Гл.X), а овде ќе ја изнесеме само нивната дефиниција).

Нека M е произволно (непразно) множество и нека $d : (x, y) \mapsto d(x, y)$ е пресликување од $M \times M$ во множеството $\mathbf{R}$ реални броеви, така што за секои $x, y, z \in M$ точни се својствата:

i) $d(x, y) \geq 0$; $\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Во тој случај велиме дека M е **метричен простор** со **метрика** d. Елементите од M ги викаме **точки**, а бројот $d(x, y)$ – **растојание** меѓу точките x и y.

Лесно се увидува дека *евклидскиот n–димензионален простор* $\mathbf{R}^n$ *е метричен простор со метрика* $d(X,Y) = \overline{XY}$, зашто (i)–(iii) во тој случај преминуваат во $1^0 - 3^0$.

Сите поими што ќе ги воведеме за евклидските простори ќе можат на природен начин да се обопштат и за метричните простори. Да забележиме уште дека со натамошно обопштување на поимот простор можат да се добијат различни видови *тополошки простори* (види Гл. X).

Вежби

1. Да се докаже (во подробности) дека множеството $\mathbf{R}^n$ од сите n–димензионални точки е комутативна група во однос на операцијата собирање, дефинирана со (3) (т.е. да се докаже Т.1).
2. Да се докаже дека за кои било $a, b \in \mathbf{R}$ и $X, Y \in \mathbf{R}^n$ се точни равенствата (Т.2):

   а) $a(X+Y) = aX + aY$; б) $(a+b)X = aX + bX$;

   в) $(ab)X = a(bX)$; г) $0X = O = a \cdot O$.
3. Да се докаже дека за кои било ненегативни броеви a, b важи:
$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$
4. Да се докаже дека за кои било ненегативни броеви $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ важи:
$$(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2).$$

5*. Да се провери дали парот $(\mathbf{R}, d)$ е метрични простор, ако за $d(x, y)$ се земе:

   а) $d(x, y) = | x - y |$; б) $d(x, y) = \sqrt{| x - y |}$;

   в) $d(x, y) = | \sin(x - y) |$; г) $d(x, y) = | \operatorname{arctg}(x - y) |$.

1.2. Важни множества од n–димензионални точки

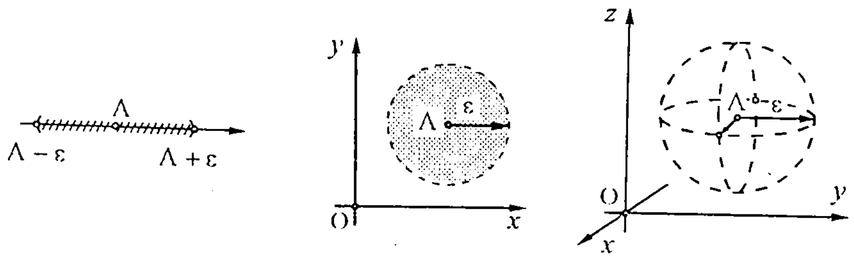
Со помош на поимот за растојание, во n–димензионалниот евклидски простор може да се воведе многу важниот поим ε–околина на дадена n–димензионална точка.

Имено, ε–**околина** на дадена n–димензионална точка $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ се вика множеството од сите n–димензионални точки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за кои $\overline{AX} < \varepsilon$, т.е.

$$\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\varepsilon\,. \qquad (1)$$

За $n=1$, ε–околината на точката A претставува *отворениот интервал* со средина во A и должина 2ε (црт. 1а); за $n=2$ – *внатрешноста на кругот* со центар A и радиус ε (црт. 1б) а за $n=3$ – *внатрешноста на топката* со центар A и радиус ε (црт. 1в).

За $n=4$, не даваме толкување на ε–околината на точката A во обичниот тридимензионален простор.



а) б) в)

Црт. 1

Ако r е даден позитивен реален број и $A=(a_1,\ldots,a_n)$ е n–димензионална точка, тогаш множеството од сите n–димензионални точки $X=(x_1,\ldots,x_n)$ што го задоволуваат равенството

$$\overline{AX}=r\,,$$

т.е.

$$(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2=r^2\,, \qquad (2)$$

се вика n–**димензионална сфера** со центар A и радиус r. Според тоа, **еднодимензионална сфера** ќе биде еден пар точки P и Q; центарот на таа сфера ќе биде средината A, а радиусот – половината од должината на отсечката PQ. За $n=2$ се добива **дводимензионална сфера** – тоа е обична кружница, а за $n=3$ – тридимензионална сфера, којашто е обична сфера (т.е. топкина површина).

Множеството пак од сите n–димензионални точки X за кои е исполнето неравенството $\overline{AX}\le r$ се вика n–**димензионална топка** со центар A и радиус r. За $n=1,2,3$, n–димензионалната топка претставува, по ред: затворен интервал, (обичен) круг и (обична) топка. Ако од n–димензионалната топка се отфрлат сите точки од соодветната n–димензионална сфера, ќе се добие внатрешноста на топката; внатрешноста на топка со центар

A и радиус r ќе ја викаме **отворена топка** со центар A и радиус r. Според тоа, ε–околината на точката A е отворената n–димензионална топка со центар A и радиус ε (за $n = 1, 2, 3$ –в. црт. 1).

Да разгледаме сега едно множество **M** [1] од n–димензионални точки. За точката A ќе велиме дека е **внатрешна точка** за **M** ако постои ε–околина на A што е содржана во **M**. Секоја точка што е внатрешна за **M** му припаѓа на **M**, зашто A ѝ припаѓа на секоја своја ε–околина.

За точката B велиме дека е **рабна точка** за множеството **M** ако секоја околина на B содржи и точки од **M**, а и точки што не му припаѓаат на **M**.

За една точка $B \in$ **M** велиме дека е **изолирана точка** од **M** ако постои околина на B којашто не содржи ниедна точка од **M** различна од B. Според тоа, секоја изолирана точка на **M** е негова рабна точка (но, обратното **не важи**).

Во наредните примери ќе видиме дека една рабна точка за **M** може да му припаѓа, а друга – да не му припаѓа на **M**. Множеството од сите рабни точки на **M** се вика **раб** (или: **контура** или: **граница**) на множеството **M**.

За една точка C велиме дека е **точка на згуснување** за множеството **M**, ако секоја околина на C содржи барем една точка од M различна од C. (Во тој случај, секоја околина на C содржи безброј многу точки од **M**; в. вежба 11.) Од оваа дефиниција непосредно следува дека секоја точка на згуснување за **M** е или внатрешна, или рабна точка за **M**.

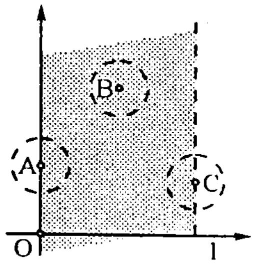
ПРИМЕР 1. Нека **M** е множеството точки од рамнината што го задоволуваат условот $0 \leq x < 1$, т.е. **M** ги содржи сите точки од ординатната оска и сите точки што лежат меѓу неа и правата $x = 1$, без точките од оваа права (црт. 2). Нека $A = (a, b)$ е точка од **M** каде што $0 < a < 1$. Избирајќи го ε таков што $0 < \varepsilon < \min\{a, 1 - a\}$, добиваме дека отворениот круг со центар A и радиус ε се содржи во **M** – значи A е внатрешна точка за **M**. Ако $B = (0, y_1)$ и $C = (1, y_2)$, јасно е дека секој круг со центар B и секој круг со центар C содржи и точки од **M** и точки што не припаѓаат на **M**, па значи B и C се рабни точки за **M**; $B \in$ **M** но $C \notin$ **M**. Точките од правите $x = 0$ и $x = 1$ го сочинуваат работ (или контурата) на **M**.

ПРИМЕР 2. Ако **M** е множеството точки (x, y) што го задоволуваат неравенството $y \geq x^2$, т.е. **M** се состои од точките на параболата $y = x^2$ и

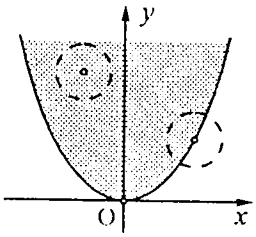
---

[1] Множествата n–димензионални точки, во овој раздел, ќе ги означуваме со "поцрни" големи букви, за лесно да ги разликуваме од n–димензионалните точки, коишто се означуваат исто така со големи, но "посветли" букви.

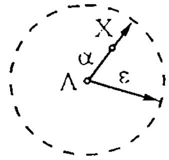
точките над неа, тогаш сите точки од параболата се рабни за **M**, а сите други точки од **M** се внатрешни (црт. 3).



Црт. 2



Црт. 3



Црт. 4

ПРИМЕР 3. Нека **U** е ε–околина на n–димензионалната точка A (црт. 4, $n = 2$). Да покажеме дека сите точки од **U** се внатрешни за **U** (тоа ќе биде пример за множество што не содржи ниедна од своите рабни точки).

Навистина, нека $X \in \mathbf{U}$ и нека $\overline{AX} = \alpha$; поради $\overline{AX} < \varepsilon$ имаме $\alpha < \varepsilon$. Нека $0 < \delta < \min\{\alpha,\ \varepsilon - \alpha\}$ и нека **V** е δ–околината на X, т.е. $Y \in \mathbf{V} \Leftrightarrow \overline{XY} < \delta$. Да покажеме дека X е внатрешна точка за **U**, доволно е да се увериме дека $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}$. Ако $Y \in \mathbf{V}$ тогаш $\overline{AY} \le \overline{AX} + \overline{XY} < \delta + \alpha < \varepsilon$, па $Y \in \mathbf{U}$, што и сакавме да покажеме.

Ќе изнесеме неколку поими со кои натаму ќе се сретнуваме.

За едно множество **U** велиме дека е **отворено**, ако секоја негова точка е внатрешна. Според примерот 3 се добива дека секоја околина на една точка е отворено множество. Ако сите точки на згуснување од едно множество **M** се содржат во **M**, тогаш за него велиме дека е **затворено множество**. Така на пример, множеството **M** од примерот 2 е затворено. Примерот 1 покажува дека едно множество може да не биде ни отворено ни затворено.

Нека $f_1(t),\ f_2(t), \ldots, f_n(t)$, се n непрекинати функции од променливата t во сегментот $[\alpha, \beta]$ од кои барем една не е константна. Множеството n–димензионални точки

$$\big(f_1(t),\ f_2(t), \ldots, f_n(t)\big) \tag{3}$$

што се добива кога t се менува во целиот сегмент $[\alpha,\ \beta]$ го викаме **непрекината n–димензионална линија**; ако

$$f_i(t) = a_i t + b_i\,, \quad a_i, b_i \in \mathbf{R}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

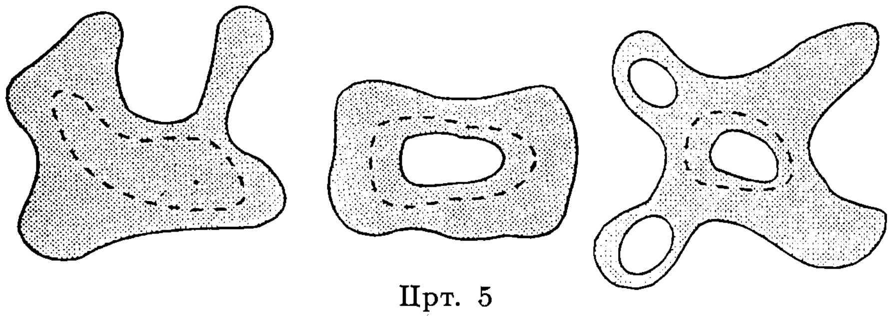
n–димензионалната линија ја викаме **n–димензионална отсечка.**

Множеството **G** од n–димензионални точки се вика **отворена област** ако: i) **G** е отворено и ii) **G** е **сврзано**, т.е. секој пар точки $A, B \in \mathbf{G}$ може да се поврзе со непрекината n–димензионална линија што лежи во $\mathbf{G}$. Ако кон една отворена област се додадат нејзините рабни точки се добива **затворена област**. За едно множество $\mathbf{G}$ велиме дека е **област**, ако е или отворена област, или затворена област, или множество што се добива од отворена област со приклучување кон неа само на еден дел од нејзиниот раб.

За едно множество n–димензионални точки $\mathbf{M}$ велиме дека е **ограничено**, ако постои точка A и реален број r така што $\overline{AP} < r$ за секоја точка $P \in \mathbf{M}$. Со други зборови, $\mathbf{M}$ е ограничено множество ако се наоѓа во внатрешноста на некоја n–димензионална топка со центар A и радиус r.

За $n = 1$, секој отворен интервал (a, b) е отворена област, а секој затворен интервал $[a, b]$, $a < b$ – затворена област; секој отворен интервал со конечни краеви, како и секој затворен интервал се примери на ограничени множества. За случајот $n = 2$, на црт. 5 се претставени 3 примери на ограничени и затворени области.

Примерите изнесени на црт. 5 ќе ги искористиме за воведување на уште еден поим. Имено, во првиот од нив, која било затворена крива со ”стеснување” може да се ”сведе” на точка, додека тоа не е случај со другите два примера. Поради тоа, за првата област од црт. 5 велиме дека е **проста** или **едноставна**, додека за другите две области ќе речеме дека се **сложени**.



Црт. 5

Да одбележиме дека контурата на ограничена едноставна (дводимензионална) област се состои од една затворена крива, додека контурата на нееднoставна затворена област се состои од две или повеќе затворени криви, од кои една е надворешна.

Макар што изнесеното не може да се смета за некоја прецизна дефиниција на поимите ”проста” и ”сложена” област, сепак овде ќе се задоволиме со кажаното, напоменувајќи дека тие поими можат да се воведат за простори со произволна (конечна) димензија.

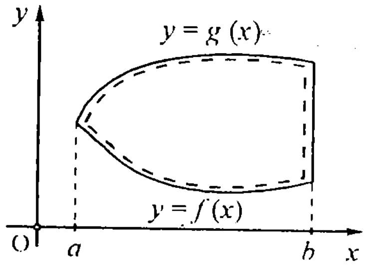
При изучувањето на функциите од n променливи најмногу ќе се задржуваме на функциите од две променливи (како што најавивме во почетокот), поради што постојано ќе се среќаваме со дводимензионални области. Тие најчесто се задаваат со неравенства.

Имено, нека $f(x)$ и $g(x)$ се функции, дефинирани и непрекинати на сегментот $[a, b]$ и нека $f(x) < g(x)$ за $a < x < b$. Геометриски тоа значи дека графикот на $g(x)$ е "над" графикот од $f(x)$, со исклучок можеби на краевите од сегментот, во кои може $f(x) = g(x)$ (црт. 6).

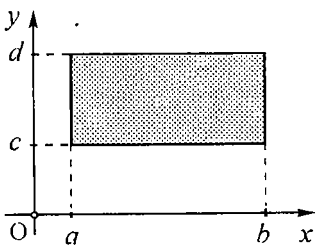
Множеството точки (x, y) за кои

$$a < x < b, \quad f(x) < y < g(x), \tag{4}$$

се состои само од внатрешни точки и само од едно "парче", па значи тоа е отворена област. Нејзиниот раб го сочинуваат графиците на дадените функции и отсечките што ги сврзуваат нивните соодветни краеви. (Во некои случаи, тие отсечки се точки, како што е случајот со "левите" краеви на црт. 6.)



Црт. 6



Црт. 7

Ако во (4) знаците $'' < ''$ се заменат со $'' \leq ''$, ќе добива затворена област. Натаму често ќе имаме работа со затворени области определени со неравенствата

$$a \leq x \leq b, \qquad c \leq y \leq d;$$

Таквата област, при $a \leq b$ и $c \leq d$, претставува (затворен) правоаголник (црт. 7).

Вежби

Да се скицираат рамнинските множества, определени со дадените неравенства (1–6).

1. $0 \leq x \leq 1, \quad -x \leq y \leq 2x$.

2. $1 < x < 2, \quad e^{-x} < y < e^{x}$.

3. $-1 \leq x < 1\,, \quad \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{x+1}\,.$
4. $-1 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1 - |\,x\,|\,.$
5. $0 \leq x \leq 2\,, \quad 0 \leq y \leq 2\,, \quad |\,x - y\,| \geq 1\,.$
6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\,, \quad y^2 < x^2 + 1\,.$
7. Да се опише со систем неравенства делот од првиот квадрант што се добива со отфрлање на пресекот на тој квадрант со кругот што има радиус 2 и центар во координатниот почеток. Да се скицира.
8. Да се определи со систем неравенства множеството точки од сегментот отсечен од параболата $y^2 = x + 1$ со правата $y = x - 1$. Да се скицира.
9. Да се покаже дека множеството М, определено со неравенствата $y^2 \geq x$, $y < 1 - x^2$ не е ни отворено ни затворено. а) Кои рабни точки од М му припаѓаат на М? б) Кои точки од М не се внатрешни за М?
10. Да се покаже дека секое подмножество М од $\mathbb{R}^n$ е унија од своите внатрешни и своите рабни точки. Да се даде пример на множество што се состои: а) само од рабни точки, б) само од внатрешни точки и од една изолирана.
11. Да се покаже дека: ако C е точка на згуснување за множеството М, тогаш секоја околина на C содржи безброј многу точки од М.
12. Да се формира барем едно множество (во $\mathbb{R}^2$), чии точки на згуснување би биле $A = (1,\, 0)$ и $B = (3,\, 2)$ и само тие.
13 Множеството М се состои од сите точки од видот

   а) $A = \left(\frac{1}{m}\,,\, \frac{1}{m}\right)$; $B = \left(\frac{1}{m}\,,\, \frac{1}{n}\right)$; $m, n = 1,\, 2,\, 3, \ldots$

   Да се најдат сите точки на згуснување за М.
14. Нека $\mathrm{M} = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 \leq x\}$. Докажи дека:

   а) точката (4, 2) е рабна точка за М;

   б) множеството М е затворена област.
15. Дали следното множество е отворена област?

   а) $\mathrm{M} = \{(x,\, y)\,|\,x^2 + y^2 < 1\,, \quad y^2 < x\}$;

   б) $\mathrm{M} = \{(x,\, y)\,|\,x^2 - y^2 < 1\,\}$;

   в) $\mathrm{M} = \{(x,\, y)\,|\,(x^2 + y^2 - 1)(6x - x^2 - y^2 - 8) > 0\}$.
16. Да се даде пример на а) отворено, б) затворено множество, што не е област.
17. Да се дадат примери на: а) едноставни, б) сложени области, определени со аналитички изрази. (Да се разгледаат множествата, на пример, во вежбите 1-5.)

1.3. Низи од n-димензионални точки

Ако на секој природен број k му придружиме по една n–димензонална точка $A_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$, тогаш ќе добиеме една низа од точки

$$A_1, A_2, \ldots, A_k,^{1)} \ldots$$

што ја означуваме кусо со A_k. Значи, **низа од n–димензионални точки** се дефинира како пресликување $\varphi(k) = A_k$ од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}^n$, т.е. исто како поимот низа од реални броеви. Со оглед на тоа што секој реален број може да се смета за 1–димензионална точка, низите од реални броеви претставуваат специјален случај од поимот низа од n–димензионални точки (за $n = 1$).

Нека A_k е низа од n–димензионални точки. За n–димензионалната точка A ќе велиме дека е **лимес** (или: **гранична вредност, граница**) на низата A_k и ќе пишуваме

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A\,, \tag{2}$$

ако во секоја ε–околина на A се содржат безброј многу членови од низата, а надвор само конечен број. Ако една низа има граница, тогаш таа се вика **конвергентна**; во спротивниот случај за низата се вели дека е **дивергентна**.

На сличен начин може да се обопштат и другите поими што ги разгледувавме кај низите од реални броеви како на пример: точка на натрупување, фундаментална низа, ограниченост, а потоа, со соодветна модификација на доказите на својствата од низите реални броеви може да се докажат обопштенијата на тие својства за случајот на низи од n–димензионални точки. Спроведувањето на оваа работа би била интересна вежба за читателот (вежби 6-10).

Овде ќе докажеме само едно својство коешто ќе овозможи сите својства на конвергентните низи од n–димензионални точки да се добијат како последици од соодветните својства на низите од реални броеви. За таа цел ќе воведеме уште еден поим – поимот *компонентна низа*.

Нека е дадена низа A_k од n–димензионални точки:

$$A_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})\,, \quad A_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})\,, \ldots \tag{3}$$

За секој $i : 1 \leq i \leq n$, можеме да формираме по една низа a_{ik} од i–тите компоненти на точките A_k. Тогаш добиваме n низи од реални броеви,

$$a_{1k},\, a_{2k},\, \ldots,\, a_{nk} \tag{4}$$

што ќе ги викаме **компонентни низи** за низата A_k.

---

1) Макар што е вообичаено индексот на општиот член на една низа да се означува со n, овде ќе го означуваме со k, зашто буквата n е веќе "ангажирана" за "димензионалноста" на точките.

Специјално, ако A_k е дадена низа од 2–димензионални точки (т.е. $n = 2$), наместо $A_k = (a_{1k}, a_{2k})$ ставаме $A_k = (a_k, b_k)$ (за поедноставно пишување) и добиваме две компонентни низи: a_k и b_k.

Секако, важи и обратното: од две дадени низи реални броеви како компонентни низи, можеме да формираме една низа од 2–димензионални точки. На пример, од низите:

$$a_k = \frac{1}{k}, \qquad b_k = 1 + (-1)^k,$$

ја добиваме низата од 2–димензионални точки со општ член $A_k = \left(\frac{1}{k}, 1 + (-1)^k\right)$.

Погоре најавеното својство ќе го формулираме и ќе го докажеме за низи од 2–димензионални точки, но тоа се обопштува и се докажува на ист начин и за произволен n.

Теорема 1 (**за конвергенција на компонентните низи**).

Низата од 2–димензионални точки $A_k = (a_k, b_k)$ е конвергентна со лимес $A = (a, b)$ ако и само ако секоја од компонентните низи a_k, b_k е конвергентна, при што

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = b. \tag{5}$$

Доказ. Нека $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ и нека ε е произволно избран реален број. Тогаш во ε–околината на A има безброј многу членови од низата A_k, а надвор – само конечно многу. Според тоа, постои природен број k_0 таков што за $k > k_0$ важи $\overline{AA_k} < \varepsilon$, т.е. за $k > k_0$:

$$\sqrt{(a_k - a)^2 + (b_k - b)^2} < \varepsilon,$$

од каде што следува:

$$| a_k - a | < \varepsilon, \quad | b_k - b | < \varepsilon,$$

а тоа значи дека важат равенствата (5).

Обратно, нека компонентните низи (4) на A_k се конвергентни при што важат (5). Тоа значи дека за произволно избран позитивен број ε, постојат природни броеви k_1 и k_2, такви што: $| a_k - a | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $| b_k - b | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, за $k > k_1, k_2$. Ако $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, тогаш за $k > k_0$:

$$\overline{AA_k} = \sqrt{(a_k - a)^2 + (b_k - b)^2} < \sqrt{\frac{2 \cdot \varepsilon^2}{2}} = \varepsilon,$$

што значи дека $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. $\diamondsuit$

ПРИМЕР 1. Да ги разгледаме низите

а) $A_k = \left(\dfrac{3k}{k+1}, \dfrac{2k-1}{k}\right)$; *б*) $B_k = \left(\dfrac{k}{k+1}, 1 + (-1)^k\right)$.

Низата A_k е конвергентна со лимес $A = (3, 2)$, зашто обете нејзини компонетни низи се конвергентни:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3k}{k+1} = 3\,, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{k} = 2\,,$$

додека низата B_k е дивергентна, зашто едната нејзина компонентна низа – низата со општ член $1+(-1)^k$ – е дивергентна.

Неколку последици од Т.1 ќе бидат наведени во вежбите (5-8).

Вежби

Да се претстават графички првите неколку членови од дадената низа точки (1-4) и да се провери дали таа низа е конвергентна.

1. $A_k = \left(\frac{3k-1}{k+1}, 2\right)$. **2.** $A_k = \left(\sqrt[k]{k},\ 2k\sqrt{k^2+1} - 2k^2\right)$.

3. $A_k = \left(k\cdot 2^{-k}, k^{(-1)^k}\right)$. **4.** $A_k = \left(\frac{5}{k}, \left(1-\frac{1}{k}\right)^k, \frac{2^k+(-2)^k}{2^k}\right)$ $(n=3)$.

5. Да се докаже дека лимесот на конвергентна низа од 2–димензионални (општо: n–димензионални) точки е еднозначно определен.

6. Нека A_k е низа од точки чии членови се една точка A. (Таква низа се вика **константна низа**.) Да се покаже дека нејзиниот лимес е A.

7. Нека c_k е конвергентна низа од реални броеви со лимес c, а A_k и B_k се конвергентни низи од n–димензионални точки со лимеси A и B соодветно. Да се покаже дека низите $c_k A_k$ и $A_k \pm B_k$ се конвергентни со лимеси $c A$ и $A \pm B$ соодветно.

8. Докажи дека следниве тврдења за една низа n–димензионални точки A_k се еквивалентни:

(а) A_k е конвергентна со лимес A.

(б) $(\exists A \in \mathbf{R}^n)(\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbf{N})\ [k > k_0 \Rightarrow \overline{AA_k} < \varepsilon]$.

(в) Постои точка A, таква што низата од реални броеви $d_k = \overline{AA_k}$ конвергира кон нула.

9. Точката A се вика **точка на натрупување** за низата A_k ако во секоја околина на A има безброј многу членови од низата.

а) Докажи дека $A = (a, b)$ е точка на натрупување за низата точки $A_k = (a_k, b_k)$, ако и само ако броевите a и b се точки на натрупување на низите a_k и b_k соодветно.

б) Најди ги сите точки на натрупување на низата:

б$_1$) $A_k = \left((-1)^k \frac{k}{k+1}, 2+(-1)^k\right)$; б$_2$) A_k од вежбата 4.

10*. Низата A_k од n–димензионални точки се вика **ограничена низа**, ако постои реален број r, таков што $\overline{OA_k} \le r$ (т.е. ако сите членови на низата се наоѓаат во n–димензионална топка со центар во координатниот почеток O и радиус r). Докажи дека:

(а) A_k е ограничена акко [1] секоја компонентна низа од A_k е ограничена.

---

[1] "акко" (како и порано) пзначува "ако и само ако"

(б) Секоја конвергентна низа A_k е ограничена, но обратното не важи.

(в) Секоја ограничена низа A_k има барем една точка на натрупување, но обратното не важи.

(г) A_k е конвергентна акко A_k е ограничена и има само една точка на натрупување.

11. За една низа A_k се вели дека е **фундаментална** (или **кошиева**) акко

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})\ [k, m > k_0 \Rightarrow \overline{A_k A_m} < \varepsilon].$$

Да се докаже дека: а) A_k е фундаментална акко сите компонентни низи на A_k се фундаментални (в. I.4.9). б) A_k е конвергентна акко A_k е фундаментална.

12. Нека $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^n)$. Да се покаже дека: ако $\mathbf{M}$ е затворено множество, и ако A_k е конвергентна низа во $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^n)$ таква што $A_k \in \mathbf{M}$ за секој $k \in \mathbb{N}$, тогаш и нејзината граница A му припаѓа на $\mathbf{M}$.

1.4. Функции од две променливи

Во I.**2.7** го воведовме поимот реална функција од n реални аргументи како пресликување $f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto y$ од некое множество D од n–димензионални точки (т.е. $D \subseteq \mathbb{R}^n$) во $\mathbb{R}$ и пишувавме

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Специјално, во случајот $n = 2$, под **реална функција од два реални аргументи** (кусо: **функција од две променливи**) **со домен** $D \subseteq \mathbb{R}^2$ подразбираме пресликување $f : D \to \mathbb{R}$, т.е. правило f според кое ѝ е придружен по еден реален број y на секоја точка (x_1, x_2) од D и пишуваме $y = f(x_1, x_2)$. Притоа велиме дека y е **слика** на точката (x_1, x_2) или дека y е **вредноста на функцијата** f во точката (x_1, x_2).

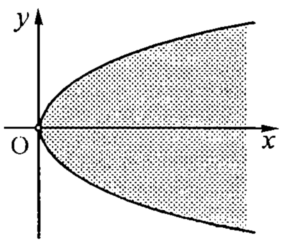
За случајот $n = 2$ вообичаено е да се пишува z наместо y, а (x, y) наместо (x_1, x_2), па записот $y = f(x_1, x_2)$ преминува во $z = f(x, y)$. Во случајот $n = 3$ обично ќе пишуваме $u = f(x, y, z)$ наместо $y = f(x_1, x_2, x_3)$.

Овде и натаму ние ќе ги разгледуваме главно функциите од две променливи.

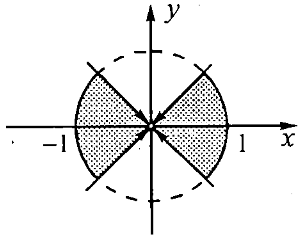
Правилото со кое е определена функцијата f најчесто е зададено со некој аналитичен израз $f(x, y)$, определен на D; во тој случај велиме дека f е зададена **аналитично**. Притоа, *ако доменот D не е назначен експлицитно, ќе сметаме дека тој се состои од сите реални броеви за кои дадениот аналитичен израз $f(x, y)$ има смисла* (исто како за функциите од една променлива во I.**2.1**).

Доменот D на дадена функција $f(x, y)$, ако е неопходно, се определува *аналитично* (со равенства или неравенства) или *геометриски* (со некој цртеж).

ПРИМЕР 1. а) За функцијата $f(x,\, y) = \sqrt{x - y^2}$ доменот е определен со: $x - y^2 \geq 0$, т.е. $y^2 \leq x$, а тоа неравенство го задоволуваат сите точки од засенчениот дел на црт. 1.



Црт. 1



Црт. 2

б) $f(x,\, y) = \arcsin \frac{y}{x} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; доменот е определен со:

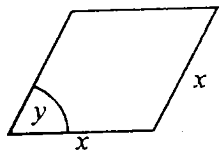
$$-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1\,, \qquad 1 - x^2 - y^2 \geq 0\,.$$

т.е. со засенчениот дел од рамнината на црт. 2.

в) $f(x,\, y) = x^2 - y^2$; доменот е определен со:

$$-\infty < x < +\infty\,, \quad -\infty < y < +\infty\,, \quad \text{т.е.} \quad D = \mathbb{R}^2\,.$$

Во случаи кога дадена функција произлегува од некоја конкретна ситуација (геометриска, физичка и сл.) доменот се определува во зависност од природата на величините што учествуваат.



Црт. 3

ПРИМЕР 2. Ако x ја означува должината на страната, а y – големината на аголот на ромб, тогаш плоштината z на ромбот (црт. 3) е зададена со формулата

$$z = x^2 \sin y\,.$$

(Притоа: x, y, и z се реални броеви, т.е. ги означуваат само мерните броеви на споменатите величини; в. и I.**2.1.**)

Доменот на оваа конкретна функција е определен со неравенствата $x > 0$, $0 < y < \pi$. (Инаку, како апстрактна функција, $z = x^2 \sin y$ би имала домен $D = \mathbb{R}^2$.)

Множеството $E = E_f$ од сите реални броеви коишто се слики на елементите од D со f, т.е.

$$E = \{z \in \mathbb{R} | (\exists (x,\, y) \in D)\, f(x,\, y) = z\}\,, \tag{2}$$

се вика **опсег** (или **множество вредности**) на f.

ПРИМЕР 3. Опсегот на функцијата:

а) $z = x^2 + y^2$ е интервалот $[0,\, +\infty)$;

б) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ е интервалот $[0,\, 1]$;

в) $z = e^{-x^2 - y^2}$ е интервалот $(0,\, 1]$.

Со помош на овој поим можеме да воведеме неколку важни поими за функциите од две променливи, на ист начин како кај функциите од еден аргумент (в. I.**2.5**).

Имено, за функцијата $f(x, y)$ со домен D се вели дека е:

а) **мајорирана; минорирана; ограничена**; односно дека има:

б) **супремум; инфимум; најголема вредност** (НГВ); **најмала вредност** (НМВ)

– акко тоа својство го има нејзиниот опсег E.

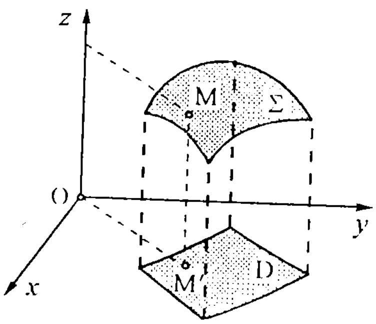
Така, на пример, функцијата (од примерот 3): а) $z = x^2 + y^2$ е минорирана, но не е мајорирана; б) $z = e^{-x^2-y^2}$ е ограничена, со $\sup z = 1$ и $\inf z = 0$, со најголема вредност 1, а нема најмала вредност.

Функциите од два аргумента, како што видовме во IV.**5.1**, можеме да ги претставуваме геометриски, користејќи го поимот график на функција. Да се потсетиме на тоа.

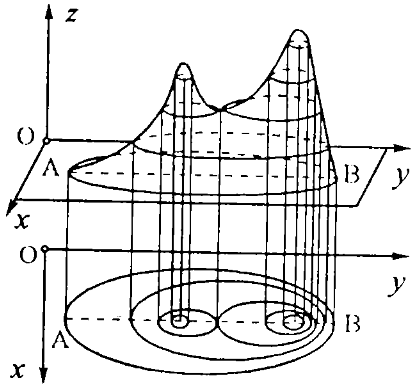
Под **график** на дадена функција $f(x, y)$ со домен D го подразбираме множеството

$$\Gamma = \Gamma_f = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = f(x, y)\}. \tag{3}$$

Бидејќи секоја подредена тројка (x, y, z) од реални броеви претставува точка M при избран координатен систем во просторот, множеството Γ можеме да го сметаме за множество точки од просторот. Така, графикот на една функција од два аргумента, геометриски претставува обично некоја **површина** (црт. 4).



Црт. 4



Црт. 5

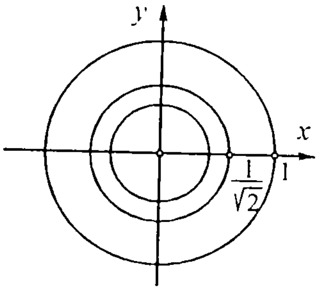
Натаму, наместо изразот: "површината Σ што е график на функцијата $f(x, y)$", најчесто ќе го употребуваме изразот: "површината $z = (x, y)$".

Карактерот на една површина $z = f(x, y)$ може релативно згодно да се испитува ако се знаат нејзините **ниво–линии**, т.е. линиите што се добиваат како пресек на површината со рамнини, паралелни на рамнината Oxy и претставени на неа (црт. 5; види IV.**5.1**, IV.**5.5**).

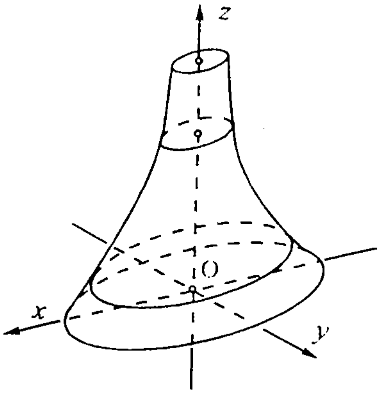
ПРИМЕР 4. Да се одредат ниво–линиите на површината

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}\,.$$

Ниво–линиите ќе бидат кривите $\frac{1}{x^2+y^2} = c$, т.е. $x^2 + y^2 = 1/c$, каде што c е позитивен реален број, т.е. кружници со радиус $1/\sqrt{c}$ (црт. 6). Површината $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ е претставена на црт. 7.



Црт. 6



Црт. 7

Забелешка 1. Функциите од n променливи, за $n \geq 3$, не ги претставуваме геометриски во обичниот физички простор.

Забелешка 2 (за ознаките). Ако $X \in D \subseteq \mathbf{R}^n$, тогаш $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, па за една функција f од n променливи, наместо записот $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можеме да ја употребиме ознаката

$$f(X)\,. \tag{4}$$

Оваа ознака го нагласува фактот дека "f е функција од n–димензионални точки", па затоа можеме да ја наречеме **геометриска ознака**.

Геометриската ознака (4) овозможува функциите од повеќе променливи да се третираат како "функции од една променлива X". Според тоа, ознаката $f(X)$, покрај својата краткост, овозможува на едноставен начин многу од поимите за функции од една реална променлива да се обопштат за функциите од повеќе променливи. Што е уште поважно, може да се обопштат и соодветните својства, при што за доказите се неопходни најчесто мошне едноставни модификации.

За една функција $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ може да се употреби и ознаката
$$f(\mathbf{x}) \tag{5}$$
со цел да се истакне фактот дека f е функција од "вектори" $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, па затоа можеме (5) да ја наречеме **векторска ознака** за функцијата f и да кажеме дека "f е **реална функција од векторски аргумент**". (За $n = 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ е вектор од обичниот тридимензионален простор; по аналогија, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ го викаме n–**димензионален вектор**; в. 1.1.)

Натаму, за функциите од две променливи најчесто ќе ја употребуваме ознаката $f(x, y)$, а само понекогаш и геометриската ознака (4).

Вежби

Да се одреди доменот аналитично (со равенства или неравенства) и графички (со цртежи) на следните функции (1-9).

1. $\frac{x}{x-y}$. **2.** $\sqrt{x-y^2}$. **3.** $\sqrt{\frac{1-x}{1-y}}$.

4. $\sqrt{x^2-y^2-1}$. **5.** $\ln(x-y)$. **6.** $e^{-x^2-y^2}$.

7. $\arccos\frac{x}{y}$. **8.** $\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$. **9.** $\arcsin\frac{x}{y}+\sqrt{|\,2x\,|-y^2}$.

10. Да се изрази:

а) плоштината z на правилна четириаголна призма како функција од основниот раб x и висината y;

б) волуменот z на прав кружен конус како функција од висината x и генератрисата y.

Потоа да се одреди доменот D на добиената функција и да се скицира.

11. За секоја од дадените функции да се установи дали доменот е отворена област.

а) $x+y^{-1}$; б) $\ln|\,xy\,|$; в) $\sqrt{x+y^2}$;

г) $1/\sqrt{x+y^2}$; д) $(x^2+y^2)^{-1}(1-x^2-y^2)^{-1/2}$.

12. Во секоја од вежбите 1–9 да се установи дали доменот е: а) отворено множество, б) затворено множество, в) ограничена област.

Да се скицираат ниво–линиите на следните површини (13-18).

13. $z=\sqrt{x^2+y^2}$. **14.** $z=\sqrt{xy}$. **15.** $z=x^2-y^2$.

16. $z=\frac{2x}{x^2+y^2}$. **17.** $\ln(x+y^2)$. **18.** $z=e^{-x^2-y^2}$.

Да се скицира дадената површина (19-24).

19. $z=\sqrt{x^2+y^2}$. **20.** $z=\sqrt{xy}$. **21.** $z=\begin{cases}1\,, xy\neq 0\,,\\ 0\,, xy=0\,,\end{cases}$

22. $z=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)^{1/2}$. **23.** $z=e^{-x^2-y^2}$. **24.** $z=\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]$ ("цел дел од").

1.5. Граници на функции од две променливи

Нека функцијата $f(x, y)$ е дефинирана во некоја област D и нека (x_0, y_0) е точка на згуснување за D. (Во тој случај, секогаш постои низа точки (x_n, y_n) од D што конвергира кон (x_0, y_0).)

Ако за **секоја** низа точки (x_n, y_n) со својствата: $(x_n, y_n) \in D$, $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ за секој $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0), \tag{1}$$

соодветната низа вредности на функцијата $f(x, y)$ конвергира кон еден број L, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L, \tag{2}$$

тогаш L се вика **граница** (или **гранична вредност, лимес**) на функцијата $f(x, y)$ во точката (x_0, y_0). Ознака:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L \tag{3}$$

или:

$$f(x, y) \to L \quad \text{кога} \quad (x, y) \to (x_0, y_0). \tag{3'}$$

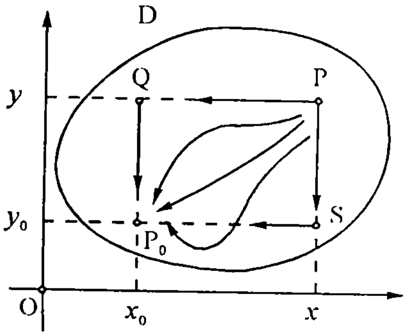
Во согласност со ознаката од забелешката 2 во **1.4**, (3) односно (3') го добива обликот

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = L, \qquad \text{односно:} \quad f(P) \to L, \quad \text{кога} \quad P \to P_0, \tag{4}$$

каде што $P = (x, y)$, а $P_0 = (x_0, y_0)$.

Равенството (3) означува дека функцијата $f(x, y)$ се стреми кон бројот L кога точката $P = (x, y)$ се стреми кон точката $P_0 = (x_0, y_0)$ по кој било пат што лежи во областа D (црт. 1).

Да разгледаме неколку примери.



Црт. 1

ПРИМЕР 1. Да видиме дали постои лимес на функцијата $f(x, y) = 5x + y^2$ во точката (3, 1).

За таа цел, нека (x_n, y_n) е произволна низа, таква што $x_n \to 3$, $y_n \to -1$ кога $n \to \infty$ и $(x_n, y_n) \neq (3, 1)$. (Јасно е дека $(x_n, y_n) \in D_f = \mathbb{R}^2$.) Тогаш, за соодветната низа вредности на функцијата $f(x_n, y_n) = 5x_n + y_n^2$, имајќи ги предвид својствата на конвергентните низи од реални броеви, добиваме

$$\lim_{n\to\infty}(5x_n + y_n^2) = 16, \quad \text{па} \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to -1}}(5x + y^2) = 16.$$

ПРИМЕР 2. Да видиме дали постои $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Дадената функција $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ е дефинирана во сите точки од рамнината, освен во точката (0, 0).

Да земеме низа точки (x_n, y_n) од D_f, различни од (0, 0), којашто конвергира кон (0, 0) по правата $y = kx$ ($k \in \mathbf{R}$), т.е. $(x_n, k\,x_n)$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - k^2x_n^2}{x_n^2 + k^2x_n^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} = L(k)\,.$$

Така, за различни вредности на k, ќе добиваме различни лимеси за низите $f(x_n, y_n)$, како на пример: $L(1) = 0$; $L(2) = -\frac{3}{5}$; $L\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5}$ итн. Според тоа, лимес на дадената функција $f(x, y)$ во точката (0, 0) не постои.

Поимот граница на функција од два аргумента може да се окарактеризира со помош на јазикот "$\varepsilon-\delta$", исто како за функциите од еден аргумент. Имено:

Теорема 1 ($\varepsilon - \delta$ **карактеризација на граница**).

Нека $f(x, y)$ е функција од две променливи со домен D и нека $P_0(x_0, y_0)$ е точка на згуснување за D. Тогаш

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = L$$

ако и само ако е исполнет следниов услов (наречен "$\varepsilon - \delta$" – својство):

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)[P \in D, 0 \neq \overline{PP_0} < \delta \Rightarrow| f(P) - L |< \varepsilon] \tag{5}$$

(Притоа се претпоставува дека земената точка P е различна од P_0, дури и кога P_0 му припаѓа на D.)

Условот (5) може да се запише и во видот:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)[(x,y) \in D, 0 \neq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow| f(x,y) - L |< \varepsilon]. \tag{5'}$$

Доказот на оваа теорема се спроведува на ист начин како доказот на соодветната теорема при функциите од еден аргумент (I.**5.2**). ◊

Да разгледаме уште некои примери.

ПРИМЕР 3. $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = 0$.

Тврдењето следува од неравенството

$$|\frac{xy^3}{x^2+y^2}| = \frac{y^2}{2}\cdot|\frac{2xy}{x^2+y^2}| \leq \frac{y^2}{2}$$

и од фактот дека $\frac{y^2}{2} \to 0$ (кога $x \to 0$ и $y \to 0$).

ПРИМЕР 4. Да пресметаме $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Ставајќи $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, добиваме дека $\rho \to 0$ кога $x \to 0$, $y \to 0$ и

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\right| = \rho^2 \mid \cos^2\varphi\sin^2\varphi \mid \leq \rho^2 \to 0$$

па, значи, лимесот е 0.

Да забележиме дека за функциите од две променливи (при услови аналогни со тие во Т.1 од **I.5.1** за функции од една променлива) важи: лимес од збир, разлика, производ и количник на две функции е еднаков соодветно со: збирот, разликата, производот и количникот на лимесите на тие две функции.

Поимот граница кај функциите од два аргумента **може да се обопшти на два начина**, слично како соодветниот поим кај функциите од еден реален аргумент. Имено, може да се допушти разгледување, прво, на "**лимеси во бесконечни точки**", т.е.

I. $\lim_{P\to A} f(P) = \infty \quad (P = (x, y), \quad A = (a, b))$,

II. $\lim_{P\to\infty} f(P)$.

Во вториот случај постојат повеќе "видови лимеси", во зависност од тоа на кој начин P се стреми кон ∞. На пример:

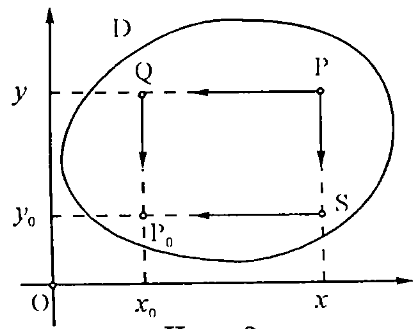
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x, y); \quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to-\infty}} f(x, y); \quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to b}} f(x, y); \quad \text{итн.}$$

Овде ќе се задоволиме со овие забелешки, без да навлегуваме во давање прецизни дефиниции на овие поими.

ПРИМЕРИ

5) $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+y}{1-y} = \infty$. 6) $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to \infty}} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$. 7) $\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}} \frac{2xy-1}{x+y} = 2$.

Да забележиме дека поимот граница на функција од n променливи, за кој било $n \in \mathbb{N}$, се дефинира на ист начин како за $n = 2$, при што важат истите својства што ги спомнавме за случајот на функции од две променливи.



Црт. 2

Поради специјалната улога на правите, паралелни на координатните оски, природно се наметнува барањето: од сите можни патишта по кои точката P се стреми кон P_0 (а кои целосно лежат во доменот D на f) да ги издвоиме патиштата PSP_0 и PQP_0 (црт. 2).

Ако $P \to Q$, тогаш $x \to x_0$ и лимесот $\lim_{x \to x_0} f(x, y)$ е некоја функција од y, на пример $\psi(y)$. Ако постои $\lim_{y \to y_0} \psi(y) = L'$, тогаш пишуваме

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right) = \lim_{y \to y_0} \psi(y) = L'. \tag{6}$$

Ако $P \to S$ (црт. 2), аналогно ќе имаме

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) = \lim_{x \to y_0} \varphi(x) = L''. \tag{7}$$

Броевите L' и L'' се викаат **повторени граници**. (Во таа смисла, границата L, т.е. (3) – кога двата аргумента x, y истовремено се стремат кон x_0, y_0 соодветно – се вика **двојна** (или **двократна**) **граница**.) Љубопитно е тоа што:

а) L' и L'' може да не постојат, а L да постои;

б) L' и L'' може да постојат, дури и да се еднакви меѓу себе, а L да не постои.

Неколку примери во врска со тоа се дадени [1] во вежбите 9-13.

Вежби

Во задачите 1-8, да се провери дали постои граница на дадената функција $f(x, y)$ во назначената точка $A = (a, b)$ и, во потврден случај, да се најде.

1. $\frac{3x}{(x-1)^2+y^2}$, $A = (1, 2)$.
2. $\frac{xy}{x^2+y^2}$, $A = (0, 0)$.

3. $(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$, $A = (0, 0)$.
4. $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4x-2xy-8y}$, $A = (4, 2)$.

5. $\frac{x+y}{x^2+y^2}$, $a = \infty$, $b = \infty$.
6. $\frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, $a = 0$, $b = 0$.

7. $\frac{x+y}{x-y}$, $a = 0 = b$.
8. $f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ во $(0, 0)$.

Во задачите 9–13, а во врска со лимесот L и повторените лимеси L' и L'' за дадената функција $f(x, y)$ во назначената точка $A = (a, b)$, да се образложи наведеното тврдење.

9. $\frac{\sin xy}{x}$, $A = (0, 2)$; L, L', L'' постојат и $L = L' = L''$.

10. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $A = (0, 0)$; L не постои, а $L' \neq L''$ постојат.

11. $y \cos \frac{1}{x}$, $A = (0, 0)$; $L = L''$, а L' не постои.

12. $\frac{xy}{x^2+y^2}$, $A = (0, 0)$; $L' = L''$, а L не постои.

13. $x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$, $A = (0, 0)$; L постои, а L' и L'' не постојат.

[1] Да се види и Фихтенгольц I, Гл. V §1, стр. 361.

1.6. Непрекинатост на функции

И поимот непрекинатост на функција од две (и повеќе) променливи се воведува како кај функциите од една променлива.

Имено, нека f е функција од две променливи x и y, со домен D. За f велиме дека е **непрекината во точката** (x_0, y_0), ако:

i) f е дефинирана во (x_0, y_0) и (x_0, y_0) е точка на згуснување за D,

ii) f има лимес во точката (x_0, y_0) и тој лимес е еднаков со вредноста на f во таа точка, т.е.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{1}$$

За f велиме дека е **непрекината во областа** [1] D, ако е непрекината во секоја точка од таа област. (Аналогно се постапува и кога D е произволно множество точки.)

Ако (x_0, y_0) е точка на згуснување за доменот на f и е нарушен некој од условите за непрекинатост на f во (x_0, y_0), тогаш (x_0, y_0) се вика **точка на прекин за** f

ПРИМЕР 1. а) Функцијата $f(x, y) = 3x+5y^2$ е непрекината во секоја точка (x_0, y_0) од рамнината.

б) Функцијата $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$, во точката $(0, 0)$, не е непрекината (зашто g не е дефинирана во таа точка); $(0, 0)$ е точка на прекин за g.

в) Функцијата h, дефинирана со: $h(x, y) = x^2 + y^2$ за $(x, y) \neq (2, 1)$ и $h(2, 1) = 6$, има прекин во точката $(2, 1)$, зашто границата на h во $(2, 1)$ е 5, а $5 \neq 6 = h(2, 1)$.

Од дефиницијата на граница следува:

Теорема 1 ($\varepsilon - \delta$ – **својство на непрекинатост**).

Функцијата $f(x, y)$ определена во областа D е непрекината во точката $(x_0, y_0) \in D$ ако и само ако е исполнет условот: за секој $\varepsilon > 0$, постои функција $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таква што

$$(x,y) \in D, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow | f(x,y) - f(x_0,y_0) | < \varepsilon. \tag{2}$$

(Овој услов е наречен $\varepsilon - \delta$– **својство за непрекинатост.**) ◊

[1] Терминот "област" означува: отворена област, затворена област или множество добиено од отворена област со приклучување на дел од неговиот раб (в. и **1.2**). Овој поим не треба да се меша со поимот "*дефинициона област на функција*" што се употребува во смисла на поимот "домен на функција".

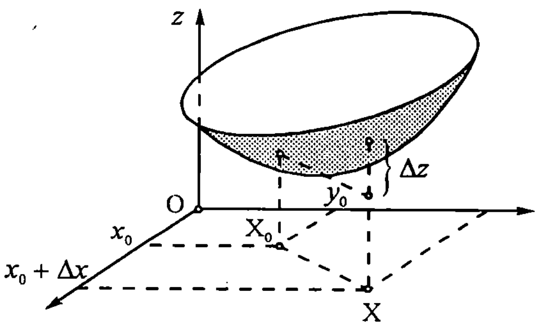
Со геометриската ознака, ставајќи $X = (x, y)$ и $X_0 = (x_0, y_0)$, импликацијата (2) го добива следниов вид:

$$X \in D_f, \ \overline{XX_0} < \delta \Rightarrow | f(X) - f(X_0) | < \varepsilon . \qquad (2')$$

Теоремата 1 може да се искаже и на следниов начин:

1′. *Потребен и доволен услов за непрекинатост на функцијата f во точката X_0 од областа D е: вредностите на f во точките X од D што се доволно блиску до X_0, произволно малку се разликуваат од вредноста на f во точката X_0 .* ♢

Поимот за непрекинатост ќе го окарактеризираме уште на еден начин. За таа цел ќе воведеме поим за нараснување на функција од две променливи.



Црт. 1

Нека функцијата $f(x, y)$ е дефинирана во областа D и нека (x_0, y_0) е (внатрешна) точка од D. Ако Δx и Δy се нараснувања на x и y при $x = x_0$ и $y = y_0$ соодветно, така што $X = (x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) \in D$, тогаш бројот

$$f(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

се вика **нараснување на функцијата** $z = f(x, y)$ во точката (x_0, y_0) и се означува со $\Delta f(x_0, y_0)$ или, кусо, со Δz (црт. 1); значи:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \ . \qquad (3)$$

ПРИМЕР 2. За функцијата $f(x, y) = x(x - y)$ нараснувањето во точката (2, 1) е:

$$\Delta f(2, 1) = f(2 + \Delta x, 1 + \Delta y) - f(2, 1) =$$
$$= (2 + \Delta x)(2 + \Delta x - 1 - \Delta y) - 2 \cdot 1 =$$
$$= 3\Delta x - 2\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x \, \Delta y \, .$$

Непосредно од дефиницијата (3), се добива следнава карактеризација на непрекинатоста.

Теорема 2 (карактеризација со нараснувањето).

За непрекинатост на функцијата $z = f(x, y)$ во точката $X_0 = (x_0, y_0)$ потребно и доволно е границата на Δz при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ да биде еднаква со нула, т.е.

$$\lim_{X \to X_0} \Delta z = \lim_{X \to X_0} [f(X) - f(X_0)] = 0 \, . \quad \diamondsuit$$

Имајќи ја предвид забелешката во **1.5** дека лимесот од збир производ и количник на две функции е еднаков соодветно со збирот, производот и количникот од тие функции, лесно се добива:

Теорема 3 (непрекинатост на збир, производ, количник). *Ако* $f(X)$ *и* $g(X)$ *се две непрекинати функции во точката* X_0, *тогаш во* X_0 *ќе бидат непрекинати и функциите*:

а) kf (k =конст.); б) $f+g$; в) $f \cdot g$; г) f/g *при што во* г) *се претпоставува и* $g(X_0) \neq 0$. ◇

Поимот сложена функција како и теоремата за непрекинатост на сложена функција од една променлива (в. I. 5. 4.) се пренесуваат на соодветен начин и кај функциите од повеќе променливи.

Имено, нека на некое множество $D \subseteq \mathbf{R}^n$ е зададен систем од m функции

$$\varphi_1(X), \varphi_2(X) \ldots, \varphi_m(X), \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D, \tag{4}$$

и нека на некое множество $W \subseteq \mathbf{R}^m$ е зададена функција $f(U)$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in W$.

Ако точката $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, определена со равенствата

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

се наоѓа во W секогаш кога точката $X = (x_1, \ldots, x_n)$ е во D, тогаш $f(U)$ можеме да ја разгледуваме како функција g од променливите $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ наречена **сложена функција**, дефинирана во D с о п о с р е д с т в о на променливите $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)\big). \tag{6}$$

(Функцијата $g = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, се вика и **суперпозиција** на функциите f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.)

Ќе издвоиме неколку специјални случаи од големата разновидност на сложени функции од повеќе променливи:

1) за $n = 1$, $m = 2$ (ставајќи $x_1 = t$) : $g(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$;

2) за $n = 2$, $m = 2$ (ставајќи $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u = u_1$, $v = u_2$):
$g(x, y) = f\big(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)\big) = f(u, v)$;

3) за $n = 3$, $m = 1$ (ставајќи $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$):
$g(x, y, z) = f\big(\varphi_1(x, y, z)\big)$.

Сега ќе формулираме (и ќе докажеме) теорема за непрекинатост на сложена функција во специјалниот случај 2): $n = 2$, $m = 2$.

Теорема 4 (за непрекинатост на сложена функција).

Нека функцијата $z = f(u, v)$ е зададена во некоја околина на точката (u_0, v_0) и е непрекината во таа точка, а функциите $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ се определени во некоја околина на точката (x_0, y_0), непрекинати се во таа точка и $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$. Тогаш сложената функција

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y) = g(x, y)$$

е непрекината во точката (x_0, y_0).

Доказ. Ќе користиме геометриска ознака (в. **1.4**) и ќе пишуваме: X_0 за (x_0, y_0); X за (x, y); U_0 за (u_0, v_0); U за (u, v).

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Доволно е да покажеме дека постои $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, таков што $| g(X) - g(X_0) |< \varepsilon$ за секој $\overline{XX_0} < \delta$.

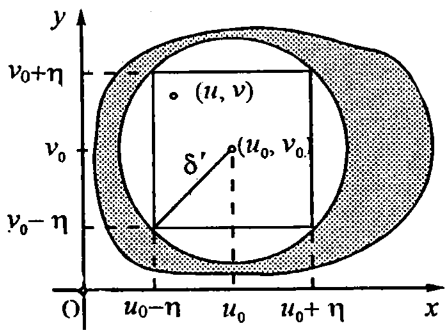
Поради непрекинатоста на $f(U)$ во точката U_0, за секој $\varepsilon > 0$ (па и за погоре избраниот ε), постои број $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, таков што

$$| f(U) - f(U_0) |< \varepsilon$$

за секоја точка U таква што $\overline{UU_0} < \delta'$. Да избереме број $\eta > 0$ толку мал што квадрат-н-та отворена област

$$\begin{aligned} &| u - u_0 | < \eta, \\ &| v - v_0 | < \eta \end{aligned} \qquad (7)$$

да биде содржана во δ'–околината на U_0 (црт. 2).



Црт 2

Поради непрекинатоста на функциите φ и ψ во точката X_0, за погоре избраниот η (којшто, преку δ', зависи од ϵ, т.е. $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$), постојат броеви $\delta_i = \delta_i(\eta) > 0$ $(i = 1, 2)$, такви што
$| \varphi(X) - \varphi(X_0) |< \eta$ при $\overline{XX_0} < \delta_1$, $| \psi(X) - \psi(X_0) |< \eta$ при $\overline{XX_0} < \delta_2$.

Да ставиме $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогаш, за сите X, такви што $\overline{XX_0} < \delta$, точни се горенаведените неравенства $| \varphi(X) - \varphi(X_0) |< \eta$ и $| \psi(X) - \psi(X_0) |< \eta$, т.е. неравенствата (7). Според тоа, за секоја точка X од δ–околината на X_0, точката $(u, v) = \big(\varphi(x, y), \psi(x, y)\big)$ лежи во квадратната област (7), па значи и во η–околината на точката U_0. Значи: $| f(u, v) - f(u_0, v_0) |< \varepsilon$, т.е.

$$| f\big(\varphi(x, y), \psi(x, y)\big) - f\big(\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0)\big) |< \varepsilon ,$$

што значи дека $| g(x, y) - g(x_0, y_0) |< \varepsilon$ за секоја точка (x, y) од δ–околината на (x_0, y_0). ◇

Теоремата 4 може да се преформулира за општиот случај, при што и доказот [2] може да се прилагоди без тешкотии.

Со помош на теоремите 3 и 4 лесно се покажува точноста на следнава теорема.

Теорема 5 (непрекинатост на елементарните функции).

Секоја елементарна функција од две (или повеќе променливи) е непрекината во секоја внатрешна точка од својата дефинициона област. ◇

Притоа, **елементарни функции** од n променливи $x_1, \ldots, x_n$ се викаат функциите што се добиваат од $x_1, \ldots, x_n$ со помош на конечен број суперпозиции, операциите собирање, множење, делење и земање елементарни функции од една променлива.

ПРИМЕР 3. Функцијата $f(x, y) = x \sin \frac{xy}{x+y}$ е елементарна функција од две променливи x и y. Навистина: $f(x, y) = xw$, $w = \sin v$, $v = \frac{u}{t}$, $u = xy$, $t = x + y$.

Ќе изнесеме без доказ уште неколку важни својства за функциите од две променливи, непрекинати во дадена ограничена затворена област, формулирани во следнава

Теорема 6 (на Вајерштрас, за меѓувредност и знак).

Нека функцијата $z = f(X)$, $X = (x, y)$, е непрекината во ограничената затворена област D. Тогаш:

а) *$f(X)$ е ограничена на D, т.е.*

$$(\exists \lambda > 0)(\forall X \in D) \quad | f(X) | \leq \lambda .$$

б) *$f(X)$ има најмала и најголема вредност во D, т.е.*

$$(\exists X_1, X_2 \in D)(\forall X \in D) \quad a = f(X_1) \leq f(X) \leq f(X_2) = b .$$

в) *Ако c е број што се наоѓа меѓу најмалата вредност a и најголемата вредност b на $f(X)$ во D, тогаш постои точка $C \in D$, за која $f(C) = c$.*

г) *Ако X_0 е внатрешна точка за D и ако $f(X_0) > 0$, тогаш постои δ–околинана X_0, таква што за секоја точка X од таа околина $f(X) > 0$; аналогно за случајот $f(X_0) < 0$.* ◇

Сите овие својства се аналози на соодветни својства на функциите од една променлива непрекинати на интервал (**I.5.6**), сите тие важат за функции од произволен број променливи и се докажуваат на сличен начин како за функциите од една променлива. И овие функции го имаат следново важно својство:

---

[2] Да се види, на пример, Рождественский, Гл. X §2, стр. 320.

Теорема 7 (**за рамномерна непрекинатост**).

Секоја функција што е непрекината на ограничено затворено множество D е рамномерно непрекината на D. ◇

Притоа, за една функција $f(X)$, определена на дадено множество $D \subseteq \mathbf{R}^n$, велиме дека е **рамномерно непрекината** на D, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall X', X'' \in D)[\overline{X'X''} < \delta \Rightarrow | f(X') - f(X'') | < \varepsilon].$$

На крајот ќе наведеме уште еден интересен факт за непрекинатите функции од две (и повеќе) променливи (чија точност лесно се проверува).

Тврдење 8.

Ако функцијата $f(x, y)$ е непрекината во точката (a, b), тогаш таа е непрекината по секоја од променливите посебно, т.е.

$g(x) = f(x, b)$ *е непрекината во* $x = a$,

$h(y) = f(a, y)$ *е непрекината во* $y = b$ (вежба 12).

Но, обратното не важи, т.е. $f(x, y)$ може да биде непрекината по секоја од променливите x, y одделно, а да не биде непрекината по обете наедниш (в. вежба 13). ◇

Вежби

Да се испита непрекинатоста на дадената функција во назначената точка (1–6)

1. $z = x^2 + 3y$, во (1,2). 2. $z = \frac{x}{x+y}$, во (0, 0).

3. $f(x, y) = 2xy$ при $(x, y) \neq (1, 3)$, $f(1, 3) = 0$, во (1, 3).

4*. $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$, во (0, 0).

5. $f(x, y) = \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$, во (0, 0).

6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, во (0, 0).

7. Да се најдат точките на прекин на функцијата

а) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; б) $z = \cos\frac{1}{xy}$;

в) $z = 1/(\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y)$; г) $= 1/(xyz)$.

Во задачите 8–11 да се провери дали дадената функција:

а) има граница, б) е непрекината во назначената точка.

8. $f(x, y) = x^3 - 2y$ при $(x, y) \neq (2, 3)$, $f(2, 3) = 1$, во (2, 3).

9. $f(x, y) = 3xy - y^2$ при $(x, y) \neq (2, 1)$, $f(2, 1) = 5$, во (2, 1).

10. $f(x, y) = 1$ при $xy \neq 0$, $f(x, y) = 0$, во (0, 0).

11. $f(x, y) = 0$ при $|x| \neq y^2$ и при $x = y = 0$; $f(x, y) = 1$ при $|x| = y^2 \neq 0$ во $(0, 0)$.

12. Нека функцијата $f(x, y)$ е непрекината во точката (a, b) и нека $g(x) = f(x, b)$, $h(y) = f(a, y)$. Да се покаже дека g е непрекината во точката $x = a$, а h – во $y = b$.(Тврдење 8.)

13. Функцијата $f(x, y)$ е дефинирана на следниов начин:

$$f(x, y) = xy/(x^2 + y^2) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \ f(0, 0) = 0.$$

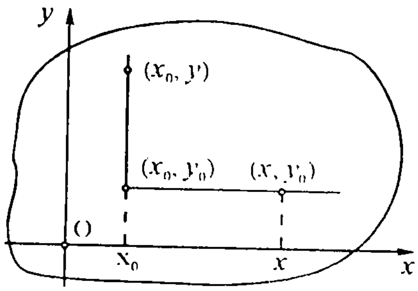
Да се покаже дека функциите $g(x) = f(x, 0)$ и $h(y) = f(0, y)$ се непрекинати во точките $x = 0$ и $y = 0$ соодветно, но функцијата $f(x, y)$ е прекината во точката $(0, 0)$. (Спореди со вежбата 12).

14. Дадена е функцијата $f(x, y) = xy + 3x$. Користејќи ја дефиницијата, да се покаже дека: а) f е непрекината во точката $(1, 2)$; б) f е рамномерно непрекината во квадратната област $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

1.7. Парцијални изводи

Поимот парцијален извод на функција од два аргумента беше воведен во II.2.5. Овде ќе се потсетиме на тој поим и ќе го разгледаме неговиот однос со поимот граница.

За таа цел, нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во некоја (отворена) област D и нека (x_0, y_0) е внатрешна точка од D. Тогаш, сите точки (x, y_0) за вредностите на x што се доволно блиски до x_0, се наоѓаат во D (црт. 1) и ние можеме да ја разгледуваме функцијата $f(x, y_0)$ како функција од една променлива x во некоја околина на x_0. Ако таа функција има извод (по x) за $x = x_0$, тогаш тој се вика **парцијален извод** од функцијата $f(x, y)$ во точката (x_0, y_0) и се означува со еден од симболите:



Црт. 1

$$f'_x(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$$

или, ако нема потреба од истакнување на точката (x_0, y_0):

$$f_x, \quad f'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_x, \quad z'_x. \tag{1}$$

Ние најчесто ќе ги користиме ознаките: $\frac{\partial z}{\partial x}$, z_x, f_x.

Забелешка 1. *Симболите* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ *се целосни*, т.е. *не се дропки* (за разлика од ознаката $\frac{dy}{dx}$ кај функциите од една променлива); и $\frac{\partial}{\partial x}$ *е целосен симбол, симбол на* **операција**. Ова се однесува и на аналогните ознаки (во кои се користи буквата ∂) а за кои ќе стане збор подоцна.

Да ставиме

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \tag{2}$$

и таа величина да ја наречеме **парцијално нараснување на функцијата** $f(x, y)$ во точката (x_0, y_0). Имајќи ја предвид дефиницијата за извод на функција од еден аргумент, за парцијалниот извод f_x во точката (x_0, y_0) ќе имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \tag{3}$$

Аналогно, ако ставиме $x = x_0 (=$ конст.$)$ и допуштиме y да се менува, тогаш $f(x_0, y)$ станува функција само од y, дефинирана во некоја околина на y_0 (црт. 1). Ако таа функција има извод по y за $y = y_0$, тогаш тој се вика **парцијален извод на функцијата** $f(x, y)$ и се означува со еден од **симболите:**

$$f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_y, \quad z'_y.$$

Во смисла на дефиницијата, и тука имаме

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \tag{4}$$

каде што $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ е **парцијално нараснување по** y на $f(x, y)$ во точката (x_0, y_0).

Практичното наоѓање на парцијалните изводи се врши според познатите правила за диференцирање на функции од една променлива: *при наоѓањето на* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *треба* y *да се смета за константа, а при* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *треба* x *да се смета за константа.*

ПРИМЕР 1. $z = x^3 - 3x^2y + y^4$. Во произволна точка (x, y):
$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy$ (сметаме $y =$ конст.)
$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 4y^3$ (сметаме $x =$ конст.).

ПРИМЕР 2. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$. Во произволна точка $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 3y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y}{x^2 + 3y^2}.$$

Поимот парцијален извод на функција од n променливи $(n > 2)$ се воведува на ист начин како парцијален извод на функција од две променливи. Имено, ако

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

е функција од n променливи, дефинирана во некоја околина на дадена точка $X = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, тогаш

$$u = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) = g(x_1)$$

можеме да ја сметаме за функција од една променлива x_1; нејзиниот извод во точката $x_1 = x_1^0$, ако постои, се вика **парцијален извод** на функцијата f по променливата x_1 во точката X_0 и се означува со:

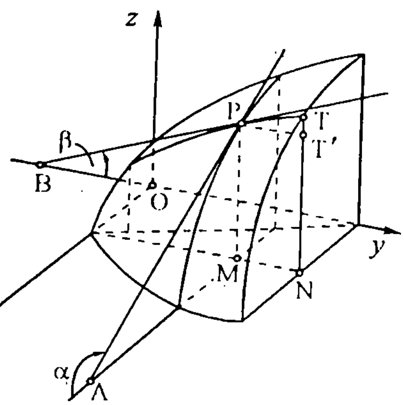
$$\frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad u_{x_1} \quad \text{или} \quad u'_{x_1}.$$

При практичното наоѓање на парцијалните изводи на функција од повеќе променливи постапуваме како кај функциите од две променливи.

ПРИМЕР 3. Нека $u = x^3 + z^2 - xzy^2$. Имаме:
$u_x = 3x^2 - zy^2$ (сметаме: $y =$ конст. и $z =$ конст.)
$u_y = -2xzy$ (сметаме: $x =$ конст. и $z =$ конст.)
$u_z = 2z - xy^2$ (сметаме: $x =$ конст. и $y =$ конст.).

Да видиме какво **геометриско толкување** има парцијалниот извод z_x во точката (x_0, y_0). При дефиницијата на $f_x(x_0, y_0)$ ставивме $y = y_0$ ($=$ конст.). Тоа значи дека површината $z = f(x, y)$ ја пресечуваме со рамнината $y = y_0$. Ако во рамнината $y = y_0$ избереме координатни оски, паралелни со Ox и Oz, ќе добиеме рамнинска крива $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$, $y = y_0$. Изводот $\varphi'(x)$, како што знаеме, е еднаков со тангенсот на аголот α, зафатен меѓу тангентата на таа крива во точката $(x_0, \varphi(x_0))$ и позитивниот дел на апсцисната (избрана) оска.

Од сето тоа следува дека *парцијалниот извод* $z_x(x_0, y_0)$ *на функцијата* $z = f(x, y)$ *по* x *во точката* (x_0, y_0) *е еднаков со тангенсот на аголот* α, *зафатен меѓу апсцисната оска и тангентата на кривата што е пресек на површината* $z = f(x, y)$ *и рамнината* $y = y_0$ (црт. 2).



Црт. 2

Слично, ако постои $z_y(x_0, y_0)$, тогаш, геометриски,

$$z_y(x_0, y_0) = tg\,\beta,$$

каде што β е аголот меѓу ординатната оска и тангентата на кривата $\psi(y) = f(x_0, y)$, $x = x_0$, во точката за $y = y_0$ (црт. 2).

Така, *равенките на тангентата на кривата* $z = f(x, y)$, $y = y_0$, во точката (x_0, y_0, z_0) се:

$$z - z_0 = z_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0), \quad y = y_0, \tag{5}$$

а на кривата $z = f(x, y)$, $x = x_0$, се:

$$z - z_0 = z_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \quad x = x_0. \tag{6}$$

Вежби

Во задачите 1–8, да се најдат парцијалните изводи z_x, z_y од дадената функција во назначената точка.

1. $z = x^4 + y^4 - 4x$, $(1, 1)$. **2.** $z = \sin xy - \cos(x/y)$, $(0, \pi/2)$.

3. $z = \sqrt{22 - x^2 - y^2}$, $(2, 3)$. **4.** $z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$, $(0, 0)$.

5. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$, $(1, 2)$. **6.** $z = (1 + xy)^y$.

7. $z = \operatorname{arctg}(y/x)$. **8.*** $z = (1 + \log_y x)^3$.

Во задачите 9–12 да се провери дали дадената парцијална диференцијална равенка [1)] е задоволена од дадената функција.

9. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$, $z = \ln(e^x + e^y)$.

10. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = z$, $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ при $x > 0$.

11. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$, $z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$.

12. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, а) $z = \arcsin \frac{y}{2x}$; б) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

13. Да се пресмета детерминантата $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ ако:

а) $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; б) $x = \rho e^{-\varphi}$, $y = \rho e^{\varphi}$.

Во задачите 14 и 15, да се покаже дека дадената функција има парцијални изводи во точката $(0, 0)$.

14. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ за $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$.

15. $f(x, y) = 1$ за $xy \neq 0$ и $f(x, y) = 0$ за $xy = 0$.

16. Низ точката $M(1, 2, 6)$ од површината $z = 2x^2 + y^2$ се поставени рамнини, паралелни со координатните рамнини Oyz и Oxz. Да се најдат тангенсите на аглите α и β, што ги образуваат со координатните оски тангентите на така добиените линии – пресеци, во заедничката точка M.

1.8. Парцијални изводи од втор и повисок ред

Парцијалните изводи на функцијата $f(x, y)$по x односно по y во дадена точка (x_0, y_0) претставуваат реални броеви, но ако f_x, f_y, постојат во секоја точка од некое множество $D \subseteq \mathbf{R}^2$, тогаш

[1)] **Парцијална диференцијална равенка** е равенка во која непознатата е функција од две (или повеќе) променливи и во која битно се содржи некој од парцијалните изводи на непознатата функција. (в. VI.1.4.)

тие може да се разгледуваат како функции од две променливи дефинирани на множеството D.

ПРИМЕР 1. За $z = x^3 + xy^2$, изводите $z_x = 3x^2 + y^2$, $z_y = 2xy$ се функции од два аргумента, дефинирани на множеството $D = \mathbf{R}^2$.

Може да се случи секоја од функциите z_x, z_y да е дефинирана во некоја околина на точката (x_0, y_0) и секоја од нив да има парцијални изводи по x и по y (како што е случај со функцијата z од примерот 1 во која било точка (x_0, y_0)). Тие се викаат **парцијални изводи од втор ред и се означуваат:**

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Изводите z_{xy}, z_{yx} се викаат **мешани парцијални изводи.** [1)]

ПРИМЕР 2. За функцијата од примерот 1 имаме:

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + y^2) = 6x; \qquad z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^2) = 2y;$$

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y; \qquad z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x.$$

Парцијални изводи од повисок ред се дефинираат на ист начин како парцијалните изводи од втор ред. Имено, парцијалниот извод од n–ти ред се добива како резултат на n–кратно диференцирање по x или y. На пример, ако n–тиот парцијален извод е добиен како резултат на p–кратно диференцирање по x, q–кратно диференцирање по y и r–кратно диференцирање по x $(p + q + r = n)$, пишуваме

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial x^r} \quad \text{или} \quad f_{x^p y^q x^r}(x, y)$$

ПРИМЕР 3. Да го најдеме парцијалниот извод $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y\,\partial x}$ од функцијата $z = x - y^2 + x^3y^4$. Имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 3x^2y^4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^4; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy^4) = 24xy^3;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(24xy^3) = 24y^3.$$

Во примерот 2 забележуваме дека $z_{xy} = z_{yx}$, т.е. мешаните парцијални изводи од втор ред се еднакви. Тој резултат не е случаен, а тоа може да се види од следнава:

---

1) Симболот z_{xy}, т.е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ значи: прво се бара извод на функцијата z по x, а потоа се бара извод на функцијата z_x по y.

Теорема 1 (**за мешаните изводи**).

Нека функцијата $f(x,\, y)$ е непрекината во некоја околина на точката $(x_0,\, y_0)$ и нека во таа околина постојат изводите f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}. Ако мешаните изводи f_{xy} и f_{yx} се непрекинати во точката $(x_0,\, y_0)$, тогаш тие се еднакви во таа точка, т.е.

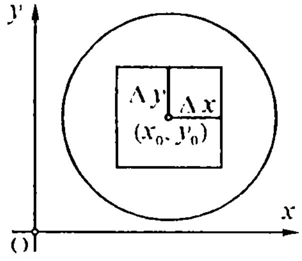
$$f_{xy}(x_0,\, y_0) = f_{yx}(x_0,\, y_0)\,.$$

Доказ. Да ги избереме Δx и Δy, така што правоаголникот

$$x_0 \le x \le x_0 + \Delta x,$$

$$y_0 \le y \le y_0 + \Delta y$$

да се содржи во околината на (x_0, y_0) за која се исполнети претпоставките на теоремата (црт. 1). (Избраните Δx и Δy се позитивни броеви кои ќе бидат фиксни до пред крајот на разгледувањето.)



Црт. 1

Да го формираме сега изразот:

$$A = f(x_0{+}\Delta x, y_0{+}\Delta y){-}f(x_0{+}\Delta x, y_0){-}f(x_0, y_0{+}\Delta y){+}f(x_0,\, y_0)\,. \quad (1)$$

Ако ставиме

$$\varphi(x) = f(x,\, y_0 + \Delta y) - f(x,\, y_0)\,,$$

ќе добиеме дека $A = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$. За $\varphi(x)$ се исполнети сите претпоставки од теоремата на Ланграж (Т. 1 од II.**3.3**) во однос на сегментот $[x_0,\, x_0{+}\Delta x]$, па според таа теорема добиваме дека $A = \Delta x\, \varphi'(x_1)$, за некој $x_1 \in (x_0,\, x_0{+}\Delta x)$, т.е. $x_1 = x_0 + \vartheta\, \Delta x$, $0 < \vartheta < 1$. Бидејќи $\varphi'(x) = f_x(x,\, y_0)$, имаме

$$A = \Delta x[f_x(x_1,\, y_0 + \Delta y) - f_x(x_1,\, y_0)]\,.$$

Од друга страна, и за функцијата $g(y) = f_x(x_1,\, y)$ се исполнети условите од теоремата на Лагранж за сегментот $[y_0,\, y_0 + \Delta y]$, па добиваме дека

$$\begin{aligned} A &= \Delta x[g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)] = \Delta x\, \Delta y\, g'(y_1) = \\ &= \Delta x\, \Delta y\, f_{xy}(x_1,\, y_1)\,, \end{aligned} \quad (2)$$

каде што $y_1 \in (y_0,\, y_0 + \Delta y)$, т.е. $y_1 = y_0 + \theta' \Delta y$, $0 < \theta' < 1$.

Ако ставиме пак $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x,\, y) - f(x_0,\, y)$, работејќи како и погоре, ќе добиеме дека

$$\begin{aligned} A &= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \Delta y\, \psi'(y_2) = \\ &= \Delta y\, [f_y(x_0 + \Delta x,\, y_2) - f_y(x_0,\, y_2)] = \Delta y\, \Delta x\, f_{yx}(x_2,\, y_2)\,, \end{aligned} \quad (3)$$

каде што $x_2 = x_0 + \vartheta_1 \Delta x$, $y = y_0 + \vartheta_1' \Delta y$, $0 < \vartheta_1 < 1$, $0 < \vartheta_1' < 1$.

Од (2) и (3) добиваме:

$$f_{xy}(x_0 + \vartheta\,\Delta x,\, y_0 + \vartheta'\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \vartheta_1\,\Delta x,\, y_0 + \vartheta_1'\,\Delta y)\,. \quad (4)$$

Ако $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, поради непрекинатоста на f_{xy} и f_{yx} во точката (x_0, y_0), добиваме $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ со што теоремата е докажана. ◇

Од Т. 1 се добива една важна последица. Имено, имајќи предвид дека изводите на елементарна функција се елементарни функции, а секоја елементарна функција е непрекината во секоја точка од својата дефинициона област (в. Т. 5 од **1.6**), заклучуваме дека:

Теорема 2 .

Кај елементарните функции не е битен редоследот по кој се бараат мешаните изводи и од втор и од повисок ред. ◇

ПРИМЕР 4. $z = x^3y^2 + x^2 - y$; z_{xyyx}, $z_{xxyy} =?$
$z_x = 3x^2y^2 + 2x$, $z_{xy} = 6x^2y$, $z_{xyy} = 6x^2$, $z_{xyyx} = 12x$;
$z_{xx} = 6xy^2 + 2$, $z_{xxy} = 12xy$, $z_{xxyy} = 12x$.

Парцијалните изводи од повисок ред на функциите од n променливи ($n \geq 3$) се добиваат на ист начин како парцијалните изводи на функциите од две променливи и важат аналогни својства на Т. 1 и Т. 2.

ПРИМЕР 5. $u = e^{xz} - \sin xy$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} =?$
$\frac{\partial u}{\partial x} = z\,e^{xz} - y\cos xy$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{xz} + y^2 \sin xy$;
$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z} = 2z\,e^{xz} + xz^2 e^{xz}$.

Вежби

Во задачите 1–6 да се провери дали зададената функција ја задоволува дадената парцијална диференцијална равенка. [2]

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$, $z = \frac{xy}{x-y}$ $(x \neq y)$.
2. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z$, $z = \sqrt{x^4 + y^4}$.
3. $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = z$, $z = \ln(e^x + e^y)$.
4. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{r^3}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \frac{1}{r}$.
5. $y\,z_{xx} + x\,z_{xy} = 1$, $z = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.
6. $x^2 z_{xx} + 2xy\,z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$, $z = x\,e^{y/x} + y\,\mathrm{arctg}(y/x)$.

[2] Види фуснота [1] во 1.7.

7. Да се најде z_{xxy} и z_{xxyy} ако:

а) $z = e^{x-3y} + \sin(x+3y)$; б) $z = e^x \cos y + e^y \cos x$.

8. За функцијата $z = x \sin y - y \cos x$ пресметај ги z_{xxy}, z_{xyx}, z_{yxx} и увери се дека тие се еднакви.

Да се провери дали $f_{xy} = f_{yx}$ за следниве функции (9–10):

9. $f(x\, y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$ во точката (1, 2).

10. $f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ за $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$, во $(0, 0)$.

11. Дадена е функцијата $u = x e^z + z e^{xy}$. Без да се бараат соодветните изводи, да се покаже дека

а) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x}$; б) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y\, \partial z} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y\, \partial z}$.

12. Да се докаже дека не постои функција $z(x, y)$ чии парцијални изводи би биле $z_x = 2y$, $z_y = 3x$.

13. Да се провери дали постои функција $z(x, y)$ таква што:

а) $z_x = y \sin x$, $z_y = x \sin y$; б) $z_x = y^2$, $z_y = 2xy$.

Во потврден случај да се најде (барем) една таква функција.

V.2. ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИ ФУНКЦИИ

Својството за диференцијабилност на една функција од една променлива значи исто што и постоење на нејзиниот извод. Кај функциите од две и повеќе променливи ситуацијата е поинаква: егзистенцијата на парцијалните изводи е потребен, но не и доволен услов за диференцијабилност на таква функција. Анализата на поимот диференцијабилност како и на поимот диференцијал е предмет на овој параграф. Заради едноставност (како што рековме порано, пред **1.1**) ќе работиме, главно, со функции од две променливи, но изнесеното може на природен начин да се формулира и да се докаже за функции од повеќе од две променливи.

2.1. Поим за диференцијабилна функција

За случајот на функција од една променлива, $y = f(x)$, определена на некој интервал (a, b), порано (во **II.1.4**) го разгледувавме прашањето за претставување на нејзиното нараснување $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ во дадена точка $x_0 \in (a, b)$, во обликот

$$\Delta y = A\cdot \Delta x + \alpha\cdot \Delta x\,, \qquad (1)$$

каде што A е константа и $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$ кога $\Delta x \to 0$. Притоа видовме дека за такво претставување е потребно и доволно да постои извод на f во x_0, при што равенството (1) се остварува за $A = f'(x_0)$.

10*

Природно е да си поставиме аналогно прашање за функција од две променливи.

За функцијата $z = f(x, y)$, определена во некоја отворена област D, ќе велиме дека е **диференцијабилна во точката** (x_0, y_0) од D, ако нараснувањето $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ во (x_0, y_0) има облик

$$\Delta z = A\cdot \Delta x + B\cdot \Delta y + \alpha\cdot \Delta x + \beta\cdot \Delta y, \tag{2}$$

каде што A и B се константи, а $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ се функции што се стремат кон нула кога $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

ПРИМЕР 1. Функцијата $f(x, y) = x^3 + y^2 - 4$ е диференцијабилна во која било точка (x_0, y_0) од рамнината. Навистина,

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\\ &= (x_0 + \Delta x)^3 + (y_0 + \Delta y)^2 - 4 - (x_0^3 + y_0^2 - 4)\\ &= 3x_0^2\cdot \Delta x + 2y_0\cdot \Delta y + (3x_0\cdot \Delta x + \Delta x^2)\cdot \Delta x + \Delta y\cdot \Delta y,\\ &= A\cdot \Delta x + B\cdot \Delta y + \alpha\cdot \Delta x + \beta\cdot \Delta y,\end{aligned}$$

каде што $A = 3x_0^2$ и $B = 2y_0$ се константи, а $\alpha = 3x_0\,\Delta x + \Delta x^2 \to 0$ и $\beta = \Delta y \to 0$ кога $\Delta \to 0$ и $\Delta y \to 0$. [1]

Како и во II.1.4 за случајот на функции од една променлива, лесно се покажува дека:

Ако функцијата $f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0), т.е. ако $\Delta f(x_0, y_0)$ има облик (2), тогаш постојат парцијалните изводи во точката (x_0, y_0) по обете променливи x и y, при што

$$f_x(x_0, y_0) = A, \qquad f_y(x_0, y_0) = B. \tag{3}$$

Навистина, ставајќи во (2) $\Delta y = 0$ и $\Delta x \neq 0$, добиваме

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\cdot \Delta x + \alpha\cdot \Delta x,$$

од каде што следува дека постои

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A$$

и аналогно за второто равенство во (3).

Според тоа, релацијата (2) е можна с а м о за $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$, поради што дефиницијата за диференцијабилност на функција од две променливи можеме да ја искажеме на следниот начин.

---

[1] Овде (и натаму) "кога $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$" значи: "кога $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$".

Функцијата $z = f(x, y)$ *е диференцијабилна во точката* (x_0, y_0) *од областа* D, *ако се исполнети следниве два услова:*
(i) *постојат парцијалните изводи* $f_x(x_0, y_0)$ *и* $f_y(x_0, y_0)$,
(ii) *нараснувањето* Δz *може да се претстави во обликот*

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0)\cdot \Delta y + \alpha\cdot \Delta x + \beta\cdot \Delta y\,, \tag{4}$$

каде што $\lim \alpha = 0$ *и* $\lim \beta = 0$ *кога* Δx, $\Delta y \to 0$ *или, со покус запис:*

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} + \alpha\cdot \Delta x + \beta\cdot \Delta y\,. \tag{4'}$$

Ако функцијата $f(x, y)$ е диференцијабилна во секоја точка од некоја област, тогаш за неа се вели дека е **диференцијабилна во таа област.**

За функциите од една променлива видовме дека "диференцијабилноста повлекува непрекинатост". Истото важи и за функциите од две променливи. Имено, од условот (ii) за диференцијабилност следува дека

$$\lim \Delta z = 0, \quad \text{па} \quad \lim f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

кога $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, што значи дека е точна следнава

Теорема 1 (потребен услов за диференцијабилност).

Ако функцијата $f(x, y)$ *е диференцијабилна во точката* (x_0, y_0), *тогаш таа е и непрекината во* (x_0, y_0). $\diamondsuit$

Обратното тврдење од Т.1 не важи, т.е. ако $f(x, y)$ е непрекината во (x_0, y_0), таа не мора да е диференцијабилна во таа точка, дури не мора да постојат парцијалните изводи во (x_0, y_0). На пример, функцијата $z = |x| + |y|$ е непрекината во точката $(0, 0)$, а z_x и z_y во таа точка не постојат.

Кај функциите од една променлива постоењето на изводот во дадена точка значи исто што и диференцијабилност на функцијата во таа точка. Но, тоа не важи и за функциите од две променливи. Имено, една функција $f(x, y)$ може да има парцијални изводи f_x, f_y во дадена точка (x_0, y_0), но да не е диференцијабилна (дури ни непрекината!) во таа точка, како што покажува следниот пример.

ПРИМЕР 2. Функцијата f, определена со: $f(x, y) = 1$ при $xy \neq 0$, $f(x, y) = 0$ при $xy = 0$, има парцијални изводи во точката $(0, 0)$: $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ (вежба 15 во 1.7). Но, таа има прекин во $(0, 0)$ (в. вежба 10 во 1.5). Поради тоа, а според Т. 1., индиректно заклучуваме дека f не е диференцијабилна во точката $(0, 0)$.

Од овој пример е јасно дека условот (i) од дефиницијата за диференцијабилна функција не го повлекува условот (ii). Може да се покаже уште повеќе: една функција $f(x, y)$ може да биде непрекината во некоја околина на точката (x_0, y_0) и да има парцијални изводи во таа околина (дури и ограничени!), а сепак да не биде диференцијабилна во дадената точка (в. вежба 3).

Меѓутоа, ситуацијата ќе се измени, доколку парцијалните изводи се непрекинати во разгледуваната точка. Имено:

Теорема 2 (доволни услови за диференцијабилност).

Ако функцијата $f(x, y)$ има парцијални изводи f_x и f_y во некоја околина на точката (x_0, y_0) и тие се непрекинати во самата точка (x_0, y_0), тогаш $f(x, y)$ е диференцијабилна во таа точка.

Доказ.* Да ги избереме нараснувањата Δx, Δy $(\neq 0)$ така што точката $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ да се наоѓа во споменатата околина на точката (x_0, y_0) и нараснувањето $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - -f(x_0, y_0)$ да го претставиме во вид:

$$\Delta z = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Изразот во првите средни загради, сметајќи ја $y_0 + \Delta y$ за константа, претставува нараснување на функцијата $g(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$ (од еден реален аргумент x) во точката $x = x_0$, а изразот во вторите средни загради претставува нараснување на функцијата $h(y) = f(x_0, y)$ (од еден аргумент y) во точката $y = y_0$.

За секоја од функциите $g(x)$ и $h(y)$ исполнети се условите од теоремата на Лангража (в. II.**3.3**) па според тоа имаме:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(x_1)\Delta x =$$
$$= f_x(x_1, y_0 + \Delta y)\Delta x\,,$$
$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(y_1)\Delta y =$$
$$= f_y(x_0, y_1)\Delta y\,,$$

каде што $x_1 = x_0 + \theta\Delta x$, $0 < \theta < 1$ и $y_1 = y_0 + \theta_1\Delta y$, $0 < \theta_1 < 1$. Ставајќи

$$f_x(x_1, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \alpha, \quad f_y(x_0, y_1) = f_y(x_0, y_0) + \beta, \qquad (5)$$

при што α и β зависат од Δx и Δy, добиваме

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \alpha\Delta y\,,$$

т.е. равенството (4). Бидејќи f_x и f_y се непрекинати функции во точката (x_0, y_0), имаме:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x(x_1, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0), \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y(x_0, y_1) = f_y(x_0, y_0)\,,$$

па поради овие равенства, од (5) добиваме $\lim\alpha = \lim\beta = 0$ кога $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Следствено, $f(x, y)$ е диференцијабилна во $f(x_0, y_0)$. $\diamondsuit$

Забелешка Условот за непрекинатост на f_x и f_y во теоремата 2 е доволен, но не е неопходен, т.е. функцијата $f(x, y)$ може да биде диференцијабилна иако нејзините парцијални изводи f_x, f_y не се непрекинати функции (види вежба 4).

(Послободно кажано, диференцијабилноста на една функција "е појака" и од непрекинатоста и од постоењето ограничени парцијални изводи но "е послаба" од постоењето непрекинати парцијални изводи .)

На крајот ќе направиме уште една, важна забелешка за диференцијабилноста на елементарните функции. Парцијалните изводи f_x, f_y на елементарната функција f пак се елементарни функции, а според Т. 5 од **1.6**, тие се непрекинати во секоја внатрешна точка од својот домен. Според тоа, имајќи ја предвид Т. 2, заклучуваме:

Теорема 3.

Секоја елементарна функција е диференцијабилна во внатрешните точки од доменот во кои нејзините (први) парцијални изводи постојат. $\diamond$

Вежби

1. Да се покаже, по дефиниција, дека е диференцијабилна во произволна точка (x_0, y_0) следнава функција а) $z = x^2 - 3xy$; б) $z = x^3 + xy^2$.

2. Со помош на Т. 2, да се покже дека функцијата $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ е диференцијабилна во секоја точка $(x, y) \neq (0, 0)$ Дали е диференцијабилна и во $(0, 0)$? Да се образложи.

3*. Да се покаже дека функцијата f, определена со: $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, во околина на точката $(0, 0)$ е непрекината и има ограничени парцијални изводи f_x и f_y, но не е диференцијабилна во точката $(0, 0)$.

4*. Да се покаже дека функцијата f: $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ за $x^2+y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, во околина на точката $(0, 0)$, има парцијални изводи f_x и f_y, прекинати во $(0, 0)$ и неограничени во која било нејзина околина; сепак, функцијата е диференцијабилна во точката $(0, 0)$.

5. Да се покаже дека равенството

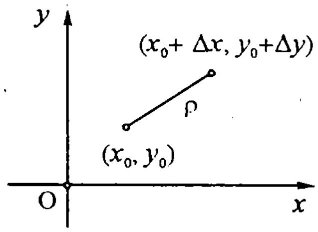
$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y. \tag{4'}$$

каде што $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ кога Δx, $\Delta y \to 0$ е еквивалентно со равенството

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \omega\rho, \tag{6}$$

каде што $\omega = \omega(\Delta x, \Delta y) \to 0$ кога $\rho \to 0$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ е растојанието од дадената точка (x_0, y_0) до изместената точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Помош. За $(4') \Rightarrow (6)$ да се стави: $\omega = (\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y)/\rho$; за $(6) \Rightarrow (4')$: $\alpha = \omega\,\Delta x/\rho$, $\beta = \omega\Delta y/\rho$.



Црт. 1

6*. Нека $f(x, y)$ е диференцијабилна во некоја околина U на точката (a, b) и нека $f_x(x, y) = 0$ за сите точки од таа околина. Да се покаже дека: ако $(x_1, y), (x_2, y) \in U$, тогаш $f(x_1, y) = f(x_2, y)$, т.е.постои функција $\varphi(y)$ таква што $f(x, y) = \varphi(y)$ за сите $(x, y) \in U$.

2.2. Тангентна рамнина и нормала на површина

Со помош на поимот тангента на крива во дадена точка, може да се воведе поимот тангентна рамнина на површина, на следниов начин.

Нека (Σ) е дадена површина и нека M_0 е точка од (Σ). Ако (Σ) ја пресечеме со рамнина што минува низ M_0, тогаш се добива некоја линија (L) што минува низ M_0. Ако секоја линија (L) добиена на тој начин има тангента во M_0 и ако сите такви тангенти лежат во иста рамнина, тогаш таа се вика **тангентна рамнина на површината** (Σ) во точката M_0.

Нека површината (Σ) е зададена со равенката

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

при што функцијата $f(x, y)$ има парцијални изводи z_x и z_y во точката (x_0, y_0) (црт. 1). При претпоставката дека постои тангентна рамнина на (Σ) во $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ќе покажеме дека нејзината равенка е:

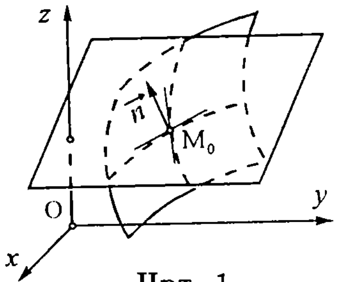
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (y - y) = z - z_0\,, \tag{2}$$

каде што $z_0 = f(x_0, y_0), \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = f_x(x_0, y_0), \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = f_y(x_0, y_0)$.

Како и секоја рамнина, тангентната рамнина на (Σ) во точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е наполно определена со две прави што лежат во неа. Ако површината $z = f(x, y)$ ја пресечеме со рамнините $y = y_0$ и $x = x_0$ (црт.1), ќе добиеме две криви, чии тангенти во точката (x_0, y_0, z_0) се определени со равенките (в. (5) и (6) во разделот **1.7**):

$$z - z_0 = z_x(x_0, y_0)(x - y_0), \quad y = y_0\,,,$$
$$z - z_0 = z_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad x = x_0\,.$$

Овие две прави лежат во тангентната рамнина и се сечат во точката M_0, т.е. тангентната рамнина минува низ точката (x_0, y_0, z_0) и е паралелна со векторите $\big(1, 0, (z_x)_0\big)$ и $\big(0, 1, (z_y)_0\big)$. Според тоа, нејзината равенка е



Црт. 1

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & (z_x)_0 \\ 0 & 1 & (z_y)_0 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (3)$$

т.е. равенката (2).

Правата што минува низ точката M_0 и е нормална на тангентната рамнина се вика **нормала на површината** (Σ). Од (2) е јасно дека нормалата е паралелна со векторот $\big((z_x)_0, (z_y)_0, -1\big)$, па нејзините канонични равенки се

$$\frac{x - x_0}{(z_x)_0} = \frac{y - y_0}{(z_y)_0} = \frac{z - z_0}{-1}\,. \qquad (4)$$

ПРИМЕР 1. Да ги најдеме: равенката на тангентната рамнина и равенките на нормалата на површината $z = 3x^2 + y^2$ во точката $(1, 2, z_0)$.

Имаме: $z_0 = 7$, $(z_x)_0 = 6$, $(z_y)_0 = 4$, па

$$6(x-1) + 4(y-2) = z - 7, \quad \text{т.е.} \quad 6x + 4y - z = 7$$

е равенката на тангентната рамнина, а

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-7}{-1}$$

се каноничните равенки на нормалата.

Се разбира, добиените резултати во примерот 1 имаат смисла доколку тангентната рамнина на дадената површина во назначената точка постои. Постоењето на тангентната рамнина го обезбедува наредната теорема чиј доказ овде ќе го изоставиме. [1]

Теорема 1 (за егзистенција на тангентна рамнина).

Ако функцијата $z = f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0), тогаш површината $z = f(x, y)$ има тангентна рамнина во точката (x_0, y_0, z_0), каде што $z_0 = f(x_0, y_0)$. ◇

Забелешка 1. Од равенката (2) гледаме дека тангентната рамнина, во нашиот случај, не е нормална на рамнината Oxy. [2] Според тоа:

---

[1] Да се види, на пример, Толстов II, Гл. XVII § 4, стр. 22.

[2] Тангентната рамнина во (x_0, y_0) ќе биде нормална на рамнината Oxy, ако некој од парцијалните изводи f_x, f_y во (x_0, y_0) е бесконечен.

1^0 *Диференцијабилноста на функцијата $z = (x, y)$ во точката (x_0, y_0) повлекува егзистенција на тангентна рамнина (на површината $z = f(x, y)$ во точката (x_0, y_0, z_0)) којашто не е нормална на координатната рамнина Oxy.*

Точно е и обратното тврдење:

2^0 ***Ако во точката (x_0, y_0, z_0) на површината $z = (x, y)$ (при што (x, y) е непрекината) постои тангентна рамнина што не е нормална на рамнината Oxy, тогаш $f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0).***

Вежби

Во задачите 1–5 да се најде: а) тангентната рамнина, б) нормалата на површината во дадената точка.

1. $z = x^2 - y^2$ во $(2, 1, 3)$. **2.** $z = 3xy$ во $(1, 2, 6)$.

3. $z = \ln(x + y)$ во $(2, -1, z_0)$. **4.** $z = e^x \cos y$ во $(0, \pi, z_0)$.

5. $z = xy + a^2$ во $(2a, 2a, z_0)$.

6. Во која точка тангентната рамнина на елиптичниот параболоид $z = 2x^2 + 4y^2$ е паралелна со рамнината $8x - 32y - 2z = 5$? Да се најдат равенките на нормалата и тангентната рамнина во таа точка.

7. На површината $z = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ да се постави тангентна рамнина што ќе отсечува еднакви отсечки на координатните оски.

8. Да се покаже дека тангентната рамнина на површината $z = xy$ во точката (a, b, ab) ја сече површината во две прави и да се најдат нивните равенки.

9. Да се докаже дека тангентните рамнини на површината $z = \frac{a^3}{xy}$ $(a > 0)$ образуваат со координатните рамнини тетраедар со константен волумен.

2.3. Парцијални изводи од сложена функција

Овде ќе го разгледаме прашањето за извод од сложена функција. [1)]

Нека функцијата $z = f(u, v)$ е диференцијабилна во точката (u_0, v_0) и нека $u = u(t)$, $v = v(t)$ имаат изводи по t како функции од една реална променлива t. Според (4′) од разделот **2.1** имаме:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\,\Delta u + \beta\,\Delta v, \tag{1}$$

---

1) Притоа, овде, и натаму ќе претпоставуваме дека условите за постоење *сложена функција* се исполнети, т.е. ќе го имаме предвид изнесеното во разделот **1.6** од (4) до (6), кај Т. 4, без да го истакнуваме.

при што $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ кога $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$. Ако во $z = f(u, v)$ ставиме $u = u(t)$ и $v = v(t)$, тогаш добиваме функција од еден реален аргумент t: $z = f\big(u(t), v(t)\big)$. Делејќи ги двете страни од (1) со Δt, добиваме:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t} + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \beta\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Ако пуштиме Δt да се стреми кон нула, тогаш ќе се стремат кон нула и Δu, Δv (бидејќи и $u(t)$ и $v(t)$ се диференцијабилни функции од t), па според тоа $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кога $\Delta t \to 0$. Со тоа ја докажавме следнава:

Теорема 1 (**за извод од сложена функција**).

Ако $z = f(u, v)$ е диференцијабилна функција во точката (u_0, v_0), а $u(t)$ и $v(t)$ се две диференцијабилни функции во точката t_0, каде што $u_0 = u(t_0)$ и $v_0 = v(t_0)$, тогаш сложената функција $z(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$ е диференцијабилна во точката $t = t_0$ и притоа

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad \diamond \tag{2}$$

Да разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 1. Функцијата $z = (\sin x)^{\cos x}$ може да се претстави во обликот $z = u^v$, каде што $u = \sin x$, $v = \cos x$. Според (2) имаме

$$z_x = vu^{v-1}\cos x + u^v \ln u\,(-\sin x) = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right).$$

Како последица од Т. 1, се добива следнава

Теорема 2 (**за извод од сложена функција**).

Нека $z = f(u, v)$ е диференцијабилна функција во точката (x_0, y_0) и нека функциите $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ имаат парцијални изводи u_x, u_y, v_x, v_y во точката (x_0, y_0), при што $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Тогаш сложената функција $v(x, y) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ има изводи z_x, z_y во точката (x_0, y_0), определени со формулите:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3}$$

Доказ. Ако во (2) ставиме $x = t$, а y се смета за константа, ќе го добиеме првото равенство, а сметајќи ја x за константа, се добива второто од равенствата (3). $\diamond$

(Формулите (3) и (2) се аналогни на верижното правило (1′) за извод на сложена функција од една променлива, разгледано во II.**2**.**2**. Во таа смисла, и тие се наречени **верижни правила** за парцијални изводи од сложена функција.)

ПРИМЕР 2. Да ги најдеме изводите на функцијата $z = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, каде што $u = x + y$, $v = 1 - xy$. Според (3) имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2}\cdot 1 - \frac{u}{u^2+v^2}(-y) = \frac{1-xy+xy+y^2}{u^2+v^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2}\cdot 1 - \frac{u}{u^2+v^2}(-x) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Вежби

Да се најдат изводи те на дадената сложена функција (1–5).

1. $z = \ln\frac{u}{v}$, каде што $u = e^{xy}$, $v = 1 + xy$.
2. $z = u^2 - v^2$, $u = x\cos y$, $v = x\sin y$.
3. $z = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$, $x = \operatorname{tg}^2 t$, $y = \operatorname{ctg}^2 t$.
4. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x = u\sin v$, $y = u\cos v$.
5. $z = \arcsin\frac{x}{y}$ $z_x,\ z_y = ?$ Најди и $\frac{dz}{dx}$, ако $y = \sqrt{1+x^2}$.
6. Да се најдат z_x и z_y, ако $z = \ln\frac{e^{xy}}{1+xy}$. Добиените резултати да се споредат со тие во вежбата 1.
7. Провери дали функцијата z ја задоволува дадената равенка:

   а) $\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = f(x+2y)$; б) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $z = yf\left(\frac{x}{y}\right)$;

   в) $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x^2}$, $z = xf(y^2 - x^2)$,

   ако се знае дека f е диференцијабилна функција по назначениот аргумент.
8. Дадена е диференцијабилна функција $z = f(x, y)$, каде што $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Да се покаже дека
$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$
9. Направи соодветни претпоставки за диференцијабилноста на функцијата f и најди ги парцијалните изводи z_x и z_y, ако:

   а) $z = f(u, v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

   б) $z = f(u, v)$, $u = 3x^2y - y^3$, $v = x^3 - 3x^2y$.
10. Дадена е функцијата $z = (x^2 - y^2)f(t)$, каде што $f(t)$ е двапати диференцијабилна функција и $t = xy$. Да се најде z_{xy}.
11. Нека $z = f(u, v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$, при што f има непрекинати први и втори парцијални изводи по u и v. Да се најде: а) z_{xx}; *б) z_{xy}.

2.4. Тотален диференцијал

Ако функцијата $z = f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0) тогаш природно е изразот

$$f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y, \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0\cdot\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0\cdot\Delta y,$$

да се нарече **главна вредност на нараснувањето** Δz од функцијата $f(x, y)$. По аналогија со случајот при функциите од една променлива, за тој израз ќе велиме дека е **диференцијал на функцијата**, и ќе го означуваме со dz. Значи:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{1}$$

Притоа, за Δx и Δy сметаме дека се **константи**, така што диференцијалот dz ќе биде функција од x и y, т.е. од точката за која се однесува тој диференцијал.

Ако земеме $z = x$, ќе добиеме $dz = \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$, и слично, за $z = y$ се добива $dy = \Delta y$. Поради тоа, нараснувањата Δx и Δy ги викаме **диференцијали на x и y**, а диференцијалот dz ќе има облик

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{1'}$$

Да забележиме дека dz се вика **тотален** (или **потполн**) **диференцијал** на функцијата $z = f(x, y)$, за разлика од **парцијалните диференцијали** што се определуваат со

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial z}{\partial x}dx\,, \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial z}{\partial y}dy\,.$$

Според тоа,

$$dz = d_x x + d_y z\,. \tag{1''}$$

ПРИМЕР 1. Да го најдеме тоталниот диференцијал на функцијата $z = x^y$ во произволна точка (x, y), $x > 0$, $y > 0$. Имаме:

$$dz = y\,x^{y-1}\cdot dx + x^y \ln x\cdot dy\,.$$

Точно е следново тврдење:

Теорема 1. *Ако диференцијалниот израз*

$$P\,dx + Q\,dy \tag{2}$$

(каде што $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ се дадени функции) е тотален диференцијал на некоја функција $z(x, y)$, тогаш

$$P = \frac{\partial z}{\partial x}\,, \qquad Q = \frac{\partial z}{\partial y}\,. \tag{3}$$

Доказ. Навистина, од (1′) и (2) имаме

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,,$$

а бидејќи dx и dy се нараснувања на x и y (т.е. тие се произволни броеви), земајќи прво $dx \neq 0$ и $dy = 0$, а потоа $dx = 0$ и $dy \neq 0$, од последното равенство ги добиваме равенствата (3). ◇

Поради условот (ii) за диференцијабилност (во **2.1**), можеме да сметаме дека нараснувањето Δz на една диференцијабилна функција $f(x, y)$ е приближно еднакво со диференцијалот dz, $\Delta z \approx dz$, т.е.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (4)$$

Оваа формула можеме да ја искористиме за некои **приближни пресметувања**. Ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 2. Со помош на (4) да ги пресметаме приближните вредности на изразите:

а) $(0,96)^2 \cdot (1,02)^3$; б) $(1,02)^{3,05}$.

а) Да земеме $f(x, y) = x^2y^3$; тогаш $f_x = 2xy^3$, $f_y = 3x^2y^2$, па за $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\Delta x = -0,04$, $\Delta y = 0,02$, имаме $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (0,96)^2(1,02)^3$; така, по формулата (4), добиваме:

$$(0,98)^2(1,02)^3 \approx 1 + 2(-0,04) + 3,0 \cdot 0,02 = 0,98.$$

б) Ставајќи $f(x, y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = 0,05$, добиваме дека $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = (1,02)^{3,05}$. Бидејќи $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$, по формулата (4) добиваме: $(1,02)^{3,05} \approx 1,06$.

Да го определиме сега *тоталниот диференцијал на сложена функција*, т.е. $z = f(u, v)$, каде што $u = u(x, y)$, $v = (x, y)$. Според дефиницијата на тоталниот диференцијал, имаме:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Оттука следува дека тоталниот диференцијал како и диференцијалот кај функциите од една променлива има инваријантна форма, што е изразено со следнава:

Теорема 2 (**за инваријантност на формата**).

Тоталниот диференцијал dz на функцијата $z = f(u, v)$ е определен со:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

независно од тоа дали u, v се независнопроменливи или функции. Во првиот случај $du = \Delta u$, $dv = \Delta y$ се константи, а во вториот du и dv се тоталните диференцијали на функциите $u(x, y)$, $v(x, y)$ и притоа $du \neq \Delta u$, $dv \neq \Delta v$. ◇

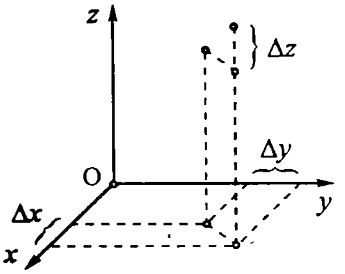
На крајот ќе дадеме **геометриско толкување на тоталниот диференцијал**. Имајќи ја предвид Т. 1 од **2.2**, добиваме дека, ако функцијата $f(x, y)$ е диференцијабилна во точката (x_0, y_0), тогаш површината $z = f(x, y)$ има определена тангентна рамнина во точката (x_0, y_0).

Во тој случај, на диференцијалот dz можеме да му дадеме геометриско толкување аналогно како при функциите од една променлива. Имено, нараснувањето на функцијата $z = f(x, y)$,

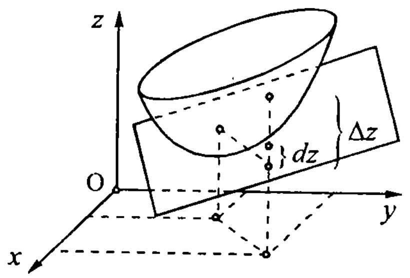
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

геометриски претставува нараснување на апликатата z (црт. 1). Ако во равенката на тангентната рамнина ставиме $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, добиваме:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y,$$



Црт. 1



Црт. 2

Според тоа:

Теорема 3.

Тоталниот диференцијал dz е еднаков со нараснувањето на апликатата од тангентната рамнина повлечена на површината $z = f(x, y)$ во точката (x_0, y_0) (црт. 2). ◇

Вежби

Во задачите 1-3 да се најде тоталниот диференцијал на дадената функција.

1. $\arcsin(y/x)$. **2.** $\operatorname{arctg}(y/x) + \operatorname{arctg}(x/y)$.

3. $xy/(x^2 + y^2)$ за: $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,03$.

4. Нека p, v, θ означуваат соодветно: притисок, волумен, температура во некој гас и нека R е гасовата константа. Под извесни услови важи равенството

$$pv = R\theta$$

(наречено **Бојл–Мариотов закон**). Секоја од променливите p, v, θ може да се смета за функција од другите две.

а) Да се најде тоталниот диференцијал на секоја од тие три функции.

б) Да се докаже дека: $\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p} = -1$.

Во задачите 5–6 да се пресмета приближно дадениот израз.

5. $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$. **6.** $\sin 29^0 \cdot \mathrm{tg} 46^0$.

7. Во потсечен конус радиусите на основите се $R = 30$ cm, $r = 20$ cm, а висината $h = 40$ cm. Како ќе се промени волуменот на конусот ако R се зголеми за 1 mm, r за 2 mm, а висината се намали за 4 mm?

8. Даден е правоаголник со страни $x = 6$ m и $y = 8$ m. За колку ќе се промени дијагоналата z на правоаголникот, ако страната x се зголеми за 5 cm, а страната y се намали за 10 cm? Да се пресмета

а) приближно, б) точно.

9*. Дадена е функцијата $z = f(x, y)$, диференцијабилна во околина на точката (x, y). Знаејќи ги апсолутните грешки Δx и Δy на аргументите x и y: $|\Delta x| \le \Delta_x$ и $|\Delta y| \le \Delta_y$, да се покаже дека за апсолутната грешка Δ_z на функцијата z може да се земе приближно:

$$\Delta_z \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \Delta_y .$$

Помош. $|\Delta z| \approx | f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y |$.

10. Хипотенузата на правоаголен триаголник е $x = 120$ m $\pm$ 2 m, а остриот агол $y = 30^0 \pm 1^0$. Со каква точност може да се најде катетата z што лежи наспроти аголот y?

11. Масата на едно тело во воздух е m= 0,52 kg$\pm$0,02 kg, а масата на телото во вода е $m_1 = 0,31$kg $\pm$ 0,01 kg. Со каква точност може да се одреди густината на телото?

2.5. Диференцијал од n–ти ред. Тејлорова формула

Кај функциите од две променливи, како и кај функциите од една променлива, под определени услови, важи т.н. Тејлорова формула. Пред да преминеме на тоа прашање ќе го воведеме поимот диференцијал од повисок ред.

Како и при функциите од една променлива, *диференцијалите од повисок ред* се определуваат со:

$$d^2 = d(dz), \qquad d^{n+1}z = d(d^n z).$$

Притоа, за $d^n z$ велиме дека е **диференцијал од n–ти ред** и читаме "де ен од зет".

Ќе го определиме сега експлицитниот облик на $d^n z$, а притоа ќе претпоставиме дека при мешаните изводи не е важен редоследот по кој се бараат изводите (тоа ќе биде исполнето ако, на пример, сите изводи до n–ти ред се непрекинати).

Од дефиницијата на dz и $d^2 z = d(dz)$, добиваме:

$$\begin{aligned}
d^2 z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dy\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .
\end{aligned}$$

Потоа, со индукција се добива

$$\begin{aligned}
d^n z &= \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}\,dy + \cdots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.
\end{aligned} \tag{1}$$

Во врска со погоре изнесеното потребни се неколку објаснувања. Прво, $dx^k = \Delta x^k$ е обичен k–ти степен на Δx. Потоа изразот

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

е скратено напишана развиената десна страна за $d^n z$. Притоа, "степенувањето" се врши слично како и при биномната формула, со тоа што во dx и dy обете букви се сметаат за нераздвојни, т.е. $(dx)^k = dx^k$ (а не $(dx)^k = d^k x^k$). По развивањето на изразот

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n \tag{2}$$

секаде по ∂^n треба да се допише z; на пример, за $d^3 z$ имаме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y^3}\,dy^3.$$

Изразот (2) се вика **диференцијален опрератор**. Еве уште еден, конкретен пример за неговото применување.

ПРИМЕР 1. $z = x^3y^2,\quad d^2z = ?$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 (x^3y^2) = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2 .$$

При изведувањето на формулата (1) претпоставуваме дека x и y се независнопроменливи. Ако е, меѓутоа, $z = f(u,\, v)$, каде што u и v се функции од x и y, тогаш таа формула не мора да биде точна кога x и y би се замениле со u и v, т.е:

При диференцијалите од повисок ред се нарушува инваријантноста на формата.

Така, на пример.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dx\,dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u + \frac{\partial z}{\partial v}d^2v\,. \qquad (2')$$

Ако пак, врската меѓу x, y, u, v е линеарна:

$$u = a + bx + cy, \qquad v = a_1 + b_1x + c_1y\,,$$

тогаш $d^nu = d^nv = 0$ за $n \geq 2$, па во тој случај се точни исти формули како и (1) само сега по u и v.

Оваа забелешка ќе ја искористиме при изведувањето на Тејлоровата формула при функциите од две променливи. За таа цел ќе ја напишеме прво Тејлоровата формула за функции од една променлива во облик (в.II.**6.3**):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\xi)}{(n+1)!}\,. \qquad (3)$$

Да претпоставиме дека функцијата $f(x,\,y)$ во некоја околина на точката $(a,\,b)$, ги има сите изводи до $n+1$–от и сите тие се непрекинати во таа околина. Ја формираме функцијата

$$F(t) = f(a + t\,\Delta x,\, b + t\,\Delta y)\,.$$

Од направените претпоставки за функцијата $f(x,\,y)$ следува дека за функцијата $F(t)$ може да се напише Тејлоровата формула во следниов облик

$$F(1) = F(0) + dF(0) + \frac{d^2F(0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nF(0)}{n!} + \frac{d^{n+1}F(\theta)}{(n+1)!}\,, \qquad (4)$$

каде што $0 < \theta < 1$. Функцијата $F(t) = f\big(u(t),\,v(f)\big)$ е сложена каде што

$$u(t) = a + t\,\Delta x\,, \qquad v(t) = b + t\Delta y\,.$$

Од линеарноста на u и v следува дека $d^kF(0) = d^kf(a,\,b)$, бидејќи $u(0) = a, \quad v(0) = b\,.$

Според тоа, равенството (4) можеме да го напишеме во обликот

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x,\, b+\Delta y) &= f(a,\,b) + df(a,\,b) + \frac{d^2f(a,\,b)}{2!} + \cdots + \\ &+ \frac{d^nf(a,\,b)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(a+\theta\,\Delta x,\, b+\theta\,\Delta y)}{(n+1)!}\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

каде што $0 < \theta < 1$.

Добиените резултати ќе ги формулираме во следнава теорема:

Теорема 1 (Тејлорова формула).

Ако функцијата $f(x, y)$ ги има сите изводи од k-ти ред ($k = 1, 2, \ldots, n+1$) во некоја околина на точката (a, b) и сите тие се непрекинати во таа околина, тогаш постои број θ меѓу 0 и 1 таков што е точно равенството (5). ◊

Тоа равенство е познато под името **формула на Тејлор** за функцијата $f(x, y)$. Во случајот $a = 0 = b$, се добива таканаречената **Маклоренова формула.**

Ставајќи $\Delta x = x - a$ и $\Delta y = y - b$, формулата (5) може да се напише и во обликот

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b)\right] + \cdots + \\ + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b) + R_n(x, y), \tag{5'}$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f\big(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\big)$$

каде што $0 < \theta < 1$ (да се види и (1)).

ПРИМЕР 2. Тејлоровата формула за $n = 1$ во развиен облик е:

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b) = \\ = \Delta x\, f_x(a+\theta\,\Delta x, b+\theta\,\Delta y) + \Delta y\, f_y(a+\theta\,\Delta x, b+\theta\,\Delta y), \tag{6}$$

а Маклореновата формула за $n = 2$ е:

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0,0) + f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + \\ + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\theta\,\Delta x, \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f_{xy}(\theta\Delta x, \theta\Delta y)\Delta x\Delta y + f_{yy}(\theta\Delta x, \theta\Delta y)\Delta y^2\right]. \tag{7}$$

Равенството (6) може да се смета за формула аналогна на теоремата за средна вредност при функциите од една променлива (II.**3.3**). Од неа следува:

Теорема 2.

Ако функцијата $f(x, y)$ е диференцијабилна во некоја околина на точката (a, b) и ако $f_x = f_y = 0$ за сите точки од таа околина, тогаш $f(x, y)$ е константна функција во дадената околина.

Навистина, според (6) имаме: $f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a, b)$.◊

Вежби

1. Да се најде $d^2 z$, ако $z = x^2/y$. 2. Да се најде $d^2 z$, ако $z = x \ln \frac{y}{x}$.
3. Нека $z = \sin(ax+by)$. Да се докаже дека $d^2 z = -\sin(ax+by)\cdot(a\,dx+b\,dy)^2$.
4. Да се пресмета $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z$, ако $z = \ln(ax - by)$.

5. $z = e^{ax+by}$, $d^n z = ?$

6. Функцијата $f(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2 - 4$ да се развие по степените на $x - 2$ и $y - 1$ со формулата на Тејлор до членовите со втори изводи заклучно.

7. Да се разложи функцијата $f(x, y) = \ln(x + y)$ по Тејлоровата формула до членовите со втори изводи заклучно, во околина на произволна точка (x, y).

8. Да се најде прирастот на функцијата $f(x, y) = x^y$ при премин од вредностите $x = 1$ и $y = 1$, на $x_1 = 1+h$ и $y_1 = 1+k$, со помош на Тејлоровата формула, за $n = 3$.

9. Користејќи го добиениот резултат од вежбата 8, приближно да се пресмета $(1,1)^{1,02}$.

Да се разложи $f(x + h, y + k)$ по целите позитивни степени на h и k, земајќи $n = 2$, ако $f(x, y)$ е како во вежбите 10 и 11.

10. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$. **11.** $f(x, y) = e^x \sin y$.

12. Користејќи го резултатот од вежбата 11, приближно да се пресмета, $e^{0,1} \sin 0,49\pi$.

13. Да се разложи по Маклореновата формула, до членовите од втор ред, функцијата $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$.

2.6. Диференцијабилност на функции од повеќе променливи

Во почетокот на овој параграф споменавме дека резултатите изнесени во него можат да се формулираат и да се докажат и за функциите со повеќе од два аргумента, со просто прераскажување на изнесеното. За илустрација, тоа ќе го направиме за некои поими и тврдења.

Нека е зададена функција од n реални аргументи,

$$y = f(x_1, \ldots, x_n).$$

За оваа функција велиме дека е **диференцијабилна во точката** $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ако во таа точка постојат конечни парцијални изводи $f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $i = 1, \ldots, n$ и нараснувањето на функцијата во точката $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ може да се напише во следниов вид

$$\begin{aligned} \Delta y = f_{x_1}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_n + \\ + \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n , \end{aligned} \tag{1}$$

каде што $\alpha_1 = \alpha_1(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \ldots, \alpha_n = \alpha_n(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ се стремат кон нула кога $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Теоремите 1 и 2 од **2.1** (потребен услов и доволни услови за диференцијабилност), преформулирани на соодветен начин, важат и за функциите од повеќе од два аргумента.

Нека $y = f(u_1, \dots, u_m)$ е функција од m променливи $u_1, \dots, u_m$ коишто од своја страна, се функции од n аргументи $x_1, \dots, x_n$, т.е., $u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m = u_m(x_1, \dots, x_n)$. Точна е следнава

Теорема (за извод од сложена функција).

Ако $y = f(u_1, \dots, u_m)$ е диференцијабилна функција во точката $(u_1^0, \dots, u_m^0)$ и функциите $u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)$ имаат парцијални изводи $(u_i)'_{x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, во точката $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, при што $u_i^0 = u_i(x_1^0, \dots, x_n^0)$, тогаш сложената функција

$$y(x_1, \dots, x_n) = f\big(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)\big)$$

има изводи y_{x_i} во точката $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, определени со формулите

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_1}, \dots, \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} &= \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{2}$$

(Да се види и Т. 2 од **2.3**) $\diamondsuit$.

Ако функцијата $y = f(x_1, \dots, x_n)$ е диференцијабилна во точката $(x_1, \dots, x_n)$, тогаш **главниот дел на нараснувањето:**

$$dy = f_{x_1}(x_1, \dots, x_n)\Delta x_1 + \dots + f_{x_n}(x_1, \dots, x_n)\Delta x_n\,, \tag{3}$$

се вика **тотален диференцијал од прв ред.**

Теоремата 2 од **2.4** (за инваријантност на формата на тоталниот диференцијал), со нужна преформулација, се пренесува и на функциите од повеќе од два аргумента. Исто така, јасно е како ќе се дефинира тотален диференцијал од повисок ред. *Ако $u_1, \dots, u_m$ се линеарни функции од $(x_1, \dots, x_n)$, т.е. ако*

$$u_1 = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n\ \dots,\ u_m = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n\,,$$

тогаш *инваријантноста и на тоталниот диференцијал од повисок ред се запазува.*

На ист начин како во **2.5** се изведува *Тејлорова формула* и за функција $f(x_1, \dots, x_n)$ со повеќе од два реални аргумента. Притоа се добива:

$$\begin{aligned} & f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \\ &= df(a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{2!}d^2 f(a_1, \dots, a_n) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(a_1, \dots, a_n) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(a_1 + \theta\,\Delta x_1, \dots, a_n + \theta\,\Delta x_n) \qquad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

Остаточниот член може да се напише и во обликот

$$\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi_1, \dots, \xi_n)\,,$$

каде што ξ_i се наоѓа меѓу a_i и $a_i + \Delta x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Вежби

1. Да се покаже дека функцијата $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ ја задоволува **Лапласовата** [1] **равенка**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 .$$
2. Нека функцијата $f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$, каде што u, v, w се диференцијабилни функции од x и y. Да се најде: $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Функцијата $f(x_1, \ldots, x_n)$ се вика **хомогена функција** од степен k, ако за кој било избран реален множител t важи равенството:
$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n) . \qquad (A)$$
(Бројот k се вика **степен на хомогеноста.**)
Да се покаже дека хомогената диференцијабилна функција $f(x, y, z)$ од степен k ја задоволува равенката
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial y}{\partial z} = k\,u \qquad (Б)$$
(*Ојлерова теорема* за хомогени функции.)
4. а) Да се покаже дека функцијата
$$u = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) , \qquad (В)$$
каде што f е диференцијабилна функција (од своите променливи) ја задоволува равенката (Б) во претходната задача.

   б) Да се провери тврдењето под а) за $u = x^5 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2}$ (за $k = 5$).
5. Да се покаже дека секоја хомогена функција $f(x, y, z)$ со степен на хомогеноста k може да се претстави во обликот (В) од претходната задача.

Во задачите 6-8 да се најде тоталниот диференцијал од назначениот ред.

6. $w = x\,y\,z,\quad d^3w = ?$ **7.** $w = \ln(x^x\, y^y\, z^z) \quad d^4w = ?$
8. $w = e^{ax+by+cz}, \quad d^n w = ?$

2.7. Имплицитни функции

Во I.**2.7** го воведовме поимот имплицитна функција, а во II.**2.6** наведовме доволни услови за егзистенција на непрекината и диференцијабилна имплицитна функција од една реална променлива. Овде ќе формулираме поопшт резултат а ќе го докажеме специјалниот случај споменат во II.**2.6**. Да ја повториме прво дефиницијата за имплицитна функција, во поопшта форма.

[1] Пјер Симон Лаплас (*Pierre Simon Marquis de Laplace*, 1749-1827), француски математичар.

Нека $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ е функција од $n+1$ променлива $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ $(n \geq 1)$ со домен D_F и нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е функција од n–променливи со домен D_f. За $f(x_1, \ldots, x_n)$ велиме дека **е определена имплицитно со равенката:**

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\,, \tag{1}$$

ако за секоја точка $(x_1, \ldots, x_n) \in D_f$ имаме $(x_1, \ldots, x_n, y) \in D_F$ и притоа е точно равенството:

$$F\big(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0\,. \tag{2}$$

Да претпоставиме дека U е подмножество од D_F, а V подмножество од $\mathbf{R}^{\,n}$ определено со:

(A) $(x_1, \ldots, x_n) \in V \Leftrightarrow (\exists y \in \mathbf{R})\,(x_1, \ldots, x_n, y) \in U$. [1)]

Ќе велиме дека равенката (1) **определува единствена функција во** U ако постои точно една функција $f(x_1, \ldots, x_n)$ со домен $D_f = V$, определена **имплицитно со (1)**. Со други зборови:

1^0. *Равеката* (1) *определува единствена функција во* $U \subseteq D_F$ *ако и само ако е исполнет следниов услов:*

(Б) *За секоја точка* $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in V$ *постои точно еден број* $y^* \in \mathbf{R}$ *таков што:*

$$F(x_1^*, \ldots, x_n^*, y^*) = 0 \quad \text{и} \quad (x_1^*, \ldots, x_n^*, y^*) \in U\,. \quad \diamondsuit$$

Да разгледаме два примера.

ПРИМЕР 1. За $n = 1$, ќе пишуваме x наместо x_1. Равенката $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определува единствена функција $\sqrt{1-x^2}$ во $U = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1,\, y \geq 0\}$, а $-\sqrt{1-x^2}$ во $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\, y \leq 0\}$.

ПРИМЕР 2. За $n = 2$, ќе пишуваме x, y, z наместо x_1, x_2, y соодветно. Како и во Пр. 1, равенката $x^2+y^2+z^2-4 = 0$ определува единствена функција $\sqrt{4-x^2-y^2}$ во $U = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2 \leq 4,\, z \geq 0\}$.

Погоре спомenатиот резултат од **II.2.6** е специјален случај од следнава

Теорема 2 (**за имплицитни функции**).

Нека $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ *има домен* D_F, *а* E *е отворено подмножество од* $\mathbf{R}^{n+1}$, *такво што* $E \subseteq D_F$ *и* $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ *точка од* E *таква што* $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0) = 0$, *т.е.* $F(M_0) = 0$. *Потоа, нека* F *има непрекинати први парцијални изводи во* E *при што* $F_y(M_0) \neq 0$.

Тогаш постои околина U *на точката* M_0, *таква што* (1) *определува единствена функција* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *во* U *и притоа*

1) Велиме дека V е **проекција** од U во $\mathbf{R}^n$.

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$ има непрекинати (први) изводи во проекцијата V од U во $\mathbf{R}^n$ определени со:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_x(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n))}{F_y(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n))}, \tag{3}$$

за $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказ. Ќе дадеме доказ само за $n = 1$, при што (како во Пр. 1) ќе пишуваме x наместо x_1; во таа смисла, апсцисата на M_0 ја означуваме со x_0.

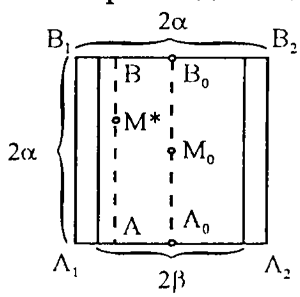
Ако се има предвид дека функцијата $f(x)$ определена имплицитно со $F(x, y) = 0$ е определена и со $-F(x, y) = 0$, можеме да претпоставиме дека $F_y(x_0, y_0) > 0$, а од тоа (според Т. 6 г) од 1.6) следува дека постои $\alpha > 0$ таков што $F_y(x, y) > 0$, за секоја точка (x, y), каде што:

$$x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, \qquad y_0 - \alpha \leq y \leq y_0 + \alpha. \tag{4}$$

Да ја разгледаме функцијата $F(x_0, y)$ од една променлива y во сегментот $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$. Оваа функција има позитивен извод $F_y(x_0, y_0)$ за $y = y_0$, па значи расте во точката (x_0, y_0) и притоа $F(x_0, y_0) = 0$. Од тоа следува дека:

$$F(x_0, y_0 - \alpha) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \alpha) > 0.$$

Ќе ги разгледаме двете функции од x:



Црт. 1

$$F(x, y_0 - \alpha), \quad F(x, y_0 + \alpha).$$

Тие се непрекинати на сегментот $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ и притоа:

$$F(x_0, y_0 - \alpha) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \alpha) > 0.$$

Од тоа следува дека постои $\beta \leq \alpha$, таков што:

$$F(x, y_0 + \alpha) > 0, \quad F(x, y_0 - \alpha) < 0$$

за секој $x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$.

Може да се искористи црт. 1 за карактеризирање на функциите од една променлива разгледани погоре. Имено, функцијата $F(x_0, y)$ се добива од $F(x, y) = F(M)$ кога M се менува на отсечката A_0B_0. Во иста смисла, $F(x, y_0 - \alpha) = F(M)$, каде што M се менува на отсечката $A_1 A_2$, а $F(x, y_0 + \alpha) = F(M)$ за M на $B_1 B_2$.

Да фиксираме една вредност $x^* \in [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ и да ја разгледаме следнава функција од y : $F(x^*, y)$ на сегментот $[y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$. Функцијата $F(x^*, y)$ е стриктна монотоно растечка и притоа: $F(x^*, y + \alpha) > 0$, $F(x^*, y - \alpha) < 0$. Од тоа следува дека постои точно еден број y^* од интервалот $(y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$ таков што $F(x^*, y^*) = 0$. Притоа, за $x^* = x_0$ имаме $y^* = y_0$.

Со сето тоа докажавме дека: постои единствена функција $y(x) = f(x)$ со следниве својства:

а) $D_f = [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$; б) $f(x_0) = y_0$;

в) $F(x, f(x)) = 0$ за секој $x \in D_f$;

г) $x \in D_f \Rightarrow y_0 - \alpha < f(x) < y_0 + \alpha$.

Ни преостанува да покажеме дека $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот $(x_0 - \beta, x_0 + \beta)$. За таа цел, да претпоставиме дека $x, x + \Delta x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta), \Delta x \neq 0$. Тогаш имаме: $y = f(x), y + \Delta y = f(x + \Delta x) \in (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$ и притоа $F(x, y) = 0$, $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$.

Од последните две равенки следува:

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) =$$
$$= [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)] + [F(x + \Delta x, y) - F(x, y)]\,. \tag{5}$$

Применувајќи ја теоремата на Лагранж (т.е. Т. 1 од **II.3.3**) добиваме дека постојат ξ, η такви што: ξ е меѓу x и $x + \Delta x$, а η меѓу y и $y + \Delta x$, и притоа се точни равенствата:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) = \Delta y \cdot F_y(x + \Delta x, \eta) \tag{6}$$
$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \Delta x \cdot F_x(\xi, y)\,.$$

Од (5) и (6) добиваме:

$$\Delta y\, F_y(x + \Delta x, \eta) + \Delta x \cdot F_x(\xi, y) = 0\,,$$

т.е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\xi, y)}{F_y(x + \Delta x, \eta)}\,. \tag{7}$$

Од (7), ако се има предвид непрекинатоста на F_x и F_y, добиваме:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad \text{т.е.} \quad y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}, \tag{3'}$$

за секој $x \in (x_0 - \beta, y_0 - \beta)$. Со тоа е комплетиран доказот на специјалниот случај $n = 1$. $\diamondsuit$

Пред да разгледаме неколку примери, ќе направиме две забелешки.

З а б е л е ш к а 1. Доказот на Т. 1 и во општ случај е сличен, па дури може да се рече дека тој станува и формално ист со веќе дадениот, ако се стави $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

На читателот му препорачуваме да даде детален доказ за $n = 2$. Притоа ако x_1, x_2, y се заменат со x, y, z соодветно, тогаш на (3) му соодветствуваат следниве две равенства:

$$z_x = -\frac{F_x\bigl(x,\,y,\,z(x,\,y)\bigr)}{F_z\bigl(x,\,y,\,z(x,\,y)\bigr)}, \qquad z_y = -\frac{F_y\bigl(x,\,y,\,z(x,\,y)\bigr)}{F_z\bigl(x,\,y,\,z(x,\,y)\bigr)}, \tag{3''}$$

при што, се разбира, претпоставуваме и дека $F_z(x,\,y,\,z) \neq 0$.

Равенката $F(x,\,y,\,z) = 0$, може да определува имплицитно и функција $x(y,\,z)$, ако $F_x(x_0,\,y_0,\,z_0) \neq 0$, [2] односно функција $y(x,\,z)$, ако $F_y(x_0,\,y_0,\,z_0) \neq 0$.

Забелешка 2. Често пати равенката (1) може да се реши по y: $y = f(x_1,\,x_2,\ldots,x_n)$, каде што $f(x_1,\ldots,x_n)$ е функција за која се знае дека е диференцијабилна во соодветна област. Во тој случај нема потреба да се користи резултатот од Т. 2. Изводот на y по променливата x_i може да се бара по правилото за извод од сложена функција. Имено, од (2) се добива:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,$$

т.е. точноста на (3). Во конкретни случаи, нема ни потреба да се користи формулата (3) односно (3′).

За илустрација ќе се задржиме на Пр.1.

ПРИМЕР 1′. Прво, функцијата $F = x^2 + y^2 - 1$ има непрекинати изводи $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, во целата рамнина $\mathbb{R}^2$. Притоа, $F_y = 2y > 0$ за $y > 0$. Според Т. 2, постојат $\alpha,\,\beta : 0 < \beta < \alpha$, такви што постои единствена функција $y(x)$ со својството $x^2 + [y(x)]^2 - 1 = 0$, и $1-\alpha < y(x) < 1+\alpha$, за секој $x \in (-\beta,\,\beta)$. Притоа: $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$. Но, до истите резултати можеме да дојдеме и со решавање на равенката $x^2 + y^2 - 1 = 0$, бидејќи таа равенка, за $y > 0$, е еквивалентна со: $y = \sqrt{1-x^2}$, па $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Значи, немавме потреба од примена на Т. 2.

Сепак, во случај кога не постои можност за директно решавање по y на равенката $F(x,\,y) = 0$, примената на Т. 2 е неопходна, како што се гледа од следниов:

ПРИМЕР 3. Ако $F(x,\,y) = y \sin x - x \sin y$, имаме:

$$F(\pi,\,\pi) = 0\,, \quad F_y(x,\,y) = \sin x - x\cos y\,, \quad F_y(\pi,\,\pi) = \pi\,.$$

Функцијата $F(x,\,y)$ има непрекинати изводи во целата рамнина, па според тоа постојат $\alpha,\,\beta$: $0 < \beta \le \alpha$, такви што со равенката $y \sin x = x \sin y$ е определена функција $y(x)$ дефинирана во $D = [\pi-\beta,\,\pi+\beta]$ и притоа $y(x) \in (\pi-\alpha,\,\pi+\alpha)$ за секој $x \in D$. Што се однесува до изводот $y'(x)$, би можеле да не ја користиме формулата [3] (3′), бидејќи од: $y(x)\cdot\sin x - x\cdot\sin y(x) = 0$ следува $y'\cdot\sin x + y\cos x - \sin y - x\cos y\cdot y' = 0$, т.е.

---

[2] Во иста смисла, ако $F_x(x_0,\,y_0) \neq 0$, равенката $F(x,\,y) = 0$ определува и функција $x = x(y)$.

[3] Да се види и упатството дадено во одговорот на вежбата 10.

$$y' = \frac{\sin y - y\cos x}{\sin x - x\cos y}.$$

Броевите α и β притоа не се еднозначно определени, па може со натамошна дискусија да се определат што поголеми броеви со тоа својство, но овде нема да се задржиме на таа задача.

ПРИМЕР 4. Во IV.5.1 видовме дека множеството точки $M(x, y, z)$ чиишто координати ја задоволуваат равенката:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

е сфера со центар во координатниот почеток, и радиус 1. Освен тоа, со оваа равенка се определени две функции

$$z_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad z_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

диференцијабилни во внатрешноста на кругот $x^2 + y^2 < 1$. Јасно е дека истото равенство определува и функции

$$x_1 = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, \qquad x_2 = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

$$y_1 = \sqrt{1 - x^2 - z^2}, \qquad y_2 = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}.$$

Да се задржиме сега на општиот случај на равенка од облик:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Спомнавме во IV.5.1 дека (обично) со равенката (8) е определена површина. Овде ќе направиме неколку претпоставки за функцијата F, што ќе нè доведат до поимот *мазна површина.*

Прво, да го означиме со Σ множеството од сите тридимензионални точки $M(x, y, z)$ чиишто координати го задоволуваат равенството (8). Потоа, ќе претпоставуваме дека:

i) F има непрекинати (први) парцијални изводи во тридимензионална област (за која нема да употребиме специјална ознака) што ги содржи сите точки од Σ, и

ii) ако $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, тогаш барем еден од изводите $F_x(M_0)$, $Fy(M_0)$, $F_z(M_0)$ не е нула.

Ако се исполнети претпоставките i) и ii) ќе велиме дека Σ е **мазна површина**. Тој термин е сугериран од следнава

Теорема 3.

Ако Σ е мазна површина опредлена со (8), тогаш во секоја нејзина точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ постои тангентна рамнина, којашто е определена со равенката:

$$(F_x)_0(x - x_0) + (F_y)_0(y - y_0) + (F_z)_0(z - z_0) = 0. \tag{9}$$

Нормалата на Σ во M_0 е определена со следниве канонични равенки:

$$\frac{x - x_0}{(F_x)_0} = \frac{y - y_0}{(F_y)_0} = \frac{z - z_0}{(F_z)_0}. \tag{10}$$

Притоа

$$(F_x)_0 = F_x(M_0),\, (F_y)_0 = F_y(M_0),\, (F_z)_0 = F_z(M_0).$$

Доказ. Нека е, на пример, $(F_z)_0 = F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Од Т. 2 следува дека постои околина на дводимензионалната точка (x_0, y_0) во која со (8) е определена диференцијабилната функција $z(x, y)$, таква што $z_0 = z(x_0, y_0)$, а нејзините изводи $z_x(x_0, y_0) = (z_x)_0$, $z_y(x_0, y_0) = (z_y)_0$ се определени со:

$$(z_x)_0 = -\frac{(F_x)_0}{(F_z)_0}, \quad (z_y)_0 = -\frac{(F_y)_0}{(F_z)_0}. \tag{3'''}$$

Според Т. 1 од **2.2**, површината $z = z(x, y)$ има тангентна рамнина во точката M_0 определена со равенката:

$$z - z_0 = (z_x)_0(x - x_0) + (z_y)_0(y - y_0).$$

Од последната равенка според (3'''), се добива равенката (9). Бидејќи нормалата е нормална на тангентната рамнина и врви низ M_0, добиваме дека (10) се нејзини канонични равенки. ◇

Како примена на добиениот резултат, ќе ја добиеме равенката на тангентната рамнина на сфера.

ПРИМЕР 5. Сферата со центар во $S(a, b, c)$ и полупречник R има равенка:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + (z - a)^2 - R^2 = 0.$$

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е која било точка од сферата. Според Т. 3, *равенката на тангентната рамнина во дадена точка* $M(x_0, y_0, z_0)$ *има облик*:

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = 0.$$

Во специјален случај кога $a = b = c = 0$, поради $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$ добиваме:

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = R^2.$$

Забелешка 3. Во кн. IV (Гл. X: Метрички простори) ќе докажеме теорема од која специјален случај е Т. 2 и следниов резултат.

4°. *Нека функциите* $F(t, x, y)$, $G(t, x, y)$ *имаат непрекинати изводи во некоја тридимензионална област* D *и нека точката* $(t_0, x_0, y_0) \in D$ *е таква што*

$$F(t_0, x_0, y_0) = G(t_0, x_0, y_0) = 0,$$

а следнава детерминанта

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{$*$}$$

е различна од нула во точката (t_0, x_0, y_0). *Тогаш, постои* $\beta > 0$ *и еднозначно определени функции* $x(t)$, $y(t)$ *диференцијабилни на* $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, *такви што*

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

$$F\big(t, x(t), y(t)\big) = G\big(t, x(t), y(t)\big) = 0\,,$$

за секој $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, *а исто така детерминантата* (*) *е различна од нула за секоја точка* (t, x, y), *каде што* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, $x = x(t)$, $y = y(t)$. ◊

Да споменеме дека соодветен резултат важи и кога F и G се функции од $n + 2$ променливи $t_1, t_2, \ldots, t_n, x, y$. Општиот резултат пак се однесува за низа функции $F_1, F_2, \ldots, F_n$ од $n+m$ независни променливи $t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1, x_2, \ldots, x_m$.

При претпоставки слични на горните претпоставки за специјалниот случај $n = 1$, $m = 2$, се добива дека постојат функции $x_i(t_1, \ldots, t_n)$, (за $i = 1, \ldots, m$) со непрекинати парцијални изводи такви што $F_j(t_1, \ldots, x_1(t_1, \ldots), \ldots, x_m(t_1, \ldots)) = 0$, за секоја точка $t = (t_1, \ldots, t_n)$ од соодветно отворено n–димензионално множество.

Вежби

Во 1–6, со помош на Т. 2, да се провери дали $F(x, y) = 0$ определува имплицитно функција $y(x)$, таква што $y(x_0) = y_0$. Притоа е дадена функцијата $F(x, y)$. Во некои вежби е дадена и точката $M_0(x_0, y_0)$, а во некои треба да се определи една таква точка.

1. $x^2y + x - y + 1$; а) (0, 1); б) (−1, 2). **2.** $x^3 + 2y^3 - 3xy$, $M_0(1, 1)$.

3. $x^4 + y^4 + 3y^2$. **4.** $y^2 - x\sqrt{x}$; а) (0, 0); б) (0, 1). **5.** $\cos y - y \cos x$.

6. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

7. Дали во некоја од вежбите 1–6 е определена функција $x = x(y)$?

8. Во која од вежбите 1–6 може соодветниот заклучок да се донесе без примена на Т. 2?

9*. Да се покаже дека со равенката $\ln \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$ е определена точно една функција $y(x)$ и да се дадат поблиски информации за таа функција.

10. Во 1–6 и 9 да се определат $y'(x)$ и $y''(x)$ во: а) дадената (односно избраната) точка, б) која било точка (x, y).

Во задачите 11–14 да се најдат парцијалните изводи по x и y на функцијата $z = z(x, y)$, определена имплицидно со даденото равенство.

11. $z^2 - 2xy + x^2 = 0$. **12.** $x^2 = z(y + z)$.

13. $\sin xz = yz$. **14.** $x^y y^z z^x = 1$.

15. Во кои од задачите 11–14 е неопходно да се примени Т. 2?

Да се најде равенката на тангентната рамнина и равенките на нормалата на дадената површина од втор ред во назначената точка (16–19).

16. $3x^2 + y^2 + 2z^2 = 20, \quad (1, 3, 2),$ **17.** $x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad (x_0, y_0, z_0).$

18. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (x_0, y_0, z_0).$ **19.** $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 6x, \quad (x_0, y_0, z_0).$

20. **Да се покаже дека равенката на тангентната рамнина во точката (x_0, y_0, z_0) на елипсоидот**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{е} \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{c^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1 .$$

Потоа, да се пресмета плоштината P на $\triangle ABC$, каде што A, B, C се пресечните точки на тангентната рамнина со координатните оски.

21. **Да се најдат отсечоците на координатните оски што ги прави тангентната рамнина поставена во произволна точка (x_0, y_0, z_0) на површината**

$$x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2} \quad (a > 0)$$

и да се покаже дека нивниот збир е константен.

2.8. Смена на променливите

Во разни прашања од математичката анализа и нејзините примени, при изучување на некои формули што содржат некакви функции и нивни изводи (обични или парцијални), често се покажува позгодно да се премине кон други независно променливи, а понекогаш и кон други функции, сврзани со дадените, со определени врски.

Смената се врши во дадената формула – тоа е, обично некој диференцијален израз – со цел да се упрости изразот или да му се даде некоја друга, сакана форма.

Сите трансформации се вршат [1] врз основа на правилата за диференцирање на сложени и имплицитни функции.

Така, ако во даден диференцијален израз

$$A = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\right) \tag{1}$$

треба да се изврши смена на променливите x и y со нови променливи u и v со тоа што ќе се стави

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v). \tag{2}$$

каде што $f(u, v)$ и $g(u, v)$ се зададени функции, тогаш последователните изводи $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ се определуваат со помош на формулите:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{итн.} \tag{3}$$

ПРИМЕР 1. **Во изразот $A = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ да се воведат нови независно-променливи u и v ако:**

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v .$$

Според (3), добиваме:

---

[1] **Овде нема да навлегуваме во прецизирање на некои услови за извршување на смените, т.е.** ***ќе претпоставуваме дека се исполнети сите неопходни услови за да се вршат соодветните трансформации.***

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos v+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin v\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-u\sin v)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot u\cos v\,;$$

ако го решиме овој систем равенки по "непознатите" z_x и z_y, ќе добиеме:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos v\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\sin v}{u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin v\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\cos v}{u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

По заменувањето во A, откако ќе средиме, ќе добиеме:

$$A=u\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\,.$$

Ако во изразот (1) треба да се воведат нови независнопроменливи u и v, но сега сврзани со x и y со равенствата

$$u=\varphi(x,\,y)\,,\qquad v=\psi(x,\,y)\,,\tag{2'}$$

каде што φ и ψ се дадени функции, тогаш парцијалните изводи $z_x,\ z_y,\dots$ се определуваат со помош на формулите:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\,,\quad \text{итн.}\tag{4}$$

ПРИМЕР 2. Во равенката

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

да ставиме нови независнопроменливи

$$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,,\qquad v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,;\qquad z=z(u,\,v)\,.$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{\partial z}{\partial u}\,;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\frac{\partial z}{\partial v}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{1+x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,\frac{\partial z}{\partial u}\,.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{1+y^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\,\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

Откако ќе ги замениме овие резултати во дадената равенка ќе добиеме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0\,.$$

Во поопшт случај, ако е потребно да се изврши смена не само на независнопроменливите x и y, туку и на функцијата $z=z(x,\,y)$, со нови независнопроменливи u, v и нова функција $w=w(u,\,v)$ при зададени врски

$$x=f(u,\,v,\,w)\,,\qquad y=g(u,\,v,\,w)\,,\qquad z=h(u,\,v,\,w)\,,\tag{5}$$

тогаш за парцијалните изводи $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y},\dots$ ги добиваме равенствата:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\right)&=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)&=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\,,\quad \text{итн.}\end{aligned}\tag{6}$$

Да разгледаме неколку примери.

ПРИМЕР 3. Во равенката $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ да воведеме нови променливи u и v со: $u = x, \quad v = x^2 + y^2$.

Решение.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2y;$$
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y\frac{\partial z}{\partial u} + 2xy\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - 2xy\frac{\partial z}{\partial v} = y\cdot\frac{\partial z}{\partial u};$$

Следствено дадената равенка се трансформира во: $z_u = 0$.

Забелешка 1. Последната парцијална диференцијална равенка можеме да ја "решиме". Имено, според вежбата 6 во **2.1**, имаме: $z_u = 0 \Rightarrow z = z(u, v) = f(v)$, каде што f е произволна диференцијабилна функција од v; $z = f(v)$ ја задоволува равенката $z_u = 0$, т.е. $z = f(x^2 + y^2)$ е "решение" на дадената равенка $yz_x - xz_y = 0$.

Забелешка 2. Честопати е згодно замената да се изврши користејќи ја инваријантната форма на првиот диференцијал.

Така, за Пр. 3 имаме:
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx + 2y\frac{\partial z}{\partial y}dy;$$

од тоа следува дека:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{па} \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

ПРИМЕР 4. Во равенката $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ да се стават независнопроменливи u и v и нова функција $w = w(u, v)$ со смените:
$$u = x, \qquad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \qquad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

Овде ѐ згодно да се користи инваријантната форма на првиот тотален диференцијал. Имаме:
$$du = dx, \quad dv = -\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{x^2}, \quad dw = -\frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x^2},$$
$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} - dw = \frac{dx}{x^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right) = \frac{dx}{x^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial u}dx + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{x^2} - \frac{\partial y}{y^2}\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}dy.$$

Од ова следува:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Ако ги замениме изводите во равенката што е зададена во почетокот, ќе се добие $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$. (Во смисла на забелешката 1, од $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$ добиваме $w = f(v)$, т.е. $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)$, каде што $f(t)$ е произволна диференцијабилна функција.)

ПРИМЕР 5. Во дадената равенка да се стават нови независнопроменливи u и v и нова функција $w = w(u, v)$;
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x}.$$

Решение. Ќе постапиме како во примерот 4. Имаме:

$$du = dx + dy\,, \qquad dv = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\,, \qquad dw = -\frac{z}{x^2}dx + \frac{1}{x}dz\,;$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{z}{x}dx + x\,dw = \frac{z}{x}dx + x\left(\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv\right) = \\ &= \frac{z}{x}dx + x\left[\frac{\partial w}{\partial u}(dx+dy) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right)\right] = \\ &= \left(\frac{z}{x} + x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx + \left(x\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right)dy\,; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} + x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\,.$$

Да ги најдеме сега вторите парцијални изводи на z. Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x} + x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \\ &= \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2} + \frac{\partial w}{\partial u} + x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\ &\quad + \frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{y}{x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{z}{x} + x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right) - \frac{z}{x^2} + \frac{\partial w}{\partial u} + x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \\ &\quad + \frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \frac{y^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \\ &= 2\frac{\partial w}{\partial u} + x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{2y}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \frac{y^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) = \\ &= \frac{\partial w}{\partial u} + x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{\partial w}{\partial u} + x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \\ &= x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,. \end{aligned}$$

Заменувајќи ги добиените резултати во дадената равенка, добиваме:

$$\left(\frac{y^2}{x^3} + \frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0\,, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0\,.$$

(Имајќи ја предвид забелешката 1, дадената парцијална диференцијална равенка можеме да ја решиме. Имено:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial v} = \varphi(u) \Rightarrow w = \varphi(u)\cdot v + \psi(u)\,,$$

каде што φ и ψ се произволни диференцијабилни функции од u. Ставајќи $u = x+y$, $v = y/x$, $w = z/x$ во последното равенство, добиваме

$$\frac{z}{x} = \varphi(x+y)\cdot\frac{y}{x} + \psi(x+y)\,;$$

функцијата $z = y\,\varphi(x+y)+\psi(x+y)$ ја задоволува дадената равенка $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}=0$, т.е. е нејзино решение.)

ПРИМЕР 6. Да се тренасформира равенката

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

сметајќи ја x за функција, а y и z за независнопроменливи.

Решение. Нека е дадена функцијата z имплицитно со равенката

$$F(x,\,y,\,z) = 0.$$

Имаме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Од првата и третата равенка се добива: $\frac{\partial z}{\partial x} = 1/\frac{\partial x}{\partial z}$, а од првата, втората и четвртата $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial y}/\frac{\partial x}{\partial z}$. Заменувајќи ги последниве изрази во дадената равенка, добиваме: $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y}$.

Вежби

1. Во равенката $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ да се воведат нови независнопроменливи u и v со: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

2. Ако $x = u+v$, $y = uv$ и z е произволна функција од x и y, да се покаже дека

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = u\frac{\partial z}{\partial u} + v\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

Во дадената равенка (во 3–6) да се стават нови независнопроменливи u, v и нова функција $w = w(u,\,v)$.

3. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$; $u = x^2+y^2$, $v = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $w = \ln z - x - y$.

4. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$, $u = yz - x$, $v = xz - y$, $w = xy - z$.

5. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $u = x+y$, $v = x-y$, $w = xy - z$.

6. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$, $2u = x+y$, $2v = x-y$, $w = z\,e^y$.

7. Да се трансформира равенката

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,,$$

сметајќи ја y за функција, а x и z за независнопроменливи.

Да се трансформира во поларни координати ρ и φ, ставајќи $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, дадениот израз (8–11).

8. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$. 9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

10. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

11. $y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

V.3. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ

Поимите локален екстрем, најголема вредности и најмала вредност кај функциите од две и повеќе променливи се дефинираат аналогно како кај функциите од една променлива. Во овој параграф ќе разгледаме: потребни и доволни услови за екстрем, неколку примери за најголема односно најмала вредност и некои примени, а на крајот – некои резултати за т. н. условни екстреми.

3.1. Неопходни услови за екстрем

Нека функцијата $f(x, y)$ е дефинирана во областа D и нека (x_0, y_0) е внатрешна точка од таа област. Велиме дека $f(x, y)$ има **локален минимум во точката** (x_0, y_0), ако постои околина $G \subseteq D$ на таа точка, таква што за секоја точка $(x, y) \in G$ да важи

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y). \tag{1}$$

Самиот број $f(x_0, y_0)$ се вика **локален минимум** на $f(x, y)$.

Аналогно, $f(x_0, y_0)$ се вика **локален максимум** на $f(x, y)$, ако

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

за секоја точка (x, y) од некоја околина на (x_0, y_0).

Од дадените дефиниции следува дека $f(x_0, y_0)$ е локален минимум (односно максимум) акко $f(x_0, y_0)$ е најмала (односно најголема) вредност на $f(x, y)$ во некоја околина на точка (x_0, y_0). (види и Т. 6 од **1.6.**)

Локалните максимуми и минимуми на f со заедничко име се нарекуваат **локални екстреми** или само **екстреми** на f. Ако условот (1) се замени со:

$$f(x_0, y_0) < f(x, y) \tag{1'}$$

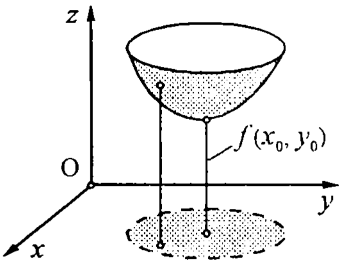
за секоја $(x, y) \in G$ различна од (x_0, y_0), тогаш зборуваме за **строг локален минимум**. Аналогно се дефинира **строг локален максимум**.

Како и во случајот на функции од една променлива, терминот "минимум" натаму ќе ни значи "строг локален минимум", ако не е експлицитно нагласено поинаку. Аналогно за термините "максимум" и "екстрем".

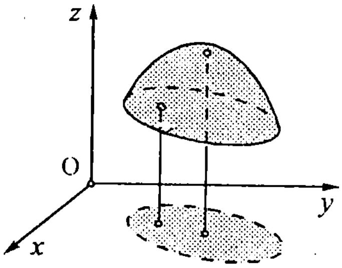
На црт. 1 е илустриран случај на минимум, а на црт. 2 – максимум.

Да забележиме дека една функција може да има екстреми: само еден, два или повеќе, или ниеден.

Во некои случаи може без големи тешкотии да се уочат екстремите на некоја функција. Таков е случајот во следниот пример.



Црт. 1



Црт. 2

ПРИМЕР 1. **За функцијата $z = x^2 + y^2$ имаме $z(0,0) = 0$ и $z(x,y) > 0$, за $(x,y) \neq (0,0)$; од тоа, според горната дефиниција, следува дека $z(0,0) = 0$ е минимум на функцијата.**

Ваквото непосредно наоѓање на екстремите е можно многу ретко. Затоа во наредниот раздел ќе видиме како може да се искористат изводите за наоѓање екстреми.

И за функциите од две променливи важи теорема, аналогна на *теоремата на Ферма*,[1] која содржи неопходен услов за егзистенција на екстрем.

Теорема 1 (потребен услов за екстрем).

Ако во некоја околина на точката (x_0, y_0) *постојат изводите* f_x *и* f_y *на функцијата* $f(x,y)$, *и ако* $f(x_0,y_0)$ *е екстрем, тогаш*

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0. \tag{2}$$

Доказ. Ако ставиме $y = y_0$ ќе добиеме диференцијабилна функција $g(x) = f(x, y_0)$ во некоја околина на точката $x = x_0$, при што $g(x_0) = f(x_0, y_0)$ ќе биде екстрем. Од тоа следува дека $g'(x_0) = 0$, т.е. $f_x(x_0, y_0) = 0$. Слично, ако се разгледа функцијата $h(y) = f(x_0, y)$ ќе се добие $h'(x_0) = 0$, т.е. $f_y(x_0, y_0) = 0$. ◇

Од дадената теорема следува дека, ако постојат f_x и f_y, внатрешните точки од дефиниционата област во кои функцијата f има екстрем треба да се бараат меѓу решенијата на системот равенки:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Секоја точка (x_0, y_0) од доменот D на f што се добива како решение на системот (3) се вика **стационарна точка** на функцијата $f(x,y)$. Внатрешните точки на D во кои не постои некој од изводите f_x, f_y или се стационарни за f, се викаат **критични точки** за екстрем на f. (Се разбира, во критична точка f може да има екстрем, но не мора.)

[1] В. II.3.1.

ПРИМЕР 2. Да ги најдеме стационарните точки на функцијата

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 2\,.$$

Системот (3) за оваа функција е

$$3x^2 - 9y = 0\,, \qquad 3y^2 - 9x = 0\,.$$

Решенијата на овој систем се: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 3$, па според тоа, стационарните точки на дадената функција се: $(0, 0)$ и $(3, 3)$.

Да забележиме дека обратното тврдење од Т.1 не е точно, т.е. може (x_0, y_0) да е стационарна точка, а $f(x_0, y_0)$ да не е екстрем на f.

ПРИМЕР 3. За функцијата $z = xy$ ги имаме соодветните равенки $z_x = y = 0$ и $z_y = x = 0$. Во стационарната точка $(0, 0)$ функцијата има вредност $z = 0$, но таа вредност не е екстремна. Имено, во која било околина на $(0, 0)$ можат да се најдат точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такви што $x_1 y_1 > 0$ и $x_2 y_2 < 0$, т.е. $z(x_2, y_2) < z(0, 0) < z(x_1, y_1)$, што покажува дека во точката $(0, 0)$ функцијата xy нема екстрем.

Да видиме какво *геометриско толкување* има Т. 1 (при некои дополнителни услови).

Ако функцијата $f(x, y)$ е непрекината во некоја околина на точката (x_0, y_0) и е диференцијабилна во таа точка, тогаш постои тангентна рамнина во точката (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, чијашто равенка е (в. **2.2**):

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)\,. \tag{4}$$

Ако $f(x_0, y_0)$ е екстрем, тогаш се исполнети равенствата (2), па во тој случај равенката (4) го добива обликот $z = z_0$. Значи, точно е следново:

Тврдење 2.

Тангентната рамнина на површината Σ: $z = f(x, y)$ во точката (x_0, y_0, z_0) во која се постигнува екстрем на функцијата f, е паралелна со рамнината Oxy, т.е. со $z = 0$. ◇

Забелешка 1. Поимите максимум и минимум на функција од повеќе променливи $f(X)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, се воведува формално исто како за две променливи. Имено, $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ е **точка на минимум** за $f(X)$ акко постои околина G на X^0, таква што за секоја точка $X \in G$ да важи

$$f(X^0) \le f(X)\,.$$

Расудувајќи на ист начин како за Т. 1, добиваме потребни услови за егзистенција на екстрем на функција од n променливи.

Теорема 1′.

Ако во некоја околина на точката $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ постојат парцијалните изводи на функцијата $f(x_1, \ldots, x_n)$ и ако $f(X^0)$ е екстрем, тогаш

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{5}$$

за $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ ◇

Забелешка 2. Потребните услови (2) од Т. 1, како што видовме во примерот 3, не се и доволни, т.е. системот (3) може да има решенија – точки во кои функцијата нема екстрем. Но, и кога има екстрем, равенките (2) не даваат можност да се установи дали тој екстрем е максимум или минимум. Во разделот **3.4** ќе бидат дадени доволни услови за стационарна точка да е точка на екстрем.

Вежби

Во задачите 1–6 да се најдат стационарните точки на дадената функција $f(x, y)$.

1. $x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$. **2.** $x(x^2 + y^2 + 6y)$.

3. $xy(x + 2y - 6)$. **4.** $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$, за $x, y \in [0, \pi]$.

5. $x^3 + xy^2 - 3axy$ $(a \neq 0)$. **6.** $\ln(x^2 + y^2)$.

7. **Да се најдат екстремите на функцијата $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 9$.**
Помош. Да се претстави десната страна како збир од квадрати.

8. **Да се најдат екстремите на функцијата $z = 4 - x^2 - 2y^2 - 2xy - 2y$.**

3.2. Најголема и најмала вредност

Поимите најголема и најмала вредност ги споменавме во **1.6** (Т. 6, б)), но заради комплетност, овде ќе ги повториме нивните дефиниции.

Нека f е функција од две променливи со домен D. Ако постои точка (x_0, y_0) во D таква што

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \tag{1}$$

за секоја точка $(x, y) \in D$, тогаш бројот $f(x_0, y_0)$ се вика **најмала вредност** на f во D (НМВ f). Ако пак $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ за секоја точка $(x, y) \in D$, тогаш $f(x_0, y_0)$ се вика **најголема вредност на** f во D (НГВ f).

Притоа, се разбира, може да постои и најмала и најголема вредност на f во D, може да постои само едната од нив, а може да не постои ниедна. За нивното наоѓање се користат резултатите од претходниот раздел.

Поимите најмала/најголема вредност на функција од n променливи $(n > 2)$ се дефинираат аналогно.

Нека функцијата f е *непрекината во доменот* D. Ако D не е затворена и ограничена област , тогаш меѓу вредностите на функцијата може да нема ни најголема ни најмала вредност (в. **1.6**). Присуството или отсуството на најголема и најмала вредност во такви случаи се утврдува врз основа на конкретните услови на задачата.

Ако, се установи, на некој начин, постоењето на најголема (или најмала) вредност на f и таа се достигнува во внатрешна точка на D, тогаш во таа точка функцијата ќе има екстрем (во смисла на дефиницијата од **3.1**). Така, ако се најдат сите критични точки за екстрем (што лежат во внатрешноста на D) и ако се споредат вредностите на f во тие точки, тогаш најголемата од нив ќе биде најголема вредност на f во D, а најмалата меѓу нив е најмала вредност на f во D.

Да го разгледамш сега "поважниот" случај. *Нека функцијата f е дефинирана и непрекината во некоја ограничена и затворена област D и, со исклучок можеби во конечен број точки, има во таа област конечни парцијални изводи.* Тогаш, според теоремата на Вајерштрас (Т. 6. б) во **1.6**), постојат точки $X_1, X_2 \in D$ такви што $f(X_1)$ е најголема, а $f(X_2)$ е најмала вредност на f во D. Ако точката X_1 (односно X_2) е в н а т р е ш н а точка за D, тогаш $f(X_1)$ е максимум (односно $f(X_2)$ е минимум) на f во D, па, во тој случај, бараната точка навистина се наоѓа меѓу точките "критични" за екстрем. Меѓутоа, има случаи во кои функцијата f достигнува најголема (најмала) вредност во точки од контурата на D.

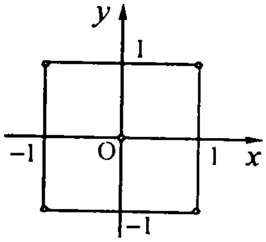
За илустрација ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 1. Да ја најдеме најмалата и најголемата вредност на функцијата $f(x, y) = x^2 + y^2$, во област а $D = \{(x, y) |\ |x| \leq 1,\ \ |y| \leq 1\}$.

Бидејќи областа D е ограничена и затворена (црт.1), а f е непрекината, f ќе има и НМВ и НГВ во D.

Прво ги наоѓаме стационарните точки на f од системот равенки $f_x = 0$, $f_y = 0$, т.е. од $2x = 0$, $2y = 0$. Единствената стационарна точка е $(0, 0)$, а $f(0, 0) = 0$. Очигледно, таа е и најмалата вредност на f во D, зашто $x^2+y^2 \geq 0$ за секоја точка (x, y) од D. Најголемата вредност на f ќе биде достигната на контурата од D. Контурата на D е составена од четири отсечки (црт. 1):

1) $x = 1,\quad -1 \leq y \leq 1;$
2) $y = 1,\quad -1 \leq x \leq 1;$
3) $x = -1,\quad -1 \leq y \leq 1;$
4) $y = -1,\quad -1 \leq x \leq 1.$



Црт. 1

На првата отсечка: $x = 1$, $-1 \leq y \leq 1$ имаме

$$\phi(1, y) = 1 + y^2 = g(y).$$

Ги бараме НМВ на $g(y)$ во сегментот $[-1, 1]$. Од $g'(y) = 0$ имаме $2y = 0$, па $y = 0$ е единствената стационарна точка на на функцијата $1 + y^2$, во која $g(0) = 1$, а на краевите од сегментот имаме $g(1) = 2 = g(-1)$. Следствено, НМВ$g = 1$, НГВ$g = 2$. Значи, на првата отсечка: $f(1, 1) = f(1, -1) = 2$ е НГВ, а $f(1, 0) = 1$ е НМВ. (Да забележиме дека 1 не е НМВ во D.)

На втората отсечка: $y = 1$, $-1 \leq x \leq 1$ имаме $f(x, 1) = x^2 + 1 = h(x)$. Работејќи како погоре, а продолжувајќи така и за преостанатите две отсечки, ќе добиеме дека НГВ $f = 2$ во сите четири рабни точки $(\pm 1, \pm 1)$ од D.

Да забележиме дека во конкретниот случај можевме веднаш (т.е. без барање извод) да заклучиме дека, на средините од четирите страни на квадратот (т.е. на контурата) $f = 1$ е НМВ, а на темињата $f = 2$ е НГВ. Но, во општ случај треба да се наоѓаат изводите и да се изедначат со нула.

Ќе разгледаме уште еден, поучен пример.

ПРИМЕР 2. Да ги најдеме НМВ и НГВ на функцијата

$$g(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad \text{во квадратот} \quad D = \{(x, y) |\ |x| \leq 1,\ \ |y| \leq 1\}.$$

Функцијата g е непрекината во целата рамнина $\mathbf{R}^2$, па значи и во областа D. Според тоа, постојат НМВg и НГВg во D. Имајќи предвид дека: $u < v \Leftrightarrow u^3 < v^3$,

добиваме дека g има НМВ во точката (a, b) ако и само ако $g^3 = f$ има НМВ во (a, b), како и дека истото важи и за НГВ. Затоа, наместо g може да се разгледува функцијата

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{на} \quad D.$$

Според резултатот од Пр. 1: НМВ $f = 0$ за $x = y = 0$, НГВ $f = 2$ во точките $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$. Од тоа следува дека НМВ$g = 0$ за $x = y = 0$ и НГВ $g = \sqrt[3]{2}$ во споменатите четири точки – темињата на квадратот.

И покрај поучноста на специјалниот метод на решавање на проблемот спроведен погоре, сепак добро е и тука да се работи по некоја "општа шема": да се најдат критичните точки [1] на функцијата (во внатрешноста на областа).

Во конкретниот случај имаме:

$$g_x = \frac{2}{3} \cdot x(x^2 + y^2)^{-2/3}, \qquad g_y = \frac{2}{3} \cdot y(x^2 + y^2)^{-2/3},$$

па значи g_x, g_y постојат секаде освен во точката $(0, 0)$. Системот равенки $g_x = 0$, $g_y = 0$ нема решение, па g нема стационарни точки. Значи, $(0, 0)$ е единствената критична точка на g (во внатрешноста на D), па "кандидат" за НМВ/НГВ е бројот $g(0, 0) = 0$. Потоа, ја разгледуваме $g(x, y)$ на контурата D, т.е. на четирите страни од квадратот. Така, за $y = \pm 1$ имаме $g(x, \pm 1) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$. Со диференцирање, по "вообичаената постапка", добиваме дека: $g(0, \pm 1) = 1$ е НМВ g, а $g(\pm 1, \pm 1) = \sqrt[3]{2}$ е НГВ g на контурата. На крајот, ги споредуваме броевите 0, 1, $\sqrt[3]{2}$ и доаѓаме до истиот заклучок како погоре.

Претходната дискусија, заедно со Пр. 1 и Пр. 2, го наметнува следново **правило**:

За да ја најдеме НГВ (односно НМВ) на функцијата f во ограничената затворена област D, треба:

i) *да ги најдеме сите внатрешни точки на D што се критични за eкстремум на f и да ги пресметаме вредностите на f во тие точки;*

ii) *да ги најдеме точките од контурата (C) на областа D што се "кандидати" за достигнување најголема односно најмала вредност на f, на контурата (C);*

iii) *да ги спoредиме вредностите најдени во* i) *и* ii).

Тогаш најголемата (односно најмалата) од вредностите најдени во iii) *е* НГВ f *(односно* НМВ f) *во целата област* D.

Да ја појасниме поопширно постапката што треба да се спроведе под ii).

Контурата (C) на областа D е крива, којашто обично е график на една или на повеќе параметарски функции. Ако

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{2}$$

се равенките на дел од контурата за $\alpha \leq t \leq \beta$, тогаш функцијата $f\big(x(t), y(t)\big) = g(t)$ е непрекината на сегментот $[\alpha, \beta]$, па за наоѓање на НГВ и НМВ на $g(t)$ се работи како кај функциите од една променлива (в. II.**4.3**).

Имено, се наоѓаат критичните точки на функцијата $g(t)$ во интервалот (α, β), т.е. се наоѓаат сите решенија $t_1, t_2, \dots, t_k$ на равенката $g'(t) = 0$ во (α, β), при што се претпоставува дека таа равенка има

[1] За "критична точка" види во 3.1.

конечно многу решенија. Така се добиваат следните "кандидати" за бараната НГВ f (односно НМВ f):

$$g(\alpha),\ g(t_1), \dots, g(t_k),\ g(\beta). \tag{3}$$

Истата постапка се спроведува за сите делови од контурата (C), сметајќи дека тие се претставени со параметарски равенки од обликот (2).

На крајот, како што рековме погоре во iii), најдените вредности од обликот (3), за секој од деловите на контурата (C), заедно со вредностите на f во нејзините стационарни точки од внатрешноста на D, се споредуваат; најголемата (односно најмалата) од нив е НГВ f (односно НМВ f) во целата област D.

ПРИМЕР 3. Да ја најдеме најмалата односно најголемата вредност на функцијата

$$f(x, y) = 3x + y\sqrt{3}$$

во областа

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Јасно е дека f има НМВ и НГВ во D (зашто D е затворена и ограничена). Бидејќи $f_x = 3 \neq 0$ (и $f_y = \sqrt{3} \neq 0$), следува дека f нема стационарни точки, па бараните вредности ќе се добијат за точки од контурата на D. Контурата на D е кружницата $x^2 + y^2 = 1$ (црт. 2). Неа ќе ја претставиме со параметарски равенки

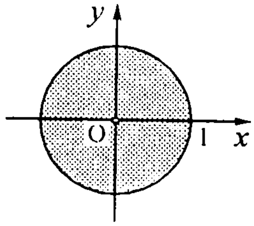
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тогаш за f, на работ од D ќе имаме

$$f(x, y) = 3 \cos t + \sqrt{3} \sin t = g(t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Од

$$g'(t) = -3 \sin t + \sqrt{3} \cos t = 0, \text{ т.е. } \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3},$$



Црт. 2

добиваме дека критични (за екстрем) точки за $g(t)$ се: $t_1 = \frac{\pi}{6}$ и $t_2 = \frac{7\pi}{6}$. Во овие точки g има вредности $2\sqrt{3}$ и $-2\sqrt{3}$ соодветно. На краевите од сегментот $[0, 2\pi]$ имаме $g(0) = 3 = g(2\pi)$. Значи, "кандидати" за најголема и најмала вредност на g во $[0, 2\pi]$ се:

$$g(0) = 3, \quad g(t_1) = 2\sqrt{3}, \quad g(t_2) = -2\sqrt{3}, \quad g(2\pi) = 3;$$

најголемата од нив е $2\sqrt{3}$ (за $t_1 = \frac{\pi}{6}$) и таа е најголема вредност за $g(t)$ во $[0, 2\pi]$, а најмала е $-2\sqrt{3}$ (за $t_2 = \frac{7\pi}{6}$), и таа е најмалата вредност на $g(t)$ во $[0, 2\pi]$.

Според тоа, за $f(x, y)$ во областа D имаме:

НГВ $f = 2\sqrt{3}$ во точката $\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, т.е. во $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

НМВ $f = -2\sqrt{3}$ во точката $\left(\cos\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{7\pi}{6}\right)$, т.е. во $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

Да забележиме дека наместо со параметарските равенки $x = \cos t$, $y = \sin t$ за $t \in [0, 2\pi]$, контурата на D можевме да ја претставиме со равенките $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$ за $x \in [-1, 1]$ и да работиме на тој начин (в. вежба 2).

ПРИМЕР 4. Да ја најдеме најголемата односно најмалата вредност на функцијата

$$z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

во областа, ограничена од координатните оски и правата $x + y = 2\pi$, т.е. во исшрафираниот триаголник (црт. 3).

Ги наоѓаме парцијалните изводи z_x, z_y и ги изедначуваме со нула. Добиваме

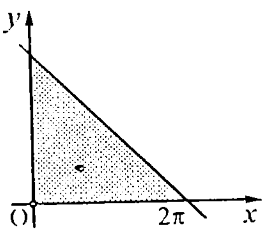
$$\cos x - \cos(x + y) = 0\,, \qquad \cos y - \cos(x + y) = 0\,.$$

Од тоа следува: $\cos x = \cos y$, т.е. $y = \pm x + 2k\pi$. Во дадената област може да биде само $y = x$. Тогаш имаме: $\cos x = \cos(x + y) = \cos 2x$ од каде што

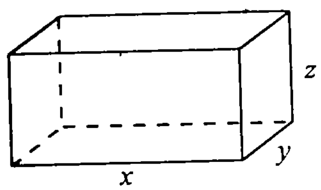
$$2x = \pm x + 2k\pi\,, \quad \text{т.е.} \quad x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{и} \quad x = 2k\pi\,.$$

Нам ни се потребни само точките од внатрешноста на триаголникот, а таква е само $x = \frac{2\pi}{3}$, $y = \frac{2\pi}{3}$. Во таа точка имаме $z = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Преостанува да ги најдеме стационарните точки на контурата. За $y = 0$ имаме и $z = 0$, а исто така $z = 0$ и на правите: $x = 0$ и $x + y = 2\pi$. Од тоа следува дека $z = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ е најголемата, а $z = 0$ најмалата вредност на функцијата во дадената област .



Црт. 3



Црт. 4

ПРИМЕР 5. Од лим треба да се направи правоаголен сад, отворен одозгора ("без капак"), што собира 32 м^3 течност. Какви треба да бидат димензиите на садот за да се потроши најмалку лим?

Решение. Нека димензиите на садот се x, y, z (црт. 4). Колку лим ќе се потроши – зависи од плоштината P на садот,

$$P = xy + 2z(x + y)\,.$$

Од дадениот податок дека волуменот е $xyz = 32$ имаме $z = \frac{32}{xy}$, па

$$P = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}\,. \tag{4}$$

Задачата се сведува на наоѓање најмала вредност на функцијата $P(x, y)$, определена со (4), при $x, y > 0$, т.е. во првиот квадрант (без координатните оски). Решавајќи ги равенките

$$P_x = x - \frac{64}{x^2} = 0\,, \qquad P_y = y - \frac{64}{y^2} = 0\,,$$

добиваме дека (4, 4) е единствената стационарна точка на P во првиот квадрант. Вредноста на $P(x, y)$ во таа точка е $P(4, 4) = 48$ m^2 и таа е најмалата вредност на $P(x, y)$ (во што ќе се увериме подолу).

Според тоа, димензиите на садот треба да бидат: $x = y = 4$ m и $z = 2$ m, т.е. садот треба да има квадратна основа со раб 4 m и висина 2 m.

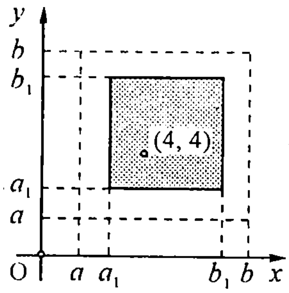
За да се увериме дека $P(4, 4) = 48$ е најмала вредност на функцијата $P(x, y)$ во изнесениот пример, ќе ја разгледаме $P(x, y)$ во квадратната област

$$D: \quad a < x < b; \qquad a < y < b$$

таква што $a < 4 < b$, т.е. точката $(4, 4) \in D$ (црт. 5), дозволувајќи притоа $a = 0$ и $b = +\infty$.

Функцијата $P(x, y)$ во областа D е позитивна, диференцијабилна, има точно една стационарна точка (во која $P(4, 4) = 48$) и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} P(x, y) = \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} P(x, y) = +\infty . \tag{5}$$



Црт. 5

Од (5) следува дека постојат броеви a_1, b_1 такви што $a < a_1 < 4 < b_1 < b$, т.е. постои затворена ограничена област D_1: $a_1 \le x \le b_1$, $a_1 \le y \le b_1$ (црт. 5) и притоа

$$P(x, y) > 48 = P(4, 4) \tag{6}$$

за сите точки во контурата на D_1 (т.е. за точките (x, y) при кои: $x = a_1$ или $y = a_1$, $x = b_1$ или $y = b_1$).

Од тоа што $P(x, y)$ е непрекината во затворената ограничена област D_1, според **Т. 6 од 1.6**, следува дека постојат точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_1$, такви што $P(x_1, y_1)$ е НМВ, а $P(x_2, y_2)$ е НГВ на $P(x, y)$ во D_1. Од (6) пак следува дека точката (x_1, y_1) се наоѓа во внатрешноста на областа D_1, па значи $P(x_1, y_1)$ е минимум. Но, ако во внатрешноста на D_1 се достигнува минимум, тогаш тој мора да е во точката $(4, 4)$, зашто таа е единствената стационарна точка на $P(x, y)$. Значи, $(x_1, y_1) = (4, 4)$, т.е. НМВ $P = P(4, 4) = 48$.

На ист начин се докажува и следново поопшто тврдење:

Ако една функција $f(x, y)$ е позитивна, диференцијабилна и има единствена стационарна точка (x_0, y_0) во внатрешноста на некоја област D, при што $f(x, y) \to +\infty$ кога (x, y) се стреми кон точките од контурата на D, тогаш $f(x_0, y_0)$ е НМВ *f во D.* (В. и вежба 12 и 13.)

Забелешка 1. Кај функциите од две променливи, за разлика од случајот на функција од една променлива (в. II.4.4, вежба 13), постоењето на единствен екстрем во дадена област не значи дека тој екстрем ќе биде најголема или најмала вредност на функцијата во целата област. За илустрација, ќе наведеме еден пример.

ПРИМЕР 6. Да ја разгледаме функцијата

$$z = x^2 - 2xy + 4y^2 - y^3 \quad \text{во областа} \quad D: \quad -1 \le x \le 1, \quad -6 \le y \le 6 .$$

Нејзините изводи $z_x = 2x - 2y$, $z_y = -2x + 8y - 3y^2$ се анулираат во точките $(0, 0)$ и $(2, 2)$, а од нив само $(0, 0)$ е во областа D. Во таа точка, дадената функција, има минимум, $z(0, 0) = 0$ (в. Т. 1 во 3.4). Но, иако тој е единствениот екстрем во D, тој не е најмала вредност на функцијата во D, зашто, на пример, во точката $(0, 5)$ имаме $z = -25$.

(Да уочиме дека ова не противречи на тврдењето, изнесено пред забелешката 1; имено, дадената функција не е позитивна на D.)

Вежби

Во задачите 1–9 да се најде НМВ и НГВ на функцијата $f(x, y)$ во дадената област D.

1. $x+y$, $D: x^2+y^2 \leq 1$, претставувајќи ја контурата на D на два начина: а) $x = \cos t$, $y = \sin t$ (како во Пр.3); б) $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = -\sqrt{1-x^2}$.

2. $3x+4y$, $D: x^2+y^2 \leq 1$. **3.** $3x^2+2y^2$, $D: x^2+y^2 \leq 1$.

4. $x e^{-x} \cos y$, $D: |x| \leq 1$, $|y| \leq \pi$.

5. $x^2+2xy+3y^2+4x+6y$, $D: -2 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$.

6. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$, D е дефиниционата област на $f(x, y)$.

7. $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(y-1)^2}$, а) $D = \mathbb{R}^2$; б) $D: (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1$.

8. $xy^2(4-x-y)$, $D: x \geq 0$ $y \geq 0$, $x+y \leq 6$.

9. x^3+y^3, $D: 0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

10. Меѓу сите триаголници, впишани во даден круг со радиус R да се најде најголемиот по плоштина.

Помош. Нека x, y, z се централните агли чии соодветни тетиви се страните на триаголникот; притоа: $z = 2\pi - x - y$, а плоштината $P = \frac{1}{2}R^2[\sin x + \sin y - \sin(x+y)]$. Види и Пр. 4.

11. Нека функцијата $f(x, y)$ е ненегативна, диференцијабилна и има единствена стационарна точка (x_0, y_0) во отворениот кружен прстен D $r^2 < x^2+y^2 < R^2$, каде што $r < R$ се дадени броеви, при што

$$\lim_{x^2+y^2 \to r^2} f(x, y) = \lim_{x^2+y^2 \to R^2} f(x, y) = +\infty. \qquad (*)$$

(дозволувајќи притоа да биде и $r = 0$, $R = +\infty$).
Да се покаже дека $f(x_0, y_0) = z_0$ е најмала вредност на $f(x, y)$ во дадениот кружен прстен D.

12. Да се формулира и да се докаже тврдење аналогно на тврдењето во вежбата 11, со тоа што претпоставката (*) ќе се замени со: $\lim_{x^2+y^2 \to r^2} f(x, y) = \lim_{x^2+y^2 \to R^2} f(x, y) = 0$, а "најмалата вредност на $f(x, y)$" со "најголемата вредност на $f(x, y)$".

3.3.* Метод на најмали квадрати

Ќе изнесеме една примена на екстремите на функциите од повеќе променливи.

Да претпоставиме дека некоја појава е окарактеризирана со една линеарна функција

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

но за која коефициентите a и b не се познати. Со цел да се определат a и b, извршена е една серија мерења чии резултати се поредени во дадената шема 1. Кога мерењата би биле точни, за определувањето на a и b би биле доволни само две мерења, на пример x_1 и y_1, x_2 и y_2. (Притоа, се разбира, $x_1 \neq x_2$ и општо, во шемата: $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$.)

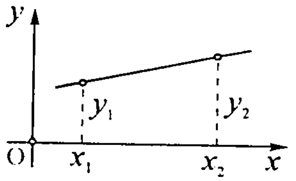
$$\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2\, x_3 & \cdots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2\, y_3 & \cdots & y_n \end{array}$$

Шема 1

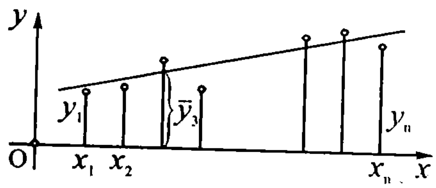
Навистина, заменувајќи ги тие вредности во равенката (1), ќе го добиеме системот равенки (по непознатите a и b)

$$y_1 = ax_1 + b\,, \qquad y_2 = ax_2 + b\,,$$

чиешто решение ќе ги даде вредностите на a и b. Геометриски, таа задача се сведува на повлекување права низ двете дадени точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (црт. 1).



Црт. 1



Црт. 2

Со оглед на тоа што секое мерење практично дава приближни резултати на мерените величини, вредностите на x и y од шемата 1, во општ случај, нема да ја задоволуваат равенката (1). Геометриски тоа значи дека точките $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ како да се "расфрлени" во близина на правата (1) (црт. 2).

Врз основа на добиените резултати во шемата 1 се настојува што поточно да се определат коефициентите a и b. Самиот пак израз "поточно да се определат a и b" е прилично неопределен. Методот на најмали квадрати овој израз го дефинира на следниот, природен начин.

Нека $\overline{y_i} = ax_i + b$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Кога a и b би биле познати, вака определените $\overline{y_i}$, во општ случај, не би се совпаѓале со измерените значења y_i. Разликите $|\ \overline{y_i} - y_i\ |$ ги искажуваат апсолутните грешки направени при замените на $\overline{y_i}$ со y_i. По **методот на најмали квадрати**, за најдобри значења на a и b, определени врз основа на извршените мерења, се сметаат оние за кои функцијата

$$z = (a, b) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{y_i} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \tag{2}$$

има најмала вредност.

Тврдење 1.

Постои точка (a^*, b^*) во која функцијата $f(a,b)$ достигнува најмала вредност.

Доказ. Навистина, ако z_0 е некоја вредност на функцијата (2), тогаш, за доволно голем R, за секоја точка (a,b) надвор од кругот $a^2+b^2 \le R^2$, исполнет е условот $f(a,b) > z_0$; бидејќи $f(a,b)$ е непрекината функција, а $a^2+b^2 \le R^2$ е затворено и ограничено множество, постои точка (a^*, b^*) во овој круг, во која $f(a,b)$ има најмала вредност, а тогаш и $z_0 \ge f(a^*, b^*)$, па според понапред реченото, за секоја точка (a,b) надвор од разгледуваниот круг имаме $f(a,b) > z_0 \ge f(a^*, b^*)$. Бидејќи $f(a,b)$ е диференцијабилна функција, точката (a^*, b^*) се определува од системот

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot x_i = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0\,,$$

кој, по споредувањето, добива облик

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \tag{3}$$

(Овој систем има решение и тоа единствено, зашто детерминантата на системот, поради $x_i \ne x_j$ за $i \ne j$, е различна од нула.) Да разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 1. Да ја определиме функцијата $y = ax + b$ што најмногу одговара на податоците

x	2	4	5	6
y	3	5.5	7	10

Системот (3) во овој случај постанува

$$81a + 17b = 123\,, \qquad 17a + 4b = 25,5\,.$$

Добиваме дека $a \approx 1,67$, $b \approx -0,72$, па $y = 1,67x - 0,72$ е бараната функција.

Методот на најмалите квадрати може да се примени и на посложени случаи. Имено, ако сакаме да окарактеризираме некоја појава со полиномна функција од облик

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m\,,$$

и ако за променливите x и y се добиени, со мерење, n–те вредности дадени на шемата 1, каде што $m < n$, тогаш броевите $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ги определуваме така што функцијата

$$q = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i)^2 \tag{2'}$$

да прими најмала вредност. За таа цел потребно е да се реши системот линеарни равенки по a_i:

$$\frac{\partial q}{\partial a_0} = 0\,, \quad \frac{\partial q}{\partial a_1} = 0\,, \dots, \frac{\partial q}{\partial a_m} = 0\,. \qquad (3')$$

ПРИМЕР 2. Да се определи функција $y = ax^2 + bx + c$, којашто најмногу одговара на податоците

x	1	2	3	4	5
y	−1,2	1,3	8,1	17	30

Решение. Ја формираме функцијата

$$z = f(a, b, c) = \sum_{i=1}^{5}(\overline{y_i} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{5}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2\,.$$

Изедначувајќи ги со нула парцијалните изводи z_a, z_b и z_c, а потоа средувајќи, го добиваме следниов систем равенки по непознатите a, b, c:

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^4\right) a + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^3\right) b + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) c = \sum_{i=1}^{5} x_i^2\, y\,,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^3\right) a + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) b + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) c = \sum_{i=1}^{5} x_i\, y_i\,,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right) b + 5c = \sum_{i=1}^{5} y_i\,.$$

Податоците што ни се потребни за да го решиме овој систем равенки ќе ги сместиме во една шема:

	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
x_1	1	1	1	1	−1,2	−1,2	−1,2
x_2	2	4	8	16	1,3	2,6	5,2
x_3	3	9	27	81	8,1	24,3	72,9
x_4	4	16	64	256	17	68	272
x_5	5	25	125	625	30	150	750
Сума	15	55	225	979	55,2	243,7	1098,9

Така, горниот систем равенки станува:

$$979\,a + 225\,b + 55\,c = 1098,9\,,$$

$$225\,a + \ \ 55\,b + 15\,c = \ 243,7\,,$$

$$55\,a + \ \ 15\,b + \ \ 5\,c = \ \ 55,2\,,$$

чие решение е $a = 1,65$; $b = -2,09$; $c = -0,84$.

Според тоа, бараната функција е $y = 1,65\,x^2 - 2,09\,x - 0,84$.

3.4. Доволни услови за екстрем

Во овој дел ќе докажеме три теореми – секоја од нив укажува на доволен услов во стационарна точка да има екстрем, а и две тврдења за екстреми на имплицитно зададени функции.

Теорема 1.

Нека функцијата $f(x, y)$ има непрекинати први и втори парцијални изводи во точката (x_0, y_0) и нека

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0\,. \tag{1}$$

Ако $d^2 f(x, y)$ не го менува знакот во некоја околина на точката (x_0, y_0), тогаш $f(x_0, y_0)$ е екстрем.

Ако $d^2 f(x, y) \geq 0$, тој екстрем е минимум, а ако $d^2 f(x, y) \leq 0$ екстремот е максимум.

Доказ. Според Тејлоровата формула, при $n = 2$ (види **2.5**) имаме:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y),$$

каде што $0 < \theta < 1$. Поради (1), членот $df(x_0, y_0)$ е нула. Ако $d^2 f \geq 0$, тогаш, за доволно мали $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, ќе имаме: $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \geq f(x_0, y_0)$, од што следува дека $f(x_0, y_0)$ е минимум. Слично, од $d^2 z \leq 0$, следува дека $f(x_0, y_0)$ е максимум. ◊

Да разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 1. Нека $z = x^4 + y^4 - 4x$. Тогаш $z_x = 4x^3 - 4$, $z_y = 4y^3$, па $(1, 0)$ е единствена стационарна точка. Бидејќи $z_{xx} = 12x^2$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = 12y^2$, добиваме дека $d^2 f = 12x^2 dx^2 + 12y^2 dy^2 \geq 0$ што покажува дека $z(1, 0) = -3$ е минимум.

Теоремата 1 често не е згодна за практична примена од следниве причини: вториот диференцијал $d^2 f(x, y)$, освен од x и y, зависи и од нараснувањата Δx и Δy. Имено, имаме: $d^2 f = F(x, y, \Delta x, \Delta y)$, па значи треба да биде, да речеме, $F(x, y, \Delta x, \Delta y) \geq 0$, за секоја точка (x, y) од дадената околина и за секој пар нараснувања Δx, Δy, ако точката $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ не излегува надвор од споменатата околина. Наредната теорема има поголема практична примена, бидејќи зборува за вториот диференцијал во с а м а т а точка (x_0, y_0), а не во некоја околина на (x_0, y_0).

Теорема 2.

Нека функцијата $f(x, y)$ има непрекинати први и втори парцијални изводи во некоја околина на точката (x_0, y_0) и нека $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$.

Ако $d^2f(x_0, y_0)$ има стален знак при доволно мал $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (и притоа $d^2f(x_0, y_0) \neq 0$), тогаш функцијата има екстрем во (x_0, y_0). Тој екстрем е минимум за $d^2f(x_0, y_0) > 0$, а максимум за $d^2f(x_0, y_0) < 0$.

Ако $d^2f(x_0, y_0)$ го менува знакот, тогаш екстрем не постои.

Доказ.* Како и при доказот на претходната теорема доаѓаме до равенството:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0 + \theta\,\Delta x,\, y_0 + \theta\,\Delta y)\,, \tag{2}$$

каде што $0 < \theta < 1$. Поради претпоставката за непрекинатоста на вторите парцијални изводи можеме да ставиме:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x_0 + \theta\,\Delta x,\, y_0 + \theta\,\Delta y) &= f_{xx}(x_0, y_0) + \alpha = f_{xx} + \alpha\,,\\
f_{xy}(x_0 + \theta\,\Delta x,\, y_0 + \theta\,\Delta y) &= f_{xy}(x_0, y_0) + \beta = f_{xy} + \beta\,,\\
f_{yy}(x_0 + \theta\,\Delta x,\, y_0 + \theta\,\Delta y) &= f_{yy}(x_0, y_0) + \gamma = f_{yy} + \gamma\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

каде што $\lim \alpha = \lim \beta = \lim \gamma = 0$ при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$. Равенството (2) можеме да го претставиме во обликот

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{2}[(f_{xx} + \alpha)\Delta x^2 + 2(f_{xy} + \beta)\Delta x\,\Delta y + (f_{yy} + \gamma)\Delta y^2] =\\
&= \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[\alpha\,\Delta x^2 + 2\beta\,\Delta x\,\Delta y + \gamma\,\Delta y^2]\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Да претпоставиме дека $d^2f(x_0, y_0) > 0$, т.е.

$$f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\,\Delta y + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2 > 0$$

при $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Ако ставиме $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leq \frac{\delta}{2}$, тогаш

$$d^2f(x_0, y_0) = g(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\,\Delta y + f_{yy}\Delta y^2 \tag{5}$$

е позитивна во затворениот круг $\Delta x^2 + \Delta y^2 \leq \frac{\delta^2}{4}$ (црт. 1), а бидејќи е и непрекината како функција од Δx и Δy, тогаш постои најмала вредност m којашто е позитивна. Ако се има предвид дека $\alpha\,\Delta x^2 + 2\beta\,\Delta x\,\Delta y + \gamma\,\Delta y^2 \to 0$, тогаш избирајќи го бројот $\delta_1 > 0$ доволно мал и ставајќи $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta_1$, можеме да претпоставиме дека

$$|\,\alpha\Delta x^2 + 2\beta\Delta x\,\Delta y + \gamma\Delta y^2\,| < \frac{m}{2}\,, \text{т.е. } \alpha\,\Delta x^2 + 2\beta\Delta x\Delta y + \gamma\Delta y^2 > -\frac{m}{2}\,.$$

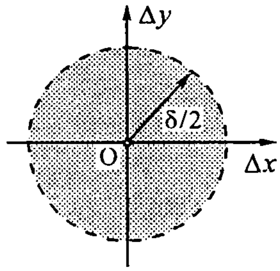
Ако ставиме сега $\delta_2 = \min\{\delta_1, \frac{\delta}{2}\}$, добиваме:

$$\Delta f = \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[\alpha\,\Delta x^2 + 2\beta\,\Delta x\,\Delta y + \gamma\,\Delta y^2] \geq \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\frac{m}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}m > 0$$

за $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta_2$ т.е. дека

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) > 0\,,$$

од што следува дека $f(x_0, y_0)$ е минимум.



Црт. 1

Со тоа докажавме дека, ако $d^2 f(x_0, y_0) > 0$ при доволно мало $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, тогаш $f(x_0, y_0)$ е минимум. Во случај да е $d^2 f(x_0, y_0) < 0$, ќе имаме $d^2[-f(x_0, y_0)] > 0$, па значи функцијата $-f(x, y)$ ќе има минимум во точката (x_0, y_0), т.е. $f(x, y)$ ќе има максимум во таа точка.

Преостанува да го разгледаме случајот кога, за секој $\delta > 0$, постојат Δx_1, Δy_1, Δx_2, Δy_2, такви што

$$\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 < \delta\,, \quad \Delta x_2^2 + \Delta y_2^2 < \delta\,, \quad \text{и}$$

$$g(\Delta x_1,\, \Delta y_1) < 0\,, \quad g(\Delta x_2,\, \Delta y_2) > 0\,.$$

Ставајќи $\Delta x = t\,\Delta x_1$, $\Delta y = t\,\Delta y_1$, имаме:

$$\Delta f = \frac{t^2}{2}\{g(\Delta x_1\,\Delta y_1) + \alpha\,\Delta x_1^2 + 2\beta\,\Delta x_1,\, \Delta y_1 + \gamma\,\Delta y_1^2\}\,.$$

За да видиме каков знак има Δf, ќе го испитаме знакот на изразот во големите загради. Прво, $g(\Delta x_1,\, \Delta y_1)$ е фиксен негативен број. Имајќи предвид дека и $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ кога $t \to 0$, добиваме дека, за доволно мало $|\, t\,|$, можеме да сметаме дека

$$\alpha\,\Delta x_1^2 + 2\beta\,\Delta x_1\,\Delta y_1 + \gamma\,\Delta y_1^2 < -\frac{1}{2}g(\Delta x_1,\, \Delta y_1)\,,$$

така што ќе имаме $\Delta f < \dfrac{t^2}{4}\,g(\Delta x_1,\, \Delta y_1) < 0\,.$

На сосема ист начин, со тоа што сега би ставиле $\Delta x = u\,\Delta x_2$, $\Delta y = u\,\Delta y_2$, би добиле дека за доволно мало $|\, u\,|$ е точно неравенството

$$\Delta f > \frac{u^2}{4}\,g(\Delta x_2,\, \Delta y_2) > 0\,.$$

Од сето тоа следува дека $f(x_0, y_0)$ нема да биде екстрем во случај кога $d^2 f(x_0, y_0)$ може да прими и позитивни, и негативни вредности при доволно мал $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата. ◊

Да забележиме дека двете докажани теореми важат за функции со произволен број реални независнопроменливи, па дури и докажите во општиот случај се исти.

На теоремата 2 може да ѝ се даде и друга формулација, која е позгодна за примена. За таа цел ќе ги воведеме следниве ознаки:

$$A = f_{xx}(x_0, y_0)\,, \quad B = f_{xy}(x_0, y_0)\,, \quad C = f_{yy}(x_0, y_0)\,. \tag{6}$$

Теорема 3.

Нека функцијата $z = f(x, y)$ има непрекинати први и втори парцијални изводи во некоја околина на точката (x_0, y_0) и нека $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$.

Ако $AC - B^2 > 0$, тогаш $f(x_0, y_0)$ е екстрем и тоа минимум за $A > 0$, а максимум за $A < 0$. За $AC - B^2 < 0$, $f(x_0, y_0)$ не е екстрем.

Доказ. Според Т. 2, потребно е само да извршиме оценка на знакот на $d^2f(x_0, y_0)$. Имаме:

$$\begin{aligned} d^2f(x_0, y_0) &= A\,\Delta x^2 + 2B\,\Delta x\,\Delta y + C\,\Delta y^2 = \\ &= \frac{1}{A}[(A\,\Delta x + B\,\Delta y)^2 + (AC - B^2)\Delta y^2]\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Ако $AC - B^2 > 0$, тогаш $(A\,\Delta x + B\,\Delta y)^2 + (AC - B^2)\Delta y^2 > 0$, па и $d^2f(x_0, y_0)$ има ист знак како и A. Според тоа, за $A > 0$ имаме минимум, а за $A < 0$ – максимум; притоа, јасно, во (7) треба да е $A \neq 0$. Но, при $AC - B^2 > 0$, секако мора да е $A \neq 0$.

Нека $AC - B^2 < 0$. За $A = 0$ добиваме

$$d^2f(x_0, y_0) = B\,\Delta x\,\Delta y + \frac{1}{2}C\,\Delta y^2 = \frac{1}{2}(2B\,\Delta x + C\,\Delta y)\Delta y\,.$$

Јасно е дека $d^2f(x_0, y_0)$ го менува знакот кога Δy минува низ 0. Ако $A \neq 0$, тогаш пак може да се напише равенството (7). За $\Delta y = 0$, диференцијалот $d^2f(x_0, y_0)$ ќе има ист знак како и A. Ако пак $A\,\Delta x + B\,\Delta y = 0$, т.е. $\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{B}{A}$, тогаш

$$d^2f(x_0, y_0) = \frac{1}{A}(AC - B^2)\Delta y^2$$

има спротивен знак од A. Според тоа, и во овој случај, $d^2f(x_0, y_0)$ го менува знакот, па теоремата е докажана. ◊

Да разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 2. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$; $z_x = 3x^2 - 9y$, $z_y = 3y^2 - 9x$; стационарни точки се $(0, 0)$ и $(3, 3)$; $z_{xx} = 6x$, $z_{yy} = 6y$, $z_{xy} = -9$. Според тоа, имаме: $AC - B^2 = 18 \cdot 18 - 81 > 0$ за $(3, 3)$ и $AC - B^2 = -81$ за $(0, 0)$.

Значи, во (0, 0) нема екстрем, а во (3, 3) имаме минимум $z(3, 3) = 0$ зашто $A = 18 > 0$.

ПРИМЕР 3. Да ги разгледаме сега функциите

$$z = x^4 + y^4, \quad z = -(x^4 + y^4) \quad \text{и} \quad z = x^4 - y^4 .$$

За секоја од нив имаме $AC - B^2 = 0$ во точката (0, 0). Првата функција има минимум, а втората максимум во (0, 0), додека третата нема екстрем во таа точка. Ова покажува дека во случајот $AC - B^2 = 0$ може да постои екстрем, но не мора; кога постои екстрем, тој може во некои случаи да биде максимум, а во некои минимум.

Да забележиме дека Т. 3 е специфична за функциите од две реални променливи. Инаку, и таа може да се формулира во општа форма, но ние тоа нема да го направиме. [1]

Да ја разгледаме и задачата за наоѓање ***екстрем на функција $y = y(x)$ зададена имплицитно*** со равенката

$$F(x, y) = 0 .$$

Притоа, за функцијата $F(x, y)$ ќе претпоставиме дека е непрекината и има непрекинати парцијални изводи до вториот ред заклучно, во некоја област D.

Ќе ги наведеме најпростите неопходни услови. За таа цел, да ги најдеме точките (x, y) што ги задоволуваат условите

$$F(x, y) = 0 , \quad F_x(x, y) = 0 , \quad F_y(x, y) \neq 0 .$$

Ако постои точка $(x_0, y_0) = 0$ што ги задоволува тие услови, тогаш врз основа на теоремата за имплицитни функции (в. **2.7**), постои функција $y = f(x)$, непрекината заедно со своите изводи од прв и втор ред, којшто ја задоволува равенката $F(x, y) = 0$ во околина на точката $x = x_0$ и добива вредност $y_0 = f(x_0)$.

Потребен услов за екстрем на функцијата $f(x)$ во x_0 е

$$0 = f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} ,$$

од каде што следува дека $F_x(x_0, y_0) = 0$. Ставајќи $F_x(x_0, y_0) = 0$ во формулата за втор извод на имплицитна функција,

$$f''(x) = \frac{-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3} ,$$

ќе добиеме

---

[1] Да се види, на пример, Фихтенгольц I, Гл. V, § 5, стр. 424.

$$f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Според тоа, ако $F_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, тогаш функцијата $y = f(x)$ има екстрем во точката x_0. Притоа, тој ќе биде максимум ако $F_{xy}(x_0, y_0)$ и $F_y(x_0, y_0)$ имаат ист знак, а минимум – ако имаат спротивни знаци. Ако $F_{xx}(x_0, y_0) = 0$, тогаш треба да се испитуваат изводите од повисок ред. Со тоа го докажавме следново:

Тврдење 4.

Нека функцијата $y = y(x)$ е определена имплицитно со равенката $F(x, y) = 0$, при што се претпоставува дека, во некоја околина на точката (x_0, y_0), $y_0 = y(x_0)$, функцијата $F(x, y)$ има непрекинати први и втори парцијални изводи и $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогаш, $y(x_0)$ е екстрем на $y(x)$ во точката x_0 ако и само ако

$$F(x_0, y_0) = 0 = F_x(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad F_{xx}(x_0, y_0) \neq 0.$$

За $F_{xx}F_y > 0$, $y(x_0)$ е максимум, а за $F_{xx}F_y < 0$, – минимум. ◇

ПРИМЕР 4. Да ги испитаме екстремите на функцијата $y(x)$, определена имплицитно со равенката

$$y^3 - 2xy + x^2 = 0.$$

Нека $F(x, y) = y^3 - 2xy + x^2$. Имаме:

$$F_x = -2y + 2x, \quad F_y = 3y^2 - 2x.$$

Откако ќе го решиме системот равенки $F(x, y) = 0$, $F_x(x, y) = 0$, т.е. системот

$$y^3 - 2xy + x^2 = 0, \quad 2(x - y) = 0,$$

ќе добиеме две решенија: $x_1 = y_1 = 0$ и $x_2 = y_2 = 1$. Бидејќи $F_y(0, 0) = 0$, а $F_y(1, 1) = 1$, следува дека првото решение отпаѓа. За второто решение имаме

$$F_{xx}(x, y) = 2, \quad F_{xx}(1, 1) = 2 \neq 0,$$

т.е. $y(x)$ има екстрем за $x = 1$. Бидејќи $F_{xx}(1, 1) \cdot F_y(1, 1) = 2 \cdot 1 > 0$, тој екстрем е максимум.

Аналогно како за Т. 4, користејќи ги Т. 1 од **3.1** и Т. 3, а имајќи ги предвид и формулите за парцијални изводи од имплицитно зададена функција, се добива следново:

Тврдење 5.

Нека функцијата $z = z(x, y)$ е определена имплицитно со равенката $F(x, y, z) = 0$, при што се претпоставува дека, во некоја околина на точката (x_0, y_0, z_0), функцијата $F(x, y, z)$ има непрекинати први и втори парцијални изводи, како и $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогаш $z(x_0, y_0) = z_0$ е екстрем на функцијата $z(x, y)$ во точката (x_0, y_0) ако и само ако

$$0 = F(x_0, y_0, z_0) = F_x(x_0, y_0, z_0) = F_y(x_0, y_0, z_0) \quad \text{и}$$

$$F_{xx}(x_0, y_0, z_0) \cdot F_{yy}(x_0, y_0, z_0) - [F_{xy}(x_0, y_0, z_0)]^2 > 0.$$

За $F_{xx} \cdot F_z > 0$, $z(x_0, y_0)$ *е максимум, а за* $F_{xx} \cdot F_z < 0$, $z(x_0, y_0)$ *е минимум.* $\diamondsuit$.

Вежби

Во задачите 1–10 да се најдат екстремите на дадената функција $f(x, y)$.

1. $x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$. **2.** $\frac{47}{3}x + \frac{47}{4}y - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{xy}{12}$.

3. $x^3 + xy^2 - 3axy \quad (a \neq 0)$ **4.** $xy + a^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), \quad a \neq 0$.

5. $ax^2 + bxy^2 - cxy \quad (a, b, c \neq 0)$. **6.** $x^3 + y^3 + 3xy$.

7. $(x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$. **8.** $x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

9*. $x^2y^2(1 - x - y)$, **10*.** $x^3y(1 - x - y)$.

11. Да се најдат екстремите на функцијата од три променливи,

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + (4 - x - y - z)^2 .$$

12. Да се докаже дека изразот $F(x, y, z) = \cos x \cos y \cos z$, каде што x, y, z се аглите на произволен триагоплник, има најголема вредност $\frac{1}{8}$.
Помош. $x + y + z = \pi$, т.е. $z = \pi - x - y$, па $f(x, y) = F(x, y, \pi - x - y) = \cos x \cos y \cos(\pi - x - y)$; максимум се достигнува за $x = y = \frac{\pi}{3} \quad (= z)$.

Во задачите 13–16 да се најдат екстремите на функцијата $y(x)$ односно на $z(x, y)$, определена имплицитно со дадената равенка.

13. $y^3 - 3xy + x^3 = 0$. **14.** $y^4 - 4a^2xy + x^4 = 0$.

15. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. **16.** $x^3 + 6y^2 - 3xz^2 + 3z = 0$.

17*. Да се покаже дека функцијата $z = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2}$ има единствен екстрем (и тоа, максимум) во целата област $\mathbb{R}^2$, но таа нема ни НМВ ни НГВ.

3.5. Условни екстреми

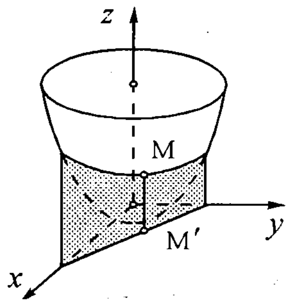
Пред да дадеме формална дефиниција на поимот условен (врзан) екстрем, ќе разгледаме еден конкретн пример.

ПРИМЕР 1. Да ја најдеме точката со најмала апликата z што лежи на пресекот од параболоидот $z = x^2 + y^2$ и рамнината $x + y - 2 = 0$.

Јасно е дека пресечната крива (црт. 1),

$$\{z = x^2 + y^2 , \quad x + y - 2 = 0\}$$

може да се добие и како пресек на површината $z = x^2 + (2-x)^2$ и рамнината $x + y - 2 = 0$. Лесно се проверува дека НМВ $\{x^2 + (2 - x)^2\} = 2$ и дека таа се добива за $x = 1$. Од тоа следува дека бараната точка (со најмала ап- ликата) е $M(1, 1, 2)$.



Црт. 1

За вредноста $z = 2$ велиме дека е *екстрем* на функцијата $z = x^2 + y^2$ *при врската* $x + y - 2 = 0$ или дека е условен (врзан) екстрем. Самиот термин "условен" се употребува затоа што таа вредност не мора да биде екстрем на функцијата $z = x^2 + y^2$, ако не се земе предвид врската $x + y - 2 = 0$. Навистина, во точката $(1, 1)$ имаме $z_x = z_y = 2$, па екстрем во таа точка не постои.

Поопшто, нека е дадена функцијата $f(x, y)$ и "врската" $\varphi(x, y) = 0$. Ќе велиме дека функцијата f **има врзан или условен максимум** во точката (x_0, y_0) ако се исполнети следниве услови:

а) постои околина U на точката (x_0, y_0), таква што функциите $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ се дефинирани за секоја точка $(x, y) \in U$;

б) $\varphi(x_0, y_0) = 0$; в) за секоја точка $(x, y) \in U$, таква што $\varphi(x, y) = 0$, точно е неравенството

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Слично се воведува и поимот **врзан (условен) минимум.**

Во случаите кога $\varphi(x, y) = 0$ може да се реши, на пример по y, тогаш наоѓањето на условните екстреми се сведува на наоѓање на екстреми на функции од една реална променлива, како што тоа беше направено во примерот 1. Меѓутоа, не е секогаш можно равенката $\varphi(x, y) = 0$ да се реши по една од променливите, па принудени сме условните екстреми да ги наоѓаме на друг начин. Во таа смисла се покажува корисна следнава:

Теорема 1 (потребни услови за врзани екстреми).

Нека (x_0, y_0) е точка на условен екстрем на функцијата $z(x, y)$ при врската $\varphi(x, y) = 0$ и нека се исполнети следниве услови:

(i) *$f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ имаат непрекинати изводи во околина на точката (x_0, y_0);*

(ii) *во точката (x_0, y_0) еден од изводите φ_x, φ_y не е нула.*

Тогаш постои број λ, кој заедно со x_0 и y_0 ги задоволува равенствата:

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) + \lambda\, \varphi_x(x_0, y_0) &= 0\,, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda\, \varphi_y(x_0, y_0) &= 0\,, \\ \varphi(x_0, y_0) &= 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

Доказ. Да претпоставиме дека $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Според Т. 1 од **2.7**, со $\varphi(x, y) = 0$ е определена функција $y = y(x)$, којашто е диференцијабилна во некој сегмент $[x_0 - \gamma, x_0 + \gamma]$. Тогаш функцијата $z = f\big(x, y(x)\big)$ ќе има екстрем за $x = x_0$, а според направените претпоставки постои изводот на таа функција по x и тој ќе биде нула. Според тоа, во точката (x_0, y_0) имаме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0\,, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0\,. \tag{2}$$

Равенството $\varphi(x, y(x)) = 0$ е точно за секој $x \in [x_0 - \gamma, x_0 + \gamma]$, па затоа ќе имаме:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0\,. \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува дека за секој реален број λ имаме:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy = 0\,.$$

Поради $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, можеме да го избереме λ така да биде $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Тогаш добиваме и $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx = 0$, за секое dx од што следува $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. Според тоа, во точката (x_0, y_0) ќе бидат исполнети равенствата (1), т.е. теоремата е докажана. ◊

(Поради симетријата што постои меѓу x и y, не е битно што претпоставивме $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. На ист начин би се спровел доказот и при претпоставката $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$.)

Како последица од Т. 1 се добива дека *точките на условните екстреми на функцијата $f(x, y)$ при врската $\varphi(x, y) = 0$ треба да се бараат меѓу решенијата на системот* (1), *или пак меѓу оние точки што ја задоволуваат равенката, но не исполнуваат некој од условите* (i), (ii) *изнесени во* Т. 1.

Меѓутоа, не секоја точка определена на тој начин е точка на условен екстрем. Со наредната теорема ќе изнесеме некои доволни услови за егзистенција на условни екстреми. Претходно да забележиме дека првите две од равенствата (1) се совпаѓаат со соодветните равенства од кои се добиваат стационарните точки на функцијата

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y)\,.$$

Оваа функција е позната под името **функција на Лагранж**, а бројот λ се вика **лагранжов множител**.

Теорема 2 (**доволни услови за врзан екстрем**).

Нека (x_0, y_0) и λ го задоволуваат системот (1). *Ако при така избраниот λ постои обичен екстрем на функцијата на Лагранж $\Phi = f + \lambda\varphi$ во точката (x_0, y_0), тогаш (x_0, y_0) ќе биде точка и на условен екстрем за функцијата $z = f(x, y)$ при врската $\varphi(x, y) = 0$.*

Доказ. Нека функцијата Φ има на пример, максимум во (x_0, y_0), т.е. за секоја точка (x, y) од некоја околина на (x_0, y_0) е точно неравенството

$$\Phi(x, y) \leq \Phi(x_0, y_0)\,, \qquad \text{т.е.}$$

$$f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \le f(x_0, y_0) + \lambda\varphi(x_0, y_0).$$

Поради $\varphi(x_0, y_0) = 0$, последното неравенство добива облик

$$f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \le f(x_0, y_0).$$

Ако од споменатата околина на (x_0, y_0) ги земеме предвид само точките за кои е $\varphi(x, y) = 0$, ќе добиеме дека за нив $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$, а тоа според дефиницијата за условни екстреми, означува дека (x_0, y_0) е точка на условен максимум за $z = f(x, y)$ при врската $\varphi(x, y) = 0$. $\diamondsuit$

Да забележиме дека изнесените услови се доволни, но не се неопходни; види ја вежбата **1**.

Ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 2. Да ги најдеме условните екстреми на функцијата $z = x^2 - xy + y^2$ при врската $3x - 2y + 1 = 0$. Равенствата (1) во овој случај гласат:

$$2x - y + 3\lambda = 0, \quad -x + 2y - 2\lambda = 0, \quad 3x - 2y + 1 = 0,$$

од кои го добиваме решението $x = -\frac{2}{7}$, $y = \frac{1}{14}$ и $\lambda = \frac{3}{14}$. За најдениот λ, функцијата на Лагранж има облик

$$\Phi = x^2 - xy + y^2 + \frac{9}{14}x - \frac{3}{7}y + \frac{3}{14},$$

па во точката $(-\frac{2}{7}, \frac{1}{14})$ добиваме $\Phi_{xx} = 2 = A$, $\Phi_{xy} = -1 = B$, $\Phi_{yy} = 2 = C$. Бидејќи $AC - B^2 = 3 > 0$ и $A > 0$, во $(-\frac{2}{7}, \frac{1}{14})$, имаме условен минимум $z_{\min} = \frac{21}{196}$.

Да го разгледаме "поопштиот" случај.

За бројот $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ велиме дека е **врзан** (или **условен**) **максимум** на функцијата $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, условен од врските

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

ако се исполнети следниве услови:

а$'$) $\varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$ за $i = 1, 2, \ldots, k$;

б$'$) постои околина на точката $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, таква што за секоја точка $(x_1, \ldots, x_n)$ од таа околина, за која $f(x_1, \ldots, x_n)$ постои и $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, исполнето е неравенството

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Слично се дефинира и **врзан (условен) минимум.**

(Притоа се разбира, се претпоставува дека

$$f(x_1, \ldots, x_n), \quad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \quad \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$$

се дадени реални функции од n реални променливи.)

Ќе формулираме сега две теореми аналогни на Т. 1 и Т. 2 за случајот $n = 3$.

Теорема 1$'$ (потребни услови за врзан екстрем).

Нека $f(x_0, y_0, z_0)$ е условен екстрем на функцијата f при врските $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$. Ако функциите f, φ, ψ имаат *непрекинати парцијални изводи во некоја околина на точката* (x_0, y_0, z_0) *и ако, во таа точка, некоја од детерминантите*

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} \tag{4}$$

е различна од нула, тогаш постојат реални броеви λ, μ, *такви што во точката* (x_0, y_0, z_0) *е задоволен следниов систем равенки:*

$$\begin{aligned} &f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x = 0\,, \qquad f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y = 0\,, \\ &f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z = 0\,, \quad \varphi_x(x, y, z)\,, \quad \psi_z(x, y, z) = 0\,. \qquad \diamond \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 2′ (доволни услови за врзан екстрем).

Нека x_0, y_0, z_0, λ, μ *го задоволуваат системот* (5). *Ако функцијата*

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z) \tag{6}$$

има екстрем во точката (x_0, y_0, z_0), *тогаш* $f(x_0, y_0, z_0)$ *е условен екстрем на* f *при врските* $\varphi = 0$, $\psi = 0$. $\diamond$

Ќе направиме уште неколку забелешки во врска со условните екстреми.

Забелешка 1. Потребата од наоѓање условни екстреми се јавува и при задачите за најмала и најголема вредност. Како што споменавме во **3.2**, ако $f(X)$ е реална функција од n реални променливи $x_1, \ldots, x_n$, т.е. од $X = (x_1, \ldots, x_n)$ со домен $D \subseteq \mathbf{R}^n$, тогаш $f(X_1)$ е **најмала вредност** (НМВ) на $f(X)$ во D ако за секој $X \in D$, $f(X_1) \leq f(X)$, а $f(X_2)$ – **најголема вредност** (НГВ) – ако за секој $X \in D$, $f(X_2) \geq f(X)$.

За одредување на најмалата (или најголемата) вредност на $f(X)$ се користат резултатите од претходните раздели.

Забелешка 2. Поимот за условен екстрем може да се сведе на поимот за обичен екстрем. Имено, нека $f(X)$ е функција со домен D и нека $F \subseteq D$. Ставајќи $g(X) = f(X)$ за секоја точка $X \in F$, добиваме функција со домен F. За секој екстрем на $g(X)$ велиме дека е **условен екстрем** за $f(X)$ на F. Јасно е дека овој поим за екстрем е обопштение од погоре изнесениот поим за врзан екстрем.

Забелешка 3. Може да се воведе поим за **условна најмала** (односно **најголема**) **вредност**. Имено, ако $F \subseteq D$, тогаш ставајќи (како во забелешката 2) $(\forall X \in F) g(X) = f(X)$, добиваме функција $g(X)$ со домен F. Најмалата (односно најголемата) вредност на $g(X)$, ако постои, ја викаме условна најмала (односно најголема) вредност на $f(X)$ на F.

Вежби

1. Да се одредат екстремите на функцијата $z = xy$ при условот $x - y = 0$. Од добиениот резултат да се извлече и заклучок дека добиените доволни услови во Т. 2, во општ случај, не се нужни.

 Во задачите 2 и 3, да се најдат екстремите на дадената функција при назначената врска.

2. $u = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$ при $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$.
3. $u = xy + yz$ при $x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2 \quad (x, y, z > 0)$.
4. Низ точката (1, 2, 1) да се вовлече рамнина што исечува од координатните оски позитивни отсечки, така што волуменот, заграден од неа и координатните рамнини да биде најмал.
5. Во топка со радиус R да се впише правоаголен паралелопипед со најголем волумен.
6. Меѓу сите триаголници впишани во даден круг со радиус r да се определи оној што има најголема плоштина.
7. Да се најде најголемото растојание од координатниот почеток O до точките од пресекот на параболоидот $z=x^2+y^2$ со рамнината $x+2y-z=0$.

V.4. ЕЛЕМЕНТИ ОД ДИФЕРЕНЦИЈАЛНАТА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР И ОД ВЕКТОРСКИТЕ ПОЛИЊА

Поимот векторска функција, што ќе го воведеме овде, ќе го искористиме за изучување на неколку прашања сврзани со кривите во простор и површините. (Овие разгледувања се дел од една важна гранка од математиката наречена диференцијална геометрија, чијшто предмет на изучување се кривите и површините, со помош на математичката анализа.) Ќе воведеме и неколку поими од теоријата на векторските полиња. Целта ни е да го запознаеме читателот со почетните елементи од овие важни области за примената на математиката во физичките и техничките науки, без да навлегуваме во нивното опстојно изучување и без да се задржуваме на физичкото толкување на соодветните поими.

4.1. Векторски функции од една реална променлива

Со едноставен пример на векторска функција се сретнавме во IV.4.1, во врска со векторската равенка на права. Имено, нека $\mathbf{a}= (a_1, a_2, a_3)$ е даден ненулти вектор, а $\mathbf{r}_0$ е радиус векторот на дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. За радиус векторот $\mathbf{r}$ на произволна точка од правата што минува низ M_0 и е паралелна со $\mathbf{a}$ (црт. 1) имаме:

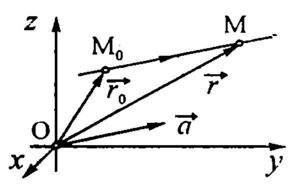
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a} = (x_0 + a_1 t\,, y_0 + a_2 t,\ z_0 + a_3 t)\,.$$

Така, за секој реален број t се добива по еден вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, т.е. со тоа е определено пресликување од множество $\mathbf{R}$ во множеството вектори во просторот.

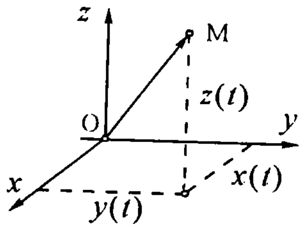
Поопшто, нека $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ се три функции од една реална променлива t, со домен D_x, D_y, D_z, соодветно. Радиус-векторот на точката (x, y, z),

$$\mathbf{r}(t) = \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

(црт. 2), зависи од "скаларната" променлива t, па затоа е природно тој да се нарече **векторска функција од скаларен аргумент** [1]) со домен $D = D_x \cap D_y \cap D_z$, при што функциите $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ се викаат **компонентни функции** (или **компоненти**) на $\mathbf{r}(t)$. Со други зборови, ако $D \subseteq \mathbf{R}$, а V е множеството од сите вектори од просторот, тогаш секое пресликување $\mathbf{r}\colon D \to V$ е **векторска функција од скаларен аргумент**.



Црт. 1



Црт. 2

ПРИМЕР 1. $\mathbf{r}(t) = \big(t^2, \sqrt{5-t}, \ln(t-2)\big)$ е векторска функција од скаларен аргумент со компонентни функции: $x(t) = t^2$, $y(t) = \sqrt{5-t}$, $z(t) = \ln(t-2)$ со домен

$$D = (-\infty, +\infty) \cap (-\infty, 5] \cap (2, +\infty) = (2, 5]\,.$$

Ако $x(t)$, $y(t)$, и $z(t)$ се диференцијабилни функции (во дадена точка t), тогаш **извод** на $\mathbf{r}(t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, се дефинира со:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,, \tag{2}$$

каде што $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ се изводите на функциите x, y, z по t. За функцијата $\mathbf{r}(t)$ велиме дека е **диференцијабилна** (во дадена точка), ако таа има извод (во дадената точка t), т.е. ако нејзините компонентни функции се диференцијабилни (во таа точка).

Диференцијалот на $\mathbf{r}(t)$ се опредлува со:

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}\, dt\,. \tag{3}$$

Во иста смисла како изводот (т.е. "покомпонентно") се дефинира и поимот за **интеграл**, како **неопределен**, така и **определен**. Имено:

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \Big(\int x(t)dt,\ \int y(t)dt,\ \int z(t)dt\Big)\,, \tag{4}$$

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_\alpha^\beta x(t)dt,\ \int_\alpha^\beta y(t)dt,\ \int_\alpha^\beta z(t)dt\right)\,. \tag{5}$$

Притоа, во неопределениот интеграл на $\mathbf{r}(t)$ се јавува интеграциона константа – вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$.

---

[1]) Во таа смисла велиме: скаларна функција од скаларен аргумент, наместо: реална функција од реална променлива.

Ако постои $\int \mathbf{r}(t)$ во интервалот (α, β), тогаш велиме дека $\mathbf{r}(t)$ е **интеграбилна** на (α, β).

Да забележиме дека и за векторските функции би можеле да се воведат претходно поимите за граница и непрекинатост, [2] а потоа со нивна помош би се добил поимот за извод. И поимот за неопределен интеграл би можел да се воведе преку соодветниот поим за **примитивна функција**, т.е. таква функција $\mathbf{R}(t)$, за која $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{r}(t)$. Во таа смисла и определениот интеграл би се пресметувал како кај реалните функции:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(\beta) - \mathbf{R}(\alpha)\,. \tag{6}$$

ПРИМЕР 2. За $\mathbf{r}(t) = (1, t, t^2)$ имаме:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (0, 1, 2t)\,; \quad d\mathbf{r} = (0, 1, 2t)dt\,;$$

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right) + \mathbf{c}\,; \qquad \int_0^2 \mathbf{r}(t)dt = \left(2, 2, \frac{8}{3}\right)\,.$$

Имајќи ги предвид правилата за пресметување изводи од реални функции, како и резултатите од **IV.3**, ја добиваме следнава теорема.

Теорема 1 (**за извод од збир и производи**).

Нека $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ *и* $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ *се три векторски функции, а* $u = u(t)$ *е реална функција. Ако сите тие функции се диференцијабилни (во дадена точка* t*), тогаш се точни следниве равенства:*

1^0. $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{b}}{dt}$.

2^0. $\frac{d}{dt}(u \cdot \mathbf{a}) = \frac{du}{dt} \cdot \mathbf{a} + u \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}$.

3^0. $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}$.

4^0. $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$.

5^0. $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}\,\mathbf{c}\right) + \left(\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\,\mathbf{c}\right) + \left(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)$

(*Притоа, треба да се има предвид дека* $\mathbf{a}\mathbf{b}$ *и* $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ *се скаларни функции од* t*, и дека во* 4^0 *и* 5^0 *е важен редоследот на функциите.* ◇

Ако $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$ е векторска функција од u дефинирана во интервалот (u_1, u_2), а $u = u(t)$ е скаларна функција од t дефинирана во интервалот (t_1, t_2), при што $u(t) \in (u_1, u_2)$ секогаш кога $t \in (t_1, t_2)$, тогаш $\mathbf{a}$ може да се разгледува и како функција од t, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u(t))$ дефинирана во интервалот (t_1, t_2), наречена **сложена функција** (види и: **I.2.3**; **V.1.6.**)

При претпоставка дека функциите $\mathbf{a}(u)$ и $u(t)$ се диференцијабилни, ја добиваме следнава формула:

6^0 (**за извод од сложена функција**).

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(u(t))) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \frac{du}{dt}\,. \quad \diamond$$

---

[2] како за функциите од n променливи во 1.5 и 1.6.

Со помош на формулите од Т. 1 или директно, се изведуваат соодветни формули за интеграл од векторска функција.

Извод од повисок ред на векторска функција се дефинира на ист начин како и кај реалните функции. Имено:

$$\frac{d^{n+1}\mathbf{a}}{dt^{n+1}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n}\right), \qquad \frac{d^1\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \tag{7}$$

Натаму често ќе ги користиме ознаките $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$ итн. наместо $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ итн.

Забелешка Во горните разгледувања станувашe збор за векторски функции *во простор*. Но, се разбира, реченото важи и за векторски функции *во рамнина*:

$$\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} \tag{1''}$$

(треба само да се изземе од разгледувањата третата компонента $z(t)$).

На крајот од овој параграф (во **4.6**) ќе **имаме** работа и со векторски функции од **векторски** аргумент. Имено, ако

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3) \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3) \tag{8}$$

се три реални функции (од три реални променливи x_1, x_2, x_3), дефинирани на исто множество $D \subseteq \mathbf{R}^3$, тогаш за секоја подредена тројка $(x_1, x_2, x_3) \in D$, еднозначно е определена една подредена тројка $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$. Со други зборови, за секој вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ од D, еднозначно е определен еден вектор $\mathbf{u} = \big(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x})\big) \in \mathbf{R}^3$, што значи дека со (8) е дефинирано едно пресликување од D во $\mathbf{R}^3$; за него ќе велиме дека е **векторска функција од векторски аргумент** и ќе го означуваме со една буква $\mathbf{u}$ или со $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, т.е. $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$. Значи:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \big(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x})\big), \quad \text{т.е.,}\\ \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \big(u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)\big).\end{gathered} \tag{9}$$

Притоа, функциите $u_1(\mathbf{x})$, $u_2(\mathbf{x})$, $u_3(\mathbf{x})$ се викаат **компоненти** (или: **компонентни функции**) на $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и тоа: прва, втора, трета компонента соодветно.

Вежби

1. За функцијата $\mathbf{r}(t) = \big(2t, \sqrt{t+1}, (1/t)\big)$ да се најде:

   а) доменот; б) $\dot{\mathbf{r}}(t)$; в) $\int \mathbf{r}(t)dt$; г) $\int_0^2 \mathbf{r}(t)dt$.

2. Радиус–векторот на една подвижна точка во моментот t е зададен со $\mathbf{r} = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$.

   Да се пресмета брзината v и забрзувањето w при $t = \frac{\pi}{2}$.

3. Дадена е функцијата $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$. Да се најде изводот по t на функцијата

   а) $\mathbf{r}^2$; б) $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$; в) $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$; $(\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}})$.

   Во задачите 4–6, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ е ненулта вектроска функција од скаларниот аргумент t; да се покаже точноста на тие тврдења.

4. Ако $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = 0$ за секој t, тогаш $|\,\mathbf{r}\,|$=конст . Докажи! Дали важи обратното?

5. Ако $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = 0$ за секој t, тогаш постои диференцијабилна (скаларна) функција $f(t)$ и константен вектор $\mathbf{a}$, така што $\mathbf{r} = f(t)\cdot\mathbf{a}$. Докажи! Дали важи обратното?

6. Ако $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ се колинеарни за секој t, тогаш со нив е колинеарне секој вектор $\mathbf{r}^{(n)}$, $n \geq 2$. (Притоа, со $\mathbf{r}^{(n)}$, е означен n–тиот извод на $\mathbf{r}$ по t.)
7. Да се најде векторот а) $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$, б) $\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}$, в) $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$, ако $\mathbf{r} = (-2+t, 3+t, 3+t)$.
8. Да се покаже дека $\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{o}$ ако и само ако $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ е константен вектор.
9. Дали од $\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} = 0$ следува $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = 0$?
10. Ако $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ и $u = u(t)$ се интеграбилни функции, користејќи ја Т. 1, покажи дека се точни равенствата:

    а) $\int(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,dt = \int\mathbf{a}\,dt + \int\mathbf{b}\,dt$;

    б) $\int\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{b}})\,dt = \mathbf{ab} - \int\mathbf{b}\dot{\mathbf{a}}\,dt$;

    в) $\int\mathbf{a}\dot{u}\,dt = u\mathbf{a} - \int u\dot{\mathbf{a}}\,dt$.
11. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се константни вектори и нека $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t$. Да се пресмета: а) $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$; б) $\ddot{\mathbf{r}}$.
12. Равенката на едно движење е $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)$. Да се најде брзината и забрзувањето на движењето во моментот $t = 1$.

4.2. Криви во просторот

Во претходниот раздел **4.1**, базирајќи се на резултатите од IV.**4.1**, споменавме дека, ако векторот $\mathbf{r}(t) = (x_0 + a_1 t,\ y_0 + a_2 t,\ z_0 + a_3 t)$ го сметаме за радиус–вектор, т.е. неговиот почеток е во координатниот почеток, и ако барем еден од броевите a_1, a_2, a_3 е различен од нула, тогаш краевите на векторот $\mathbf{r}(t)$, кога t се менува во $\mathbf{R}$, ја опишуваат правата што минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со векторот $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Ова согледување можеме да го прошириме земајќи поопшта векторска функција $\mathbf{r}(t)$,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) \tag{1}$$

со дефинициона област – некој сегмент $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. За таа цел, нека $\mathbf{r}(t)$ ги исполнува следниве услови:

i) $\mathbf{r}(t)$ е непрекината во $[\alpha, \beta]$, т.е. функциите $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ се непрекинати во $[\alpha, \beta]$,

ii) на различни вредности од променливата $t \in (\alpha, \beta)$ им одговараат различни вредности на $\mathbf{r}(t)$, т.е.

$$t_1, t_2 \in (\alpha, \beta),\ t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)\,,$$

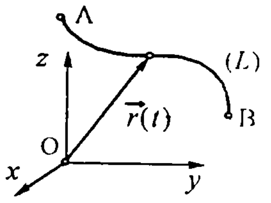
а за $t = \alpha$ и $t = \beta$ се допушта да биде $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$ или $\mathbf{r}(\alpha) \neq \mathbf{r}(\beta)$.

Во тој случај, краевите на векторот $\mathbf{r}(t)$ сметан како радиус-вектор, кога t се менува со сегментот $[\alpha, \beta]$, *опишува непрекината крива* (L), наречена **ходограф** [1)] на векторската функција $\mathbf{r}(t)$. Непрекинатата крива со својството ii)се вика **едноставна крива**, при што таа е **затворена** кога $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$. (На црт. 1 е претставена едноставна непрекината крива.)

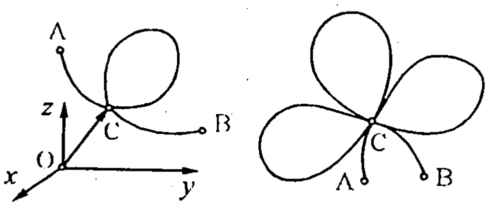
[1)] Ходографот на една векторска функција $\mathbf{r}(t)$, за која се исполнети условите i) и ii), се вика жордонова крива, наречена по математичарот Камиј Жордан (*Camille Jordan*, 1838–1922).

Значи, при избран декартов координатен систем, кривата (L) може да се претстави со векторска функција $\mathbf{r}(t)$ од обликот (1); притоа, за секоја вредност t_0 од $[\alpha, \beta]$ одговара по една точка M_0 од кривата, со радиус–вектор (или: *вектор на положбата*) $\mathbf{r}(t_0)$, т.е. со координати $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$.

Секое претставување од обликот (1) се вика **параметарско претставување** на кривата (L), а t се вика **параметар** на тоа претставување. Равенката $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ се вика **векторска равенка** на (L), а $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ се **параметарски равенки** на (L). (Овој вид на претставување е корисен во многу примени, на пример во механиката, каде што променливата t може да биде времето.)



Црт. 1



а) б)

Црт. 2

Забелешка 1. Условот ii), поткрепен со i), обезбедува вака воведениот поим да одговара на нашето интуитивно сфаќање за крива: тоа да не се сведува на една единствена точка, да нема "повторувања" и да нема "самопресечувања", т.е. "крива" да ни означува "едноставна крива".

(На црт. 2 а) е прикажана нееедноставна крива: таа се пресечува самата себе си во точката C. Тука е нарушен условот ii): за две различни вредности $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ допуштено е да биде $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, т.е. се добива една иста точка C; таа се вика **двојна точка** за кривата. Инаку една крива (L) може да има и **повеќекратни точки**, т.е. точки во кои таа се "самопресечува" повеќекратно; на црт. 2 б), C е четирикратна точка.)

Ако векторската функција $\mathbf{r}(t)$, покрај условот ii), го задоволува и условот:

iii) $\mathbf{r}(t)$ е непрекинато диференцијабилна (т.е. има непрекинат прв извод) во интервалот $[\alpha, \beta]$, при што за секој $t \in [\alpha, \beta]$ важи

$$\dot{x} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0,\ ^{2)} \quad .$$

тогаш ходографот на $\mathbf{r}(t)$ ќе го викаме **мазна крива**.

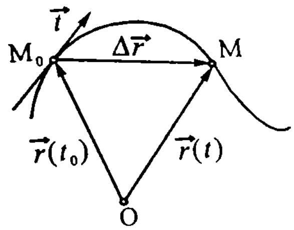
Забелешка 2. Може да се допушти постоење на конечен број точки: $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, такви што

2) т.е. барем еден од броевите $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ не е нула.

$$\dot{x}(t_i) = \dot{y}(t_i) = \dot{z}(t_i) = 0 \quad \text{за секој} \quad i = 1, 2, \cdots, k\,.$$

Тогаш за точките $M(t_1), \cdots, M(t_k)$ велиме дека се **сингуларни точки** на кривата.

Делејќи го сегментот $[\alpha, \beta]$ на потсегменти $[\alpha, t_1]$, $[t_1, t_2], \cdots, [t_k, \beta]$ ($k+1$ на број ако $t_1 \neq \alpha$ и $t_k \neq \beta$), добиваме дека на секој од тие потсегменти, со $\mathbf{r}(t)$ е определена мазна крива, поради што се вели дека кривата е **мазна по делови**. (Оправдание за атрибутот ”мазна” ќе се види од наредното разгледување.)



Црт. 3

Натаму ќе работиме главно со вакви криви и наместо *мазна крива* или *мазна по делови*, ќе велиме само *крива*.

Нека $\mathbf{r} = r(t)$ е непрекинато диференцијабилна неконстантна векторска функција од t (во некој сегмент $[\alpha, \beta]$). Да видиме какво геометриско толкување можеме да му дадеме на изводот $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. За таа цел ќе ставиме:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)\,.$$

Векторот $\Delta\mathbf{r}$ е еднаков со тетивниот вектор M_0M, каде што $\mathbf{r}(t_0)$ е радиус–векторот на M_0, а $\mathbf{r}(t_0 + \Delta r)$ – на M (црт. 3). Векторот

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \left(\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}\right)$$

е колинеарен со $\Delta\mathbf{r}$. Ако $\Delta t \to 0$, тогаш компонентите на $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ се стремат кон $\dot{x}(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, $\dot{z}(t_0)$, па затоа е природно $\dot{\mathbf{r}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ да го сметаме за **тангентен вектор** на кривата во точката M_0. Правата што минува низ M_0 и е паралелна со $\dot{\mathbf{r}}$ ја викаме **тангента на кривата** [3] во точката M_0. Означувајќи го радиус–векторот на произволна точка од тангентата со $\mathbf{R}$, $\mathbf{R} = (x, y, z)$, добиваме дека тангентата ја има следнава векторска равенка:

$$\mathbf{R} = r_0 + u\,\dot{r}(t_0) \tag{2}$$

при што u е променлив параметар. Таа векторска равенка може да се замени со следниве три скаларни равенки:

$$x = x_0 + u\,\dot{x}_0, \qquad y = y_0 + u\,\dot{y}_0, \qquad z = z_0 + u\,\dot{z}_0, \qquad \text{т.е} \tag{2'}$$

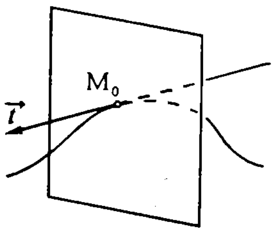
$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}\,. \tag{2''}$$

Рамнината што минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е нормална на тангентата, се вика **нормална рамнина** на кривата во точката M_0

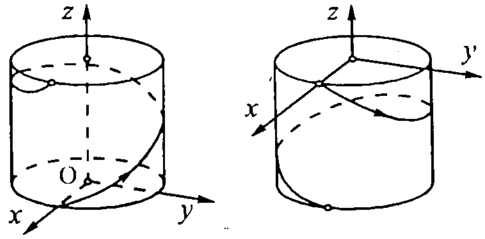
[3] Постоењето на тангента во секоја точка од кривата (т.е. за секој $t \in [\alpha, \beta]$) сугерира интуитивно дека кривата *нема ”остри точки”* или *”шилци”*, а ”непрекинато” преминување на тангентата од една во друга положба - дека *кривата е ”мазна”*.

(црт. 4). Според тоа, равенката на нормалната рамнина во M_0 е

$$\dot{x}_0(x-x_0)+\dot{y}_0(y-y_0)+\dot{z}_0(z-z_0)=0\,.$$



Сл. 4



Црт. 5

Ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 1. Векторската функција

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t,\,a\sin t,\,bt)$$

каде што a и b се ненулти константи, геометриски претставува крива што се вика **винтова линија** (црт. 5: а) кога $b>0$, б) кога $b<0$). Да ги најдеме равенките на тангентата и нормалната рамнина во точката M_0 што се добива за $t=\frac{\pi}{2}$.

За $t=\frac{\pi}{2}$ имаме: $\mathbf{r}_0=(0,a,b\frac{\pi}{2})$, т.е. $M_0(0,a,b\frac{\pi}{2})$, $\dot{\mathbf{r}}_0=(-a\sin t,\,a\cos t,\,b)$, $\dot{\mathbf{r}}_0=(-a,0,b)$, па равенките на тангентата се

$$\frac{x}{-a}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-b\frac{\pi}{2}}{b}\,.$$

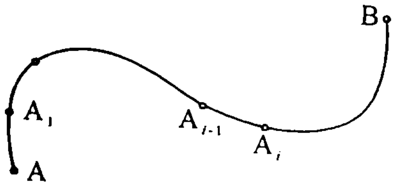
а равенката на тангентната рамнина е

$$-ax+b\left(z-b\frac{\pi}{2}\right)=0\,,\quad \text{т.е.}\quad 2ax-2bz+b^2\pi=0\,.$$

Да го разгледаме сега прашањето за *должината на лак на просторна крива.*

Должината на лакот AB од една просторна крива се определува на ист начин како и во рамнинскиот случај (в. **III.6.1**). Имено, на лакот AB избираме точки $A=A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n=B$ (црт. 6) и го формираме збирот

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{A_{i-1}A_i}\,.$$



Црт. 6

Границата на тој збир, ако постои и ако не зависи од начинот на делењето на лакот AB со точките A_i се вика **должина на лакот** AB; притоа претпоставуваме дека $\delta^{(n)}\to 0$ кога $n\to\infty$, каде што $\delta^{(n)}$ е најголемиот од броевите $\overline{A_{i-1}A_i}$, $i=1,2,\cdots,n$.

И пресметувањето е аналогно на рамнинскиот случај. Имено:

Теорема 1 (за должина на лак).

Ако функцијата $\mathbf{r}(t) = \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)$ *има непрекинат извод* $\dot{\mathbf{r}}(t)$ *во сегментот* $[a, b]$, *тогаш должината* s *на лакот* AB *од нејзиниот ходограф, при што точката* A *одговара на* $t = a$, *а точката* B – *на* $t = b$, *изнесува* [4]

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt\,. \tag{3}$$

Доказ. Имајќи ја предвид дефиницијата за должина на лак, како и формулата за растојание меѓу две точки, $A_{i-1}(x_{i-1},\, y_{i-1},\, z_{i-1})$ и $A_i(x_i,\, y_i,\, z_i)$, имаме:

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}\,.$$

Поради претпоставката дека $\mathbf{r}(t)$ е диференцијабилна, а според теоремата за средна вредност (т.е. теоремата на Лагранж: **II.3.3**), постојат броеви ξ_i, η_i, ζ_i меѓу t_{i-1} и t_i, такви што

$$x_i - x_{i-1} = \dot{x}(\xi_i)\Delta t_i\,, \quad y_i - y_{i-1} = \dot{y}(\eta_i)\Delta t_i\,, \quad z_i - z_{i-1} = \dot{z}(\zeta_i)\Delta t_i\,.$$

а од тоа следува:

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{\dot{x}^2(\xi_i) + \dot{y}^2(\eta_i) + \dot{z}^2(\zeta_i)}\,. \tag{4}$$

Да ставиме: $\dot{x}^2(\xi_i) = \dot{x}^2(t_i) + \alpha_i, \dot{y}^2(\eta_i) = \dot{y}^2(t_i) + \beta_i$ и $\dot{x}^2(\zeta_i) = \dot{z}^2(t_i) + \gamma_i$. Кога $\Delta t_i \to 0$, тогаш ξ_i, η_i, $\zeta_i \to t_i$, па поради непрекинатоста на $\dot{x}^2(t)$, $\dot{y}^2(t)$ и $\dot{z}^2(t)$ добиваме дека

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \alpha_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \beta_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \gamma_i = 0\,.$$

Равенството (4) сега го добива обликот

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{[\dot{x}^2(t_i) + \dot{y}^2(t_i) + \dot{z}^2(t_i)]\Delta t_i^2 + (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)\Delta t_i^2}\,.$$

Ставајќи

$$f(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,,$$

а имајќи ги предвид и неравенствата

$$\sqrt{|\, p\,|} - \sqrt{|\, q\,|} \le \sqrt{|\, p + q\,|} \le \sqrt{|\, p\,|} + \sqrt{|\, q\,|}\,, \text{[5]}$$

добиваме

$$f(t_i)\Delta t_i - \sqrt{|\,\alpha_i + \beta_i + \gamma_i\,|}\,\Delta t_i \le \overline{A_{i-1}A_i} \le f(t_i)\Delta t_i + \sqrt{|\,\alpha_i + \beta_i + \gamma_i\,|}\,\Delta t_i\,,$$

а потоа и:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\,\alpha_i + \beta_i + \gamma_i\,|}\,\Delta t_i \le s_n \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\,\alpha_i + \beta_i + \gamma_i\,|}\,\Delta t_i\,. \tag{5}$$

Нека $\alpha = \max\{|\,\alpha_1\,|, \ldots, |\,\alpha_n\,|\}$, $\beta = \max\{|\,\beta_1\,|, \ldots, |\,\beta_n\,|\}$, $\gamma = \max\{|\,\gamma_1\,|, \ldots, |\,\gamma_n\,|\}$. Тогаш

---

[4] Види ја забелешката 3 при крајот од овој раздел.

[5] Да се види вежба 3 во **1.1**.

$$\sum_{i=-1}^{n} \sqrt{|\,\alpha_i+\beta_i+\gamma_i\,|}\,\Delta t_i \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\,\alpha+\beta+\gamma\,|}\,\Delta t_i = \sqrt{\alpha+\beta+\gamma}\cdot(b-a)\,,$$

каде што за $t = a$ се добива точката A, а за $t = b$ – точката B. Неравенствата (5) сега постануваат

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i - \sqrt{\alpha+\beta+\gamma}\cdot(b-a) \le s_n \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i + \sqrt{\alpha+\beta+\gamma}\cdot(b-a)\,.$$

Поради α, β, $\gamma \to 0$ кога $\Delta t_i \to 0$ (што е јасно од изборот на α, β, γ) добиваме $\lim_{\Delta t_i\to 0}\sqrt{\alpha+\beta+\gamma}\,\Delta t_i = 0$. Земајќи го тоа предвид, како и

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i = \int_a^b f(t)dt\,,$$

добиваме дека

$$\int_a^b f(t)dt \le \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}} s_n \le \int_a^b f(t)dt\,, \quad \text{т.е.}$$

$$s = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t_i\to 0}} s_n = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt\,. \qquad \diamondsuit$$

ПРИМЕР 2. Да ја пресметаме должината на лакот AB од винтовата линија $\mathbf{r} = (a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$, при што A се добива за $t = \alpha$, а B – за $t = \beta$, $\alpha < \beta$. Имаме:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt\,. = \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+b^2}\,dt =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot t|_\alpha^\beta = \sqrt{a^2+b^2}\cdot(\beta-\alpha)\,.$$

Забелешка 3. Во врска со формулата (3) неопходно е да го истакнеме следново.

Прво, за да биде $s > 0$, неопходно е да биде $b > a$. Потоа, за различни вредности t_1 и t_2 меѓу a и b не смее да се добие една иста точка (т.е. треба да е исполнет условот ii)). Дека овој услов е битен може да се уочи од следниов пример. Нека $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$; јасно е дека ова претставува кружница во рамнината Oxy со центар во координатниот почеток и радиус 1. Ако го пресметаме интегралот

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt\,,$$

добиваме двапати поголем број отколку што е периметарот на кружницата. Тоа е и разбирливо, бидејќи кога t се менува од 0 до 2π се добива кружница, а потоа за $2\pi \le t \le 4\pi$ уште еднаш се добиваат точките од истата кружница.

Ако горната граница b во (3) е променлива: $b = t$, тогаш

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt\,, \quad \text{т.е.} \quad \dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,. \tag{6}$$

Должината s на лакот може да послужи како параметар при параметарското претставување на една крива. При употребата на овој специјален параметар работата во многу случаи се упростува, па затоа во овој раздел ќе се послужиме со него. Притоа за s, обично, се вели дека е **природен параметар**.

Ако $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ е векторска функција од променливата s, каде што s е природниот параметар, тогаш за разлика од случајот на произволен параметар t, кога изводот го означуваме со $\dot{\mathbf{r}}$, изводот $\mathbf{r}$ по s ќе го означуваме со $\mathbf{r}'$. Јасно е дека $\mathbf{r}'$ е паралелен со тангентата во соодветната точка. Уште повеќе, точно е следново:

Тврдење 2. *Векторот* $\mathbf{r}'$ *е орт, т.е.* $|\,\mathbf{r}'\,| = 1$.

Доказ. Да претпоставиме дека $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$; имаме

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}, \quad \text{т.е.} \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{s}, \quad \text{па}^{6)}$$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \mathbf{r}'^2\cdot\dot{s}^2, \quad \text{т.е.} \quad \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = \mathbf{r}'^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),$$

од каде што, поради $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 \neq 0$, добиваме $\mathbf{r}'^2 = 1$, што и сакавме да докажеме. ◇

Векторот $\mathbf{r}'$ е, значи, **орт на тангентата** и ќе го означуваме со $\vec{\tau}$.

ПРИМЕР 3. Да воведеме природен параметар за функцијата $\mathbf{r}(t) = (4\cos t,\, 4\sin t,\, 3t)$ во $[\alpha, \beta]$, и да го најдеме ортот на тангентата во произволна точка t од сегментот $[0, \pi]$. Имаме (в. Пр. 2): $s = \int\limits_{\alpha}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = 5(t-\alpha)$, па $t = \alpha + s/5$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Значи, $\mathbf{r} = (4\cos(\alpha+s/5),\, 4\sin(\alpha+s/5),\, 3s/5)$, а за $\alpha = 0$:

$$\mathbf{r} = \left(4\cos\frac{s}{5},\, 4\sin\frac{s}{5},\, 3s/5\right), \quad \mathbf{r}' = \left(-\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5},\, \frac{4}{5}\cos\frac{s}{5},\, \frac{3}{5}\right) = \vec{\tau}.$$

Да претпоставиме повторно дека кривата е дадена со равенка $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, при што t е кој било параметар и $\mathbf{r}(t)$ е доволен број пати дифреренцијабилна. Користејќи го правилото за диференцирање на сложени функции, лесно се наоѓаат соодветни врски помеѓу изводите по t и изводите по s. Притоа, треба да се има предвид равенството (од доказот на Т. 2):

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\cdot\dot{s}, \text{ т.е. } \mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}\cdot t', \text{ каде што: } \dot{s} = \frac{ds}{dt}, \quad t' = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{s} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2} = \frac{1}{t'}.$$

Имајќи го тоа предвид, ќе ги претставиме првите три изводи од $\mathbf{r}$ по s (т.е. $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$) со помош на $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dddot{\mathbf{r}}$ и изводите на t по s:

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}\cdot t'; \qquad \mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}\cdot t'^2 + \dot{\mathbf{r}}\cdot t'';$$

$$\mathbf{r}''' = \dddot{\mathbf{r}}\cdot t'^3 + \ddot{\mathbf{r}}\cdot 2t'\cdot t'' + \ddot{\mathbf{r}}\cdot t'\cdot t'' + \dot{\mathbf{r}}\cdot t''' = \dddot{\mathbf{r}}\cdot t'^3 + 3\ddot{\mathbf{r}}t't'' + \dot{\mathbf{r}}\cdot t'''. \qquad (7)$$

Во следниот раздел ќе ни бидат потребни и следниве формули, што се и од самостоен интерес:

6) Овде и натаму ќе го употребуваме и записот $\mathbf{a}\lambda$ (со исто значење како $\lambda\mathbf{a}$).

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (\dot{\mathbf{r}} \cdot t') \times (\ddot{\mathbf{r}} \cdot t'^2 + \dot{\mathbf{r}} \cdot t'') = t'^3 \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\,;$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}'\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}''') &= (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\cdot \mathbf{r}''' = t'^3(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot (\dddot{\mathbf{r}} \cdot t'^3 + 3\ddot{\mathbf{r}} \cdot t' \cdot t'' + \dot{\mathbf{r}} \cdot t''') \\ &= t'^6(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\dddot{\mathbf{r}} = t'^6(\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}).\end{aligned}$$

Имајќи предвид дека $t' = 1/\dot{s} = 1/\mid \dot{\mathbf{r}} \mid$, претходните равенства може да се напишат во обликот

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \frac{1}{\mid \dot{\mathbf{r}} \mid^3} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\,, \tag{8}$$

$$(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''') = \frac{1}{\mid \dot{\mathbf{r}} \mid^6} \cdot (\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}). \tag{9}$$

Вежби

Какви линии се ходографите на векторските функции во задачите 1–4, каде што a и b се константни, ненулти заемно нормални вектори? (Ортовите на a и b да се земат за координатни вектори.)

1. $\mathbf{r} = \mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t$. **2.** $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$.

3. $\mathbf{r} = \mathbf{a}\,ch t + \mathbf{b}\,sh t$. **4.** $\mathbf{r} = \mathbf{a}\,t^3 + \mathbf{b}\,t^2$.

5. **Да се најде ходографот на векторската функција $\mathbf{r}(t)$, ако се знае дека $\dot{\mathbf{r}} = \lambda\mathbf{r}$, каде што λ е константа.**

6*. **Да се покаже дека за секоја точка од кривата $\mathbf{r}(t)$ е точно следново тврдење: $\mathbf{r}(t) \perp \dot{\mathbf{r}}(t)$, ако и само ако таа крива лежи на сфера со центар во координатниот почеток.**

7*. **Нека $\mathbf{r}(t)$ е диференцијабилна неконстантна функција во сегментот $[t_1, t_2]$ и нека $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$. Да се примени Роловата теорема на функцијата $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}(t)$, каде што a е константен вектор. Резултатот да се интерпретира геометриски.**

Во задачите 8–11, да се напишат равенките на тангентата и нормалната рамнина на кривата во назначената точка.

8. $\mathbf{r} = (t,\, t^2,\, t^3)$ **во точката** $t = -1$.

9. $\mathbf{r} = (2\cos^2 t,\ 2\sin t\cos t,\ 2\sin t), \quad t = \pi/4$.

10. $\mathbf{r} = (t^3 - t^2 - 5,\ 3t^2 + 1,\ 2t^3 - 16),\ M(-1, 13, 0)$.

11. $\mathbf{r} = (e^t(\cos t + \sin t),\ e^t(\sin t - \cos t),\ e^t), \quad t = 0$.

12. **Каков агол образува тангентата на винтовата линија** $\mathbf{r} = (\cos t,\, \sin t,\, \sqrt{3}\,t)$ **во точката** $t = \pi/4$ **со рамнината** Oxy?

13. **Да се состават равенките на винтовата линија, ако радиусот на основата на цилиндарот е $a = 4$, а висината на еден винт е $h = 6\pi$. Потоа, да се најде диференцијалот ds на нејзиниот лак.**

Помош. $z = h$ **за** $t = 2\pi$, **т.е** $bt = 6\pi$.

Во задачите 14–15, да се пресмета должината на дадениот лак.

14. $\mathbf{r} = (e^t,\, e^{-t},\, t\sqrt{2})$ **од** $t = 0$ **до** $t = 1$.

15. $\mathbf{r} = (t,\, t^2/2,\, t^3/6)$ **од** $O(0, 0, 0)$ **до** $A(3, 9/2, 9/2)$.

4.3. Кривина, торзија, основни прави и рамнини

Поимот *кривина* на рамнинска крива е дефиниран во II.5.3; тој поим овде се обопштува и за нерамнински криви, а за нив се дефинира и нов вид кривина, наречена *торзија*.

Подолу ќе претпоставуваме дека првите три изводи на векторската функција $\mathbf{r}(t)$ се непрекинати во некоја околина на дадена точка што е предмет на разгледување. Како и во претходниот раздел, со $\vec{\tau} = \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$ ќе ги означуваме првите три изводи на $\mathbf{r}$ по природниот параметар s.

Поради $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$ имаме $\vec{\tau}'\vec{\tau} + \vec{\tau}\vec{\tau}' = 0$, т.е. $\vec{\tau}'\vec{\tau} = 0$, од што следува дека векторот $\vec{\tau}'$ е нормален на тангентниот вектор $\mathbf{r}'$. Векторот $\mathbf{r}'' = \vec{\tau}'$ ќе го викаме **вектор на кривината** и ќе го означуваме со $\mathbf{K}$;

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}''. \tag{1}$$

Интензитетот на векторот $\mathbf{K}$ се вика **прва кривина** или просто, **кривина** и се означува со K. За реципрочната вредност $\frac{1}{K} = \rho$ на кривината ќе велиме дека е **радиус на кривината** (за $K = 0$ ќе ставиме $\rho = \infty$).

Подоцна (во примерот 4) ќе видиме дека, за рамнински криви, поимот кривина што го воведовме погоре е во согласност со поимот кривина дефиниран во II.**5.3**, а овде ќе се увериме во тоа за случајот на кружница и права.

ПРИМЕР 1. За кружницата $\mathbf{r} = (a \cos t,\ a \sin t, 0)$ (со радиус a) имаме:

$$s = \int_0^t a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ dt = at\,;$$

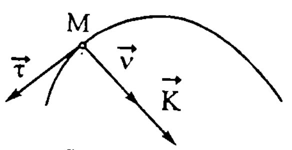
$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{a}(-a \sin t, a \cos t,\ 0) = (-\sin t,\ \cos t,\ 0)\,;$$

$$\mathbf{r}'' = \vec{\tau}' = \mathbf{K} = \frac{1}{a}(-\cos t,\ -\sin t,\ 0), \quad \text{па} \quad K = |\,\mathbf{K}\,| = \frac{1}{a}; \qquad \rho = a\,.$$

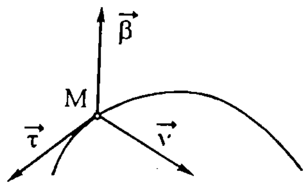
Значи, радиусот на кривината е еднаков со радиусот на кружницата.

ПРИМЕР 2. Да ја разгледаме правата $\mathbf{r} = (a_1t+b_1,\ a_2t+b_2,\ a_3t+b_3)$. Лесно се добива $K = 0$, т.е. кривината е нула во која било точка од правата.

Правата што минува низ дадената точка M и е паралелна со векторот на кривината во таа точка, ќе ја викаме **главна нормала**. Ортот на $\mathbf{K}$ ќе го означуваме со $\vec{\nu}$ и ќе велиме дека тој е **орт на главната нормала** (црт. 1).



Црт. 1



Црт. 2

Ќе ги напишеме повторно равенствата со чија помош се дефинирани векторите $\vec{\tau}$, $\mathbf{K}$, $\vec{\nu}$ и скаларите ρ и K:

$$\vec{\tau} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}; \quad \mathbf{K} = \vec{\tau}' = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{r}'', \quad |\,\mathbf{K}\,| = K, \quad \rho = \frac{1}{K};$$

$$\vec{\nu} = \frac{1}{K}\mathbf{K} = \rho\vec{\tau}' = \rho\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \tag{2}$$

и ќе дефинираме нов вектор $\vec{\beta}$ на следниов начин:

$$\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}.$$

Тројката $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ е позната под името **природен триедар** на кривата во точката M (црт. **2**).

Да забележиме дека, **разгледувајќи природен триедар**, претпоставуваме дека кривината **на кривата во разгледуваната точка** не е нула.

Правата што минува **низ** M **и** е паралелна со $\vec{\beta}$ се вика **бинормала**. Бидејќи $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ се единични заемно нормални вектори, јасно е дека и векторот $\vec{\beta}$ е орт; за него велиме дека е **орт на бинормалата**.

Ќе покажеме дека:

1^0. *Векторот* $\vec{\beta}\,' = d\vec{\beta}/ds$ *е паралелен со* $\vec{\nu}$.

Доказ. Од равенството $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$ следува дека

$$\vec{\beta}\,' = \vec{\tau}\,' \times \vec{\nu} + \vec{\tau} \times \vec{\nu}\,' = \vec{\tau} \times \vec{\nu}\,',$$

а поради $\vec{\beta}^{\,2} = 1$, имаме $2\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}\,' = 0$. Според тоа, векторот $\vec{\beta}\,'$ е нормален и на $\vec{\tau}$ и на $\vec{\beta}$ од што следува дека $\vec{\beta}\,'$ е паралелен со $\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$. $\diamond$

Поради **1**^{0}, можеме да ставиме

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = T\vec{\nu}, \qquad \text{т.е.} \qquad T = \vec{\beta}\,' \cdot \vec{\nu} \tag{3}$$

Скаларот T се вика **торзија или втора кривина**. Реципрочната вредност $R = \frac{1}{T}$ се вика **радиус на торзијата**. Исто така како при кривината, за $T = 0$ ќе ставиме $R = \infty$. (За разлика од кривината која никогаш не може да биде негативна, торзијата може да биде и негативна (в. (7$'$)). Според забелешката за природен тетраедар, торзија на крива разгледуваме само во точки во кои кривината не е нула.

Досега ги добивме формулите (2) и (3):

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{\nu}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = T\vec{\nu}.$$

Се поставува прашање како може да се изрази $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$. Од $\vec{\beta} = \vec{\nu} \times \vec{\tau}$ лесно се добива дека $\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$. Диференцирајќи го ова равенство по s, добиваме

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds}=\frac{d\vec{\beta}}{ds}\times\vec{\tau}+\vec{\beta}\times\frac{d\vec{\tau}}{ds}=-T\,\vec{\tau}\times\vec{\nu}-K\,\vec{\nu}\times\vec{\beta}=-T\,\vec{\beta}-K\,\vec{\tau}$$

Со тоа ја докажавме точноста на следново тврдење:

2^0. *Ако* $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ *е природниот триедар на кривата* $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ *во точката* M, *тогаш*

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\vec{\nu}\,,\quad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=\frac{1}{R}\vec{\nu}\,,\quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\vec{\tau}-\frac{1}{R}\vec{\beta}\,.\ \diamond \tag{4}$$

Равенствата (4) се познати под името **формули на Френе.** [1]

ПРИМЕР 3. За винтовата линија

$$\mathbf{r}=(a\cos t,\, a\sin t,\, bt)\qquad (a>0)$$

да ги најдеме: $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$, кривината K и торзијата T.

Прво ќе воведеме природен параметар s (како во Пр. 2 од **4.2**):

$$s=\int_0^t\sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t\,;$$

ставајќи $c=\sqrt{a^2+b^2}$, имаме $s=ct$, т.е. $t=\frac{s}{c}$, па дадената векторска функција $\mathbf{r}(t)$, со природен параметар s ќе биде:

$$\mathbf{r}(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},\, a\sin\frac{s}{c},\, \frac{b}{c}s\right).$$

Потоа, ќе ги најдеме $\vec{\tau}$, $\mathbf{K}$ и K:

$$\vec{\tau}=\mathbf{r}'=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\, \frac{b}{c}\right)=\frac{1}{c}(-a\sin t,\, a\cos t,\, b)\,;$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{r}''=\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\, 0\right)=\frac{a}{c^2}(-\cos t,\, -\sin t,\, 0)\,;$$

$$K=|\,\mathbf{K}\,|=\frac{a}{c^2}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=\frac{a}{c^2}=\frac{a}{a^2+b^2}\,.$$

На крајот, според (2) и (3), ќе ги пресметаме $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$, T:

$$\vec{\nu}=\frac{1}{K}\cdot\mathbf{K}=(-\cos t,\, -\sin t,\, 0)\,;\qquad \vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}\,,\quad \text{па:}$$

$$\vec{\beta}=\left(\frac{b}{c}\sin t,\, -\frac{b}{c}\cos t,\, \frac{a}{c}\right)=\frac{1}{c}\left(b\sin\frac{s}{c},\, -b\cos\frac{s}{c},\, a\right)$$

$$\vec{\beta}'=\frac{1}{c}\left(\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\, \frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\, 0\right)=\frac{b}{c^2}(\cos t,\, \sin t,\, 0)\,;$$

$$T=\vec{\beta}'\cdot\vec{\nu}=-\frac{b}{c^2}=-\frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

Ако е дадена една крива на соодветен начин, се поставува прашање како да се пресметаат кривината и торзијата на кривата. Од начинот на кој тие се дефинирани, јасно е дека најлесно се доаѓа до

[1] Фредерик Френе (*Frédéric Frenet*, 1801–1880) француски математичар.

формули во случајот кога кривата има равенка $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, каде што s е природен параметар. Имено, поради

$$K = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = |\mathbf{r}''| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|,$$

за кривината K ја добиваме следнава формула:

$$K = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}\,, \tag{5}$$

каде што, на пример, x'' е втор извод на x по s.

Кривината K може да се изрази и на друг начин. Имено, од $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$ следува:

$$K\vec{\beta} = \vec{\tau} \times K\vec{\nu} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'',$$

од што добиваме:

$$K = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|\,. \tag{6}$$

Да изведеме сега формула и за торзијата. Поради $\vec{\beta}\,' = T\vec{\nu}$, имаме:

$$T = \vec{\beta}\,'\vec{\nu} = (\vec{\tau}\,' \times \vec{\nu})\vec{\nu} + (\vec{\tau} \times \vec{\nu}\,')\vec{\nu} = (\vec{\tau} \times \vec{\nu}\,')\vec{\nu}\,.$$

Потоа, поради $\vec{\nu} = \frac{1}{K}\vec{\tau}\,'$, добиваме $\vec{\nu}\,' = \frac{1}{K}\vec{\tau}\,'' + \left(\frac{1}{K}\right)'\vec{\tau}\,'$, од што следува

$$T = \left[\vec{\tau} \times \left(\frac{1}{K}\vec{\tau}\,'' + \left(\frac{1}{K}\right)'\vec{\tau}\,'\right)\right] \cdot \frac{1}{K}\vec{\tau}\,' = \frac{1}{K^2}(\vec{\tau} \times \vec{\tau}\,'') \cdot \vec{\tau}\,',$$

$$T = -\frac{1}{K^2}(\vec{\tau}\,\vec{\tau}\,'\,\vec{\tau}\,''), \tag{7}$$

т.е $$T = -\frac{1}{K^2}(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''') = -\frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Да потсетиме уште еднаш дека торзијата T може да биде и негативен број, за разлика од кривината K, којашто е секогаш позитивен (попрецизно: ненегативен) број.

Користејќи ги (6) и (7), според (8) и (9) од **4.2**, во случај кога во $\mathbf{r}(t)$ параметарот е произволен, добиваме:

$$K = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \tag{8}$$

$$T = -\frac{(\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^2}\,. \tag{9}$$

Да разгледаме два примера.

ПРИМЕР 4. Нека е дадена рамнинската крива $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$. Тогаш имаме:

$$(\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}}) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \\ \dddot{x} & \dddot{y} & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \text{т.е.} \qquad T = 0\,.$$

Од ова следува дека торзијата на една рамнинска крива е нула во секоја точка од кривата. Да ја пресметаме сега кривината. Прво имаме $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, а потоа, според Лагранжовиот идентитет (1^0 во **IV.3.3**):

$$(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})^2 = \dot{\mathbf{r}}^2\ddot{\mathbf{r}}^2 - (\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})^2 = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2) - (\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})^2 = (\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})^2 .$$

Заменувајќи во (8), добиваме

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{8'}$$

Ако го имаме случајот $y = y(x)$, тогаш

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

каде што y' е извод на y по x, а y'' – втор извод на y по x.

Овој пример покажува дека дефиницијата за кривина на рамнинска крива, дадена во II.**5.3**, е во согласност со поопштата дефиниција дадена во овој раздел.

ПРИМЕР 5. Нека $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$; имаме: $|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{2}$, $(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})^2 = \dot{\mathbf{r}}^2\ddot{\mathbf{r}}^2 - (\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})^2 = 2$, а потоа и: $\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}} = 1$, $|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{2}$. Од сето тоа следува: $K = \frac{1}{2}$, $T = -\frac{1}{2}$. (Спореди со Пр. 3.)

Тангентата, главната нормала и бинормалата се викаат **основни прави на кривата r = r(t)**, во точката M_0 што се добива за $t = t_0$. Равенките на тангентата се определени со (1), (1') и (1'') во **4.2**. Да ги определиме сега равениките на главната нормала и бинормалата.

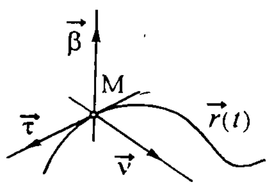
На бинормалата се наоѓа векторот

$$\vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{\nu} = K(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'') = \frac{K}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}) \tag{10}$$

(црт. 3), а од тоа следува дека *бинормалата е паралелна со векторот* $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$. Според тоа нејзината векторска равенка гласи:

$$\mathbf{r} = r_0 + \lambda(\dot{\mathbf{r}}_0\times\ddot{\mathbf{r}}_0), \tag{10'}$$

при што $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ и $\ddot{\mathbf{r}}_0$ се однесуваат на точката M_0.



Црт. 3

Од (10) лесно се добиваат **каноничните равенки на бинормалата**:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\dot{y}_0 & \dot{z}_0\\ \ddot{y}_0 & \ddot{y}_0\end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\dot{z}_0 & \dot{x}_0\\ \ddot{z}_0 & \ddot{x}_0\end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\dot{x}_0 & \dot{y}_0\\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0\end{vmatrix}} \tag{10''}$$

На главната нормала се наоѓа векторот:

$$\vec{\nu} = \vec{\beta}\times\vec{\tau} = -(\vec{\tau}\times\vec{\beta}) = -(\vec{\tau}\times(\vec{\tau}\times\vec{\nu})) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|^4}(\dot{\mathbf{r}}\times(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})).$$

Од тоа ја добиваме **равенката на главната нормала**:

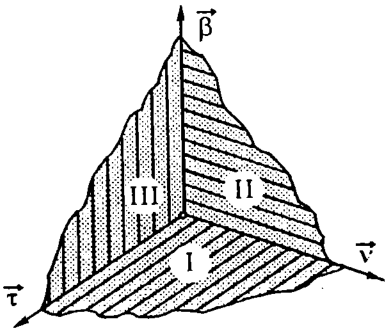
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda(\dot{\mathbf{r}}_0\times(\dot{\mathbf{r}}_0\times\ddot{\mathbf{r}}_0)). \tag{11}$$

Рамнината на која лежат тангентата и главната нормала се вика **оскулаторна рамнина**. Значи, оскулаторната рамнина минува низ точката M_0 и е нормална на бинормалата. Според тоа, имаме:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\dot{\mathbf{r}}_0\times\ddot{\mathbf{r}}_0)=0, \qquad (12)$$

т.е.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix}=0. \qquad (12')$$



Црт. 4
I – оскулаторна
II – нормална
III – ректификациона

Рамнината што минува низ M_0 и е нормална на главната нормала (значи во неа лежат тангентата и бинормалата) се вика **ректификациона рамнина**. Равенката на оваа рамнина е дадена со:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\big(\dot{\mathbf{r}}_0\times(\dot{\mathbf{r}}_0\times\ddot{\mathbf{r}}_0)\big)=0. \qquad (13)$$

Оскулаторната, ректификационата и нормалната рамнина се познати под името **основни рамнини** (црт. 4).

ПРИМЕР 6. Да ги најдеме равенките на основните прави и рамнини на кривата $\mathbf{r}=(t,t^2,t^3)$ во точката $M_0(1,1,1)$. Имаме:

$$\mathbf{r}_0=(1,1,1), \quad \dot{\mathbf{r}}_0=(1,2,3), \quad \ddot{\mathbf{r}}=(0,2,6);$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0\times(\dot{\mathbf{r}}_0\times\ddot{\mathbf{r}}_0)=(\dot{\mathbf{r}}_0\,\ddot{\mathbf{r}}_0)\dot{\mathbf{r}}_0-(\dot{\mathbf{r}}_0)^2\ddot{\mathbf{r}}_0=22\dot{\mathbf{r}}_0-14\ddot{\mathbf{r}}_0=(22,16,-18)\,||\,(11,8,-9);$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0\times\ddot{\mathbf{r}}_0=(6,-6,2)\,||\,(3,-3,1)$$

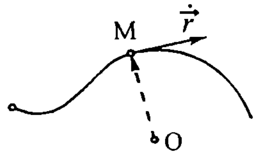
Така, равенките на: тангентата, нормалата и бинормалата (по тој редослед) се:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}; \quad \frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{-9}; \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1},$$

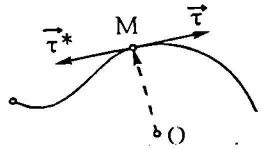
а равенките на: нормалната рамнина, ректификационата рамнина и оскулаторната рамнина (по тој редослед) се:

$$x+2y+3z=6; \quad 11x+8y-9z=10; \quad 3x-3y+z=1.$$

Забелешка. Ако е дадена мазна крива (L) со равенка $\mathbf{r}=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, тогаш во секоја точка (x_0,y_0,z_0) имаме наполно определен тангентен вектор $\dot{\mathbf{r}}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ (црт. 5). Тој вектор укажува на извесно *насочување на кривата*.



Црт. 5



Црт. 6

Ако истата крива е дадена со помош на друг параметар, насоката може да се промени. Да го разгледаме случајот кога параметар е должината на лакот, s,

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, при што точката точката A се добива за $s = 0$, а B – за $s = b$ (црт. 6). Ако ставиме $s^* = b - s$, т.е. $s = b - s^*$, тогаш равенката на кривата ќе добие облик

$$\mathbf{r} = \big(x(b - s^*),\, y(b - s^*),\, z(b - s^*)\big).$$

Во точката M ќе имаме

$$\vec{\tau}^* = \frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot(-1) = -\vec{\tau}.$$

Значи, ортот на тангентата го менува знакот. Потоа имаме

$$\mathbf{K}^* = \frac{d\vec{\tau}^*}{ds^*} = -\left(\frac{-d\vec{\tau}}{ds}\right) = \mathbf{K},$$

од што следува дека векторот на кривините е ист и во двата случаја. За ортот на бинормалата добиваме:

$$\vec{\beta}^* = \vec{\tau}^* \times \vec{\nu}^* = -\vec{\tau} \times \vec{\nu} = -\vec{\beta},$$

а потоа

$$T^*\vec{\nu} = T^*\vec{\nu}^* = \frac{d\vec{\beta}^*}{ds^*} = \frac{d\vec{\beta}^*}{ds}(-1) = \frac{d\vec{\beta}}{ds} = T\vec{\nu},$$

од што следува дека $T^* = T$.

Според тоа, точно е следново тврдење:

3^0. *Кривината, торзијата, основните прави и основните рамнини на една крива, не зависат од ориентацијата на кривата.*

Вежби

1. Да се најде ортот $\vec{\tau}$ на тангентниот вектор на кривата

   а) $\mathbf{r} = \left(2t,\, \frac{t^2}{2},\, \frac{t^3}{12}\right)$ за $t = 1$;

   б) $\mathbf{r} = \left(e^t\cos t,\, e^t\sin t,\, e^t\right)$, за t – произволно.

2. Да се воведе природниот параметар s (во сегментот $[0, \beta]$, $\beta > 0$) за функцијата $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$.

3. Да се најде природниот триедар $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ на кривата во назначената точка:
   а) $\mathbf{r} = (1 - \cos t, \sin t, t)$, $t = \frac{\pi}{2}$; б) $\mathbf{r} = (t, t^2, 2t)$, $t = 2$.

4*. Векторот $\vec{\omega} = \vec{\omega}(s)$ ги задоволува условите:

$$\vec{\tau}' = \vec{\omega} \times \vec{\tau}, \quad \vec{\beta}' = \vec{\omega} \times \vec{\beta}, \quad \vec{\nu}' = \vec{\omega} \times \vec{\nu}.$$

Да се изрази $\vec{\omega}$ со помош на $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$. ($\vec{\omega}$ се вика вектор на Дарбу. [1])

Во задачите 5–10 да се пресмета кривината K и торзијата T, како и нивните радиуси на кривината и торзијата ρ и R во назначената точка (ако вредноста на t не е назначена, се работи за произволна точка на кривата).

5. $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)$, $t = 1$.
6. $\mathbf{r} = (t, \ln t, 0)$, $t = 1$.
7. $\mathbf{r} = (2\cos t, \sin t, 0)$, $t = \frac{\pi}{2}$.
8. $\mathbf{r} = (a\,ch t, a\,sh t, at)$.
9. $\mathbf{r} = \left(\ln\cos t, \ln\sin t, t\sqrt{2}\right)$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.
10. $\mathbf{r} = \left(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\right)$.

Во задачите 11–13 да се најдат равенките на: а) тангентата и нормалната рамнина; б) бинормалата и оскулаторната рамнина; в) нормалата и ректификационата рамнина, на дадената крива во назначената точка.

---

[1] Жан Гастон Дарбу (*Jean Gaston Darboux, 1842–1917*), француски математичар, со голем придонес во интегралното сметање.

11. $\mathbf{r} = \left(3t^2,\, t^3,\, 6t\right)$, $t = 1$. **12.** $\mathbf{r} = \left(\frac{t^4}{4},\, \frac{t^3}{3},\, \frac{t^2}{2}\right)$, $t = 2$.

13. $\mathbf{r} = \left(e^t,\, e^{-t},\, t\sqrt{2}\right)$, $t = 1$.

14. Да се покаже дека дадената крива е рамнинска и да се најде рамнината во која лежи:

а) $\mathbf{r} = (1 - t,\, 2 + t^2,\, 3 - 2t + t^2)$; б) $\mathbf{r} = \left(cht,\, sht,\, e^t\right)$.

4.4. Векторски функции од два аргумента. Мазни површини

Поимот *површина* го разгледувавме во IV.**5.1** како геометриска интерпретација на равенка од обликот $F(x, y, z) = 0$, а во разделот **2.7** го дефиниравме поимот *мазна површина* (со поставување соодветни услови за функцијата $F(x, y, z)$). Овде, *мазните површини ќе ги дефинираме како специјални векторски функции од две реални променливи.*

Ако $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ е тројка функции од две реални променливи u, v дефинирани за секоја точка (u, v) од некое множество $D \subseteq \mathbf{R}^2$, тогаш ќе велиме дека

$$\mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v),\, y(u, v),\, z(u, v)\big) \tag{1}$$

е **векторска функција од две скаларни променливи** дефинирана во D. Така, на пример, за површината $z = z(x, y)$ ставајќи $x = u$, $z = z(u, v)$, добиваме дека радиус-векторот $\mathbf{r}$ на која било точка од површината има облик $\mathbf{r} = \big(u,\, v,\, z(u, v)\big)$. Според тоа, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ е векторска функција од две реални променливи u, v. (Во овој пример функцијата $x(u, v) = u$ не зависи од v, а $y(u, v) = v$ – од u.)

За функцијата $\mathbf{r}(u, v)$ ќе велиме дека **има дадено својство** на пример: *непрекинатост, диференцијабилност, ...) ако тоа својство го имаат сите три* **компонентни функции** $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. **И парцијалните изводи**

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{2}$$

се дефинираат покомпонентно, т.е. со:

$$\mathbf{r}_u = (x_u,\, y_u,\, z_u), \qquad \mathbf{r}_v = (x_v,\, y_v,\, z_v). \tag{2'}$$

Така, во случајот $\mathbf{r}\big(u,\, v,\, z(u, v)\big)$ имаме:

$$\mathbf{r}_u = (1,\, 0,\, p), \qquad \mathbf{r}_v = (0,\, 1,\, q), \tag{2''}$$

каде што $p = z_u$, $q = z_v$. Во овој случај, лесно се проверува дека:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0, \tag{3}$$

а имено:
$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-p,\, -q,\, 1)\,. \tag{3'}$$
Потоа, ако $(u_1,\, v_1)$, $(u_2,\, v_2)$ се точки од дефиниционата област на $\mathbf{r}(u,\, v) = \big(u,\, v,\, z(u,\, v)\big)$, тогаш
$$\mathbf{r}(u_1,\, v_1) = \mathbf{r}(u_2,\, v_2) \Rightarrow u_1 = u_2,\, v_1 = v_2\,, \tag{4}$$
бидејќи од $\big(u_1,\, v_1, z(u_1,\, v_1)\big) = \big(u_2,\, v_2, z(u_2,\, v_2)\big)$ следува: $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

Да забележиме дека *ако парцијалните изводи* z_x, z_y *се непрекинати, тогаш* $z = z(x,\, y)$ *е мазна површина* (в. i) и ii) во **2.7**). Во таа смисла можеме да кажеме дека векторската функција $\mathbf{r}(u,\, v) = \big(u,\, v,\, z(u,\, v)\big)$ е мазна површина.

Општо, за една векторска функција $\mathbf{r}(u,\, v)$, дефинирана во некоја област ќе велиме дека е **мазна површина** (т.е. дека радиус–векторот $\mathbf{r}(u,\, v)$ о п и ш у в а мазна површина) Σ, ако таа функција ги задоволува следниве услови:

i) *ако* $(u_1,\, v_1)$, $(u_2,\, v_2) \in D$, *при што барем едната од тие точки е внатрешна за* D, *тогаш*
$$\mathbf{r}(u_1,\, v_1) = \mathbf{r}(u_2,\, v_2) \Rightarrow u_1 = u_2,\, v_1 = v_2,\,;$$

ii) $\mathbf{r}(u_1,\, v_1)$ *има непрекинати парцијални изводи* $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ *во областа* D, *при што*
$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{o}\,.$$

Во тој случај равенките
$$x = x(u,\, v)\,, \qquad y = y(u,\, v)\,, \qquad z = z(u,\, v)$$
се **параметарски равенки** [1] на површината Σ.

ПРИМЕР 1. Нека $\mathbf{r} = (\cos u \sin v,\, \sin u \sin v,\, \cos v)$, т.е.
$$x = \cos u \sin v\,, \quad y = \sin u \cos v\,, \quad z = \cos v\,,$$
при што $D = \{(u,\, v) \mid 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le \pi\}$. Имаме:
$$\mathbf{r}_u = (-\sin u \sin v,\, \cos u \sin v,\, 0)\,, \quad \mathbf{r}_v = (\cos u \cos v,\, \sin u \cos v,\, -\sin v)$$
па:
$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-\cos u \sin^2 v,\, -\sin u\ \sin^2 v,\, -\sin v \cos v) = \mathbf{o}$$
повлекува: $\cos u \sin^2 v = \sin u \sin^2 v = \sin v \cos v = 0$, т.е $v = 0$ или $v = \pi$, а јасно е дека секоја точка $(u,\, 0)$ и $(u,\, \pi)$ е рабна за D.

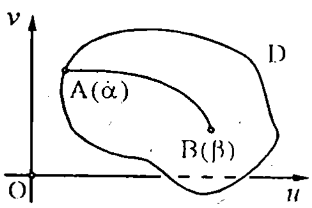
Значи, условот (3) е исполнет за внатрешните точки. Да претпоставиме сега дека $(u_1,\, v_1), (u_2,\, v_2) \in D$, $(u_1,\, v_1) \neq (u_2,\, v_2)$, при што $(u_1,\, v_1)$ е внатрешна, т.е. $0 < u_1 < 2\pi$, $0 < v_1 < \pi$. Тогаш $\mathbf{r}(u_1,\, v_1) = \mathbf{r}(u_2,\, v_2)$ акко:
$$\cos u_1 \sin v_1 = \cos u_2 \sin v_2, \quad \sin u_1 \sin v_1 = \sin u_2 \sin v_2, \quad \cos v_1 = \cos v_2\,.$$
Последната од добиените три равенки е можна само за $v_1 = v_2 \in (0,\, \pi)$, па од првите две добиваме: $\cos u_1 = \cos u_2$, $\sin u_1 = \sin u_2$, од што поради $0 \le u_1,\, u_2 \le 2\pi$ следува: $u_1 = u_2$.

[1] Види и (5) во IV.**5.1**.

Од сето тоа следува дека дадената површина е мазна. Инаку, лесно се проверува дека таа површина е сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ќе разгледаме и едно прашање за "кривите врз мазни површини". Затоа, да се вратиме на општа мазна површина Σ: $\mathbf{r}(u, v)$ добиена кога (u, v) се менува во областа D.

Да претпоставиме дека $u(t)$, $v(t)$ се непрекинато диференцијабилни функции од t во $[\alpha, \beta]$, такви што во декартовиот правоаголен рамнински координатен систем Ouv, со $u = u(t)$, $v = v(t)$ (кога t се менува во $[\alpha, \beta]$) се добива мазна крива $\overset{\frown}{AB}$ (црт. 1). Освен тоа, $(u(t), v(t)) \in D$ за секој $t \in [\alpha, \beta]$, при што за $\alpha < t < \beta$, (u, v) е внатрешна точка во D. (Потсетуваме дека условот кривата $\overset{\frown}{AB}$ да е мазна подразбира истакнување на следниве услови: (i) $\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2 \neq 0$ за секој t од внатрешноста на интервалот $[\alpha, \beta]$; (ii) ако еден од броевите t_1, t_2 е во внатрешноста на $[\alpha, \beta]$ и ако $u(t_1) = u(t_2)$, $v(t_1) = v(t_2)$, тогаш $t_1 = t_2$. Види и **4.2.**)



Црт. 1

Така добиваме крива (L): $\mathbf{r}(u(t), (v(t))$ на површината Σ. Користејќи го правилото за извод на сложена функција, добиваме:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \cdot \dot{u} + \mathbf{r}_v \cdot \dot{v},$$

за секој $t \in (\alpha, \beta)$. Имајќи предвид дека $\dot{u} \neq 0$ или $\dot{v} \neq 0$, и фактот дека $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, се неколинеарни вектори, добиваме дека $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$, т.е. дека (L) има еднозначно определена тангента во секоја своја внатрешна точка, а лесно се покажува дека се исполнети и другите услови за (L) да биде мазна линија.

Да претпоставиме дека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е дадена внатрешна точка на Σ, т.е.

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad z_0 = z(u_0, v_0),$$

каде што (u_0, v_0) е внатрешна точка на D. Векторите $(\mathbf{r_u})_0 = \mathbf{r_u}(u_0, v_0)$, $(\mathbf{r_v})_0 = \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ се ненулти и неколинеарни, па значи: постои единствена рамнина Π што минува низ точката M_0, а е паралелна и со двата вектора $\mathbf{r_u}$, $\mathbf{r_v}$. За Π велиме дека е **тангентна рамнина** на Σ во точката M_0. Векторот

$$(\mathbf{r_u})_0 \times (\mathbf{r_v})_0 = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_0, \begin{vmatrix} y_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_0, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0 \right) (= (\mathbf{r_u})_0 \times (\mathbf{r_v})_0)$$

е нормален на Π, па значи *равенката на тангентната рамнина во точката M_0 има облик*

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_0 (x-x_0)+\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_0 (y-y_0)+\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0 (z-z_0)=0 \quad (5)$$

(Притоа, индексот 0 кај детерминантите означува дека се работи за вредноста при $u = u_0$, $v = v_0$.)

Да претпоставиме дека (L): $\mathbf{r}(u(t), v(t))$ е која било мазна крива на Σ, што минува низ точката M_0, при што M_0 е внатрешна за (L). Од (5) следува дека тангентата на (L) во M_0 лежи во тангентната рамнина на Σ во M_0. Според таа точна е следнава:

Теорема 1.

Ако (L) е мазна крива од една мазна површина Σ, тогаш тангентата на (L) во внатрешна точка M_0 лежи во тангентната рамнина на Σ во точката M_0. $\diamondsuit$

Нормала на една мазна површина Σ во внатрешна точка M_0 е правата што минува низ M_0 и е нормална на тангентната рамнина. Според тоа, *каноничните равенки на нормалата* се дадени со:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_0}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0}. \quad (5')$$

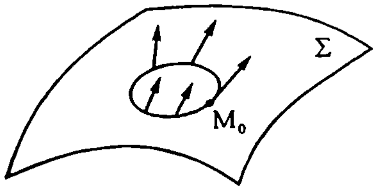
За разлика од тангентниот вектор $\dot{\mathbf{r}}$ на крива дадена со векторската функција $\mathbf{r}(t)$, којшто е наполно определен, па значи и неговиот орт, постојат два меѓу себе спротивни орта на нормалата на Σ во дадена точка. Имено, ако $\mathbf{n}$ е определен со

$$\mathbf{n}=\left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_0, \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_0, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_0\right), \quad (6)$$

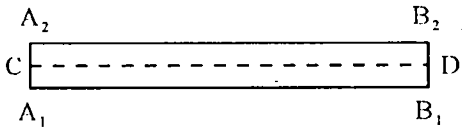
тогаш и $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$ се нормални на тангентната рамнина во M_0, т.е. лежат на нормалата низ M_0. *Избирајќи го едниот од тие вектори, ние ја ориентираме нормалата на површината во дадената точка.* Ако се договориме во секоја точка да го избереме $\mathbf{n}$ (или, исто така во секоја точка $-\mathbf{n}$) добиваме дека *векторот на нормалата е непрекината функција во D.* Се покажува дека важи и обратното, т.е. ако сакаме ортот на нормалата да е непрекината функција во D, тогаш со изборот на тој орт во една фиксна точка $M_0 \in \Sigma$, наполно ќе биде определен ортот на нормалата и во која било точка на Σ. Со други зборови, *мазните површини имаат две страни*, т.е ако ортот на нормалата во точката M_0 се движи по непрекината затворена линија, тогаш почетната и крајната положба на тој орт во M_0 се исти (црт. 2).

Постојат и површини со една страна и кај кои е можно почетната и крајната нормала во иста точка да се спротивни.

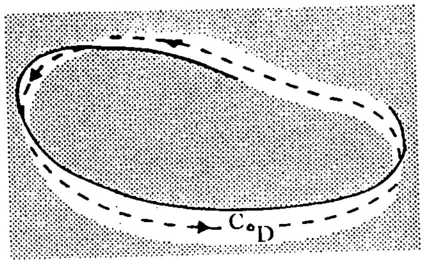
Таква површина се добива ако спротивните страни $A_1 A_2$ $B_1 B_2$ на правоаголникот, $A_1 B_1 B_2 A_2$ (црт. 3) се залепат, но така што да се совпаднат точките A_1 и B_2, A_2 и B_1. Така се добива површината од црт. 4, позната под името **мебиусова**[1] **лента**(или *мебиусов лист*). Ако C, D се средините на $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ соодветно, тогаш тие ќе се совпаднат, а отсечката CD ќе постане затворена крива на мебиусовата лента. Избирајќи една насока на нормалата на мебиусовата лента во точката C и движејќи се по средната линија CD, кога ќе дојдеме до точката D, ќе воочиме дека нормалата има спротивна насока од првобитната. Значи, *мебиусовата лента има само една страна.*



Црт. 2



Црт. 3



Црт. 4

Мебиусовата лента го има и следното необично својство: *таа ќе остане како едно парче и кога ќе се пресече на две долж средната линија* CD (затоа се нарекува и *"ѓаволска лента"*).

Овде ќе се задоволиме со тврдењето дека: *секоја мазна површина има две страни* (в. на пр. Кашанин II, кн. I, стр. 498), без да извршиме детална дискусија.

Немајќи можност да направиме детална анализа на теоријата на површините, ќе го завршиме овој раздел со неколку коментари.

Забелешка 1. Од Т. 1 следува дека дефиницијата на поимот тангентна рамнина даден во овој раздел е во согласност со дефиницијата на тој поим во **2.2.**

Забелешка 2. Ако се стави $E = \mathbf{r}_u^2$, $F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v$, $G = \mathbf{r}_v^2$, според Лагранжовиот идентитет (IV.**3.3**), се добива:

[1] Август Мебиус (*August Ferdinand Möbius*, 1790-1868)

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)^2 = \mathbf{r}_u^2 \cdot \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2 > 0\,.$$

Тогаш, квадратот ds^2, од диференцијалот на лакот од крива што лежи на површината Σ се пресметува по формулата:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\,. \tag{7}$$

Десната страна на (7) се вика **прва основна диференцијална форма** на површината $\mathbf{r}(u,\, v)$.

Забелешка 3. Да го означиме со $\mathbf{n}$ ортот на $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, т.е. $\mathbf{n} = |\, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|^{-1} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$. Ако скаларите L, M и N ги дефинираме со:

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uu}, \quad M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{uv}, \quad N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{vv}\,, \tag{8}$$

тогаш се точни и равенствата:

$$L = -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad M = -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{r}_v = -\mathbf{n}_v \mathbf{r}_u, \quad N = -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{r}_v\,. \tag{8'}$$

Освен тоа, точна е и формулата:

$$-d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,d^2\,. \tag{9}$$

Изразот од десната страна на (9) се вика **втора основна диференцијална форма** на површината $\mathbf{r}(u,\, v)$.

Смислата на првата основна форма се гледа од (7), а за улогата на втората може да се заклучи од равенството:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\delta}{\Delta s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,, \tag{10}$$

каде што:

1) $\delta = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{n}_0$,
при што $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_0$ се радиус-вектори на точките M_1, M_0 од површината, а $\mathbf{n}_0$ е ортот на нормалата на површината во M_0. (Според тоа $|\,\delta\,|$ е растојанието од M_1 до тангентната рамнина во M_0.)

2) Δs е должината на лакот $M_0 M_1$ на мазната линија на површината што ги спојува точките M_0, M_1. (Според тоа, $\Delta s \to 0$, кога $M_1 \to M_0$).

За една точка M на површината $\mathbf{r}(u,\, v)$ велиме дека е:

а) **елиптична**, ако $LN - M^2 > 0$, б) **хиперболична**, ако $LN - M^2 < 0$, в) **параболична**, ако $LN - M^2 = 0$, $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$; г) **стационарна**, ако $L = M = N = 0$.

Една елиптична точка M се вика **кружна** ако важат равенствата

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}\,. \tag{11}$$

Забелешка 4. Нека $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ е дадена точка на мазната површина Σ дадена со функцијата $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,\, v)$, при што $x_0 = x(u_0,\, v_0)$, $y_0 = y(u_0,\, v_0)$, $z_0 = z(u_0,\, v_0)$.

Низ точката M_0 врват безброј многу криви што лежат во Σ.

Линиите $\mathbf{r}(u_0,\, v)$ и $\mathbf{r}(u,\, v_0)$ се викаат **координатни линии**, а за u_0, v_0 велиме дека се **гаусови координати** на точката M_0. Според тоа: низ секоја точка M_0 на површината минуваат две координатни линии, а M_0 е еднозначно определена со своите гаусови координати.

Линијата (L) (што минува низ M_0) се вика **геодезиска**, ако нормалата $\mathbf{n}_0$ на Σ во M_0 се совпаѓа со главната нормала $\vec{\nu}$ на (L) во M_0. Низ секоја точка на Σ минуваат безброј многу геодезиски линии, а низ две различни точки од површината – само една геодезиска линија, освен во некои посебни случаи.

Низ две дадени точки M_1, M_2 на една мазна површина Σ врват безброј многу линии (L) што лежат во Σ, при што за секоја таква линија е определена должината на лакот $(\widehat{M_1M_2})_L$. Со менувањето на (L) се менува и должината на лакот, а, имајќи предвид дека секогаш таа должина е позитивна, постои инфимум s_0 на сите такви должини. Ако постои крива (L_0) на Σ што врви низ M_1, M_2, таква што $s_0 = (M_1\,M_2)_{L0}$, тогаш велиме дека постои најкус пат меѓу M_1 и M_2. Се покажува дека во тој случај (L_0) е геодезиска линија.

За една линија (L) низ точката M_0 велиме дека е **асимптотска**, ако нормалата $\mathbf{n}_0$ на површината во M_0 е колинеарна со бинормалата $\overrightarrow{\beta_0}$ во M_0. (Се покажува дека ова е еквивалентно со барањето: диференцијалот $(d\mathbf{n})_0$ од нормалата на Σ во M_0 е нормален на тангентата на кривата во M_0). *Низ секоја хиперболична точка на површината врват две асимптотски линии, а низ параболична точка – само една; низ елиптични точки нема асимптотски линии.* (Велиме дека тие се **имагинарни линии**.)

За линијата (L) низ M_0 велиме дека е **линија на кривина** во M_0 (за Σ) ако диференцијалот $(d\mathbf{n})_0$ во точката M_0 е колинеарен со тангентата во M_0. Низ секоја точка што не е кружна врват две линии на кривина, а низ една кружна точка врват безброј многу такви линии.

Ќе се задоволиме со направените забелешки. Заинтересираниот читател може да ја консултира книгата: Кашанин II, кн. прва, стр. 482–580), или некоја од поновите книги.

Вежби

Во задачите 1–4 да се испита каква површина (или: геометриска фигура) е претставена со дадената векторска функција од две променливи u, v.

1. $\mathbf{r} = (a_1u + b_1v + c_1,\ a_2u + b_2v + c_2,\ a_3u + b_3v + c_3)$, a_i, b_i, c_i се конст., $i = 1, 2, 3$.
2. $\mathbf{r} = \left(u \cos v,\ u \sin v,\ \sqrt{a^2 - u^2}\right)$, a е позитивна конст.
3. $\mathbf{r} = (a \cos u,\ a \sin u,\ v)$ $\quad (0 \neq a =$ конст.).
4. $\mathbf{r} = (u,\ v,\ a\,u\,v)$ $\quad (0 \neq a =$ конст.).

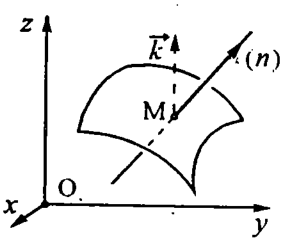
Во задачите 5–7 да се најдат координатните линии на дадената површина $\mathbf{r}(u, v)$ (в. забелешка 4) и да се испита обликот на таа површина.

5. $\mathbf{r} = \left(u \cos v,\ u \sin v,\ \sqrt{a^2 - u^2}\right)$, a е позитивна конст. (вежба 2).
6. $\mathbf{r} = \left(a \cos v,\ a \sin v,\ b(u + v)\right)$, $\quad a$ и b се ненулти конст.
7. $\mathbf{r} = (u \cos v,\ u \sin v,\ u)$.
8. Да се најде равенката на тангентната рамнина на површината $\mathbf{r} = \left(u \cos v,\ u \sin v,\ \frac{u^2}{2}\right)$, во точката што се добива за $u = 2$, $v = \pi/4$.

4.5. Градиент и извод во дадена насока

Нека $u = u(x, y, z)$ е функција од три реални променливи, дефинирана во некоја област $D \subseteq \mathbf{R}^3$. Бидејќи на секоја точка $M(x, y, z) \in D$ дадената функција ѝ кореспондира еден скалар u (т.е. реален број), велиме дека со $u = u(x, y, z)$ е определено едно **скаларно поле** на D, а и самата функција тогаш се вика **скаларно поле.**

Ако ставиме $u(x, y, z) = c$, c =константа, добиваме површина што ја викаме **ниво–површина** на скаларното поле.



Црт. 1

Ако постојат изводите u_x, u_y, u_z и ако не се сите еднакви со нула, тогаш нормалата (n) на ниво–површината (црт. 1) е паралелна со векторот (u_x, u_y, u_z), којшто се вика **градиент** на скаларното поле $u(x, y, z)$ и се означува со grad u; значи:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1}$$

ПРИМЕР 1. Функцијата $u = x^2 + y^2 + z^2$ е скаларно поле, чии ниво–површини се сферите $x^2 + y^2 + z^2 = c\,(c > 0)$, а градиентот во произволна точка е: $\operatorname{grad} u = (2x, 2y, 2z)$.

Ќе изнесеме неколку својства на градиентот.

Теорема 1.

Ако функциите $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $u_i = u_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $f(u_1, \cdots, u_m)$, *имаат парцијални изводи по секоја од променливите* x, y, z, *тогаш:*

1^0. $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$;

2^0. $\operatorname{grad}(u \cdot v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$;

3^0. $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$;

4^0. $\operatorname{grad} f(u_1, \cdots, u_m) = \frac{\partial f}{\partial u_1}\operatorname{grad} u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\operatorname{grad} u_m$.

Доказ. За равенството 1^0 доказот е јасен, а за 3^0 се добива слично како и за 2^0. Поради тоа ќе го докажеме равенството 2^0 и специјалниот случај 4^0 кога $m = 1$, од чијшто доказ лесно ќе се види како би се докажало равенството 4^0 и во општиот случај.

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(uv) &= \left(\frac{\partial(uv)}{\partial x}, \frac{\partial(uv)}{\partial y}, \frac{\partial(uv)}{\partial z}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} v + u\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} v + u\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} v + u\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \\
&= v\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \\
&= v \operatorname{grad} u + u\, grad\, v.
\end{aligned}$$

За $m = 1$ равенството 4^0 добива облик

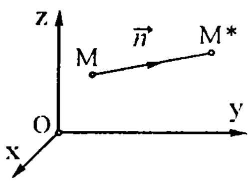
$4'$. $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

Дека ова равенство е точно, се покажува на следниов начин:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(u) &= \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x}, \frac{\partial f(u)}{\partial y}, \frac{\partial f(u)}{\partial z}\right) = \\
&= \left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \\
&= f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = f'(u) \operatorname{grad} u. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}$$

Ќе се запознаеме со уште едно толкување на градиентот.

Нека $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ е еден единичен вектор. Ако $M(x, y, z)$ е дадена точка од просторот, нека $M^*(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ е таква точка што $\mathrm{MM}^* \parallel \mathbf{n}$(црт. 2). Да го формираме количникот:



Црт. 2

$$\frac{u(\mathrm{M}^*) - u(\mathrm{M})}{\overline{\mathrm{MM}^*}} = \frac{u(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - u(x,\ y,\ z)}{\overline{\mathrm{MM}^*}}$$

Ако претпоставиме дека функцијата $u(x,\ y,\ z)$ е диференцијабилна, ќе имаме:

$$\begin{aligned}
\frac{u(\mathrm{M}^*) - u(\mathrm{M})}{\overline{\mathrm{MM}^*}} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\overline{MM^*}} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\overline{MM^*}} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\overline{MM^*}} + \\
&\qquad + a\frac{\Delta x}{\overline{MM^*}} + b\frac{\Delta y}{\overline{MM^*}} + c\frac{\Delta z}{\overline{MM^*}} = \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \\
&\qquad + a\frac{\Delta x}{\overline{MM^*}} + b\frac{\Delta y}{\overline{MM^*}} + c\frac{\Delta z}{\overline{MM^*}},
\end{aligned}$$

каде што a, b, $c \to 0$ кога $M^* \to M$. Од тоа следува дека

$$\lim_{M^* \to M} \frac{u(\mathrm{M}^*) - u(\mathrm{M})}{\mathrm{MM}^*} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma\,. \qquad (2)$$

Овој израз се вика **извод на функцијата** $u(x, y, z)$ **во насока на** $\mathbf{n}$ и се означува со $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$. Имаме, значи:

Теорема 2.

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma = (\mathrm{grad} u)\,\mathbf{n}\,. \quad \diamondsuit \qquad (3)$$

Од Т. 2, при $\mathbf{n} = (\mathrm{grad}\, u)/ \mid \mathrm{grad}\, u \mid$, непосредно се добива:

Тврдење 3.

Ако $\mathbf{n}$ *е колинеарен со* $\mathrm{grad}\, u$, *тогаш изводот е најголемиот можен по апсолутна вредност (во дадената точка), а и обратно; притоа:*

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mid \mathrm{grad} u \mid = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}\,. \quad \diamondsuit \qquad (4)$$

Оваа вредност на изводот $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ се вика *најголема брзина на растење на полето* $u(M)$ во дадената точка M_0.

ПРИМЕР 2. Да го најдеме изводот на функцијата $u = 3x^2yz$ во точката $A(2, -1, 0)$ во насока од A кон точката $B(3, 1, 2)$. Имаме:

$$\mathrm{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\mid \overrightarrow{AB} \mid} = \frac{(1, 2, 2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$\mathrm{grad}\, u = (6xyz,\ 3x^2z,\ 3x^2y), \quad \mathrm{grad}\, u(A) = (0, 0, -12);$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} = \big(grad\, u(A)\big)\cdot \mathrm{n} = (0, 0, -12)\cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -8\,.$$

Забелешка. И за реалната функција $u(x, y)$ од две реални променливи, определена во некоја област $D \subseteq \mathbf{R}^2$, се вели дека определува **скаларно поле на** D. Поимите *градиент* и *извод во дадена насока*, како и резултатите за нив, се пренесуваат и за овие, поспецијални скаларни полиња.

Да забележиме дека не се потребни нови дефиниции, зашто секоја функција $u(x, y)$ од две променливи x, y може да се смета и за функција $u(x, y, z)$, таква што $u_z = 0$, за секој z.

Да напомниме уште еднаш (в. го воведот на $\mathrm{grad}\, u$) дека:

Тврдење 4.

Ако $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *е фиксна точка* , а $u(x_0, y_0, z_0) = u_0$, *тогаш во секоја точка од површината* $u(x, y, z) = u_0$, *векторот* $\mathrm{grad}\, u$ *е нормален на површината.*

Вежби

1. Да се најдат ниво–површините на скаларното поле:
   а) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; б) $u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
2. Дадено е скаларното поле $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$. Да се најде
   а) $\operatorname{grad} u$ и неговата големина во точката $A(2, 1, 1)$;
   б) во кои точки градиентот е нормален на оската Oz;
   в) во кои точки градиентот е нула.
3. Да се најде градиентот и неговата големина за скаларното поле:
   а) $u = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ во точката $M_0(1, 2, 0)$;
   б) $w = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$ во точката $M_0(2, 1, 2)$;
   в) $u = f(r)$, каде што f е диференцијабилна функција и $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, во произволна точка.
4. Да се најде најголемата брзина на растење на даденото поле $u(M)$ во дадената точка M_0:
   а) $u(M) = 2x^2 + 4yz - 5z^2$, $M_0(3, -1, 2)$; б) $u(M) = x^2y - xz^2$, $M_0(2, 2, 1)$.
5. Да се најде изводот на скаларното поле $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ во точката $A(1, -2, 2)$; а) во насока од A кон точката $B(3, 4, 5)$; б) во насока на $\operatorname{grad} u$.
   Да се споредат резултатите од а) и б) (по апсолутна вредност).
6. Да се најде изводот на скаларното поле $u = 1/r$, каде што $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, во насоката $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
   Во кој случај $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$?
7. Да се најде изводот на функцијата $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ во произволна точка $M(x, y, z)$ во насока на радиус–векторот $\mathbf{r}$ на таа точка. Во кој случај тој извод е еднаков со големината на градиентот?
8. Да се најде најголемата брзина на растење на полето $u(M) = \ln(2x^2 + y^2)$ во точката $M_0(1, 2)$.
9. Да се најде аголот φ меѓу градиентите на "рамнинските" скаларни полиња $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $v = x^2 + y - \sqrt{2xy}$ во точката $M_0(1, 2)$.

4.6. Векторски полиња

Поимот векторска функција од една односно од две реални променливи (воведен во **4.1** односно **4.4**) ќе го прошириме на произволен број променливи. Имено, нека

$$x = x(t_1, \ldots, t_n), \quad y = y(t_1, \ldots, t_n), \quad z = z(t_1, \ldots, t_n) \tag{1}$$

се три реални функции од n реални променливи $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и нека пресекот $D = D_x \cap D_y \cap D_z$ од нивните дефинициони области е непразно множество. Тројката (x, y, z) ќе ја викаме **векторска функција од** n **реални променливи** и ќе ја означуваме со $\mathbf{r}(t_1, \ldots, t_n)$ или само со $\mathbf{r}$. Множеството D ќе го викаме домен на $\mathbf{r}$, а x, y, z – **компонентни функции** на $\mathbf{r}$.

За векторската функција $\mathbf{r}(t_1, \ldots, t_n)$ ќе велиме дека **има некое својство**, (на пример: *непрекинатост*, *диференцијабилност*) ако сите три компонентни функции го имаат тоа својство. Во таа смисла се дефинира **парцијален извод** $\mathbf{r}_i$) на $\mathbf{r}$ по t_i) со:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_i} = (x_i,\, y_i,\, z_i)\,, \tag{2}$$

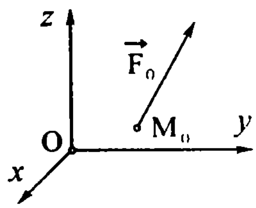
каде што

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial t_i}, \quad y_i = \frac{\partial y}{\partial t_i}, \quad z_i = \frac{\partial z}{\partial t_i}. \tag{2'}$$

Од тоа следува дека се осмислени изводи од кој било ред.

Во **4.2** и **4.3** видовме како диференцијабилни векторски функции од една реална променлива (со ненулти изводи и соодветни услови за "неповторливост") се толкуваат како *мазни линии*. Во **4.4**, диференцијабилните векторски функции од две реални променливи (што ги задоволуваат соодветните услови за неповторливост и несингуларност) се толкуваат како *мазни површини*. Во овој раздел ќе се задржиме на векторските функции од три реални променливи; нив ќе ги викаме **векторски полиња.**

Кај векторските полиња, независно променливите ќе ги означуваме со x, y, z наместо со t_1, t_2, t_3 зашто тројката независни променливи x, y, z ќе ја интерпретираме како точка $(x,\, y,\, z)$ во правоаголниот координатен систем $Oxyz$. За самата векторска функција ќе употребуваме која било буква, освен $\mathbf{r}$, зашто со $\mathbf{r}(x,\, y,\, z)$ ќе ја означуваме **единичната векторска функција**, т.е. $\mathbf{r}(x,\, y,\, z) = (x,\, y,\, z)$. Притоа, ако $\vec{F}(x,y,z)$ е една таква функција, тогаш за дадена точка $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $\vec{F_0} = \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ ќе го интерпретираме како вектор $\vec{F_0}$ со почеток во M_0 (црт. 1).



Црт. 1

Според тоа, едно векторско поле $\vec{F}$ на секоја точка M_0 (од дефиниционата област на $\vec{F}$) ѝ придружува вектор $\vec{F_0}$ со почеток во M_0.

Компонентните функции на $\vec{F}$ ќе ги означуваме со F_1, F_2, F_3, т.е.

$$\vec{F}(x,\, y,\, z) = \big(F_1(x,\, y,\, z),\, F_2(x,\, y,\, z),\, F_3(x,\, y,\, z)\big)\,. \tag{3}$$

Да истакнеме дека подолу, $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$... ќе бидат ознаки за векторски полиња, па според тоа, нивните компонентни функции ќе се означуваат со a_1, a_2, a_3 односно со b_1, b_2, b_3.... Натаму ќе претпоставуваме дека компонентните функции на векторското поле (што е предмет на разгледување) имаат парцијални изводи.

Ќе наведеме еден пример за векторско поле.

ПРИМЕР 1. **Градиентот на скаларното поле $u(x,\, y,\, z) = x^2y + yz^2$,**

$$\mathbf{grad}\, u = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k} = (2xy,\, x^2 + z^2,\, 2yz)$$

е векторско поле. Општо, ако $u = u(x,\, y,\, z)$ е скаларно поле, тогаш

$$\mathbf{grad}\, u = (u_x,\, u_y,\, u_z) = \mathbf{a}(x,\, y,\, z)$$

е пример за векторско поле.

Нека

$$\mathbf{a}(x,\, y,\, z) = \big(a_1(x,\, y,\, z),\, a_2(x,\, y,\, z)\, a_3(x,\, y,\, z)\big) \tag{3'}$$

т.е. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е векторско поле. Изразот

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \tag{4}$$

се вика **дивергенција** на $\mathbf{a}$ и се означува со $\operatorname{div} \mathbf{a}$; значи:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}. \tag{4'}$$

Според (4), ***дивергенцијата на векторско поле е скаларно поле.***

Користејќи го равенството (4′) лесно се покажува дека:

Теорема 1.

Ако c_1 и c_2 се скаларни константи, u е скаларна функција, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се векторски полиња, тогаш:

а) $\operatorname{div}(c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}) = c_1 \operatorname{div}\mathbf{a} + c_2 \operatorname{div}\mathbf{b}$;

б) $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u)\cdot \mathbf{a} + u \operatorname{div}\mathbf{a}$. ◇

Ако $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е векторско поле, тогаш можеме да формираме ново векторско поле, означено со $\operatorname{rot}\,\mathbf{a}$ и наречено **ротација** од $\mathbf{a}$, дефинирано на следниов начин.

$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right). \tag{5}$$

Како и при Т. 1, со директна проверка се покажува дека:

Теорема 2.

Ако $c_1, c_2, u, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *се како во* Т. 1, *тогаш:*

а) $\operatorname{rot}(c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}) = c_1 \operatorname{rot}\mathbf{a} + c_2 \operatorname{rot}\mathbf{b}$;

б) $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{a} + u \operatorname{rot}\mathbf{a}$. ◇

ПРИМЕР 2. **За векторското поле $\mathbf{a} = (xz, 2y, 3)$ и скаларното поле $u = xz$ да ги најдеме $div(u\mathbf{a})$ и $rot(u\mathbf{a})$.**

Имаме: $\operatorname{grad} u = (z, 0, x), \operatorname{div}\, \mathbf{a} = z + 2$, $\operatorname{rot}\mathbf{a} = (0, x, 0)$, па според б) од Т. 1 односно Т. 2:

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (z, 0, x)\cdot(xz, 2y, 3) + xz(z+2) = 2xz^2 + 2xz + 3x,$$

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = (z, 0, x) \times (xz, 2y, 3) + xz(0, x, 0) = (-2xy, 3z, 2yz).$$

Ќе го дефинираме сега таканаречениот **оператор набла** (ознака: ∇), којшто овозможува да се изврши извесно обединување на воведените поими за градиент, дивергенција и ротација. Тој се дефинира со:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{6}$$

и се смета, формално, за вектор.

Операторот набла (∇) може да делува на скаларни, а и на векторски полиња. Имено, ако $u(x, y, z)$ е скаларно поле, тогаш

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} u. \tag{7}$$

Ако пак $\mathbf{a}(x, y, z)$ е векторско поле, тогаш $\nabla\,\mathbf{a}$ го третираме како "скаларен производ", така што ќе имаме:

$$\nabla \mathbf{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}. \tag{8}$$

Барајќи формално, "векторски производ" $\nabla \times$ $\mathbf{a}$, добиваме:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{a} &= \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \mathbf{a}.\end{aligned} \tag{9}$$

Како и кај векторскиот производ на обични вектори, изразот за rot a може да се претстави и во следниов облик:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Имајќи ја предвид интерпретацијата на ∇ како вектор, а и тоа што е диференцијален оператор, можеме побрзо да го спроведеме изведувањето на некои од погоре споменатите формули, а и на други.

ПРИМЕР 3.

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = \nabla(u\mathbf{a}) = \nabla(\overset{\downarrow}{u}\mathbf{a}) + \nabla(u\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\nabla u)\mathbf{a} + u\nabla\mathbf{a} = (\operatorname{grad} u)\mathbf{a} + u \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Притоа, симболот " $\downarrow$" укажува на тоа, каде треба да се примени операторот ∇.

ПРИМЕР 4.

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = \nabla \times (u\mathbf{a}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{u}\mathbf{a}) + \nabla \times (u\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\nabla u) \times \mathbf{a} + u(\nabla \times \mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{a} + u \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

За едно векторско поле $\mathbf{a}(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$, велиме дека е **потенцијално поле** ако постои скаларна функција (x, y, z), таква што

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u. \tag{11}$$

Притоа, $u(x, y, z)$ се вика **потенцијал** на полето.

Според (11) можеме да ставиме $du = a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz$, па значи едно поле $\mathbf{a}(x, y, z)$ е потенцијално ако и само ако изразот $a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz$ е тотален диференцијал од некоја функција.

Точна е и следнава

Теорема 3.

Ако полето $\mathbf{a}(x, y, z)$ *има непрекинати (први) парцијални изводи, тогаш тоа е потенцијално ако и само ако* rot $\mathbf{a}$=$\mathbf{o}$.

Доказ. Нека $\mathbf{a}$ е потенцијално поле, т.е. постои скаларна функција $u(x, y, z)$, таква што $\mathbf{a}$=grad u. Тогаш $u(x, y, z)$ има непрекинати втори парцијални изводи, па според теоремата за мешаните изводи (Т. 1 во **1.8**) ќе добиеме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{o}.$$

Обратно, ако $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{o}$, тогаш имаме

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial z} = \frac{\partial a_3}{\partial y},$$

од што (според еден од резултатите што ќе се докаже во **VI.1.3**), следува дека постои функција $u(x, y, z)$, таква што

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_3, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{a} = \operatorname{grad} u,$$

со што е комплетиран доказот на теоремата. ◇

Да споменеме уште еден вид полиња. За векторското поле $\mathbf{a}(x, y, z)$ велиме дека е **соленоидално**, ако $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. (Во врска со нив да се видат вежбите 8–11.)

Вежби

Во задачите 1–4, како и во 9–13, $\mathbf{r}(x, y, z)$ е радиус-вектор (т.е. единичната векторска функција), $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и f е диференцијабилна функција. Во 1–4, да се пресмета дадениот израз.

1. $\operatorname{div} \mathbf{r}$. **2.** $\operatorname{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, $\mathbf{c}$ е конст. **3.** $\operatorname{rot}\mathbf{r}$. **4.** $\operatorname{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, $\mathbf{c}$ е конст.
5. Да се пресмета $\operatorname{div}(u\mathbf{a})$ и $\operatorname{rot}(u\mathbf{a})$ за:
а) $\mathbf{a} = (x^2, y^2, -xz)$, $u = xy^2$; б) $\mathbf{a} = (x^2, yz, xz)$, $u = x^2 z$.
6. Нека $u = (x, y, z)$ има втори парцијални изводи и $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е векторско поле. Да се пресмета: а) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a})$; в) $\operatorname{rot}(\operatorname{div}\mathbf{a})$.
7. Да се покаже дека
$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + 2(\nabla u)(\nabla v) + v\nabla^2 u,$$
каде што ∇ е операторот набла, а
$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$
Помош. Даденото равенство се добива со две последователни примени на операторот ∇ врз производот uv.
8. Да се покаже дека, за секое векторско поле $\mathbf{a}$, полето на $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ е соленоидално. Помош. Види ја вежбата 6 б).
9. Да се покаже дека е соленоидално векторското поле $\mathbf{a}$: а) $\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$; б) $\mathbf{a} = r(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, $\mathbf{c}$ е конст. вектор.
10. Да се покаже дека е потенцијално полето $\mathbf{a}$: а) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; б) $\mathbf{a} = \operatorname{rot}[f(t)\mathbf{r}]$. Дали $\mathbf{a}$ е соленоидално?

11*. Да се определи $f(r)$ така што да биде соленоидално полето $\mathbf{a}$:
а) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$; б) $\mathbf{a} = \frac{1}{r} f(r)\mathbf{r}$.

12. Дадено е полето $\mathbf{a} = (y + z, z + x, x + y)$. Да се покаже дека:
а) $\mathbf{a}$ е потенцијално; б) $u = xy + xz + yz$ е потенцијал на $\mathbf{a}$;
в) потенцијалот $u(x, y, z)$ на $\mathbf{a}$ е хармониска функција, т.е. ја задоволува лапласовата равенка
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{12}$$
13. Да се покаже дека: полето $\mathbf{a}\mathbf{r}/r^3$ е потенцијално при што $u = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}$ каде што r_0 е константа, е потенцијал на $\mathbf{a}$; потенцијалот $u(x, y, z)$ е хармониска функција (в. вежба 12).

V.5. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Да се провери кое од следните множества точки е ограничено, а кое не е:

   а) $M = \left\{(x, y)|4x^2 + 9y^2 \le 36\right\}$; б) $M = \left\{(x, y, z)|x^2 + y^2 \le z \le 1\right\}$;

   в) $M = \left\{(x, y)|0 \le y(1+x^2) \le 1\right\}$; г) $M = \{(x, y, z, u)\} \mid x^2+y^2+z^2+u^2 = 2\}$.

2. Да се дадат примери на множества (од n–димензионални точки) што се состојат само од: а) точки на згуснување, б) изолирани точки.

3. Нека A и B се различни точки од $\mathbf{R}^n$. Да се покаже дека постојат ε–околини на A и B што немаат заеднички точки.

4. Нека F е затворено подмножество од $\mathbf{R}^n$ и нека A_k е конвергентна низа од n–димензионални точки што му припаѓаат на F. Да се покаже дека и границата A на A_k му припаѓа на F.

   Во задачите 5–9 да се укаже кое од рамнинските множества определени со дадените неравенства, е област: отворена–затворена, едноставна–сложена (или не е област). Множествата да се скицираат.

5. $|\,x\,|+|\,y\,|\le 1$. 6. $x+y>0$, $-2<x<2$, $0<y<2$.

7. $(x^2+y^2-1)\big((x-4)^2+y^2-4\big)\ge 0$.

8. $x^2+y^2\le 4$, $(x-1)^2+y^2\ge \frac{1}{4}$, $(x+1)^2+y^2\ge\frac{1}{4}$.

9. $x^2+y^2<4$ $(x-1)^2+y^2>1$, $(x+1)^2+y^2>1$.

10. Нека $M \subseteq \mathbf{R}^2(\mathbf{R}^n)$. Да се покаже дека ако границата на секоја конвергентна низа чии членови се во M му припаѓа на M, тогаш М е затворено во $\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^n)$.

    Во задачите 11–16 да се определи (аналитично и графички) доменот на дадената функција.

11. $z=\sqrt{xy}+\sqrt{1-xy}$. 12. $z=\ln(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)$.

13. $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$. 14. $z=\ln\sin x-\ln y$.

15. $z=\ln[y\ln(x-y)]$. 16. $z=\arcsin\frac{y}{x^2}+\arccos(1-x)$.

17. Да се претстави плоштината z на прав кружен конус како функција од радиусот x на основата и висината y. Да се скицира доменот на функцијата z.

18. Да се претстави висината z на правилна четириаголна приамида како функција од основниот раб x и целокупната плоштина y. Да се скицира доменот на z.

19. Да се определи $f(x,y)$, ако $f(x+y,\,x-y)=x^2+y^2+2xy-2x$.

20. Нека $z=x^2+f\left(\sqrt{y}+1\right)$. Да се определат $f(y)$ и $z(x,y)$, ако $z=y$ при $x=1$.

    Во задачите 21–24 да се најде границата (ако постои) на дадената функција во укажаната точка.

21. $\frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$, $(2,2)$. 22. $\frac{x}{x+y}$, $(0,0)$.

23. $\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}$, $(0,0)$. 24. $(1+xy)^{1/(|x|+|y|)}$, $(0,0)$.

25. Да се провери дали за функцијата $f(x, y) = x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}$

постојат повторените лимеси L' и L'' како и лимесот L во точката $(0, 0)$.

Во задачите 26–29 да се испита непрекинатоста на дадената функција.

26. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + e^{x+y} \sin(x - y)$.

27. $f(x, y, z) = xyz/(x^2 + y^2 + z^2)$ за $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, $f(0, 0, 0) = 0$.

28. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}, & x \neq 0 \neq y, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

29. $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

30. Да се покаже дека функцијата f, дефинирана со: $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)$ за $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, е непрекината по x и по y поодделно во точката $(0, 0)$, но не е непрекината во таа точка.

31. Да се покаже дека функцијата $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{ако} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ако} \quad x = y = 0 \end{cases}$ во точката $(0, 0)$ е непрекината по секој зрак $x = t\cos\alpha$, $y = t \sin\alpha$ $(0 \leq t < +\infty)$ што минува низ $(0, 0)$. Сепак, $f(x, y)$ не е непрекината во $(0, 0)$.

32. $z = x^{y^2}$; да се пресмета: $\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2 \ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$.

33. $T = a\sqrt{\frac{u}{v}}$; да се докаже дека $u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} = 0$.

34. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; да се пресмета $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$.

35. $z = \sin x + f(\cos y - \sin x)$, каде што f е диференцијабилна функција. Да се пресмета: $\sec x \cdot z_x - \csc y \cdot z_y$. (Притоа: $\sec x = 1/\cos x$, $\csc y = 1/\sin y$.)

36. $z = \ln(x^2 + y^2)$; да се провери дали $z_{xx} + z_{yy} = 0$.

37. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$; да се покаже дека $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

38. $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, φ и ψ се двапати диференцијабилни функции. Да се провери дали $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

39. Да се провери равенството $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, ако $z = \varphi[y + \psi(x)]$, каде што φ и ψ се двапати диференцијабилни функции.

40*. Да се докаже дека функцијата $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ во точката $(0, 0)$:

а) е непрекината; б) ги има обата парцијални извода f_x, f_y; в) не е диференцијабилна. г) Да се покаже дека изводите f_x, f_y се неограничени во околина на точката $(0, 0)$.

41. Да се докаже дека функцијата $f(x, y) = (x + y)^2 \sin(x^2 + y^2)^{-1/2}$ за $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$, има парцијални изводи f_x, f_y во околина на точката $(0, 0)$, коишто се прекинати во $(0, 0)$. Сепак, f е диференцијабилна во точката $(0, 0)$.

42. Да се покаже дека функцијата f, определена со $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ако $x^2 + y^2 > 0$, $f(0, 0) = 0$, а) е непрекината во целата рамнина; б) има парцијални изводи по x и y во целата рамнина; в) f_x и f_y имаат прекин во $(0, 0)$.

43. Дадена е функцијата $z = (x^2 - y^2)f(t)$, каде што $f(t)$ има непрекинат втор извод и $t = xy$. а) Да се најде z_{xy}. б)* Да се определи $f(t)$ така што $z_{xy} = 0$.

Во задачите 44–49, да се најдат парцијалните изводи на дадената сложена функција.

44. $z = u + v^2, \quad u = x^2 + \sin y, \quad v = \ln(x + y); \quad z_x, z_y.$

45. $z = \frac{1+u}{1+v}, \quad u = -\cos x, \quad v = \sin x; \quad z_x, z_y.$

46. $z = \arcsin(u + v), \quad u = \sin x \cos\alpha, \quad v = \cos x \sin\alpha; \quad z_x.$

47. $z = f(u, v)$, $u = x^2 y$, $v = x^y$ и f е диференцијабилна функција; z_x, z_y.

48. $z = f(2x^2 - 3y)$, f е двапати диференцијабилна функција.

а) $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$. б)* Да се определи f така што $3z_y + z_{yy} = 0$.

49. $z = f\left(x^2 - y^2, e^{xy}\right)$, f е двапати диференцијабилна функција; z_x, z_y, z_{xx}.

Во задачите 50–54 да се најде назначениот тотален диференцијал на дадената функција.

50. $z = \arcsin\frac{y}{x}$, $dz = ?$

51. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $df(1, 0) = ?$ при $dx = 1/2$, $dy = 1/4$.

52. $z = \ln(ax+by)$. Да се покаже дека: а) $d^3z = 2dz^3$; б) $d^n z = (-1)^{n-1}(n-1)!\,dz^n$.

53. $z = f(u, v), \quad u = 2x + 1, \quad v = 3x - 5; \quad d^2z = ?$

54. $z = f(x^2 - y^2, 1 + xy)$, а) $dz = ?$ б) $d^2z = ?$

55. Да се состави приближна формула при мали апсолутни вредности на x, y, z за функцијата

а) $u = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$; б) $u = \sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$.

56. Да се разложи функцијата $f(x, y) = y^x$ во околина на точката $(1, 1)$ по формулата на Тејлор, до членовите од втор ред заклучно.

57. Да се разложи $f(x, y) = e^x \sin y$ по Маклореновата формула до членовите од трет ред заклучно.

58. Со Маклореновата формула, да се изведе приближна формула со точност до членовите од втор ред во однос на x и y, за функцијата $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-y}$.

Во задачите 59–62, y е функција од x определена имплицитно со равенката $F(x, y) = 0$. Да се проверат наведените резултати.

59. $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}.$

60. $F(x, y) = x^3 - 3cxy + y^3 = 0; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-cy}{cx-y^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^3xy}{(cx-y^2)^3}.$

61. $F(x, y) = y^x - x^y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}.$

62. $F(x, y) = e^y + ax^2e^{-y} - 2bx = 0; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$

Во задачите 63–65 да се покаже дека функцијата $z = z(x, y)$, определена имплицитно со даденото равенство, ја задоволува назначената парцијална диференцијална равенка.

63. $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}, \quad x^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}.$

64. $x^2+y^2+z^2=f(x+2y+3z)$, $\quad (3y-2z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-3x)\frac{\partial z}{\partial y}=2x-y$,

каде што f е диференцијабилна функција.

65. $F(x^2-y^2, z^2-y^2)=0$, $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$, каде што F е произволна диференцијабилна функција.

Во задачите 66-68, функциите u и v од аргументите x и y се зададени имплицитно од дадениот систем равенки. Да се најдат назначените диференцијали или парцијални изводи.

66. $u=x-y$, $\quad uv=x$; $\quad du, dv; d^2u, d^2v$.

67. $xu-yv=0$, $\quad yu+xv=1$; $\quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

68. $u+v=x$, $\quad u-yv=0$; $\quad d^2u, ,d^2v$.

Во задачите 69–70, функцијата z од променливите x и y е зададена параметарски (преку параметрите u и v) со дадените равенки. Да се најдат $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

69. $x=u\cos v$, $\quad y=u\sin v$, $\quad z=5v$. $\qquad$ **70.** $x=e^{u+v}$, $\quad y=e^{u-v}$, $\quad z=u\cdot v$.

71. Да се напише равенката на тангентната рамнина на хиперболоидот $x^2+4y^2-z^2=9$ што е паралелна со рамнината $x-2y+z=1$.

72. Во која точка од елипсоидот $x^2+4y^2+z^2=36$ тангентната рамнина е паралелна со рамнината а) Oxy, б) $x+y-z=0$.

73. Да се покаже дека тангентната рамнина на хиперболоидот

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ во точката (x_0, y_0, z_0) има равенка $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$.

Потоа да се пресмета плоштината P на $\triangle ABC$, каде што A, B, C се пресечните точки на тангентната рамнина и координатните оски.

74. Да се покаже дека равенката на тангентната рамнина на која било ("својствена") површина од втор ред

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2xz+b_3yz+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$$

во точката (x_0, y_0, z_0) може да се добие од равенката на површината, заменувајќи го: x^2 со x_0x; y^2 со y_0y; z^2 со z_0z; xy со $(x_0y+y_0x)/2$; xz со $(x_0z+z_0x)/2$; yz со $(y_0z+z_0y)/2$; x со $(x+x_0)/2$; y со $(y+y_0)/2$ и z со $(z+z_0)/2$.

Да се примени тој резултат на неколку конкретни површини (како во зад. 71–73).

75. Даден е елипсоидот $3x^2+4y^2+z^2=20$. а) Да се определи D така што рамнината $3x-3y+z+D=0$ да го допира елипсоидот. б) Да се покаже дека постојат две тангентни рамнини паралелни со рамнината $3x-2y+z=0$; да се најдат нивните равенки и допирните точки. в) Да се најде точка $M(x_0, y_0, z_0)$ на елипсоидот, во која нормалата образува еднакви агли со координатните оски.

76. Во која точка од елипсоидот $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нормалата образува еднакви агли со координатните оски?

77. Под *агол меѓу две површини* во дадена точка M_0 од нивниот пресек се подразбира аголот меѓу нивните нормали во M_0. Да се најде аголот φ меѓу површините: а) $2z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 = z^2$ во точката $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$;
б) $x^2+y^2+z^2+6y+2z+8 = 0$ и $x^2+y^2+z^2+6x+8y+4z+20 = 0$ во произволна точка. Површините под б) се сфери. Да се најде равенката на тангентната рамнина на секоја од сферите, паралелна со рамнината во која лежи пресекот на сферите, а се наоѓа подалеку од неа.

78. Точката M од елипсоидот $3x^2 + 2y^2 + 4z^2 = a^2$ е таква што нормалата во M ја прободува рамнината $z = 0$ во точка што лежи на параболата $y^2 = 4cx$. Да се покаже дека тангентната рамнина во M ја сече $z = 0$ во права што ја допира параболата $\{4cy^2 + 3a^2x = 0,\ z = 0\}$.

79. Да се покаже дека нормалите на ротационата површина $z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ (при што $f' \neq 0$) ја сечат оската на ротацијата (т.е. z–оската: $x = 0$, $y = 0$).

80. Да се најдат отсечоците на координатните оски што ги прави тангентната рамнина поставена во произволна точка на површината $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ и да се покаже дека збирот од нивните квадрати е константен.

81. Нека $M(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка на површината $xyz = a^3$, $a \neq 0$. Да се најдат равенките на нормалата на површината во M и да се покаже точноста на равенството

$$\overline{MP_1} : \overline{MP_2} : \overline{MP_3} = x_0^2 : y_0^2 : z_0^2,$$

при што P_1, P_2, P_3 се прободните точки на нормалата во M и координатните рамнини $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ соодветно.

82. Нека $M(x_0, y_0, z_0)$ е точка од површината $x^3+y^3+z^3 = a^3$ $(a > 0)$ во првиот октант и нека тангентната рамнина во M ги сече оските Ox, Oy, Oz во точките A, B, C, соодветно, а нормалата во M ги сече координатните рамнини $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ во точките P_1, P_2, P_3 соодветно. Да се покаже дека:

а) $\overline{OA}^{-3/2} + \overline{OB}^{-3/2} + \overline{OC}^{-3/2} = a^{-3/2}$; б) $\overline{MP_1} : \overline{MP_2} : \overline{MP_3} = \frac{1}{x_0} : \frac{1}{y_0} : \frac{1}{z_0}$:.

83. Да се најдат равенките на тангентната рамнина и нормалата на површината $x^4 + y^4 + z^4 = r^4$, $(r > 0)$ во точката (x_0, y_0, z_0). Потоа, да се покаже дека:
а) $a^{-4/3} + b^{-4/3} + c^{-4/3} = r^{-4/3}$, б) $\overline{MP_1} : \overline{MP_2} : \overline{MP_3} = x_0^{-2} : y_0^{-2} : z_0^{-2}$,

каде што a, b, c се сегментите на тангентната рамнина, а P_1, P_2, P_3 се прободите на нормалата врз координатните рамнини $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

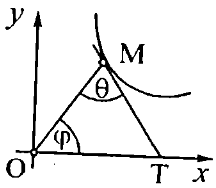
Во задачите 84–92 се бара трансформирање на дадената равенка или израз при назначената смена на променливите.

84. $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$, $\quad x = \cos t$.

85. $(3x - 1)^2 y'' - 3(3x - 1)y' + 9y = 0$, $\quad 3x - 1 = e^t$.

86. Тангенсот на аголот θ, зафатен од тангентата MT и радиус–векторот OM на допирната точка M се изразува со формулата

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y' - y/x}{1 + yy'/x}.$$



Црт. 1

Да се трансформира тој израз во поларни координати: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

87. Формулата за кривина на рамнинска крива,

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

да се трансформира сметајќи дека:

а) $y = y(x)$ е зададена параметарски со $x = x(t)$, $y = y(t)$;

б) $x = \rho\cos\varphi$, $\quad y = \rho\sin\varphi$, $\quad \rho = \rho(\varphi)$.

(в. и II.5.3, вежби 6 и 7.)

88. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad u = \frac{y}{x}$. $\quad v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad z = z(u, v)$.

89. $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, земајќи ја x за функција, а $u = y-z$, $v = y+z$ за независнопроменливи.

90. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$, $\quad u = x^2+y^2$, $\quad v = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\quad w = \ln z - (x+y)$, $\quad w = w(u, v)$.

91. $x^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + y^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, $\quad x = ue^w$, $\quad y = ve^w$, $\quad z = we^w$, $\quad w = w(u, v)$.

92. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$, $\quad u = \frac{x}{y}$, $\quad v = x$ $\quad w = xz - y$, $\quad w = w(u, v)$.

93*. Да се реши равенката

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

трансформирајќи ја прво така што x да се земе за функција, а y и z за независнопроменливи.

94*. Да се реши равенката од задачата а) 90, б) 92, користејќи го добиениот резултат по извршената трансформација.

Во задачите 95–103 да се најдат и да се класифицираат екстремите на дадената функција $f(x, y)$.

95. $x^2 + y^2 + (3-x-y)^2$. **96.** $(x-2)^2 - y^2$.

97. $xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$. **98.** $a^3xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

99. $x + y + \frac{a^3}{xy}$. **100.** $x^3y^2(a-x-y)$.

101. $x^2 + xy + y^2 - 2ax - 2by$. **102.** $x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

103. $(6-x)(6-y)(x+y-6)$.

Во задачите 104–106, да се најдат НМВ и НГВ на дадената функција $f(x, y)$ во назначената област D.

104. $x^3 + y^2$, $\quad D{:}\, |x| + |y| \leq 1$.

105. $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $\quad D{:}\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

106. $\sin x \sin y \sin(x+y)$, $\quad D{:}\, 0 \leq x \leq \pi$, $\quad 0 \leq y \leq \pi$.

107. Да се најде најголемиот можен производ на три позитивни броеви x, y, z чиј збир е даден позитивен број a.

108. Да се најдат три позитивни броеви x, y, z чиј збир е 18, такви што производот од едниот број со квадратот од другиот и со кубот од третиот број да е најголем.

109. Да се најде правоаголен паралелопипед што има најголем волумен при дадена (целосна) плоштина P.

110. Да се најде растојанието меѓу две прави p, q во простор чии равенки се $x-1=y/2=z$, $x=y=z$, со помош на: а) екстреми на соодветна функција од две променливи, б) формула, како во IV.4.7, (5) или (6).

111. Да се покаже дека функцијата $y(x)$, зададена имплицитно со равенката $y^4-4a^2xy+x^4=0$ има екстрем при $x=\pm\sqrt[8]{3}$, $y=\pm a\sqrt[8]{27}$.

Да се испита дали е тоа минимум или максимум.

112. Да се испитаат екстремите на функцијата $y(x)$, определена имплицитно со равенството а) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+G=0$ (в. зад. 59). б) $x^2-3cxy+y^3=0$ (в. зад. 60).

113. Да се најдат условните екстреми на дадената функција f при дадената врска.

а) $f(x,y)=3x+4y$, при $x^2+y^2=1$; б) $f(x,y)=x+y$, при $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$, $x>0$, $y>0$;

в) $f(x,y)=x^2+y^2$, при $x^4+y^4=1$; г) $f(x,y,z)=x+y+z$, при $x^2+y^2+z^2=1$.

114. Меѓу сите правоаголни паралелопипеди впишани во даден елипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, при што рабовите му се паралелни со оските на елипсоидот, да се најде оној што има најголем волумен.

115. Да се најде плоштината на елипсата што се добива како пресек меѓу елипсоидот и рамнината:

$$(E)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,\qquad (\Sigma)\quad kx+my+nz=0\,.$$

116. Ако $x_1x_2\cdots x_n=a^n$, $x_1>0, x_2>0,\cdots,x_n>0$, да се покаже дека $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq na$. Како последица на ова да се изведе неравенството

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\,,$$

за секои $x_1>0, x_2>0,\ldots,x_n>0$. (Тоа неравенство кажува дека аритметичката средина од n позитивни броеви не е помала од геометриската средина на тие броеви.)

117. Дадена е векторската функција $\mathbf{r}=(t, t^2, \ln t)$. За $t=1$, да се најде:

а) $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$; б) $\frac{d(\mathbf{r}^2)}{dt}$; в) $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$; г) $(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})$.

118. Да се покаже дека, ако $\mathbf{r}=\mathbf{a}e^{\omega t}+\mathbf{b}e^{-\omega t}$ каде што $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се константни вектори, а ω е даден број, тогаш $\ddot{\mathbf{r}}-\omega^2\mathbf{r}=\mathbf{o}$.

119. Да се најде ходографот на векторската функција

а) $\mathbf{r}=(1+t, 2+t, 3-t)$; б) $\mathbf{r}=(\,\mathrm{ch}t, 2, \mathrm{sh}t)$.

120. Да се одреди обликот на кривата $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ ако се знае дека $\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}$, каде што $\mathbf{a}$ е константен вектор.

121. На кривата $\mathbf{r}=(t+1, t^2-1, t^3)$ да се најде точка во која тангентата е паралелна со рамнината $x+2y+z-1=0$.

122. Да се покаже дека кривите $\mathbf{r}=(u+1, u^2, 2u-1)$ и $\mathbf{r}=(2v^2, 3v-2, v^2)$ се сечат и да се најде аголот меѓу нив во пресечната точка.

123. За кривата $\mathbf{r}(t)=(t^3, 3t^2, 6t)$, во точката $t=1$, да се најде:

а) природниот триедар $\vec{\tau}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\nu}$; б) кривината K; в) торзијата T.

124. Да се најде радиусот ρ на кривината и радиусот R на торзијата во произволна точка на кривата: а) $y=x^2/2a$, $z=x^3/6a^2$; б) $\mathbf{r}=\big(t, \sqrt{2}\ln t, 1/t\big)$.

125. Да се покаже дека односот на кривината и торзијта е постојанен во произволна точка на кривата а) $\mathbf{r}=(e^t\sin t, e^t\cos t, e^t)$; б) $\mathbf{r}=(2t, t^2, \ln t)$.

126. Дадена е кривата $\mathbf{r}(t) = (a \sin^2 t,\ a \sin t \cos t,\ a \cos t)$.

Да се покаже дека за $t \in [0, 2\pi]$: а) кривата има двојна точка (т.е. точка што се добива за две различни вредности на t); б) нормалната рамнина во која било точка од кривата минува низ координатниот почеток; в) кривата лежи на сфера.

127. Да се покаже дека кривата $\mathbf{r} = e^{t/\sqrt{2}} \cdot (\cos t, \sin t, 1)$ лежи на конусот $x^2+y^2 = z^2$ и неговите генератриси ги сече под константен агол.

128. Да се најде точка на кривата $\mathbf{r} = (\mathrm{ch}\, t, \mathrm{sh}\, t, t)$ во која оскулаторната рамнина е паралелна со рамнината $y - z = 3$.

129. Да се напишат равенките на а) главната нормала, б) бинормалата на кривата $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$ во точката $t = \pi$.

130. Да се најде изводот на функцијата $z = 3x^4 - xy + y^3$ во точката $M(1, 2)$ во правецот што со x–оската сочинува агол од 60^0.

131. Да се најде изводот на функцијата $f(x, y)$ во правец на:

а) симетралата на првиот и третиот квадрант, б) негативната полуоска Ox.

132. $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$. Да се покаже дека во точката $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ изводот во која било насока е еднаков со нула (т.е. "функцијата f е стационарна").

133. Дадена е функцијата $u = x^2 + y^2 + z^2$ и точката $M(1, 1, 1)$. Да се најде:

а) изводот во M, во правецот $\mathbf{n} = (\cos 45^0, \cos 60^0, \cos 60^0)$

б) $\mathrm{grad}\, u(M)$ и неговата должина.

Да се скицираат ниво–површините.

134. $u = xyz$. Да се најде изводот $\frac{du}{dn}$ во правецот што со координатните оски формира еднакви агли, во произволна точка и во точката $(1, 2, 1)$.

135. $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Да се најде: а) $\mathrm{grad}\, u$ и $|\ \mathrm{grad}\, u\ |$ во точката $M(2, -1, 2)$; б) точките во кои $\mathrm{grad}\, u$ е нормален на Oz;

в) точките во кои $\mathrm{grad}\, u$ е нула.

Во задачите 136–139 се претпоставува дека: u, v, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ имаат непрекинати парцијални изводи, f е диференцијабилна функција, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\ \mathbf{r}\ |$, ∇ е операторот набла, а ∇^2 е лапласовиот оператор:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

136. Да се покаже дека: а) $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$; б) $\nabla(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \mathbf{a} + \nabla \mathbf{b}$;

в) $\nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b}$; г) $\nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b})$.

137. Да се пресмета: а) $\mathrm{div}\,(\mathbf{r}/r)$; б) $div\, \mathbf{a}$, каде што $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}/r$. в) Да се определи f од б) така што полето $\mathbf{a}$ да биде соленоидално (т.е. $\mathrm{div}\, \mathbf{a} = 0$).

138. Да се покаже дека: а) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, u) = 0$; б) $\nabla \times (r^2 \mathbf{r}) = \mathbf{o}$.

139. Да се покаже дека:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

Да се провери ова равенство за $\mathbf{a} = (3xz^2, -yz, x + 2z)$.

VI ИНТЕГРАЛИ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

Поимот за определен интеграл при функциите од една реална променлива може да се обопшти на повеќе начини. Со тоа, меѓу другите, се доаѓа до поимите за двоен, троен, линиски и површински интеграл, што се предмет на изучување на оваа глава. Да забележиме дека сите овие поими можат да бидат опфатени со еден општ поим за интеграл; тоа, меѓутоа, овде нема да го направиме.

Во оваа глава ќе работиме само со дводимензионалниот и тридимензионалниот простор, а покрај поголемата едноставност и прегледност во однос на n–димензионалните простори ($n > 3$), причината за тоа е што кога би работеле со n–димензионалните простори, претходно би морале да воведеме поими аналогни на поимите за плоштина односно волумен. Да забележиме и тоа дека читателот ќе сретне во оваа глава многу својства изнесени без доказ.

VI.1. ЕДНОКАТНИ ИНТЕГРАЛИ

Во **1.1** се разгледуваат функции од една променлива што се определени интеграли на непрекинати функции од две променливи. Во **1.2** се воведува поим за неопределен интеграл на функција од две променливи, а специјално внимание се посветува на задачата за определување на функција $z(x, y)$, знаејќи ги нејзините парцијални изводи. Во **1.3** се формулираат неколку резултати аналогни на резултатите од **1.1** и **1.2**, со цел да се илустрира тврдењето дека сите тие се пренесуваат и на функции од n променливи за кој било $n \geq 2$. Во **1.4** се изнесуваат почетните елементи од теоријата на диференцијалните равенки.

1.1. Диференцирање под знакот за интеграл

Скоро во целиот овој раздел, ќе претпоставуваме дека D е правоаголна затворена дводимензионална област определена со:

$$D = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}, \tag{1}$$

каде што a, b, c, d се броеви, такви што $a < b$, $c < d$. Исто така, ќе сметаме дека $f(x, y)$ е непрекината функција на D.

Нека $x(t)$ и $y(t)$ се непрекинати функции на сегментот $[\alpha, \beta]$ при што:

$$a \le x(t) \le b, \qquad c \le y(t) \le d,$$

за секој $t \in [\alpha, \beta]$. При направените претпоставки, според Т. 4 во V.**1.6**, функцијата $f(x(t), y(t))$ е непрекината на $[\alpha, \beta]$, од што следува дека постои определениот интеграл:

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) dt, \tag{2}$$

и дека J не зависи од тоа дали се работи со примитивен или риманов определен интеграл (в.III.**5.1**)

Подолу ќе се задржиме на специјалниот случај кога функциите $x(t)$ и $y(t)$ се определени со $x(t) = x_0$, $y(t) = t$, каде што x_0 е даден број од $[a, b]$ и $\alpha, \beta \in [c, d]$. Интегралот (2) го добива следниов облик:

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} f(x_0, y) dy. \tag{2'}$$

Имајќи предвид дека x_0 е кој било број од сегментот $[a, b]$, можеме да сметаме дека со горната дискусија го докажавме следново:

Тврдење 1.

Ако $f(x, y)$ е непрекината функција во правоаголната област D, тогаш за кои било $\alpha, \beta \in [c, d]$, со равенството:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy, \tag{3}$$

е определена функција дефинирана на сегментот $[a, b]$. ◇

(Во некои книги променливата x во (3) е наречена "параметар", па во таа смисла се вели дека десната страна од (3) е **интеграл што зависи од параметар**; види на пример: Фихтенгольц, том II, гл. XIV, стр. 654, или Рождественский, стр. 451.)

Забелешка 1. Ако α, β ги сметаме за променливи во $[c, d]$, тогаш десната страна од (3) (па според тоа и левата) ќе биде функција $F(x, \alpha, \beta)$

од три променливи x, α, β, дефинирана за $x \in [a, b]$, α, $\beta \in [c, d]$. Сепак, и во наредните две тврдења (како и во Т. 1) ќе претпоставуваме дека α и β се фиксни броеви, од сегментот $[c, d]$.

Тврдење 2.

Ако се исполнети условите од Т. 1, *тогаш функцијата* $F(x)$, *определена со* (3), *е непрекината на* $[a, b]$.

Доказ. За $\alpha = \beta$, $F(x)$ е константна (нулта) функција, па значи и непрекината. Затоа, ќе претпоставиме дека $\alpha < \beta$, напомнувајќи дека не треба специјално да се разгледа случајот $\beta < \alpha$. (Зошто?) Ако x_0, $x \in [a, b]$, тогаш:

$$| F(x) - F(x_0) | = \\ =| \int_\alpha^\beta [f(x, y) - f(x_0, y)]dy | \leq \int_\alpha^\beta | f(x, y) - f(x_0, y) | \, dy. \tag{4}$$

Нека ε е даден позитивен реален број. Фактот што $f(x, y)$ е непрекината на затворената и ограничена област D, повлекува дека $f(x, y)$ е рамномерно непрекината на D (в. Т. 7 во V.1.6). Од тоа следува дека постои позитивен реален број $\delta = \delta_\varepsilon$ (т.е. δ зависи од ε), таков што:

$$| x - x_0 | < \delta \Rightarrow | f(x, y) - f(x_0, y) | < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha},$$

па според (4), добиваме

$$| x - x_0 | < \delta \Rightarrow | F(x) - F(x_0) | < \varepsilon,$$

т.е. дека $F(x)$ е непрекината во точката x_0. Со тоа го комплетиравме доказот бидејќи x_0 е кој било број од $[a, b]$. ◊

Меѓу својствата на функцијата $F(x)$, определена со интегралот во (3), важно место има прашањето за извод на таа функција по променливата (т.е. параметарот) x, на кое одговор дава следнава:

Теорема 3.

Нека функцијата $f(x, y)$ *е непрекината и има непрекинат парцијален извод* f_x *во* D. *Тогаш, функцијата* $F(x)$ *определена со* (3) *е диференцијабилна во* $[a, b]$ *и притоа е точно равенството*:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_\alpha^\beta f(x, y)dy = \int_\alpha^\beta f_x(x, y)dy. \tag{5}$$

Со други зборови: при условите на Т. 2, допуштено е да си ги разменат местата знаците за извод (по x) и интеграл (по y). Во тој случај, таа постапка се вика **диференцирање по** (параметарот) x **под знакот за интеграл.**

Доказ. Нека $y \in [\alpha, \beta]$, $x, x_0 \in [a, b]$. Според теоремата на Лагранж (II.**3.3**), постои x^* меѓу x_0 и x таков што: $f(x, y) - f(x_0, y) = (x - x_0) f_x(x^*, y)$, од што следува:

$$F(x) - F(x_0) = (x - x_0) \int_\alpha^\beta f_x(x^*, y) dy .$$

Според тоа имаме:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_\alpha^\beta f_x(x_0, y) dy = \int_\alpha^\beta [f_x(x^*, y) - f_x(x_0, y)] dy ,$$

т.е.

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_\alpha^\beta f_x(x_0, y) dy \right| \leq \int_\alpha^\beta | f_x(x^*, y) - f_x(x_0, y) | dy .$$

(Како и при доказот на претходното тврдење, претпоставуваме дека $\alpha < \beta$.)

Во натамошниот тек на доказот, се раководиме од фактот дека f_x е рамномерно непрекината на D. Според тоа, ако $\varepsilon > 0$ постои $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ таков што:

$$| x - x_0 | < \delta \Rightarrow | f_x(x, y) - f_x(x_0, y) | < \frac{\varepsilon}{d - c} .$$

Фактот што x^* е меѓу x_0 и x повлекува дека $| x^* - x_0 | < | x - x_0 |$, па според тоа:

$$| x - x_0 | < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_\alpha^\beta f_x(x_0, y) dy \right| < \varepsilon ,$$

од што следува:

$$\int_\alpha^\beta f_x(x_0, y) dy = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0) . \quad \diamond$$

Со цел да ги илустрираме заклучоците од последните две тврдења, ќе разгледаме два примера.

ПРИМЕР 1. Нека $f(x, y) = 2yx^2 - 1$, $a = 1 = d = \beta$, $b = 2$, $c = 0 = \alpha$. Имаме:

$$F(x) = \int_0^1 (2yx^2 - 1) dy = x^2 - 1, \quad F'(x) = \int_0^1 f_x(x, y) dy = 2x = (x^2 - 1)' .$$

Гледаме дека добиените резултати се во согласност со Т. 2 (бидејќи $x^2 - 1$ е непрекината функција), а и со Т. 3. (Се разбира не беше неопходно да се проверат тие резултати.)

ПРИМЕР 2. Имајќи предвид дека $2 + \cos x \geq 1$ за секој x, добиваме дека функцијата $\ln(2 + \cos x)$ е непрекината и позитивна, за секој x, па значи и на сегментот $[0, \pi]$. Од тоа следува дека:

$$J = \int_0^\pi \ln(2 + \cos x) dx$$

е (конечен) позитивен реален број. Но, ако читателот се обиде да го пресмета J, а ние му препорачуваме да направи таков обид, ќе се сретне со соодветни тешкотии.

Овде ќе го примениме резултатот од Т. 2. Имено, ќе ја разгледаме функцијата $f(x, y) = \ln(2 + y \cos x)$ во правоаголникот $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$.

Јасно е дека $f(x, y)$ е диференцијабилна во дадениот правоаголник. Според Т. 2,

$$F(y) = \int_0^\pi \ln(2 + y\cos x)dx$$

е диференцијабилна функција на сегментот $[0, 1]$, и притоа:

$$F'(y) = \int_0^\pi \frac{\cos x}{2 + y\cos x}dx\,,$$

за секој $y \in [0, 1]$. (Внимавај, овде x и y ги имаат заменето улогите, во однос на (3)!)

Ќе се обидеме да ја определиме функцијата $F'(y)$. Прво, имаме:

$$F'(0) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos x\,dx = 0\,, \qquad F(0) = \pi \ln 2\,,$$

а подолу ќе претпоставиме дека $0 < y \leq 1$. Во тој случај, имаме

$$F'(y) = \frac{1}{y}\int_0^\pi \frac{2 + y\cos x - 2}{2 + y\cos x}dx = \frac{1}{y}\int_0^\pi \left(1 - \frac{2}{2 + y\cos x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{y}\left(\pi - 2\int_0^\pi \frac{dx}{2 + y\cos x}\right).$$

Последниот интеграл можеме да го решиме со смената $tg(x/2) = t$:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{2 + y\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{(2 - y)t^2 + (2 + y)} = \frac{2}{2 - y}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{2+y}{2-y}}$$
$$= \frac{2}{2 - y}\cdot\sqrt{\frac{2 - y}{2 + y}}\cdot \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{2 - y}{2 + y}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{4 - y^2}}\,.$$

Од тоа следува:

$$F'(y) = \frac{\pi}{y}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4 - y^2}}\right), \quad \text{за} \quad y \neq 0, \quad \text{и} \quad F'(0) = 0\,.$$

Според тоа:

$$J = F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(y)dy = \pi\ln 2 - \pi\int_0^1 \frac{1}{y}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4 - y^2}}\right)dy\,.$$

Воведувајќи смена $\sqrt{4 - y^2} = t$, односно: $-y\,dy = t\,dt$, $dy/y = t\,dt/(t^2 - 4)$, добиваме:

$$J = \pi\ln 2 + \pi\int_2^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2 - 4}\left(1 - \frac{2}{t}\right)dt = \pi\ln 2 + \pi\int_2^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t + 2} = \pi\ln\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

Ќе формулираме сега соодветни *обопштувања на* Т. 1–Т. 3, со тоа што наместо константни граници α и β, ќе земеме *променливи граници* $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Притоа, не споменувајќи специјално, ќе претпоставиме дека $f(x, y)$ е непрекината функција на правоаголната област D определена со (1).

Тврдење 1'.

Ако $\alpha(x)$, $\beta(x)$ се функции дефинирани на сегментот $[a, b]$ такви што $\alpha(x)$, $\beta(x) \in [c, d]$ за секој $x \in [a, b]$, тогаш функцијата $G(x)$ определена со:

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy, \tag{3'}$$

е дефинирана на $[a, b]$.

Тврдење 2'.

Ако $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се непрекинати на $[a, b]$, тогаш и $G(x)$ е непрекината на $[a, b]$.

Тврдење 3'.

Ако $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се диференцијабилни на $[a, b]$ и ако постои непрекинат извод f_x на f во правоаголникот D, тогаш и функцијата $G(x)$ е диференцијабилна на $[a, b]$ и притоа е точно равенството:

$$G'(x) = f\big(x, \beta(x)\big)\cdot\beta'(x) - f\big(x, \alpha(x)\big)\cdot\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y)dy \tag{5'}$$

за секој $x \in [a, b]$.

Доказите на формулираните обопштувања нема да ги дадеме со сите детали, но се надеваме, читателот ќе биде во состојба да ги пополни соодветните празнини.

Прво, ако $x_0 \in [a, b]$, тогаш $\alpha(x_0), \beta(x_0) \in [c, d]$, а $f(x, y)$ е непрекината на $[c, d]$, од што следува дека $G(x_0)$ е добро определен реален број. Со други зборови со (3') е определена функција $G(x)$ дефинирана на $[a, b]$, т.е. го докажавме Т .1'.

Нека $x, x_0 \in [a, b]$. Користејќи ги ознаките $\alpha = \alpha(x)$, $\alpha_0 = \alpha(x_0)$, $\beta = \beta(x)$, $\beta_0 = \beta(x_0)$, $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, $\Delta\beta = \beta - \beta_0$, добиваме:

$$\begin{aligned} G(x) - G(x_0) &= \int_{\alpha}^{\alpha_0} f(x, y)dy + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x, y)dy + \int_{\beta_0}^{\beta} f(x, y)dy - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x_0, y)dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha_0} f(x, y)dy + \int_{\beta_0}^{\beta} f(x, y)dy + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f(x, y) - f(x_0, y)]dy. \end{aligned} \tag{6}$$

Ќе покажеме дека секој од трите собирци на десната страна од (6) се стреми кон нула, од што ќе следува точноста на Т. 2'.

Навистина, според теоремата за средна вредност за определен интеграл (Т. 2 од III.5.3) постои број y^* меѓу α и α_0, и y^{**} меѓу β_0 и β, такви што:

$$\int_{\alpha}^{\alpha_0} f(x, y)dy = (\alpha_0 - \alpha)f(x, y^*), \quad \int_{\beta_0}^{\beta} f(x, y)dy = (\beta - \beta_0)f(x, y^{**}).$$

Имајќи ја предвид непрекинатоста на функциите $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, од добиените равенства следува дека секој од првите два собирока се стреми кон нула кога x се стреми кон x_0. Дека и третиот собирок се стреми кон нула може да се докаже директно, користејќи ја рамномерната непрекинатост на функцијата $h(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y)$ (на областа D), или со помош на Т. 2, ставајќи:

$$F(x) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} h(x, y)dy,$$

и воочувајќи дека $h(x_0, y) = 0$, т.е. $F(x_0) = 0$.

Равенството (6) ќе го користиме и за докажување на Т. 3′, со тоа што на подинтегралната функција од третиот собирок ќе ја примениме теоремата на Лагранж (II.**3.3**). По кратење со $x - x_0$ го добиваме равенството:

$$\frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = \frac{\beta - \beta_0}{x - x_0} f(x, y^{**}) - \frac{\alpha - \alpha_0}{x - x_0} f(x, y^*) + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_x(x^*, y)dy, \qquad (7)$$

каде што x^* е меѓу x_0 и x, а y^* и y^{**} се како и погоре. Од сето тоа, ако се има предвид дека: $y^{**} \to \beta_0$, $y^* \to \alpha_0$, $x^* \to x_0$, кога $x \to x_0$, добиваме:

$$G'(x_0) = \beta'(x_0)f(x_0, \beta_0) - \alpha'(x_0)f(x_0, \alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_x(x_0, y)dy$$

со што е комплетиран доказот на Т. 3′. ◇

Се наметнува и задачата за ***ново обопштување***, со тоа што ќе се допушти *областа D* ***да не е правоаголна*** (но, секако, не сосем произволна).

За таа цел, нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се дадени непрекинати функции на сегментот $[a, b]$, $a < b$, такви што

$$y_1(x) < y_2(x) \quad \text{за} \quad a < x < b \quad \text{и} \quad y_1(x) \le y_2(x) \quad \text{за} \quad x \in \{a, b\}.$$

Тогаш множеството

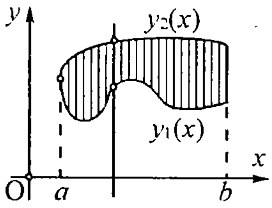
$$D = \{(x, y) | a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)\} \qquad (8)$$

е област, за која ќе велиме дека е **правилна во правец на y–оската** (црт. 1).

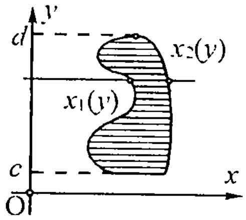
Аналогно се дефинира *област, правилна во правец на x–оската* – тоа е множество D од обликот

$$D = \{(x, y) | c \le y \le d, \quad x_1(y) \le x \le x_2(y)\}, \qquad (8')$$

каде што $x_1(y)$ и $x_2(y)$ се дадени функции (од y) непрекинати на сегментот $[c, d]$ и $x_1(y) < x < x_2(y)$ за секој x од интервалот (a, b), а $x_1(y) \le x_2(y)$ – на неговите краеви (црт. 2).



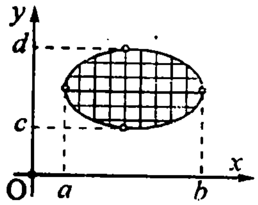
Црт. 1



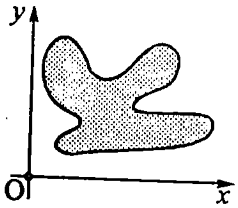
Црт. 2

Област што е правилна во правец на двете координатни оски се вика **правилна област** (црт. 3).

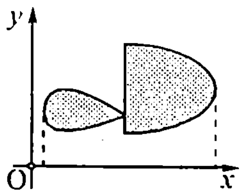
На црт. 4 е претставена област што не е правилна ни во правец на y–оската, ни во правец на x–оската. На црт. 5 пак е претставена фигура којашто изгледа како да е правилна во правец на y–оската, но не е. Имено, таа не е ни област, зашто ако се изостави нејзината контура, ќе се добие отворено множество што не е сврзано; покрај тоа, не постојат непрекинати функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ со бараните својства.



Црт. 3



Црт. 4



Црт. 5

Да забележиме дека:

Секоја област D, правилна во правец на y–оската, е едноставена, затворена и ограничена, а го има и својството: секоја права, паралелна со y–оската што има заеднички внатрешни точки со D, ја сече контурата на D во две различни точки (црт. 1).

Аналогно важи за област правилна во правец на x–оската.

Сега можеме да го формулираме и докажеме следново обопштување на Т. $2'$:

Теорема 4.

Нека функцијата $f(x, y)$ е непрекината на областа D, при што D е правилна во правец на y–оската. Потоа, нека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се функции непрекинати на сегментот $[a, b]$, и притоа: $\big(x, \alpha(x)\big), \big(x, \beta(x)\big) \in D$ за секој $x \in [a, b]$. Тогаш со $(3')$ е определена функција $G(x)$ непрекината на $[a, b]$.

Доказ. Од непрекинатоста на $f(x, y)$ и фактот што графиците на функциите $\alpha(x)$, $\beta(x)$ се наоѓаат во D (црт. 6), следува дека $G(x)$ е дефинирана на $[a, b]$. Користејќи ја непрекинатоста на $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, ќе покажеме дека и $G(x)$ е непрекината за секој $x_0 \in [a, b]$, т.е. дека

$$\lim_{x \to x_0} [G(x) - G(x_0)] = 0 \,. \tag{9}$$

Да претпоставиме дека $x_0 \in [a, b]$ е таков што $\alpha_0 = \alpha(x_0) < \beta(x_0) = \beta_0$. Тогаш, избирајќи позитивен број δ_1 доволно мал, ќе добиеме дека за секој $x_1 \in [a, b]$, таков што $| x_1 - x_0 | < \delta_1$ имаме: $\alpha_1 = \alpha(x_1) < \beta(x_1) = \beta_1$, и $\alpha_1 < \beta_0$. Според тоа, можни се следниве случаи:

$$\alpha_0 \le \alpha_1 < \beta_0 \le \beta_1, \quad \alpha_0 \le \alpha_1 < \beta_1 < \beta_0,$$
$$\alpha_1 \le \alpha_0 < \beta_0 < \beta_0 \le \beta_1, \quad \alpha_1 \le \alpha_0 < \beta_1 < \beta_0.$$

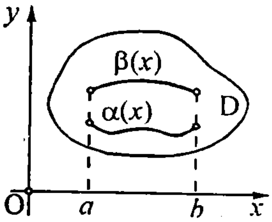
Подолу ќе го претпоставиме првиот случај, како што е прикажано на црт. 7. Тогаш имаме:

$$G(x_1) = \int_{\alpha_1}^{\beta_0} f(x_1, y)dy + \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x_1, y)dy,$$
$$G(x_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x_0, y)dy + \int_{\alpha_1}^{\beta_0} f(x_0, y)dy,$$

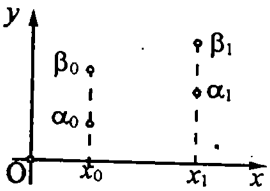
т.е.

$$G(x_1) - G(x_0) = \int_{\alpha_1}^{\beta_0} [f(x_1, y) - f(x_0, y)]dy + \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x_1, y)dy - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x_0, y)dy. \qquad (*)$$

Од ограничeноста на D, следува дека постои $h > 0$, таков што $| v_2 - v_1 |< h$, за кои било две точки (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in D$. Потоа, нека μ е поголем од најголемата вредност на $|f(x, y)|$ на D. (Таква најголема вредност постои бидејќи $|f(x, y)|$ е непрекината на D, па може да се примени Т. 6 од V. **1.6.**)



Црт. 6



Црт. 7

Нека ε е даден позитивен број. Тогаш, постојат позитивни броеви δ_2, δ_3, δ_4, такви што:

$$| x_1 - x_0 |< \delta_2 \Rightarrow | f(x_1, y) - f(x_0, y) |< \frac{1}{3h}\varepsilon,$$
$$| x_1 - x_0 |< \delta_3 \Rightarrow | \alpha(x_1) - \alpha(x_0) |< \frac{1}{3\mu}\varepsilon,$$
$$| x_1 - x_0 |< \delta_4 \Rightarrow | \beta(x_1) - \beta(x_0) |< \frac{1}{3\mu}\varepsilon.$$

Ако $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, тогаш за $| x_1 - x_0 |< \delta$ ќе имаме:

$$| G(x_1) - G(x_0) |\leq$$
$$\leq \int_{\alpha_1}^{\beta_0} | f(x, y) - f(x_0, y) | dy + \left|\int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x_1, y)dy\right| + \left|\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x_0, y)dy\right| < \qquad (**)$$
$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

па според тоа $\lim_{x\to x_0} G(x) = G(x_0)$, т.е. добивме дека $G(x)$ е непрекината во x_0.

Образложение на (**). Првиот собирок од (**) е помал од $\frac{1}{3}\varepsilon$, бидејќи $0 < \beta_0 - \beta_1 \leq \mu$. Ако на вториот се примени теоремата за средна вредност кај определени интеграли (Т. 2 од III.**5.3**), добиваме дека тој е еднаков со $|\ \beta_1 - \beta_0\ | \cdot |\ f(x_1, \xi)\ |$, каде што ξ е број меѓу β_0 и β_1. Според тоа, за $|\ x_1 - x_0\ |< \delta$ вториот собирок е помал од $\frac{1}{3\mu}\mu\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon$. Од исти причини и третиот собирок е помал од $\frac{1}{3}\varepsilon$.

Дискусијата и во секој од преостанатите случаи е потполно иста.

Преостанува случајот $\alpha_0 = \beta_0$, при што имаме $G(x_0) = 0$. Избирајќи $\delta > 0$, таков што од $|\ x - x_0\ |< \delta$ да следува:

$$|\ \alpha_1(x) - \alpha(x_0)\ |< \frac{\varepsilon}{2\mu} \quad \text{и} \quad \beta_1(x) - \beta(x_0)\ |< \frac{\varepsilon}{2\mu},$$

добиваме дека од $|\ x - x_0\ |< \delta$ следува:

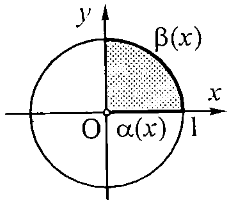
$$|\ G(x)\ |\leq|\ \beta(x) - \alpha(x)\ |\ \mu =|\ \big(\beta(x) - \beta(x_0)\big) + \big(\alpha(x_0) - \alpha(x)\big)\ |\ \mu \leq$$

$$\leq \big(|\ \beta(x) - \beta(x_0)\ | + |\ \alpha(x) - \alpha(x_0)\ |\big)\mu < \varepsilon .$$

Значи, важи $\lim_{x\to x_0} G(x) = 0 = G(x_0)$, т.е. (9). $\diamond$

ПРИМЕР 3. Нека $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ и $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = \sqrt{1 - x^2}$ за $0 \leq x \leq 1$ (црт. 8). Да ја најдеме функцијата $G(x)$ определена со (3'):

$$G(x) = \int_0^{\beta(x)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy .$$



Црт. 8

Поради $\beta(1) = 0$, имаме $G(1) = 0$. Нека $0 \leq x < 1$. Тогаш

$$G(x) = \sqrt{1 - x^2} \int_0^{\beta(x)} \sqrt{1 - \frac{y^2}{1 - x^2}}\, dy .$$

Ставајќи: $y/\sqrt{1 - x^2} = \sin t$, $dy = \sqrt{1 - x^2} \cos t \cdot dt$, добиваме: $y = 0 \Rightarrow t = 0$, $y = \beta(x) = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow t = \pi/2$, па:

$$G(x) = (1 - x^2) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = (1 - x^2)\frac{\pi}{4},$$

од што следува дека $G(x) \to 0$ за $x \to 1$, така што $G(x) = (1 - x^2) \cdot \pi/4$ за секој $x \in [0, 1]$.

Вежби

Во 1–3 да се определи границата $\lim_{y\to 0} F(y)$, каде што $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, при дадени $f(x, y)$, a, b.

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad a = -1, \quad b = 1.$
2. $f(x, y) = x^2 \cos xy$, $\quad a = 0,\ b = 2.$
3. $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $\quad a = y, \quad b = 1 + y.$
4. Да се определи функцијата $F(y)$ од Пр. 2.

Во 5–8 да се докажат наведените равенства.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2)dx = \begin{cases} 0, & \text{за } |\ a\ |< 1 \\ \pi \ln a^2, & \text{за } |\ a\ |> 1 . \end{cases}$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin a$, за $|\ a\ |< 1$.

7. Да се определи функцијата: $F(x) = \int\limits_{-\alpha(x)}^{\alpha(x)} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dy$, каде што $\alpha(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

1.2. Неопределен интеграл

И во овој раздел ќе претпоставуваме дека D е правоаголна отворена област дефинирана со:

$$D = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}, \tag{1}$$

каде што a, b, c, d се реални броеви, такви што $a < b$, $c < d$, при што се допушта и $-\infty \in \{a, c\}$, $+\infty \in \{b, d\}$. Така, за $a = c = 0$, $b = d = +\infty$, имаме $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, а $D = \mathbf{R}^2$, за $a = c = -\infty$, $b = d = +\infty$.

Ако $f(x, y)$, $F(x, y)$ се функции дефинирани во D, и притоа $F_x(x, y) = f(x, y)$ за секоја точка $(x, y) \in D$, тогаш велиме дека $F(x, y)$ е x**–примитивна** за $f(x, y)$ во D.

ПРИМЕР 1. Функциите x^2y, $x^2y + y$, $x^2y+|y|$, $x^2y + [y]$ се x–примитивни за $2xy$ во $\mathbf{R}^2$. Да потсетиме (в. Пр. 8 во I.**2.2**) дека $[y]$ е најголемиот цел број што не е поголем од y, од што следува дека $x^2y+[y]$ има прекин за секоја точка (x, y), каде што y е цел број. Воопшто, ако $\varphi(y)$ е дефинирана за секој $y \in \mathbf{R}$, тогаш $x^2y + \varphi(y)$ е x–примитивна за $f(x, y)$ во D.

Слично како и кај функциите од една променлива, непрекинатоста на една функција е доволен услов за егзистенција на нејзина примитивна функција. Тоа се гледа, имено, од следново:

Тврдење 1.

Ако $f(x, y)$ е непрекината во областа D, тогаш постои функција $F(x, y)$ што е x–примитивна за $f(x, y)$ во D. Во тој случај функцијата $G(x, y)$ (дефинирана во D) е x–примитивна за $f(x, y)$ во D, акко постои функција $\varphi(y)$ (дефинирана во интервалот (c, d)), таква што

$$G(x, y) = F(x, y) + \varphi(y), \tag{2}$$

за секоја точка $(x, y) \in D$.

Доказ. Нека $x_0 \in (a, b)$. Ставајќи:

$$F(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y)dt \left(= \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)dx \right),$$

добиваме функција $F(x, y)$ дефинирана во D, а освен тоа (според Т. 3 од III.**5.3**) имаме $F_x(x, y) = f(x, y)$ за секоја точка $(x, y) \in D$, т.е. $F(x, y)$ е x–примитивна во D за $f(x, y)$. Тогаш, јасно е дека секоја функција $G(x, y)$ од облик (2) е x–примитивна за $f(x, y)$ во D.

Да претпоставиме дека $F(x, y)$ и $G(x, y)$ се x–примитивни за $f(x, y)$ во D и да ставиме $H(x, y) = F(x, y) - G(x, y)$. Тогаш

$$H_x(x, y) = F_x(x, y) - G_x(x, y) = f(x, y) - f(x, y) = 0$$

за секоја точка $(x, y) \in D$, од што следува дека $H(x, y)$ не зависи од x, т.е. дека постои функција $\varphi(y)$ дефинирана во интервалот (c, d), таква што $H(x, y) = \varphi(y)$, за секоја точка $(x, y) \in D$. $\diamond$

Како и кај функциите од една променлива, со $\int f(x, y)dx$ го означуваме множеството од сите функции $F(x, y)$ што се x–примитивни за $f(x, y)$, во дадена област D. Според T. 1, ако $f(x, y)$ е непрекината во D, тогаш $\int f(x, y)dx$ е бесконечно множество, при што разликата на кои било две функции од тоа множество не зависи од x, т.е. е функција од y. Затоа, ако $F(x, y)$ е која било x–примитивна функција за $f(x, y)$ во D, имаме:

$$\int f(x, y)dx = F(x, y) + \varphi(y)\,,$$

каде што $\varphi(y)$ е која било функција дефинирана во интервалот (c, d).

Така, според примерот 1, имаме:

$$\int 2xy\,dx = x^2y + \varphi(y)\,.$$

Поимот за y–**примитивна функција**, односно интеграл од облик $\int f(x, y)dy$, се дефинира аналогно. Да го илустрираме тоа со конкретни примери.

ПРИМЕР 2. а) $\int 2xy\,dy = xy^2 + \varphi(x)$; б) $\int xe^y\,dy = xe^y + \varphi(x)$.

Забелешка 1. По аналогија со функциите од една променлива, изразите $\int f(x, y)dx$, $\int f(x, y)dy$ ги викаме **неопределени интеграли**, а $f(x, y)dx$, $f(x, y)dy$ нивни соодветни **подинтегрални изрази**. Како што се гледа од горната дискусија, (на пример) *интегралот* $\int f(x, y)dx$ *се решава на "обичен начин"*, со тоа што: *y се смета за константа при интегрирањето, но по интегрирањето, наместо константа, се додава произволна функција од y.*

Природно е да се постави задача за определување на функција $z(x, y)$ што припаѓа и на двата неопределени интеграли $\int P(x, y)dx$, $\int Q(x, y)dy$, каде што $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ се дадени непрекинати функции во областа D. Со други зборови, бараме функција $z(x, y)$, таква што $z_x = P$, $z_y = Q$. Пред да го решиме овој проблем во општ случај, ќе разгледаме два примера.

ПРИМЕР 3. Ќе се обидеме да определиме функција $z(x, y)$, таква што во некоја правоаголна област D да бидат точни равенствата:
а) $z_x = ye^x + 2xy^3$, $z_y = 3x^2y^2 + e^x$; б) $z_x = 2xy$, $z_y = x^2 + xy$.

Во случајот а) имаме:

$$z = \int (ye^x + 2xy^3)dx = ye^x + x^2y^3 + \varphi(y),$$

од што следува:

$$z_y = e^x + 3x^2y^2 + \varphi'(y),$$

т.е. $\varphi'(y) = 0$, па значи: $\varphi(y) = c$ е константа. Од сето тоа следува дека $z = ye^x + x^2y^3 + c$ го има бараното својство, за која било константа c, и дека бараните услови се исполнети за кои било $x, y \in \mathbf{R}$.

Преостанува случајот б). За да биде точно равенството $z_x = 2xy$, треба $z(x, y)$ да има облик: $z = x^2y + \varphi(y)$, а од вториот услов $z_y = x^2 + xy$, добиваме: $x^2 + \varphi'(y) = x^2 + xy$, т.е. $\varphi'(y) = xy$. Но, последното не е можно бидејќи $\varphi'(y)$ не смее да зависи од x. Според тоа, (при која било правоаголна област D), *не постои функција $z(x, y)$ таква што да бидат точни равенствата $z_x = 2xy$, $z_y = x^2 + xy$*, за $(x, y) \in D$.

Различните резултати во случаите а) и б) се објаснуваат со тврдењето што следува.

Тврдење 2.

Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$, P_y и Q_x се непрекинати во отворената правоаголна област D. Постои функција $z(x, y)$ таква што во D се точни равенствата:

$$z_x = P, \quad z_y = Q \tag{3}$$

акко во D е точно и равенството:

$$P_y = Q_x. \tag{4}$$

Во тој случај, за секои $(x_0, y_0), (x, y) \in D$ е точно равенството:

$$z(x, y) = z(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy. \tag{5}$$

Доказ. Да претпоставиме дека функцијата $z(x, y)$ е таква што равенствата (3) се точни за секоја точка (x, y) од D. Тогаш, z има непрекинати изводи во D, па според теоремата за еднаквост на мешаните изводи (Т. 1 од **V.1.8**) имаме: $P_y = z_{xy} = z_{yx} = Q_x$, т.е. точно е равенството (4), за секоја точка $(x, y) \in D$.

Ако $(x_1, y_1), (x_0, y_0) \in D$, тогаш:

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= z(x_0, y_0) + z(x_1, y_1) - z(x_0, y_1) + z(x_0, y_1) - z(x_0, y_0) \\ &= z(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x_1} z_x(x, y_1)dx + \int_{y_0}^{y_1} z_y(x_0, y)dy. \end{aligned} \tag{6}$$

Ако се имаат предвид равенствата (3), од (6) следува:

$$z(x_1, y_1) = z(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y_1)dy,$$

односно (5), ако $(x_1, y_1) = (x, y)$ се смета за променлива точка во D.

Да претпоставиме сега дека функцијата $z(x, y)$ е определена со (5), при што се претпоставува дека е исполнето и равенството (4). Да ги определиме z_x и z_y. Ако се има предвид дека првиот и третиот собирок на десната страна од (5) не зависат од x, и фактот што вториот собирок може да се претстави во облик: $\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)dt$, добиваме: $z_x = P(x, y)$. Ако се примени Т. 2 од **1.1** (при што границите на интегрирањето x_0, x во вториот интеграл се сметаат за константи), се добива:

$$z_y = \int\limits_{x_0}^{x} P_y(t, y)dt + Q(x_0, y) = \int\limits_{x_0}^{x} Q_x(t, y)dt + Q(x_0, y) =$$

$$= Q(x, y) - Q(x_0, y) + Q(x_0, y) = Q(x, y) \qquad \diamondsuit$$

Забелешка 2. Сите појавувања на x (а истото важи и за y) на десната страна од (5) немаат исто значење. Имено, само горната граница x во вториот собирок е исто што и x на левата страна, додека во $P(x, y)dx$, x има смисла на подинтегрална променлива. (Појаву~~вањето на y во вт~~ориот собирок и горната граница на третиот собирок е исто што и y на левата страна, додека во $Q(x_0, y)dy$, y е подинтегрална променлива.) Имајќи ги предвид својствата 1^0 и Забел. 1 од III.**1.3**, равенството (5) би можеле да го претставиме во следниот вид:

$$z(x, y) = z(x_0, y_0) + \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt. \qquad (5')$$

Забелешка 3. Ако ја примениме формулата (5) (т.е. (5′)) во примерот 3, со тоа што ќе ставиме $x_0 = y_0 = 0$ и $z(0, 0) = z_0$, во случајот а) добиваме:

$$z = z_0 + \int\limits_{0}^{x}(ye^t + 2ty^3)dt + \int\limits_{0}^{y} dt = z_0 + ye^x - y + x^2y^3 + y = z_0 + ye^x + x^2y^3,$$

а овој резултат е во согласност со резултатот добиен порано, бидејќи z_0 може да се смета за произволна константа.

Применувајќи ја формулата (5) на Пр. 3.б, добиваме функција

$$z(x, y) = z_0 + \int\limits_{0}^{x} 2ty\,dt + \int\limits_{0}^{y} 0 \cdot dt = z_0 + x^2y,$$

таква што $z_x = 2xy$, но $z_y = x^2 \neq x^2 + xy$. Но, и без примена на (5) можевме да заклучиме дека функција $z(x, y)$ со бараното својство не постои, бидејќи не е исполнет условот (4). (Имено, $P_y = 2x$, $Q_x = 2x + y$.)

Да нагласиме дека, *пред применување на формулата* (5), *треба да се провери условот* (4).

Забелешка 4. Теоремата 2 е позната и како **теорема за определување на функција при даден тотален диференцијал**, бидејќи равенствата (3) се еквивалентни со:

$$dz = P\,dx + Q\,dy. \qquad (7)$$

ПРИМЕР 4. Функциите

$$P(x, y) = y/(x^2+y^2), \quad Q(x, y) = -x/(x^2+y^2)$$

се непрекинати во областа U што се состои од сите точки (x, y) различни од $(0, 0)$, а лесно се проверува дека $P_y = Q_x$, за секоја точка $(x, y) \in U$.

Сепак, не можеме врз база на Т. 2 да заклучиме дека постои функција $z(x, y)$, таква што :

$$dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}, \tag{8}$$

за секоја точка $(x, y) \in U$, бидејќи областа U не е од облик (1). Може дури и да се покаже дека таква функција не постои. (Види и Вежба 11.). Но, ако ставиме, на пример, $U_1 = \{(x, y) \mid y > 0\}$, тогаш можеме да ја примениме Т. 2. Така, ставајќи $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z(0, 1) = 0$, добиваме:

$$z = \int_0^x \frac{y\,dx}{x^2+y^2} = arctg\,\frac{x}{y}.$$

Ако сакаме функцијата $z(x, y)$ да ја додефинираме и за $y = 0$, $x \neq 0$, но притоа да се сочува непрекинатоста, треба да ставиме: $z(x, 0) = \pi/2$ за $x > 0$, $z(x, 0) = -\pi/2$ за $x < 0$. Уште повеќе, функцијата:

$$z(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x/y), & y > 0 \\ \pi/2, & x > 0,\ y = 0 \\ -\pi/2, & x < 0,\ y = 0 \\ \operatorname{arctg}(x/y) + \pi & x > 0,\ y < 0 \\ \operatorname{arctg}(x/y) - \pi & x < 0,\ y < 0 \end{cases} \tag{9}$$

го задоволува равенството (8) во секоја точка (x, y) што не припаѓа на полуправата $\{(0, y) \mid y \leq 0\}$. Но, не постои можност да се додефинира функцијата $z(x, y)$ на множеството $\{(0, y) \mid y < 0\}$, така што функцијата $z(x, y)$ да биде непрекината на U. Имено, ако $y_0 < 0$, тогаш:

$z(x, y) \to \pi/2$, кога $(x, y) \to (0, y_0)$, $x > 0$,

$z(x, y) \to -\pi/2$, кога $(x, y) \to (0, y_0)$, $x < 0$.

Вежби

1. Да се определи функција $F(x, y)$, таква што $F_x = 2xy + y$, во некоја отворена област, ако се знае дека е исполнет условот:

   а) $F(0, y) = \cos y$; б) $F(0, y) = \ln y$; в) $F(1, y) = \sqrt{y}$.

2. Да се покаже дека функцијата $F(x, y)$ дефинирана со: $F(x, y) = x^2 + 1$, за y рационален и $F(x, y) = x^2$, за y ирационален, е x–примитивна за $f(x, y) = 2x$ во $\mathbb{R}^2$, но дека F_y не постои ни во една точка. Да се даде пример на y–примитивна функција $G(x, y)$ на функцијата $2x$, таква што G_x да не постои во ниедна точка.

   Во задачите 3–9 да се определи функција $z(x, y)$, ако постои, таква што $z(x_0, y_0) = z_0$, каде што x_0, y_0, z_0 се дадени, и во некоја околина U на (x_0, y_0) се точни равенствата $z_x = P$, $z_y = Q$, каде што P и Q се дадени функции.

3. $P = 3x^2$, $Q = 3y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$.
4. $P = 4x^3 + 3y^2$, $Q = 6xy + 3y^2$, $x_0 = y_0 = 1$, $z_0 = 2$.
5. $P = 4x^2y + y^3$, $Q = 6x + 2y$, $x_0 = y_0 = z_0 = 5$.

6. $P = x + y$, $Q = y - x$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

7. $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \cdot P = x$, $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \cdot Q = y$, $x_0 = y_0 = 1$, $z_0 = 2$.

8. $\sqrt{4 - x^2 - y^2} \cdot P = -x$, $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = -y$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 2$.

9. $(x^2 + y^2) \cdot P = -y$, $(x^2 + y^2) \cdot Q = x$, $x_0 = y_0 = -1$, $z_0 = 3\pi/4$.

10. Во секоја од вежбите 3–9 да се определи максималното можно множество U со наведените својства.

11*. Да се покаже дека не постои функција $z(x, y)$ таква што е исполнето равенството (8) од примерот 4, за секоја точка $(x, y) \neq (0, 0)$. Потоа, да се покаже дека за секое од следните подмножества на $U = \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$:

$$U_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) \mid y \geq 0\}, \quad U_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) \mid x \geq 0\},$$

$$U_3 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) \mid y \leq 0\}, \quad U_4 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) \mid x \leq 0\},$$

постои функција $z = z_i(x, y)$, што го задоволува равенството (8). Притоа секое од множествата U_1, U_2, U_3, U_4 е максимално множество со споменатите својства.

1.3. Интеграли на функции од три променливи

Во овој раздел ќе формулираме неколку тврдења за функции од три променливи аналогни на својствата за функции од две променливи, докажани во **1.1** и **1.2**.

Подолу ќе претпоставуваме дека a, b, c, d, e, k се реални броеви такви што $a < b$, $c < d$, $e < k$. Нека $G \subseteq \mathbb{R}^3$ е паралелопипедот во просторот , а $D \subseteq \mathbb{R}^2$ правоаголникот во рамнината, определени со:

$$G = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq k\}, \tag{1}$$

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq c,\ b \leq y \leq d\}. \tag{2}$$

(Според тоа, можеме да сметаме дека D е **проекција** од G на xy–рамнината.)

Потоа, нека $f(x, y, z)$ е непрекината функција на G и $\alpha, \beta \in [e, k]$. Тогаш:

$$F(x, y) = \int_\alpha^\beta f(x, y, z)dz \tag{3}$$

е непрекината функција на D. Ако, покрај тоа, f има непрекинати изводи f_x, f_y на G, тогаш:

$$F_x = \int_\alpha^\beta f_x\, dz, \quad F_y = \int_\alpha^\beta f_y\, dz. \tag{4}$$

Нека условот α и β да се константи се замени со тоа што ќе се бара тие да се непрекинати функции на D, такви што $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in [e, k]$, за секоја точка $(x, y) \in D$. Тогаш заклучокот дека $F(x, y)$ е непрекината функција на D останува во сила. Истото се однесува и за вториот заклучок, со тоа што равенствата (4) ќе се заменат со следниве равенства:

$$\begin{aligned} F_x &= f\big(x, y, \beta(x, y)\big)\beta_x - f\big(x, y, \alpha(x, y)\big)\alpha_x + \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_x\, dz\,, \\ F_y &= f\big(x, y, \beta(x, y)\big)\beta_y - f\big(x, y, \alpha(x, y)\big)\alpha_y + \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_y\, dz\,. \end{aligned} \tag{4'}$$

Подолу ќе претпоставуваме дека G е отворена област од облик:

$$G = \{(x, y, z) \mid a < x < b, c < y < d, e < z < k\}\,, \tag{1'}$$

каде што a, b, c, d, e, k се реални броеви такви што $a < b$, $c < d$, $e < k$. Притоа се допушта да биде $-\infty \in \{a, c, e\}$, $+\infty \in \{b, d, k\}$. Потоа, нека $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ се функции што заедно со своите парцијални изводи од прв ред, се непрекинати на G.

Теорема 1.

Постои функција $u(x, y, z)$ таква што:

$$u_x = P\,, \quad u_y = Q\,, \quad u_z = R \tag{5}$$

за секоја точка $(x, y, z) \in G$ акко на G се точни равенствата:

$$P_y = Q_x\,, \quad P_z = R_x\,, \quad Q_z = R_y. \tag{6}$$

Во тој случај, ако (x_0, y_0, z_0) е која било точка од G и u_0 кој било број, функцијата $u(x, y, z)$ определена со:

$$u(x, y, z) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y, z)dt + \int\limits_{y_0}^{x} Q(x_0, t, z)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t)dt\,, \tag{7}$$

ги задоволува равенствата (5) на G. $\Diamond$

Забелешка 1. Како и кај функциите од две променливи, Т. 1 е позната и под името **теорема за определување на функција при даден тотален диференцијал.**

ПРИМЕР 1. Да ја определиме функцијата $u(x, y, z)$, знаејќи дека $u(0, 0, 0) = 0$, а нејзиниот тотален диференцијал е даден со:

$$du = (2xy^3z^4 + 1)dx + (3x^2y^2z^4 + 2y)dy + (4x^2y^3z^3 + 3z^2)dz\,.$$

Прво, лесно се проверува дека се точни равенствата (6). Потоа, со помош на (7), се добива:

$$u = \int\limits_{0}^{x}(2ty^3z^4 + 1)dt + \int\limits_{0}^{y} 2t\,dt + \int\limits_{0}^{z} 3t^2dt = x^2y^3z^4 + x + y^2 + z^3\,.$$

Да забележиме дека истата задача би можеле да ја решиме како и во примерот 3 од **1.2**. Имено, од $u_x = 2xy^3z^4 + 1$, добиваме дека $u = x^2y^3z^4 + x + \varphi(y, z)$, за некоја функција $\varphi(y, z)$. Потоа, од $u_y = 3x^2y^2z^4 + 2y$, добиваме: $3x^2y^2z^4 + 2y = 3x^2y^3z^4 + \varphi_y$, т.е. $\varphi_y = 2y$, од што следува дека

$\varphi = y^2 + \psi(z)$, т.е. $u = x^2y^3z^4 + x + y^2 + \psi(z)$. Ни преостанува да го искористиме равенството $u_z = 4x^2y^3z^3 + 3z^2$, од што ќе следува дека $\psi'(z) = 3z^2$, т.е. $\psi(z) = z^3 + c$; така добиваме: $u = x^2y^3z^4 + z^3 + y^2 + x + c$, а поради $u(0, 0, 0) = 0$, константата c е нула.

Забелешка 2. Секако, резултатите од овој раздел, па значи и од претходните два раздела, можат да се формулираат за случај на функции од n променливи, за кој било природен број n.

Вежби

1. Да се определи функцијата $F(x, y, z)$, таква што:
   $F_{yz}(x, y, z) = x + 2y + 2z, \quad F_y(x, y, 0) = x + 2y, \quad F(x, 0, z) = \sin(x + z)$
   за секои $x, y, z \in \mathbf{R}$.

   Во 2–5 да се определи функција $u(x, y, z)$ (ако постои), таква што: $u_x = P, \quad u_y = Q, \quad u_z = R$.
2. $P = y + z, \quad Q = x + z, \quad R = x + y$.
3. $P = x^2, \quad Q = x + y, \quad R = x^2 + y^2$.
4. $Pv = x, \quad Qv = y, \quad Rv = z, \quad v = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.
5. $P = 1/z, \quad Q = -3/z, \quad R = (3y - x + z^2)/z^2$.

6*. Да се докажат Т. 1 и Т. 2.

1.4. Диференцијални равенки

При неопределените интеграли (во III.1) ја решававме задачата за одредување функција $y(x)$ што го задоволува равенството $y' = f(x)$ при позната функција $f(x)$, за секој x од некој интервал (a, b). Бараното решение е, имено, неопределениот интеграл $y(x) = \int f(x)dx$.

Така, на пример, ако знаеме дека една непозната функција $y(x)$ го задоволува равенството $y' = 2x$, за секој x од некој интервал (a, b), тогаш бараната функција има облик $y = \int 2x\, dx = x^2 + C$, каде што C е константа. За определувањето на константата C потребна е дополнителна информација. Така, ако се знае, на пример, дека $a < 1 < b$ и дека $y(1) = 0$, тогаш $0 = 1 + C$, т.е. $C = -1$, па $y = x^2 - 1$ е бараната функција.

Да разгледаме уште една конкретна задача. Имено, да претпоставиме дека една непозната функција $z(x, y)$ во отворениот квадрат $D = \{(x, y) \mid -1 < x < 2, 0 < y < 3\}$ ги задоволува условите:

$$z(0, y) = \sin y \quad \text{и} \quad z_x(x, y) = 2xy,$$

за секој y од интервалот $(0, 3)$ и за секоја точка $(x, y) \in D$. Од вториот услов добиваме $z = x^2y + \varphi(y)$, каде што $\varphi(y)$ е непозната функција дефинирана во интервалот $(0, 3)$. Ако се има предвид и првиот услов, добиваме:

$$\sin y = 0^2 \cdot y + \varphi(y), \quad \text{т.е.} \quad \varphi(y) = \sin y\,.$$

Според тоа, $z(x, y) = x^2 y + \sin y$ е бараната функција.

Разгледаните два примера се специјални случаи од следната, поопшта задача.

Нека $F(x, y, t_1, \dots, t_{n-1}, t)$ е функција од $n+2$ променливи $x, y, t_1, \dots t_{n-1}, t$, дефинирана во соодветна отворена област $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, при што F битно зависи од t, т.е. $F_t \neq 0$ во D. Се бара функција $y = \varphi(x)$, којашто идентички го задоволува равенството

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

во некој интервал (a, b), т.е. равенството

$$F'\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\big) = 0 \tag{1'}$$

е точен исказ за секој $x \in (a, b)$.

Секое равенство од обликот (1) се вика **диференцијална равенка** (ДР[1]) **од n–ти ред** по непознатата функција $y = y(x)$, а секоја функција $\varphi(x)$ за која важи (1′) се вика **решение на ДР** во интервалот (a, b). Постапката, пак, за добивање решение на ДР (1) се вика **решавање** на таа ДР.

Така, во првиот разгледан пример имавме: $F(x, y, t) = t - 2x$, а диференцијалната равенка има облик $y' - 2x = 0$, т.е. $y' = 2x$, и е *од прв ред*. Како што видовме погоре, за која било константа C, $y(x) = x^2 + C$ е решение на дадената ДР.

Се покажува дека и секоја диференцијална равенка од n–ти ред од обликот (1) обично има [2] решение од облик $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, каде што $C_1, C_2, \dots, C_n$ се произволни константи. Тогаш велиме дека функцијата $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ е **општо решение** на ДР (1), а **партикуларно решение** е секое решение од обликот $y(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$, каде што $C_1^0, \dots, C_n^0$ се конкретни броеви.

Така, $y = x^2 + C$ е општо решение на ДР $y' = 2x$, а $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 + 1$, $y_3 = x^2 - 2$ се партикуларни решенија.

Равенката $z_x - 2x = 0$ разгледана во вториот пример е парцијална ДР. Поопшто, нека $G(x, y, z, t_1, t_2, \dots, t_m)$ е функција од $m + 3$ променливи, дефинирана во соодветна отворена

---

[1] Натаму кратенката ДР ќе значи "диференцијална равенка".

[2] На пример, ДР $y^2 + y'^2 = 0$ односно $y^2 + y'^2 + y''^2 = 0$ има решение $(y = 0)$, но не и од облик $y(x, C_1)$ односно $y(x, C_1, C_2)$; ДР, пак $y'^2 + 1 = 0$ нема (никакво) решение.

област $D \subseteq \mathbf{R}^{m+3}$ при што $m \geq 1$, и G битно зависи од некоја од променливите $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Се бара функција $z = \psi(x, y)$ којашто идентички го задоволува равенството

$$G(x, y, z, z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \ldots) = 0 \tag{2}$$

во некоја област $D \subseteq \mathbf{R}^2$, т.е. равенството

$$G(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y, \psi_{xx}, \psi_{xy}, \psi_{yy}, \ldots) = 0 \tag{2'}$$

е точен исказ за секој пар $(x, y) \in D$.

Секоја равенка од обликот (2) се вика **парцијална диференцијална равенка** (ПДР) по непознатата функција $z = z(x, y)$, а секоја функција $\psi(x, y)$ за која важи (2′) во D се вика **решение** на ПДР (2). **Ред** на ПДР (2) е најголемиот број $n \geq 1$, таков што $z_{x^p y^q}$ се појавува (битно) на левата страна од (2), каде што $n = p + q$.

И кај ПДР се воведува поимот **општо** (односно **партикуларно**) **решение**, но овде нема да дадеме експлицитни дефиниции. Ќе се задоволиме само со констатацијата дека $z = x^2y+\varphi(y)$ е општо решение на $z_x = 2xy$, а секоја од функциите $x^2y + y$, $x^2y + |\, y \,|$, $x^2y + \sin y$, е партикуларно решение.

Во овој раздел се изнесуваат само почетните елементи од теоријата на диференцијалните равенки со главна цел: да се овозможи следење на материјалот во делови од главите VIII, IX и X што ќе бидат составни делови на четвртата книга.

Ќе извршиме кратка дискусија на диференцијалните равенки од прв ред решени по изводот. Имено, за една диференцијална равенка од прв ред велиме дека е **решена по изводот** ако има облик:

$$y' = f(x, y)\,, \tag{3}$$

каде што $f(x, y)$ е позната функција. Обично нам ни е потребно партикуларно решение $y(x)$ на (3) со својството:

$$y(x_0) = y_0\,, \tag{4}$$

каде што x_0 и y_0 се дадени броеви. Равенството (4) се вика и **почетен услов** на задачата. Се разбира, за решавањето на задачата, покрај почетниот услов, битна улога има функцијата $f(x, y)$.

Тврдењето што ќе го формулираме подолу е познато како **теорема за егзистенција на решение на диференцијална равенка од прв ред**.

Теорема 1.

Нека $f(x, y)$ и $f_y(x, y)$ се непрекинати функции во отворено множество $U \subseteq \mathbf{R}^2$, и нека $(x_0, y_0) \in U$. Постои позитивен број a, *таков што диференцијалната равенка (3) има единствено решение $y(x)$ во интервалот $(x_0 - a, x_0 + a)$ што го задоволува почетниот услов (4). Притоа, ако низата функции $y_n(x)$, $n \geq 1$, се дефинира со:*

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt\,, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt\,, \tag{5}$$

тогаш:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) = y(x)\,. \tag{6}$$

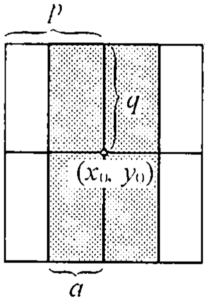
за секој x од интервалот $(x_0 - a, x_0 + a)$.

Доказ. Да се види Понтрягин, стр. 10 и стр. 152–161 или Гл. X во кн. IV.

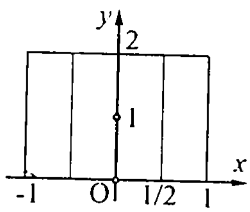
Да спомeнеме овде како се доаѓа до бројот a. Имено, прво се бираат позитивни броеви p и q, такви што сите точки од затворениот правоаголник

$$D = \{(x, y) \mid x_0 - p \leq x \leq x_0 + p,\, y_0 - q \leq y \leq y_0 + q\}$$

лежат во U (види црт. 1). Потоа за a се избира најмалиот од броевите p, q/M, $1/K$, каде што M е најголемата вредност на $|f(x, y)|$, а K на $|\,f_y(x, y)\,|$ во D. Воочуваме и дека, поради (7), може (за доволно големо n) да се смета дека $y \approx y_n$. ◇



Црт. 1



Црт. 2

ПРИМЕР 1. Да ја разгледаме равенката $y' = y$.

Избираме $p = q = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ (црт. 2). Имаме: $f(x, y) = y$, $f_y(x, y) = 1$, од што следува дека $K = 1$, $M = 2$, па според тоа, можеме да ставиме $a = 1/2$. Ќе ја определиме низата y_n. Имаме:

$$y_1 = 1 + \int_0^x dt = 1 + x\,,$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x (1 + t)dt = 1 + t + \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,,$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,.$$

Продолжувајќи натаму, добиваме дека

$$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Од добиениот резултат (да се види и II.**6.4**) следува дека $y = e^x$ е бараното решение на дадената равенка, а дека тоа е точно може да се заклучи и со проверка. (И покрај тоа што, според Т. 1, сигурни сме дека $y_n(x) \to e^x$ за $|\, x \,| \leq 1$, тоа важи за секој x.)

Ќе разгледаме подолу неколку специјални видови диференцијални равенки од прв ред решени по изводот, чиишто општи решенија можеме да ги определиме, во експлицитен или имплицитен вид. Пред сé, диференцијалната равенка:

$$P(x,\, y) + Q(x,\, y)y' = 0\,, \tag{7}$$

може да се претстави во облик:

$$P\,dx + Q\,dy = 0\,. \tag{7'}$$

Резултатот од Т. 2 во **1.2** ни дозволува да дојдеме до класа равенки од видот (7) (т.е. (7′)) чиешто општо решение може да се претстави во имплицитен облик:

Теорема 2.

Ако левата страна на ДР (7′), *т.е.* $P\,dx + Q\,dy$, *е тотален диференцијал на некоја функција* $z(x,\, y)$ *во правоаголната област* D, *и ако* $y(x)$ *е функција определена имплицитно со равенството* $z(x,\, y) = C$ (C– константа), *тогаш* $y(x)$ *е решение на* ДР (7′).

Притоа, функцијата $z(x,\, y)$ е определена со (5) од **1.2**:

$$z(x,\, y) = z(x_0,\, y_0) + \int_{x_0}^{y} P(x,\, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\, y)dx\,, \tag{8}$$

каде што $(x_0,\, y_0)$ е која било точка од D.

Доказ. Според Т. 2 од **1.2**, ако функцијата $z(x,\, y)$ е определена со (8), тогаш $z_x = P$, $z_y = Q$ во D. Да претпоставиме сега дека C е константен број и дека функцијата $y(x)$ е определена имплицитно со $z(x,\, y) = C$ на интервалот $(\alpha,\, \beta)$, т.е. $z\big(x,\, y(x)\big) = C$, за секој $x \in (\alpha,\, \beta)$. Тогаш имаме:

$$z_x\big(x,\, y(x)\big) + z_y\big(x,\, y(x)\big) \cdot y' = 0\,, \qquad \text{т.е.}$$

$$P\big(x,\, y(x)\big) + Q\big(x,\, y(x)\big)y'(x) = 0\,,$$

за секој $x \in (\alpha,\, \beta)$. Според тоа $y(x)$ е решение на (7). ◇

ПРИМЕР 2. Равенката $x\,dx + y\,dy = 0$ ги задоволува условите на теоремата за секоја точка $(x,\, y)$. Земајќи, на пример, $x_0 = y_0 = 0$, добиваме: $z(x,\, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, па според тоа со $x^2 + y^2 = 2C$ е определено општото решение на дадената равенка. Забележуваме дека константата мора да биде позитивна, па ако ставиме $2C = K^2$, добиваме $x^2 + y^2 = K^2$.

Директна примена на Т. 1 не е можна во случај кога равенството $P_y = Q_x$ не е точно. Но, во таков случај, можеме равенката (7) да ја помножиме со функција $\lambda(x,\, y)$, па ќе добиеме равенка:

$$P^* \, dx + Q^* \, dx = 0\,, \tag{7''}$$

каде што $P^* = \lambda P$, $Q^* = \lambda Q$. Ако притоа λ се избере така што $P^*_y = Q^*_x$, тогаш може на $(7'')$ да се примени Т. 1. (За функцијата $\lambda(x, y)$ се вели дека е **интегрален множител** на ДР (7).)

Равенството $P^*_y = Q^*_x$ е еквивалентно со следново равенство:

$$P\lambda_y - Q\lambda_x + \lambda(P_y - Q_x) = 0\,, \tag{9}$$

каде што λ е непозната функција. Значи, за да ја решиме диференцијалната равенка (4) треба да определиме барем едно решение на парцијалната диференцијална равенка (9), а новата (помошна) задача е обично потешка од главната задача. Но, во некои случаи, релативно лесно се наоѓа решение λ на (9) од даден вид; често тоа е случај кога $\lambda = \lambda(x)$ (или $\lambda = \lambda(y)$) е функција што зависи само од една променлива. Таков е случајот во следниов:

ПРИМЕР 3. Ако $p(x)$ е дадена функција од x, тогаш за равенката:

$$y' + p(x)\, y = 0 \tag{10}$$

велиме дека е **хомогена линерна диференцијална равенка од прв ред.** Тоа е специјален случај од (7), а имено, имаме $P = p(x) \cdot y$, $Q = 1$. Според тоа, $Q_x = 0$, $P_y = p(x)$, па за $p(x) \neq 0$ не може да се примени Т. 1. (инаку за $p(x) = 0$, $y = C$ е општото решение на (10), па е затоа природно да се претпостави дека $p(x) \neq 0$.) Нека $F(x)$ е една примитивна функција на $p(x)$, т.е. $F'(x) = p(x)$.

Ако (10) ја помножиме со e^F, ќе ја добиеме равенката

$$p\, e^F\, y + e^F\, y = 0\,. \tag{10'}$$

Таа е од обликот (7) при што

$$P = pe^F y, \quad Q = e^F \quad \text{и:} \quad P_y = pe^F = F \cdot e^F = Q_x\,.$$

Според тоа, може да се примени Т. 1; но, полесно е да се воочи дека $p = F'$, па:

$$p\, e^F\, y + e^F\, y' = (e^F\, y)'\,,$$

од што следува дека $y = Ce^{-F}$ е општо решение на (10). Ова решение обично се пишува во обликот

$$y = c\, e^{-\int p\, dx}, \tag{11}$$

при што резултатот не зависи од тоа која примитивна функција $F(x)$ ќе се земе за неопределениот интеграл $\int p\, dx$.

Равенката (10) е специјален вид од равенката:

$$y' + p(x)\, y = q(x)\,, \tag{12}$$

каде што $p(x)$ и $q(x)$ се дадени функции. За (12) велиме дека е **линеарна диференцијална равенка од прв ред.**

Теорема 3.

Ако $p(x)$ *и* $q(x)$ *се непрекинати функции во некој интервал* (α, β), *тогаш со:*

$$y = e^{-\int p\,dx}[C + \int e^{\int p\,dx} q\,dx], \tag{13}$$

е определено општо решение на (12).

Доказ. Нека $F(x)$ е примитивна функција на p, а $G(x)$ на qe^F. Тогаш, ако $y = e^{-F}\cdot(C+G)$, каде што C е константа, добиваме:

$$y' = -e^{-F}\cdot(C+G)F' + e^{-F}\cdot G' = -pe^{-F}(C+G) + e^{-F}qe^F,$$

од што следува:

$$y' + py = -pe^{-F}C - pe^{-F}G + q + pe^{-F}C + pe^{-F}G = q. \qquad \diamondsuit$$

Забелешка 1. Од доказот е јасно дека кај неопределените интеграли од десната страна на (13) не треба да се зема интеграциона константа. Во врска со (13), треба да се истакне дека до неа може да се дојде на "поприроден начин" ако се воочи дека за $q = 0$, (12) се сведува на (10). Тоа сугерира да се направи обид решението (11) на (10) да се искористи за решавање на (12). Имено, за таа цел се определува непозната функција $u(x)$, таква што $y = u(x)e^{-\int p\,dx}$ да биде решение на (12). Заменувајќи во (12), се добива дека $u' = qe^{\int p\,dx}$, т.е. $u = C + \int qe^{\int p\,dx}\,dx$, од што следува формулата (13).

ПРИМЕР 4. Применувајќи ја формулата (13) на равенката $y' + 2xy = 2x$, добиваме:

$$y = e^{-x^2}(C + \int 2xe^{x^2}\,dx) = e^{-x^2}(C + e^{x^2}) = 1 + Ce^{-x^2}.$$

Со обопштување на равенката (12) се добива:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = q, \tag{14}$$

каде што $p_1, p_2, \ldots, p_n$, q се дадени функции од x. Равенката (14) се вика **линеарна диференцијална равенка** од **n–ти ред**. Равенката (14′) што се добива кога во (14) се стави $q = 0$ се вика **хомогена линеарна диференцијална равенка од n–ти ред.**

Точноста на следните две тврдења е јасна.

Тврдење 4.

Ако $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *се решенија на* (14′), *и ако* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *се кои било константи, тогаш и:*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n,$$

е решение на (14′). $\diamondsuit$

Тврдење 4.

Ако $\overline{y}$ *е решение на* $(14')$, *а* Y *на* (14), *тогаш* $y = \overline{y} + Y$ *е решение на* (14) $\diamondsuit$

Погоре изведовме формули за решавање на линеарни диференцијални равенки од прв ред, но, за жал такви формули не постојат за линеарните диференцијални равенки од повисок ред. Сепак, познати се редица резултати за овие линерани диференцијални равенки, но ние ќе спомeнеме само уште еден, за случајот $n = 2$.

Тврдење 5.

Ако $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *се ненулти решенија на хомогената равенка:*

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0\,, \tag{14''}$$

и ако y_2/y_1 *не е константа, тогаш:*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

е општо решение на $(14'')$ $\diamondsuit$

ПРИМЕР 5. Лесно се проверува дека $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ се решенија на равенката $y'' + y = 0$, од што следува дека $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ е нејзино општо решение. Потоа, ако се има предвид дека $Y = x$ е решение на $y'' + y = x$, добиваме дека $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$ е општо решение на нехомогената равенка $y'' + y = x$.

Поимот систем диференцијални равенки нема да го дефинираме најопшто, а само ќе наведеме два специјални случаи.

Прво, при определување на функција $z(x, y)$ од дадени изводи, всушност, го решаваме **системот парцијални диференцијални равенки:**

$$z_x = P(x, y), \quad z_y = Q(x, y)\,, \tag{15}$$

каде што P и Q се познати функции. Потоа, равенката (3) е специјален случај од следниот **систем диференцијални равенки:**

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{16}$$

при што $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ се непознати функции од x, а $f_1, f_2, \ldots, f_n$ се познати функции од x, t_1, $t_2, \ldots, t_n$.

Диференцијалната равенка (3) е специјален случај од системот (16), па, во врска со тоа, да напомниме и дека Т. 1 е специјален случај на соодветна теорема за егзистенција на решение на (16). (В. Понтрягин стр. 161 или Гл. X во кн. IV.)

Вежби

1. Да се реши ДР $(4x^3+3y^2)dx+(6xy+3y^2)dy$.
2. Да се докаже формулата (11): а) со помош на Т. 2; б) со помош на "обични" неопределни интеграли, а без претходно множење на ДР.

Во 3–6 да се реши соодветната ДР со помош на интегрален множител $\lambda(x, y)$ од специјален вид.

3. $(x+y^2)dx-2xy\,dy=0$, $\lambda=\lambda(x)$.
4. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$, $\lambda=\lambda(y)$.
5. $(2xy-y^2-y)dx+(2xy-x^2-x)dy=0$, $\lambda=\varphi(x+y)$.
6. $(y-xy^2\ln x)dx+x\,dy=0$, $\lambda=\varphi(x\cdot y)$, каде што $\varphi(t)$ е диференцијабилна функција од t.
7. Знаејќи дека $y_1(x)$ е ненулто решение на ДР $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$, да се воведе нова непозната функција $u=u(x)$ со $y=y_1u$, а потоа да се искористи добиенната ДР за определување на општо решение на дадената ДР.

VI.2. ЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛИ

Во **2.1** се дефинираат поимите линиски интеграли од прв и втор тип по рамнински криви, и тоа како специјални определени интеграли. Некои општи својства се изнесуваат во **2.2** и во **2.3** а проблемот за независност од патот на интеграцијата се разгледува во **2.4**. Во **2.5** се формулираат аналогни дефиниции и резултати за просторни криви.

2.1. Линиски интеграл од прв и втор тип

Во овој раздел, ако не биде инаку речено, претпоставуваме дека D е (која било) област во рамнината $\mathbf{R}^2$, а $f(x, y)$ непрекината функција во D.

Нека во D е дадена едноставна непрекината линија L што ги сврзува точките A и B. Притоа, претпоставуваме дека L е дадена со параметарските равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$, каде што $x(t)$ и $y(t)$ се непрекинати функции на сегментот $[\alpha,\beta]$, а точките A, B се добиени за $t=\alpha$, $t=\beta$, соодветно. [1)] (Ако точките A и B се совпаѓаат, тогаш L е *затворена крива.*) Сакајќи да ја истакнеме специјалната улога на точките A, B, линијата L ќе ја означуваме со AB.

Од погоре направените претпоставки следува дека функцијата $f\big(x(t), y(t)\big)$ е непрекината на $[\alpha, \beta]$, од што следува егзистенција на интегралот:

[1)] Потсетуваме дека од претпоставката за едноставност на L следува дека системот равенки $x(t_1)=x(t_2), y(t_1)=y(t_2)$ нема решение $t_1, t_2\in[\alpha,\beta]$ такво што $t_1\neq t_2$ и $\{t_1, t_2\}\neq\{\alpha,\beta\}$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),\, y(t)\big)dt\,, \tag{1}$$

којшто, секако, зависи од L и од функцијата $f(x, y)$. Тоа сугерира да велиме дека (1) е **интеграл на $f(x, y)$ по линијата** L, но тој термин, во општ случај, не е прикладен, зашто интегралот (1) зависи и од самите параметарски равенки, како што се гледа од следниов:

ПРИМЕР 1. Функцијата $f(x, y) = x + y^2$ е непрекината во $\mathbf{R}^2$. Нека L е отсечката на правата $y = x$, што ги сврзува точките $A(0, 0)$, $B(1, 1)$. Да ја претставиме таа отсечка на два начина со параметарски равенки, како што следува:

а) $x = t,\ y = t,\ t \in [0, 1]$; б) $x = t^2,\ y = t^2, t \in [0, 1]$. Лесно се проверува дека интегралот (1) во случајот а) има вредност 5/6, а 8/15 во случајот б).

Сосема е на место да се даде **предност на параметарски** равенки на кривата $AB(= L)$ од **обликот**

$$x = x(s) \quad y = y(s)\,,$$

каде што s е должината на лакот на линијата со почеток во точката A. Тогаш, ако l е должината на целиот лак на кривата L, природно е интегралот:

$$\int_{0}^{l} f\big(x(s),\, y(s)\big)ds\,, \tag{2}$$

да се вика **линиски интеграл на $f(x, y)$ по должината на лакот** AB, или **линиски интеграл од прв тип**. Тој интеграл го означуваме со:

$$\int_{AB} f(x,\, y)ds\,, \quad \text{или} \quad \int_{L} f(x,\, y)ds\,. \tag{2'}$$

Подолу ќе претпоставуваме дека L е *мазна крива*, т.е. дека е дадена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, такви што функциите $x(t)$, $y(t)$ имаат непрекинати изводи $\dot{x}$, $\dot{y}$, на $[\alpha, \beta]$. Користејќи го правилото за замена кај определен интеграл (в. III.**2.4**) и за пресметување должина на лак на рамнински криви (в. III.**6.1** или V.**4.2**) го добиваме следново тврдење:

$$1^0.\ \int_{AB} f(x,\, y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),\, y(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt\,. \qquad \diamondsuit$$

Во случај кога параметарот t е апсцисата на соодветната точка, т.е. кривата L има равенка $y(x)$, каде што $A = \big(a, f(a)\big)$, $B = \big(b, f(b)\big)$, имаме:

$$1'.\ \int_{AB} f(x,\, y)ds = \int_{a}^{b} f\big(x(t),\, y(t)\big)\sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

ПРИМЕР 1′. Да го пресметаме линискиот интеграл (2) во двата случаја од Пр. 1, при што се користи тврдењето 1^0 односно $1'$. Имаме:

а) $\int\limits_{AB} (x+y^2)ds = \int\limits_0^1 (x+x^2)\sqrt{2}\,dx = \frac{5\sqrt{2}}{6}$,

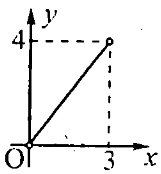
б) $\int\limits_{AB} (x+y^2)ds = \int\limits_0^1 (t^2+t^4)2t\sqrt{2}\,dt = \frac{5\sqrt{2}}{6}$,

Фактот што резултатот е ист во двата случаја не е случаен. Имено, при избрана почетна точка A на лакот, параметарските равенки $x = x(s)$, $y = y(s)$ на L се еднозначно определени, од што следува дека и интегралот (2), т.е. (2′), е исто така еднозначно определен. Ќе разгледаме уште два примера.

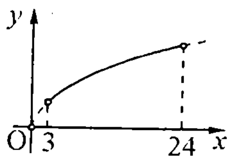
ПРИМЕР 2. **Да го пресметаме линискиот интеграл од прв тип**

а) $\int\limits_L xy\,ds$, $L\colon x = 3t,\ y = 4t,\ t \in [0, 1]$ **(црт. 1);**

б) $\int\limits_L y\,ds$, $L\colon y = 2\sqrt{x}$ **од** $x = 3$ **до** $x = 24$ **(црт. 2).**



Црт. 1



Црт. 2

Ќе го користиме 1^0 (за а)) односно $1'$ (за б)).

а) $xy = 12t^2$, $\quad ds = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \sqrt{9+16}\,dt = 5\,dt$;

$$\int\limits_L xy\,ds = \int\limits_0^1 12t^2\cdot 5\,dt = 60\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 20\,.$$

б) $y = 2\sqrt{x}$, $\quad ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+1/x}\,dx$;

$$\int\limits_L y\,ds = \int\limits_3^{24} 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+1/x}\,dx = 2\int\limits_3^{24}\sqrt{1+x}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_3^{24} = 156\,.$$

Во случаите кога параметарот t во параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ на кривата L има улога на апсциса, или на ордината, добиваме друг тип линиски интеграл. Таков случај имаме кога кривата L е график на некоја функција $y = y(x)$, за $x \in [a, b]$ каде што за $x = a$ се добива точката A, а за $x = b$ – точката B. Во тој случај, интегралот

$$\int\limits_a^b f\big(x, y(x)\big)dx \tag{3}$$

се вика **линиски интеграл од** $f(x, y)$ **на кривата** L **по координатата** x и се означува со

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dx \quad \text{или} \quad \int\limits_{L} f(x, y)dx\,. \tag{3'}$$

Во иста смисла, ако кривата L е дадена со равенка од облик $x = x(y)$, каде што $y \in [c, d]$, тогаш **линиски интеграл од** $f(x, y)$ **на кривата** L **по координатата** y се дефинира со:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dy = \int\limits_{c}^{d} f\big(x(y), y\big)dy\,. \tag{4}$$

Линиските интеграли по координати ќе ги викаме и **линиски интеграли од втор тип.**

Во општ случај, т.е. кога L е дадена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t \in [\alpha, \beta]$, и линиските интеграли од втор тип на L се пресметуваат според правилото за замена кај определените интеграли, т.е. точни се следните својства.

$\mathbf{2^0}$. $\displaystyle\int\limits_{AB} f(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\dot{x}\,dt\,.$

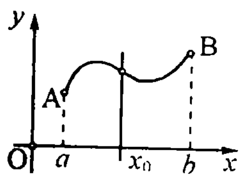
$\mathbf{3^0}$. $\displaystyle\int\limits_{AB} f(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\dot{y}\,dt\,.$

Притоа треба да се има предвид следнава

Забелешка 1. Од дефиницијата на (3), т.е. (3′) следува дека кривата L го има следново својство:

Ако $a \le x_0 \le b$, тогаш правата $x = x_0$ ја сече кривата L во точно една точка (црт. 3). *Според тоа, за да го користиме равенството во* $\mathbf{2^0}$, *треба за секој $x_0 \in [a, b]$ да постои единствен $t_0 \in [\alpha, \beta]$, таков што $x_0 = x(t_0)$.*

Од исти причини во $\mathbf{3^0}$ се подразбира дека за секој $y_0 \in [c, d]$ постои единствен $t_0 \in [\alpha, \beta]$, таков што $y_0 = y(t_0)$. Покрај тоа, во $\mathbf{2^0}$ *се претпоставува дека $x(t)$ има непрекинат извод во* $[\alpha, \beta]$, а во $\mathbf{3^0}$ истото барање се поставува за $y(t)$.



Црт. 3

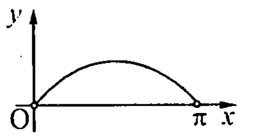
Да напомниме дека, при претпоставка дека $x(t)$ и $y(t)$ имаат непрекинати изводи во $[\alpha, \beta]$, интегралите на десните страни од 2^0 и 3^0 постојат независно од тоа дали кривата L го исполнува соодветниот услов. Затоа, постои можност левите страни во 2^0 и 3^0 да се дефинираат со помош на соодветните десни страни. Тој договор и ќе го направиме во **2.3**, но му препорачуваме на читателот да се придржува до споменатите ограничувања што треба да ги задоволува кривата L.

Сега, ќе разгледаме два примера.

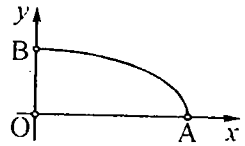
ПРИМЕР 3. Да го пресметаме линискиот интеграл од втор тип

а) $\int\limits_L xy\,dx$, $L: y = \sin x$ од $(0, 0)$ до $(\pi, 0)$ (црт. 4).

б) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dy$, по горната четвртинка на елипсата $L: x = a\cos t$, $y = b\sin t$, од точката $A(a, 0)$ до $B(0, b)$ (црт. 5).



Црт. 4



Црт. 5

а) Можеме да сметаме дека $L: x = t$, $y = \sin t$, па:

$$\int\limits_L xy\,dx = \int\limits_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

б) $\int\limits_L (x^2 + y^2)dy = b\int\limits_0^{\pi/2} [a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 t]d(\sin t) = \frac{b}{3}[2a^2 + b^2]$.

Забелешка 2. Сите три типа линиски интеграли ги дефиниравме со помош на соодветни определени интеграли, при што секогаш претпоставувавме дека подинтегралната функција е непрекината. *Од тоа следува дека не е битно дали работиме со примитивен, или со риманов определен интеграл.* Во случај условот за непрекинатост на подинтегралната функција да биде нарушен за една или повеќе вредности на t во сегментот $[\alpha, \beta]$, но сепак соодветниот несвојствен интеграл да е конвергентен, тогаш вредноста на несвојствениот интеграл ќе ја сметаме и за вредност на линискиот интеграл дефиниран со тој определен интеграл.

Забелешка 3. Во целиот овој дел претпоставувавме дека *"$f(x, y)$ е непрекината во D"*, но напомнуваме дека *сите својства остануваат во сила и при послабата претпоставка дека "$f(x, y)$ е непрекината на L".* Притоа, оваа "ослабена" претпоставка значи исто што и "$f\big(x(t), y(t)\big)$ е непрекината на $[\alpha, \beta]$" односно "$f\big(x(s), y(s)\big)$ е непрекината на $[0, l]$".

Вежби

Да се пресметаат линиските интеграли од прв тип (1–2).

1. $\int\limits_L (2x + y)ds$, $L: x^2 + y^2 = 25$ од $A(3, 4)$ до $B(4, 3)$, по најкусиот пат.

2. $\int\limits_L xy\,ds$, L е обиколката на правоаголникот ограничен со правите: $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 2$.

Да се пресметаат линиските интеграли од втор тип (3–4):

3. $\int\limits_L (xy + x^2)dx$, од точката $A(0, 0)$ до точката $B(1, 3)$ по кривата:

а) $y = 3x$; б) $y = 3x^2$, в) $y = 3\sqrt{x}$.

4. $\int\limits_L (x + 2y)dy$, L: контурата на триаголникот ограничен со координатните оски и правата $x + y = 2$.

Да се пресметаат следните линиски интеграли (5-6):

5. $\int\limits_L x^2\, ds$, $L: x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

6. $\int\limits_L 5y\, dx$, $L: x = \cos 5t,\ y = \sin 5t,\ 0 \leq t \leq 5\pi$.

2.2. Својства на линиски интеграли од прв тип

Фактот што линиските интеграли (и од прв и од втор тип) се специјални определени интеграли, повлекува и соодветна аналогија меѓу нивните својства. Во следниот раздел ќе видиме дека таа аналогија е целосна за линиските интеграли од втор тип. Кај линиските интеграли од прв тип, единствено отстапување претставува својството 1^0 подолу (дека насоката на лакот не е битна), а преостанатите својства, дури и по форма, се исти како и кај определените интеграли.

И во овој раздел ќе претпоставуваме дека $f(x, y)$ е непрекината функција во областа $D \subseteq \mathbf{R}^2$, а L е крива што лежи во D и е зададена со параметарски равенки

$$x = x(s), \quad y = y(s); \tag{1}$$

притоа, $s \in [0, l]$ е должината на лакот AM, каде што A има координати $x(0)$, $y(0)$ и M: $x(s)$, $y(s)$, а за $s = l$ се добива точката B, т.е. $\overset{\frown}{AB} = l$. Покрај тоа претпоставуваме дека функциите $x(s)$, $y(s)$ и нивните изводи се непрекинати во сегментот $[0, l]$.

Ќе покажеме дека:

1^0. *Линискиот интеграл од прв тип не зависи од насоката на кривата, т.е.*

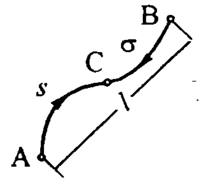
$$\int\limits_{AB} f(x, y)dx = \int\limits_{BA} f(x, y)ds\,. \tag{2}$$

Доказ. Од дефиницијата на линиски интеграл од прв тип добиваме дека: $\int\limits_{AB} f(x, y)ds = \int\limits_0^l f\big(x(s), y(s)\big)ds$

Со смената $\sigma = l - s$, добиваме:

$$\begin{aligned}\int\limits_{AB} f(x,y)ds &= -\int\limits_{l}^{0} f\big(x(l-\sigma), y(l-\sigma)\big)d\sigma = \\ &= \int\limits_{0}^{l} f\big(x(l-\sigma), y(l-\sigma)\big)d\sigma = \int\limits_{0}^{l} f\big(x^*(\sigma), y^*(\sigma)\big)d\sigma,\end{aligned} \tag{3}$$

каде што:
$x^*(\sigma) = x(l-\sigma)$, $y^*(\sigma) = y(l-\sigma)$. Со равенките $x = x^*(\sigma)$, $y = y^*(\sigma)$ е определена истата крива L, при што σ има улога на должина на лак, но сега мерен од почетна точка B (црт. 1). Од тоа следува дека десната страна од (2) е еднаква со десната страна на (3), од што следува точноста на својството. ◊



Црт. 1

Доказите на наредните својства **2^0–8^0 се јасни. Притоа:** C во 2^0 означува која било точка од лакот AB; k во 4^0 е која било реална константа; $g(x, y)$ во 5^0 е непрекината функција во D; m во 7^0 е најмала, а M е најголема вредност на $f\big(x(s), y(s)\big)$ во $[0, l]$.

2^0. $\int\limits_{AB} ds = l$. ◊

3^0. $\int\limits_{ACB} f(x,y)ds = \int\limits_{AC} f(x,y)ds + \int\limits_{CB} f(x,y)ds$.

4^0. $\int\limits_{AB} kf(x,y)ds = k\int\limits_{AB} f(x,y)ds$.

5^0. $\int\limits_{AB} [f(x,y)+g(x,y)]ds = \int\limits_{AB} f(x,y)ds + \int\limits_{AB} g(x,y)ds$.

6^0. Ако $f(C) \ge 0$, за секоја точка $C \in AB$, тогаш:
$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds \ge 0.$$

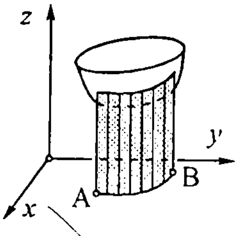
7^0. $ml \le \int\limits_{AB} f(x,y)ds \le Ml$. ◊

8^0. (Теорема за средна вредност). Постои точка $(\xi, \eta) \in AB$ таква што:
$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = f(\xi,\eta)l. \quad ◊$$

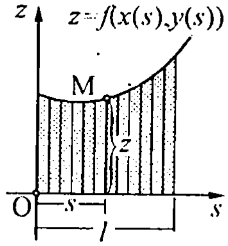
Покрај општите претпоставки за $f(x, y)$ и AB, направени погоре, да претпоставиме дека $f(x, y) \ge 0$, за секоја точка (x, y) од D. Потоа, да ја означиме со P плоштината на цилиндричната површина со директриса AB, и генератриси (прави) паралелни со z–оската, при што $0 \le z \le f(x, y)$ (црт. 2).

Притоа, имајќи предвид дека немаме дадено прецизна општа дефиниција за плоштината на дел од крива површина, ќе се задоволиме со тоа што ќе кажеме дека *под плоштина на споменатата цилиндрична површина ќе ја подразбираме плоштината на рамнинскиот лик (црт. 3) што се добива кога цилиндричната површина се одвитка без растегнување* [1] *така што директрисата AB да постане отсечка.* Бараната плоштина P е, според тоа, плоштината на фигурата од црт. 3, од што следува дека $P = \int_0^l z\,ds$, т.е. дека е точно следново равенство:

$$9^0.\ P = \int_{AB} f(x, y)ds. \qquad \Diamond$$



Црт. 2



Црт. 3

Ќе наведеме еден пример

ПРИМЕР 1. Со помош на линиски интеграл, да се пресмета должината l на астроидата: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Ќе ја искористиме формулата 2^0. Во нашиот случај:

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t\sin t, \quad \dot{y} = -3a\sin^2 t\cos t,$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \frac{3a}{2}\cdot\sin 2t\,dt,$$

па (имајќи ја предвид симетријата во однос на двете координтни оски) имаме:

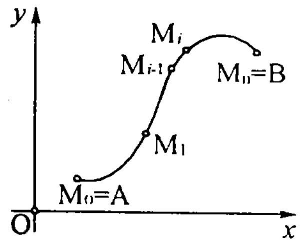
$$l = \int_L ds = 4\int_0^{\pi/2}\frac{3a}{2}\sin 2t\,dt = 6a.$$

Забелешка 1. *Линиските интеграли можат да се дефинираат како граници на соодветни интегрални суми (слично како што се дефинираат римановите определени интеграли).* Овде ќе покажеме како се прави тоа кај линиските интеграли од прв тип.

За таа цел да претпоставиме дека линијата $L = AB$ има равенки $x = x(s)$, $y = y(s)$, каде што s е должината на лакот со почетна точка A, при што l е должината на AB. Нека

[1] И покрај тоа што може да се даде и доволно прецизна математичка дефиниција на овој процес, ние ќе се задоволиме со констатацијата дека интуитивно тој е доволно јасен.

$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = l$, и нека M_i е точката од L определена со координатите $x_i = x(s_i)$, $y_i = y(s_i)$ (црт. 4). Потоа, за секој $i = 1, 2, \ldots, n$, да избереме σ_i: $s_{i-1} \leq \sigma_i \leq s_i$, и да ставиме $\xi_i = x(\sigma_i)$, $\eta_i = y(\sigma_i)$. Така добиваме низа точки $N_1, N_2, \ldots, N_n$ од L, каде што $N_i(\xi, \eta_i)$. (Точките N_i не се нанесени на црт. 4.) Ја формираме сумата



Црт. 4

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi, \eta)\Delta s_i\,, \tag{4}$$

каде што $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$. (Како и погоре, $f(x, y)$ е непрекината функција во областа D.) Ако ставиме $g(s) = f\big(x(s), y(s)\big)$, ќе добиеме дека S_n има облик

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(\sigma_i)\Delta s_i\,, \tag{4'}$$

каде што $s_{i-1} \leq \sigma_i \leq s_i$. Од тоа, според Т. 4 од **III.5.2**, ако S_n е низа суми од облик (4) (т.е. (4′)), таква што $\max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n\} \to 0$, кога $n \to +\infty$, тогаш

$$S_n \to \int_0^l g(s)ds = \int_0^l f\big(x(s), y(s)\big)ds = \int_{AB} f(x, y)ds\,.$$

Според тоа, при направените претпоставки, точно е следново равенство:

10^0. $\int_{AB} f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} S_n\,.$ ◇

Горната дискусија може да се искористи за дефинирање на "**линиски риманов интеграл од прв тип**". Притоа, дел од претпоставките можат да се ослабат. Имено, претпоставката "$f(x, y)$ да е непрекината во D" се заменува со "$f(x, y)$ е дефинирана на L, а во иста смисла, за $x(s)$ и $y(s)$ се бара да се дефинирани на сегментот $[0, l]$, при што и натаму параметарот s има улога "должина на лак со почеток во A".

При тие претпоставки, сметаме дека *интегралот од левата страна на* **10^0** *постои акко за секоја низа суми S_n што го задоволува условот "$\max \Delta s_i \to 0$ за $n \to +\infty$", постои границата од десната страна на* **10^0**. *Во тој случај, равенството* **10^0** *се зема за точно по дефиниција.*

Од дискусијата што ја направивме пред **10^0**, следува дека, во случај кога се исполнети условите за непрекинатост на $f(x, y)$ и $x(s)$, $y(s)$, риманов линиски интеграл од прв тип се совпаѓа со линиски интеграл од прв тип дефиниран во **2.1**.

З а б е л е ш к а 2. Во дефиницијата на линиски интеграл од прв тип не е исклучена можноста точките A и B да се совпаѓаат. Тогаш, се работи за затворена едноставна крива, со должина l. (в. црт. 5а)). Се поставува прашање дали улогата на точката A може да ја преземе некоја друга точка.

За да покажеме дека одговорот е позитивен, ќе избереме која било точка M, определена со $s = s_0$, каде што $0 < s_0 < l$. Да ставиме $\sigma = s - s_0$ за $s \geq s_0$ и $\sigma = l - s$, за $s \leq s_0$. Добиваме нови равенки $x = x^*(\sigma)$, $y = y^*(\sigma)$ на истата затворена крива L, но сега за $\sigma = 0$ и $\sigma = l$ се добива точката $M = N$. Ако се има предвид $\mathbf{3^0}$, добиваме дека:

$$\int\limits_{AMA} f(x,y)ds = \int\limits_{AM} + \int\limits_{MA} = \int\limits_{MA} + \int\limits_{AM} = \int\limits_{MAM} f(x,y)ds.$$

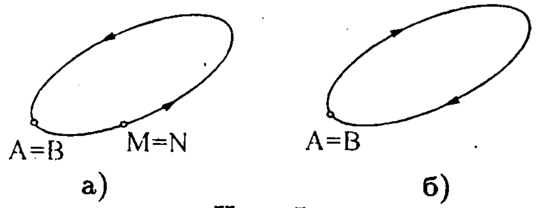
Со тоа докажавме дека:

$\mathbf{11^0}$. *При затворена крива L, линискиот интеграл $\int\limits_L f(x,y)ds$ не зависи од изборот на почетната (= крајната) точка A.* ◇

Имајќи го предвид и равенството $\mathbf{1^0}$, заклучуваме дека:

$\mathbf{12^0}$. *При линиски интеграл од прв тип по затворена крива, резултатот не зависи од ориентираноста на кривата.* ◇

(На црт. 5 а) кривата има спротивна ориентација во однос на црт. 5 а).)

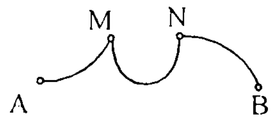


Црт. 5

Во следниот раздел ќе видиме дека првиот заклучок важи и за линиски интеграл од втор тип, а при промена на ориентацијата, линискиот интеграл од втор тип (по затворена или незатворена крива) не ја менува апсолутната вредност, но го менува знакот.

З а б е л е ш к а 3. При дадена крива со равенките $x = x(t)$, $y = y(t)$, скоро секаде досега претпоставувавме дека $x(t)$ и $y(t)$ имаат непрекинати изводи на соодветен сегмент $[\alpha, \beta]$. Освен тоа, во секоја точка кривата треба да има наполно определена тангента, а тоа ќе биде исполнето акко $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$. (В. V.**4.2.**)

Ако допуштиме за конечно многу вредности на t од сегментот $[\alpha, \beta]$, да не биде исполнет некој од тие услови, тогаш велиме дека L е **мазна по делови**. Во таков случај ќе сметаме, по договор, дека линиски интеграл (од f) по кривата L е еднаков со збирот од линиските интеграли (од f) по сите нејзини такви ("мазни") делови. Така, ако имаме ситуација како на црт. 6, каде што $\alpha < \gamma < \delta < \beta$, при што M се добива за $t = \gamma$, а N за $t = \delta$, тогаш:



Црт. 6

$$\int_{AB} f(x, y)ds \stackrel{\text{df}}{=} \int_{AM} f(x, y)ds + \int_{MN} f(x, y)ds + \int_{NB} f(x, y)ds\,.$$

Вежби

1. Земајќи го, на пример, интегралот од вежба 1 од **2.1** да се покаже дека 3^0 не мора да е точно ако C е надвор од лакот AB.

   Во 2–3 да се пресметаат соодветните интеграли по целата крива, т.е. да се интегрира така што почетната точка A се совпадне со крајната B, при што ќе се обиколи целата крива. Зошто не е битен изборот на точката A ниту насоката по која се обиколува кривата?

2. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds, \qquad L: x^2 + y^2 = 2x$

3. $\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) ds, \qquad L: x^{2/3} + y^{2/3} = 1\,.$

   Во 4–5 да се пресмета плоштината на соодветната цилиндрична површина.

4. Цилиндар: $x^2 + y^2 = x$ отсечен од рамнината:

   а) $z = y$; б) $z = y\, tg\, \alpha$, за $y > 0$.

5. Цилиндарот $x^2 + y^2 = 1$ што се наоѓа во сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2.3. Својства на линиски интеграли од втор тип

При дефиницијата на линиските интеграли од втор тип, т.е.

$$\int_L f(x, y)dx \quad \text{односно} \quad \int_L f(x, y)dy \tag{1}$$

во **2.1** претпоставивме дека ниедна права $x = x_0$, односно $y = y_0$, не ја сече кривата L во повеќе од една точка. Но, се покажува дека е подобро да не постои такво ограничување. Еден од начините да се постигне тоа е да се прифатат равенствата 2^0 и 3^0 од **2.1** како дефиниции на соодветни линиски интеграли.

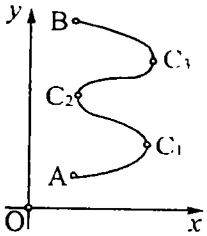
Се постапува и поинаку, во случај кога кривата AB може да се подели со точките $C_1, C_2, \ldots, C_n$ на $n+1$ дел $C_0C_1, C_1C_2, \ldots, C_nC_{n+1}$ (притоа: $C_0 = A$, $C_{n+1} = B$), така што секој од тие делови го задоволува горниот услов. (Таков е случајот прикажан на црт. 1, при што $n = 3$.) Во еден таков случај, следново равенство може да се земе како дефиниција на левата страна:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{AC_1} f(x,y)dx + \int\limits_{C_1C_2} f(x,y)dx + \cdots + \int\limits_{C_nB} f(x,y)dx\,. \qquad (2)$$

Така, ако имаме ситуација како на црт. 1, добиваме

$$\int\limits_{AB} f\,dx = \int\limits_{AC_1} f\,dx + \int\limits_{C_1C_2} f\,dx + \int\limits_{C_2C_3} f\,dx + \int\limits_{C_3B} f\,dx\,. \qquad (2')$$

Аналогно се работи и со линиски интеграли по координатата y. Сепак, како што споменавме и погоре, равенствата $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{3^0}$ од **2.1** ќе ги сметаме дефиниралки за линиските интеграли по координати, т.е. за интегралите со обликот (1).



Црт. 1

Подолу, ќе претпоставуваме дека $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ се непрекинати функции во областа D. Збирот на интегралите

$$\int\limits_L P\,dx\,,\ \int\limits_L Q\,dy\,, \qquad (1')$$

ќе го означуваме со:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy\,. \qquad (3)$$

(Интегралите од (1′) се специјални случаи од (3), што се добиваат за $Q=0$, односно за $P=0$.)

Имајќи ги предвид равенствата $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{3^0}$ од **2.1**, добиваме:

$$\mathbf{1^0}.\ \int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_\alpha^\beta \big[P\big(\big(x(t),\,y(t)\big)\dot{x} + Q\big(x(t),\,y(t)\big)\dot{y}\big]\,dt\,,$$

каде што $x = x(t)$, $y = y(t)$ се равенките на кривината $L(=AB)$. ◇

Имајќи предвид дека секое од неколку пати споменатите равенства $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{3^0}$ од **2.1** е специјален случај од $\mathbf{1^0}$, за натаму, ќе сметаме дека $\mathbf{1^0}$ е дефиниција за левата страна од равенството.

Имајќи предвид соодветни својства на определените интеграли, ги добиваме следниве две својства:

$$\mathbf{2^0}.\ \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{BA} P\,dx + Q\,dy\,.$$

$$\mathbf{3^0}.\ \int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AC} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{CB} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Доказ. Равенствата $\mathbf{2^0}$ и $\mathbf{3^0}$ се евидентни, ако равенството $\mathbf{1^0}$ се сфати "пoслободно". Сепак, ќе дадеме детални докази.

Прво, дефинирајќи ја левата страна од $\mathbf{1^0}$ со десната, претпоставуваме дека AB има равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, каде што $t \in [\alpha,\beta]$, и $A = \big(x(\alpha),\,y(\alpha)\big)$, $B = \big(x(\beta),\,y(\beta)\big)$. Да се обидеме да добиеме равенки $x = x^*(\tau)$, $y = y^*(\tau)$ на истата крива L, со тоа што $\tau \in [\alpha,\beta]$, но $B = \big(x^*(\alpha),\,y^*(\alpha)\big)$, $A = \big(x^*(\beta),\,y^*(\beta)\big)$. Тоа се постигнува ако се стави

$x^*(\tau) = x(\alpha+\beta-\tau)$, $y^*(\tau) = y(\alpha+\beta-\tau)$, за $\tau \in [\alpha, \beta]$. Потоа, ако ставиме $t = \alpha + \beta - \tau$, добиваме:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{dx^*}{d\tau}, \quad \dot{y} = -\frac{dy^*}{d\tau}.$$

Според тоа, имаме:

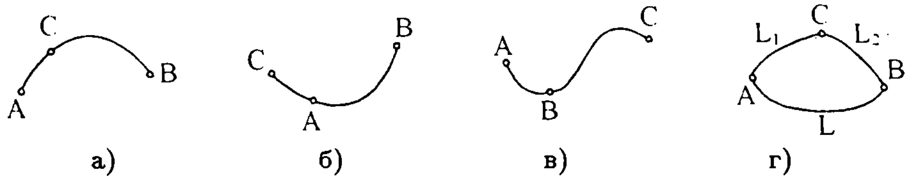
$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta [P((x(t), y(t))\dot{x} + Q(x(t), y(t))\dot{y}]\,dt$$
$$= -\int_\beta^\alpha \left[P((x^*(\tau), y^*(\tau)) \left(-\frac{dx^*}{d\tau}\right) + Q(x^*(\tau), y^*(\tau)) \left(-\frac{dy^*}{d\tau}\right)\right] d\tau =$$
$$= -\int_\alpha^\beta [P((x^*(\tau), y^*(\tau)) \frac{dx^*}{d\tau} + Q(x^*(\tau), y^*(\tau)) \frac{dy^*}{d\tau}]\,d\tau = -\int_{BA} P\,dx + Q\,dy,$$

со што го докажавме равенството $\mathbf{2}^0$.

Да го докажеме и равенството $\mathbf{3}^0$. Пред сè, да објасниме дека ознаката ACB на левата страна од равенството кажува дека C е внатрешна точка на кривата AB, т.е. дека кривата има облик а) на црт. 2. Во тој случај постои γ: $\alpha < \gamma < \beta$, таков што $C = (x(\gamma), y(\gamma))$. Тогаш, десната страна од $\mathbf{1}^0$ може да се претстави во облик

$$\int_\alpha^\gamma \cdots + \int_\gamma^\beta \cdots = \int_{AC} \cdots + \int_{CB} \cdots,$$

со што е комплетиран доказот и на $\mathbf{3}^0$. ♢



Црт. 2

Во врска со равенството $\mathbf{3}^0$, природно е да се постави прашањето за точноста на равенството:

$$\mathbf{3}'. \int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AC} P\,dx + Q\,dy + \int_{CB} P\,dx + Q\,dy,$$

каде што $AB = L$, $AC = L_1$, $CB = L_2$ се дадени криви.

Јасно е дека $\mathbf{3}^0$ е специјален случај од $\mathbf{3}'$ и дека во тој случај кривата AB е унија од AC и CB. Ако се искористи и $\mathbf{2}^0$, лесно се покажува дека $\mathbf{3}'$ е точно уште во случаите б) и в) од црт. 2. Со други зборови: ако една од кривите AB, AC, CB е унија на другите две, тогаш е точно равенството $\mathbf{3}^0$. Но, ако не е исполнет тој услов, а таква е ситуацијата во случајот г) од црт. 2, тогаш равенството $\mathbf{3}'$ не мора да биде точно, како што се гледа во примерот 2 подолу.

ПРИМЕР 1. Да го пресметаме интегралот

$$J = \int_{OA} P\,dx + Q\,dy,$$

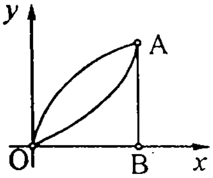
каде што $P = x^2 + y$, $Q = x^2 + y^2$, $O(0,0)$. $A(1,1)$ и OA е лакот на параболата:

а) $y = x^2$, б) $y^2 = x$, што ги поврзува точките O и A (црт. 3).

Со директна примена на 1^0, добиваме:

а) $J = \int_0^1 [(x^2+x^2)\cdot 1 + (x^2+x^4)2x]dx = 3/2;$

б) $J = \int_0^1 [(y^4+y)2y + (y^4+y^2)\cdot 1]dy = 23/15.$



Црт. 3

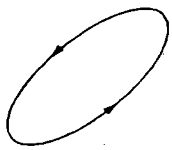
ПРИМЕР 2. Да провериме дали е точно равенството:

$$\int_{OA} P\,dx + Q\,dy = \int_{OB} P\,dx + Q\,dy + \int_{BA} P\,dx + Q\,dy,$$

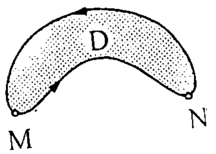
каде што P и Q се како во претходниот пример, OB е отсечката меѓу точката $O(0,0)$ и $B(1,0)$, а BA отсечката меѓу B и A, при што OA е лакот на параболата: а) $y = x^2$, б) $y^2 = x$ (црт. 3). Имаме:

$$\int_{OB} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \quad \int_{BA} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 (y^2+1)dy = \frac{4}{3}.$$

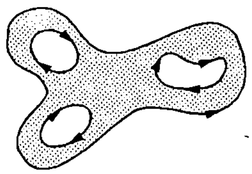
Според тоа, десната страна е 5/3, а според Пр. 1, левата е 3/2 во случајот а), а 23/15 во б). Значи, равенство не важи ни во едниот од тие случаи.



Црт. 4



Црт. 5



Црт. 6

Забелешка 1. Во случај на затворена крива, важи заклучокот (до кој дојдовме во претходниот раздел) дека за почетна точка при интегрирањето може да се земе која било точка од кривата. Но, кај линиските интеграли од втор тип насоката е битна, па затоа треба на неа да се внимава. Ако кривата е дадена со параметарски равенки, тогаш нејзината насока обично е насоката на растењето на параметарот. Но, една крива може да биде дадена и на друг начин. Во тој случај и насоката ќе биде однапред дадена, а тоа е позитивната насока при интеграцијата. Обично, **позитивна насока** е насоката кога по кривата се движиме спротивно од движењето на стрелката на часовникот (црт. 4).

Но, ако кривата L е контура на областа D, како на црт. 5, тогаш кога би се придржувале до горниот договор, во точките M и N би имале *прекин на насоката*. Затоа, во таков случај, се покажува за згодно да се смета за **позитивна насоката** при која, ако се движиме по контурата, областа ограничена со неа се наоѓа на нашата лева страна. Контурата на нееедноставната област од црт. 6 се состои од четири криви коишто се ориентирани според направениот договор.

Често, за да се истакне дека се работи за интегрирање по затворена крива, се пишува $\oint_L$ наместо $\int\limits_L$, или само $\oint$ ако се знае за која крива и за каква насока се работи.

Забелешка 2. Линискиот интеграл од втор тип може да се дефинира и со помош на интегрални суми. Така, соодветната интегрална сума за интегралот $\int\limits_{AB} f(x, y)dx$ има облик:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i \eta_i)\Delta x_i\,, \tag{4}$$

со тоа што (ξ_i, η_i) (за $i = 1, 2, \ldots, n$) се определени како во забелешката 1 од **2.2**, а $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$.

Вежби

Во 1–6 да се пресмета линискиот интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$, по кривата L. Притоа, ако не е дадена насоката на интеграцијата, тогаш се подразбира дека таа е спротивна на насоката од движењето на стрелките кај часовникот.

1. $P = y^2$, $Q = 2xy$, $L\colon x = a\cos t,\ y = a\sin t$.
2. $P = y$, $Q = -x$, $L\colon x = a\cos t,\ y = b\sin t$.
3. $P = x/(x^2+y^2)$, $Q = -y/(x^2+y^2)$, L: кружница се центар во почетокот.
4. $P = y/(x^2+y^2)$, $Q = x/(x^2+y^2)$, L: права $y = x$, од $(1, 1)$ до $(2, 2)$.
5. $P = -y$, $Q = x$; $L\colon x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.
6. $P = -y$, $Q = x$; $L\colon x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

2.4. Независност од патот на интеграцијата

Подолу, т.е. во целиот овој раздел, ќе претпоставиме дека D е отворена област, а $P(x, y)$, $Q(x, y)$, како и нивните изводи P_y, Q_x се непрекинати во D.

Ќе велиме дека $P\,dx + Q\,dy$ во D го задоволува **условот за независност од патот на интеграцијата**, ако при дадени точки $A, B \in D$ линискиот интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависи од кривата $L = AB$, што ги сврзува точките A и B, при услов сите точки од L да се во D. Притоа, како и досега, не споменувајќи го тоа специјално, ќе претпоставуваме дека соодветните криви се едноставни и мазни, и сите нивни точки се во D.

Основен резултат на овој дел е следнава:

Теорема 1.

Следниве услови се еквивалентни:

(i) $P\,dx+Q\,dy$ *го задоволува во* D *условот за независност од патот на интеграцијата.*

(ii) *Ако* L *е затворена крива во* D, *тогаш* $\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=0$.

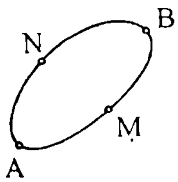
(iii) $P\,dx+Q\dot{d}y$ *е тотален диференцијал на некоја функција* $z(x,\,y)$ *во* D.

Доказ. Нека е исполнет условот (i) и нека L е затворена крива во D. Избираме точки A, B, M, N на L, како на црт. 1. Тогаш:

$$\begin{aligned}\int\limits_L P\,dx+Q\,dy &= \int\limits_{AMB} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{BNA} P\,dx+Q\,dy=\\ &= \int\limits_{AMB} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{ANB} P\,dx+Q\,dy=0\,.\end{aligned}$$

Обратно, нека е исполнет условот (ii) и нека A и B се сврзани со две криви $L_1=AMB$ и $L_2=ANB$ (в. црт. 1). Тогаш $L=L_1\cup L_2$ е затворена крива, па имаме:

$$\begin{aligned}0&=\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=\\ &=\int\limits_{AMB} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{BNA} P\,dx+Q\,dy=\\ &=\int\limits_{AMB} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{ANB} P\,dx+Q\,dy\end{aligned}$$



Црт. 1

т.е.

$$\int\limits_{L_1} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{L_2} P\,dx+Q\,dy\,.$$

Со тоа докажавме дека: (i)⇔(ii).

Да претпоставиме дека $P\,dx+Q\,dy$ е тотален диференцијал на $z(x,\,y)$ во областа D и дека кривата $L=AB$ има параметарски равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$ каде што $x(t)$, $y(t)$ се диференцијабилни на $[\alpha,\beta]$, и притоа A се добива за $t=\alpha$, а B за $t=\beta$. Според правилото за извод од сложени функции (Т. 1 во V.**2.3**), имаме:

$$\frac{d}{dt}\big(z(x(t),\,y(t)\big)=P\big(x(t),\,y(t)\big)\dot{x}+Q\big(x(t),\,y(t)\big)\dot{y}\,,$$

од што следува:

$$\begin{aligned}\int\limits_L P\,dx+Q\,dy&=\int\limits_\alpha^\beta\big[P\big(x(t),\,y(t)\big)\dot{x}+Q\big(x(t),\,y(t)\big)\dot{y}\big]\,dt=\\ &=\int\limits_\alpha^\beta\frac{d}{dt}\big(z(x(t),\,y(t)\big)\cdot dt=z\big(x(\beta),\,y(\beta)\big)-z\big(x(\alpha),\,y(\alpha)\big)\,.\end{aligned}$$

Според тоа:

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=z(B)-z(A)\,,$$

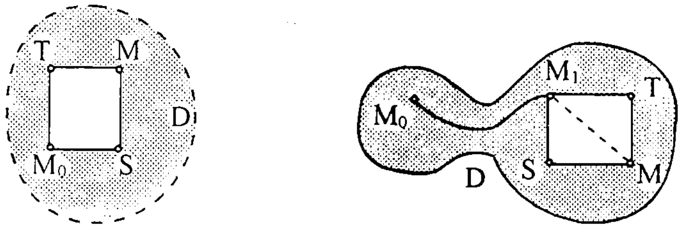
зависи само од точките A, B, но не и од кривата L што ги поврзува тие точки. Со тоа покажавме дека: (iii) ⇒(i).

Ќе покажеме сега дека: (i)⇒(iii), со што ќе го комплетираме доказот.

Да претпоставиме дека е исполнет условот (i). Фиксираме точка $M_0 = (x_0, y_0) \in D$. Ако $M = (x, y) \in D$, тогаш постои крива $L = M_0M$ во D што ги сврзува точките M_0, M. Од условот (i) следува дека линискиот интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$, зависи само од M, т.е. е функција $F(x, y)$. Да претпоставиме дека M_0 и M се такви што и точките $S = (x, y_0)$, $T = (x_0, y)$, а и целиот правоаголник M_0SMT, се во D (в. а) од црт. 2). Од тоа следува дека:

$$F(x, y) = \int\limits_{M_0S} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{SM} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t)dt\,,$$

што повлекува: $F_y(x, y) = Q(x, y)$. На ист начин, ако се интегрира по патот M_0TM, ќе се добие дека $F_x(x, y) = P(x, y)$.



а) б)

Црт. 2

Во случај кога правоаголникот M_0SMT не лежи во D, избираме точка $M_1 = (x_1, y_1)$ (доволно блиска до M) таква што правоаголникот M_1SMT да е во D. Во тој случај ќе имаме:

$$F(x, y) = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{M_0M_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{M_1M} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= F(x_1, y_1) + G(x, y)\,,$$

каде што:

$$G(x, y) = \int\limits_{M_1M} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Од претходната дискусија следува дека: $G_x = P$, $G_y = Q$, а јасно е дека $G_x = F_x$, $G_y = F_y$. Според тоа, во секој случај имаме: $F_x = P$, $F_y = Q$, т.е. $P\,dx + Q\,dy$ е тотален диференцијал на $F(x, y)$. ◇

Во случај кога е исполнет условот (i) (па значи и другите два) од докажаната теорема, при $A, B \in D$, често се пишува

$$\int\limits_{A}^{B} P\,dx + Q\,dy \quad \text{наместо} \quad \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Во горниот доказ, всушност, ги докажавме и тврдењата што ќе ги формулираме подолу. Имено:

Ако е исполнет условот (i) *од Т. 1, тогаш се точни и следните тврдења* $\mathbf{2^0}$–$\mathbf{4^0}$.

2^0. *$P\,dx + Q\,dy$ е тотален диференцијал на функцијата $F(x, y)$ дефинирана со:*

$$F(x, y) = \int_{M_0}^{M} P\,dx + Q\,dy\,,$$

каде што M_0 е фиксна, а $M = (x, y)$ која било точка од областа D. $\diamondsuit$

3^0. *Линиски интеграл од тотален диференцијал dz е нараснувањето од почетната точка A до крајната точка B на кривата на интеграција, т.е.*

$$\int_{A}^{B} dz = z(B) - z(A)\,. \qquad \diamondsuit$$

4^0. *Во областа D е точно равенството:* (iv) $P_y = Q_x$. $\diamondsuit$

Следниот пример покажува дека, во општ случај, од (iv) не следуваат другите услови на Т. 1.

ПРИМЕР 1. Нека $P = -y/(x^2 + y^2)$, $Q = x/(x^2 + y^2)$. Да го пресметаме линискиот интеграл $J = \int_L P\,dx + Q\,dy$, каде што L е кружницата $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Според 1^0 од **2.3**, имаме:

$$J = \int_0^{2\pi} \big[-\sin t(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t\big]\,dt = 2\pi\,,$$

од што следува дека линиски интеграл по затворена крива не е нула. Од друга страна, P, Q, P_y и Q_x се непрекинати во отворената област D што се состои од сите точки на $\mathbb{R}^2$ без координатниот почеток (да се види и Т. 5 од V.1.6), а освен тоа (лесно се проверува дека) $P_y = Q_x$. Со тоа покажавме дека може да е точен условот (iv), а сепак да не биде исполнет условот за независнот од патот на интеграцијата.

Но, ако се има предвид Т. 2 од **1.2**, доаѓаме до заклучок дека е точно и следново својство:

5^0. *Нека P, Q и нивните изводи P_y, Q_x се непрекинати во отворена правоаголна област D, којашто може да биде и неограничена. Ако е во D точно равенството $P_y = Q_x$, тогаш линиските интеграли од $P\,dx + Q\,dy$ во D не зависат од патот на интеграцијата.* $\diamondsuit$

Вежби

Во задачите 1–5 да се пресмета интегралот $\int_L P\,dx + Q\,dy$, каде што L е произволна линија со почетна точка A и крајна B. (Дали во некоја од задачите кривата L, сепак, не е сосема произволна?)

1. $P = x^2 + y^2$, $Q = 2xy$; $A(0, 1)$, $B(1, 2)$. 2. $P = y$, $Q = x$; $A(1, 2)$, $B(4, 6)$.
3. $P = (1 - y^2)/(1 + x)^3$, $Q = y/(1 + x)^2$; $A(0, 0)$, $B(1, 1)$.
4. $P = -y/(x^2 + y^2)$, $Q = x/(x^2 + y^2)$; $A(1, 1)$, $B(2, 2)$.
5. $P = x/\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, $Q = y/\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; $A(2, 2)$, $B(3, 3)$.
6. Да се определи функција $z(x, y)$, таква што

$$z_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,, \quad z_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

за секоја точка (x, y), таква што $x > 0$, $y > 0$.

7. Ако $P = -y/(x^2+y^2)$, $Q = x/(x^2+y^2)$, тогаш $P_y = Q_x$, во секоја точка $(x, y) \neq (0, 0)$. Нека на единичната кружница $x = \cos t$, $y = \sin t$ се дадени точките A, B, C, D што се добиваат за $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$ и $t = 3\pi/2$ соодветно. Да се покаже дека
$$\int_{ABC} P\,dx + Q\,dy \neq \int_{ADC} P\,dx + Q\,dy$$
и да се образложи неравенството.

2.5. Линиски интеграли по просторни криви

Сѐ што е изнесено во **2.1–2.4** за линиски интеграли по рамнински криви може да се пренесе на линиски интеграли по просторни криви.

Подолу ќе претпоставуваме дека L е едноставна мазна просторна крива дадена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, каде што $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имаат непрекинати изводи на сегментот $[\alpha, \beta]$. Притоа, кривата L ќе ја означуваме и со AB, каде што A се добива за $t = \alpha$, а B за $t = \beta$.

Претпоставуваме и дека L лежи во дадена (просторна) област G, а $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ се непрекинати во G. **Линиски интеграл од прв тип**, т.е. по должината од лакот на кривата $L = AB$ се дефинира со:
$$\int_{AB} P\,ds = \int_\alpha^\beta P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt\,. \tag{1}$$
Својствата аналогни на $\mathbf{2^0} - \mathbf{8^0}$ и на $\mathbf{10^0}$ од **2.2** важат и за овој тип интеграли.

Линиски интеграли од втор тип, т.е. **по координати**, се дефинираат како што следува.
$$\int_{AB} P\,dx = \int_\alpha^\beta P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\dot{x}\,dt \tag{2x}$$
$$\int_{AB} Q\,dy = \int_\alpha^\beta Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\dot{y}\,dt \tag{2y}$$
$$\int_{AB} R\,dz = \int_\alpha^\beta R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\dot{z}\,dt \tag{2z}$$
Збирот на сите тие три интеграли се означува со
$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,. \tag{2}$$
Според тоа:

$\mathbf{1^0}$. $\displaystyle\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\alpha^\beta [P(t)\dot{x} + Q(t)\dot{y} + R(t)\dot{z}]dt$ $\quad\diamond$

(Притоа, смислата на $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ е јасна: $P(t) = P\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ итн.)

Доказите на својства аналогни на $\mathbf{2^0}$ и $\mathbf{3^0}$ од **2.3**, се скоро идентични како и дадените во **2.3**, а тоа важи и за наредните својства што ќе бидат формулирани.

$\mathbf{2^0}$. $\displaystyle\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{BA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$ $\quad\diamond$

3^0. $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{AC} P\,dx+Q\,dy+R\,dz+\int\limits_{CB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$ ◇

Подолу *ќе претпоставуваме дека G е отворена област*, при што ќе сметаме дека е јасна смислата на изразот *"услов за независност од патот на интеграцијата"*. Исто така, ќе претпоставуваме дека *постојат изводите P_y, P_z, Q_x Q_z, R_y, R_z, и дека тие се непрекинати во G.*

Теорема 4.

Следните услови се еквивалентни.

(i) *$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ во G го задоволува условот за независност од патот на интеграцијата.*

(ii) *Ако L е затворена крива во G, тогаш*

$$\int\limits_{L} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0\,.$$

(iii) *$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ е тотален диференцијал на некоја функција $F(x,y,z)$ во G.* ◇

Во наредните тврдења 5^0-7^0 ќе претпоставуваме дека се исполнети условите од Т. 4.

5^0. *Ако функцијата $F(x,y,z)$ е дефинирана со:*

$$F(x,y,z)=\int\limits_{M_0M} P\,dx+Q\,dy+R\,dz\,,$$

каде што M_0 е фиксна, а $M=(x,y,z)$ која било точка од областа G, тогаш $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ е тотален диференцијал на $F(x,y,z)$. ◇

6^0. $\int\limits_{AB} du=u(B)-u(A)\,.$ ◇

7^0. *Во областа G се точни равенствата:*

$$P_y=Q_x \quad P_z=R_x, \quad Q_z=R_y\,. \tag{iv}$$ ◇

Да забележиме дека равенствата (iv) во 7^0, во општ случај, не се доволни за независност на интеграцијата, но за специјални области тие равенства се доволни.

8^0 *Ако G е отворен паралелопипед (може и неограничен) и ако се точни равенствата* (iv) *од 7^0 во G, тогаш $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ го задоволува условот за независност од патот на интеграција во G.* ◇

Да видиме сега каква врска постои меѓу линиските интеграли по лак и линиските интеграли по координати. Притоа, ќе го разгледаме "просторниот случај", а од него ќе ја добиеме аналогната врска за "рамнинскиот случај".

Да претпоставиме дека кривата $L=AB$ е дадена со параметарските равенки $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$, каде што за параметар s е избрана должината на лакот со почетна точка A, а притоа l е должината на целиот лак L. Според 1^0, имаме:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^l [P(s)x' + Q(s)y' + R(s)z']dz\,, \tag{3}$$

каде што, на пример, $P(s) = P\big(x(s),\, y(s),\, z(s)\big)$.

Во Т. 2 од V.**4.2** видовме дека $\overrightarrow{\tau} = \big(x'(s),\, y'(s),\, x'(s)\big)$ е единичен вектор на тангентата на кривата L (во точката $M\big(x(s),\, y(s),\, x(s)\big)$, па според тоа имаме:

$$x'(s) = \cos\alpha, \quad y'(s) = \cos\beta, \quad z'(s) = \cos\gamma,$$

каде што α, β, γ се аглите што тангентниот вектор ги зафаќа со соодветните координатни оски. Имајќи го тоа предвид ја добиваме следната *врска меѓу линиските интеграли од прв и втор тип.*

9⁰. $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds.$ ◇

Како последица од **9⁰** се добива следнава *врска во случај на рамнински криви*:

9′. $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AB} (P\cos\varphi + Q\sin\varphi)ds,$

каде што φ е аголот меѓу тангентата на кривата и x–оската. ◇

Ќе спомeнеме овде и една важна интерпретација на линискиот интеграл, а тоа е поимот работа. Имено, ако материјална точка се движи по мазна крива L од точка M до N, во поле на променлива сила:

$$\mathbf{F} = P(x,\, y,\, z)\mathbf{i} + Q(x,\, y,\, z)\mathbf{j} + R(x,\, y,\, z)\mathbf{k}\,,$$

тогаш се врши **работа** A определена со:

$$A = \int_{MN} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,. \tag{4}$$

Во случај $Q = R = 0$, $P = P(x)$ зависи само од x, а L е дел од апсцисната оска, (4) се сведува на (1) од III.**6.2**.

За силата $\mathbf{F}$ се вели дека е **потенцијална** во областа G ако линискиот интеграл на десната страна од (4) не зависи од патот на интеграција. При претпоставка дека компонентите на $\mathbf{F}$ и нивните први парцијални изводи се непрекинати, тогаш (според **7⁰**) точни се равенствата (iv), а важи и обратното (според **8⁰**) во случај кога G е отворен паралелопипед. Во тој случај постои функција $u = u(x,\, y,\, z)$ (наречена **потенцијал** на $\mathbf{F}$), таква што $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$, т.е. $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

Вежби

1. Да се пресмета линискиот интеграл од $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ ако кривата е винтова линија $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ кога t се менува од 0 до 2π.
2. Да се пресмета линискиот интеграл $\int\limits_L xy\,ds$, каде што L е како и во претходната вежба.
3. Тежиштето T на една крива L се дефинира со своите координати:

   $l\cdot x_T = \int\limits_L x\,ds, \quad l\cdot y_T = \int\limits_L y\,ds, \quad l\cdot z_T = \int\limits_L z\,ds\,,$

каде што l е должината на лакот на кривата L. Да се определи тежиштето T ако L е кривата од вежбата 1.

4. Да се определи тежиштето на астроидата: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$.

Во 5–6 да се определи интегралот $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, каде што L е како во вежбата 1.

5. $P = 2xy^3z^4 + 1$, $Q = 3x^2y^2z^4 + 2y$, $R = 4x^2y^3z^3 + 3z^2$.
6. $P = y + z$, $Q = x + z$, $R = x + y$.
7. Да се дефинираат линиските интеграли како граници на интегрални суми.
8. Сметајќи ги функциите P, Q, R за компоненти на променлива сила $\mathbf{F}$, во секоја од вежбите 1, 6 7 ќе имаме потенцијална сила. Да се определи соодветниот потенцијал $u(x, y, z)$ на $\mathbf{F}$, што го задоволува условот $u(0, 0, 0) = 0$. Во секоја од тие три вежби имаме $A = u(a, 0, 0)$.

Во вежбите 9 и 10 имаме рамнински случај каде што P и Q се функции само од x и y, а L е крива во Oxy рамнината. Да се определи работата низ триаголникот $MNSN$. Дали силата е потенцијална?

9. $P = \sin(x + y)$, $Q = 0$; $M(0, 0)$, $N(\pi/2, 0)$, $S(0, \pi/2)$.
10. $P = x/(x^2 + y^2)$, $Q = y/(x^2 + y^2)$; $M = (1, 0)$, $N(2, 3)$, $S(0, 3)$.

VI.3. ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

Разделите 3.1–3.4, и дел од 3.7 и 3.8, се посветени на двојните интеграли, а преостанатите – на тројните интеграли. Притоа, двојните интеграли се дефинираат на два начина: со помош на повторено интегрирање и како граници на риманови низи. Слична дискусија се спроведува и за тројните интеграли. Дел од резултатите не се докажуваат но некои од нив се илустрираат користејќи геометриски поими.

3.1. Двоен интеграл како двокатен определен интеграл

Да претпоставиме дека функцијата $f(x, y)$ е непрекината во област D што е правилна во правец на y–оската, т.е. во

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}, \tag{1}$$

каде што $a, b \in \mathbf{R}$ и $a < b$, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се непрекинати функции на сегментот $[a, b]$, такви што $y_1(x) < y_2(x)$ за $a < x < b$, а $y_1(a) \le y_2(a)$, $y_1(b) \le y_2(b)$ (в. и (8) во **1.1**). Тогаш, според Т. 4 од **1.1**, функцијата

$$F(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

е непрекината на сегментот $[a, b]$, од што следува дека постои определениот интеграл

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \tag{2}$$

За него ќе велиме дека е **двокатен интеграл** од $f(x, y)$ на D и ќе го означуваме со

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy. \tag{2'}$$

Ќе покажеме дека, во случај кога $f(x, y)$ е ненегативна, интегралот (2) може да се толкува како волумен на тело.

Теорема 1.

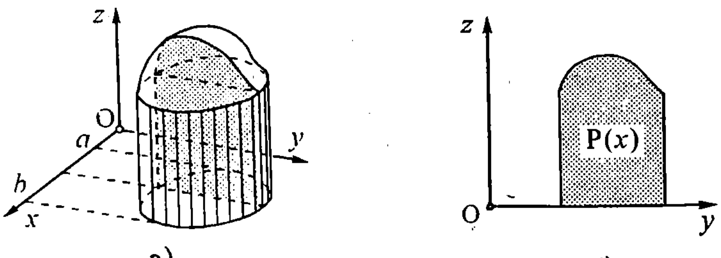
ункцијата $f(x, y)$ е непрекината во област D, правилна во правец на y–оската (т.е. е од обликот (1)) и ако $f(x, y) \geq 0$ за секоја точка $(x, y) \in D$, тогаш двокатниот интеграл (2) е еднаков со бројната вредност на волуменот од телото, ограничено со површината $z = f(x, y)$, рамнината $z = 0$ и со цилиндричната површина чија директриса е контурата на D, а генератрисите се паралелни со z–оската.

Доказ. Да го означиме со V волуменот на телото, опишано погоре (црт. 1 а), а со $P(x)$ – плоштината на пресекот на телото со рамнина $X = x$, $a < x < b$ (црт. 1 б). Тогаш

$$P(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy,$$

па според (2) од III.4.4,

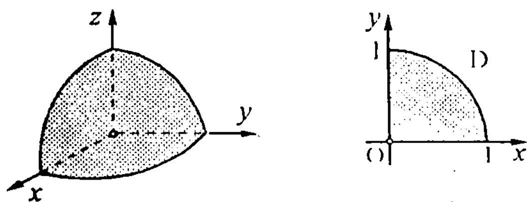
$$V = \int_a^b P(x)dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \qquad \diamond$$



а) б)

Црт. 1

ПРИМЕР 1. Да го пресметаме волуменот V на телото ограничено со површината $z = 1 - x^2 - y^2$ и рамнината $z = 0$.



а) б)

Црт. 2

На црт. 2 а) е скицирана една четвртинка од соодветното тело, а на црт. 2 б) – четвртинка од кругот што е проекција на телото врз рамнината Oxy. Имаме:

$$V = 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)dy = 4\int\limits_0^1 [y - x^2y - y^3/3]\,\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$
$$= \frac{8}{3}\int\limits_0^1 (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Со смената $x = \sin t$, добиваме

$$1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t, \quad dx = \cos t\, dt,$$

па користејќи ја формулата (2) од III.2.3, ќе имаме:

$$V = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 t\, dt = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\cos^3 t \sin t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt\right) =$$
$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dt\right) = 2\cdot\frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Да претпоставиме сега дека $f(x, y)$ е непрекината во областа D што е правилна во правец на x–оската, т.е.

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

(в. (8′) во **1.1**). Според Т.4 од **1.1**, постои двокатниот интеграл

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx\,; \tag{3}$$

него ќе го означуваме со $\iint\limits_D f(x, y)dy\, dx$.

Дуално на Т.1 (со замена на улогите на x и y ја добиваме следнава

Теорема 1′.

Ако $f(x, y)$ е непрекината и ненегативна функција на областа D, правилна во правец на x–оската, тогаш двокатниот интеграл (3) е еднаков со волуменот V на телото образувано како и во Т. 1. ◇

Ако една област е правилна (т.е. правилна во правец на двете координатни оски), тогаш постојат и двата двокатни интеграли (2) и (3). Ќе покажеме дека овие два интеграла, кога тие постојат, се еднакви.

Теорема 2.

Ако функцијата $f(x, y)$ е непрекината на правилната област D, тогаш двокатните интеграли (2) и (3) се еднакви.

Доказ. Ако $f(x, y) \ge 0$ за секоја точка $(x, y) \in D$, тогаш заклучокот на оваа теорема следува од Т. 1′. Ако, пак, за некои точки $(x, y) \in D$, $f(x, y) < 0$, тогаш поради непрекинатоста на $f(x, y)$, постои позитивен реален број m таков што $-m$ е најмалата вредност од $f(x, y)$ на D. Тогаш, за секоја точка $(x, y) \in D$, $g(x, y) = f(x, y) + m \ge 0$, така што

$$\iint\limits_D g(x, y)dx\, dy = \iint\limits_D g(x, y)dy\, dx\,. \tag{4}$$

Од Т. 1 и Т .1′ имаме

$$\iint\limits_D dx\,dy = P = \iint\limits_D dy\,dx\,,$$

каде што P е плоштината на D. Имајќи го ова предвид, како и (4), добиваме:

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dx\,dy + mP = \iint\limits_D f(x,\,y)dx\,dy + m\iint\limits_D dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_D [f(x,\,y)+m]dx\,dy = \iint\limits_D g(x,\,y)dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_D g(x,\,y)dy\,dx = \iint\limits_D [f(x,\,y)+m]dy\,dx =$$
$$= \iint\limits_D f(x,\,y)dy\,dx + m\iint\limits_D dy\,dx = \iint\limits_D f(x,\,y)dy\,dx + mP\,.$$

а оттука,

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dx\,dy = \iint\limits_D f(x,\,y)dy\,dx\,. \quad \diamondsuit$$

Двокатниот интеграл (2) односно (3) (кога D е правилна во правец на y–оската, односно кога D е правилна во правец на x–оската) ќе го викаме **двоен интеграл на функцијата $f(x,\,y)$ над областа D** и, во обата случаја, ќе го означуваме со

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dx\,dy\,. \tag{5}$$

Притоа, множеството D ќе го викаме **домен** на двојниот интеграл.

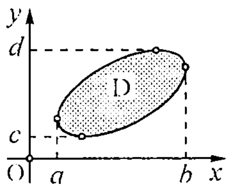
Со оглед на Т. 2, точно е следново:

Тврдење 3.

Ако $f(x,\,y)$ е непрекината функција во една област D што е правилна во правец на барем една од координатните оски, тогаш двојниот интеграл на $f(x,\,y)$ над D е еднозначно определен. $\diamondsuit$

Ако областа D е правилна во правец на двете оски (црт. 3), тогаш секој од двокатните интеграли (2) и (3) е еднаков со двојниот интеграл (5):

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\,y)dy =$$
$$= \iint\limits_D f(x,\,y)dx\,dy =$$
$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,\,y)dx\,,$$



Црт. 3

т.е. *тие се разликуваат само во редоследот на интеграцијата.*

Според досегашните разгледувања, поимот двоен интеграл е дефиниран само ако неговиот домен D е област што е правилна во правец на барем една од координатните оски. Подолу ќе го обопштиме овој поим со тоа што ќе допуштиме неговиот домен да биде и поопшто множество. За таа цел прво ќе воведеме еден поим.

Нека D е затворено и ограничено рамнинско множество. За една конечна фамилија области $D_1,\,D_2,\ldots,D_n$ ќе велиме дека е **разбивање на D** на подобласти, ако се исполнети следниве услови:

(i) $D_1, D_2, \ldots, D_n$ се рамнински области такви што, за $i \neq j$, D_i и D_j немаат заеднички внатрешни точки ($i, j = 1, 2, \ldots, n$),

(ii) $D = D_1 \cup D_2, \cup \ldots \cup D_n$.

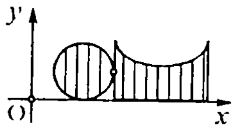
Притоа, D може да биде област, но не мора.

Така, на пример, фигурата на црт. 4 не е област, но јасно е дека таа има разбивање, на пример, на две подобласти, и двете правилни во правец на y–оската.

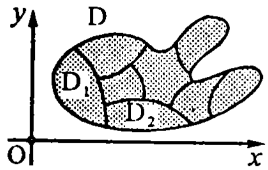
Натаму ќе претпоставуваме дека секое разбивање $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ на доменот D од даден двоен интеграл, што ќе биде разгледувано, го има својството:

(iii) за секој $i = 1, 2, \ldots, n$, D_i е правилна област во правец на барем една од координатните оски.

За секоја фамилија $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ со својствата (i)–(iii) ќе велиме дека е **стандардно разбивање** на D. (На црт. 5 е претставено едно стандардно разбивање на дадената фигура D.)



Црт. 4



Црт. 5

Во наредните разгледувања ќе ги користиме и следниве ознаки:

P – плоштина на доменот D; P_i – плоштина на подобласта D_i;

V – волуменот на телото ограничено со површините $z = f(x, y)$, $z = 0$ и цилиндричната површина чија директриса е контурата на D, а генератрисите се паралелни со z–оската;

V_i – волуменот на телото образувано како и она што има волумен V со тоа што "контурата на D" ќе се замени со "контурата на D_i".

Притоа, ако $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ е стандардно разбивање на D, тогаш следниве две својства ги сметаме за интуитивно јасни:

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n\,, \tag{$*$}$$

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n\,. \tag{$**$}$$

Погоре најавеното обопштување на поимот двоен интеграл ќе го овозможи следнава

Теорема 4.

Нека $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$, $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ *се две стандардни разбивања на* D. *Ако* $f(x, y)$ *е непрекината функција на* D, *тогаш важи*:

$$\iint\limits_{D_1} f\,dx\,dy + \cdots + \iint\limits_{D_n} f\,dx\,dy = \iint\limits_{E_1} f\,dx\,dy + \cdots + \iint\limits_{E_n} f\,dx\,dy\,. \tag{6}$$

Доказ. Ако $f(x, y) \geq 0$ на D, точноста на (6) следува од Т. 1, Т. 1′ и Т. 2, зашто левата страна на (6) е еднаква на $V_1 + \cdots + V_n$, десната – на $V_1' + \cdots + V_m'$, а според својството ($**$), и двата збира се еднакви на V.

Ако пак, $f(x, y) < 0$ за некои точки $(x, y) \in D$, работејќи слично како и при доказот на Т. 2, се добива равенството (6). ◇

Нека, сега, $f(x, y)$ е непрекината функција на затвореното и ограничено множество D, коешто има стандардно разбивање $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$. Тогаш поимот двоен интеграл на $f(x, y)$ над множеството D го дефинираме со равенството:

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)dx\,dy + \cdots + \iint_{D_n} f(x, y)dx\,dy\,. \tag{7}$$

Од оваа дефиниција и од Т. 2 следува:

Теорема 5.

Ако $f(x, y)$ е непрекината функција на затвореното и ограничено множество D коешто има стандардно разбивање, тогаш двојниот интеграл $\iint_D f(x, y)dx\,dy$ е еднозначно определен. ◇

ПРИМЕР 2. Да го пресметаме волуменот на телото ограничено со параболоидот $z = x^2 + y^2$, рамнината $z = 0$ и:

а) рамнините $x = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 6$;
б) рамнината $y = x$ и цилиндарот $y = \sqrt{x}$;
в) цилиндрите $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$.

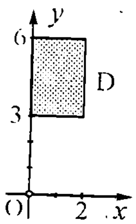
Решение. Во сите три случаи ја користиме формулата

$$V = \iint_D z\,dx\,dy\,,$$

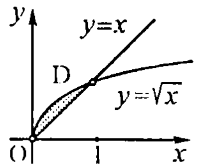
каде што $z = x^2 + y^2$, а D е соодветната "основа" на телото, т.е. ортогоналната проекција на телото врз рамнината $z = 0$. Така, имаме:

а) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 6\}$ (црт. 6). Според тоа,

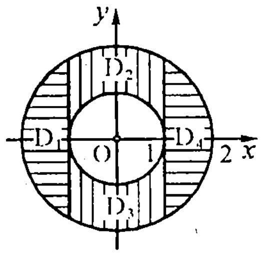
$$V = \int_0^2 dx \int_3^6 (x^2 + y^2)dy = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=3}^{y=6} dx = 134\,.$$



Црт. 6



Црт. 7



Црт. 8

б) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x}\}$ (црт. 7).

$$V = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{3}{35}\,.$$

в) $D = \{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ (кружниот прстен на црт. 8).

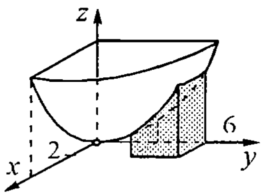
Бидејќи D не е правилна област ни во правец на x–оската ни во однос на y–оската, неа ја делиме на 4 подобласти D_1, D_2, D_3, D_4, т.е. интегралот го пресметуваме со помош на (5), користејќи го разбивањето $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ на D, каде што:

$$D_1 = \{(x, y) \mid -2 \le x \le -1,\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\},$$

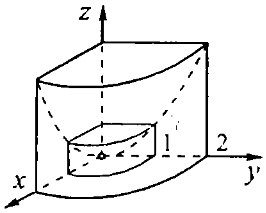
$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ \sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, \ -\sqrt{4-x^2} \le y \le -\sqrt{1-x^2}\},$$
$$D_4 = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2, \ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\}.$$

Овде, со малку пообемна работа, ќе се добие дека $2V = 15\pi$. На читателот му оставаме да ги комплетира пресметувањата (вежба 10), а подоцна (во 3.3) ќе видиме дека, со помош на поларни координати, до резултатот се доаѓа сосема едноставно.



Црт. 9



Црт. 10

На црт. 9 – црт. 10 се скицирани телата чии волумени ги пресметавме во Пр. 2, а) и б). Од нив може да се стекне впечаток дека z–оската има посебна, "привилегирана" позиција во однос на другите две координатни оски. Дека тоа не е така се гледа од наредниот пример.

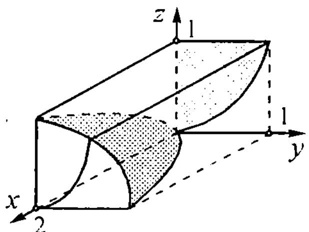
ПРИМЕР 3. Да го пресметаме волуменот на телото ограничено со површините $x = y^2 + z^2$, $z = y^2$, $z = 1$, $x = 0$ (црт. 11).

Решение. Проекцијата на телото врз Oyz–рамнината е:

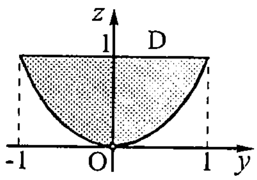
$$D = \{(y, z) \mid -1 \le y \le 1, \ y^2 \le z \le 1\} \quad (\text{црт. } 12).$$

Рамнината $y = 0$ го дели телото на два еднакви дела, па

$$V = 2\iint_D (y^2 + z^2)dy\,dz = 2\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 (y^2 + z^2)dz = \frac{88}{105}.$$



Црт. 11



Црт. 12

Вежби

Во задачите 1–3 да се пресмета волуменот на телото ограничено со дадените површини.

1. $x^2 + y^2 = 4$, $z = x$, $z = 0$ $(z \ge 0)$. **2.** $z = y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$.

3. $y^2 + z^2 = 4x$, $x = 4$.

Во задачите 4–6 да се одредат границите на интегрирањето во двојниот интеграл $J = \iint\limits_D z\,dx\,dy$, каде што D е областа ограничена со дадените криви, а $z = f(x, y)$, $f(x, y)$ е која било непрекината функција.

4. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $y = 0$.

5. $y^3 = x^2$, $y = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$, $y = 0$.

6. $y^2 - x^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ **(областа што го содржи координатниот почеток).**

7. Да се промени редоследот на интегрирањето во добиените резултати од вежбите 4, 5 и 6.

8. Ако $f(x, y)$ е непрекината функција на правоаголникот D: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ ($a < b$, $c < d$), тогаш постои точка $(\xi, \eta) \in D$, таква што

$$J = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = (b-a)(d-c)f(\xi, \eta).$$

Бројот $f(\xi, \eta)$ се вика средна вредност на f во правоаголникот D.

9. Да се најде средната вредност на функцијата

а) $f(x, y) = e^x \cos y$ **над** D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi/2$;

б) $f(x, y) = x \ln y$ **над** D: $0 \le x \le 4$, $1 \le y \le e$.

10. Да се комплетира пресметувањето на волуменот V во Пр. 2 в).

11. Нека D_* и D_{**} се круговите $x^2 + y^2 \le 4$, $x^2 + y^2 \le 1$, а D е кружниот прстен од Пр. 2 в). Да се покаже дека, ако $z = z(x, y)$ е непрекината функција на D_*, тогаш

$$\iint\limits_D z\,dx\,dy = \iint\limits_{D_*} z\,dx\,dy - \iint\limits_{D_{**}} z\,dx\,dy.$$

12. Да се искористи резултатот од претходната вежба за да се провери резултатот од вежбата 10, т.е. Пр. 2 в).

13. Да се пресмета $J = \iint\limits_D (x + 2y)dx\,dy$, каде што D е како во вежбата 10.

14. Дали може да се искористи симетричноста на D во претходната вежба?

15. Да се најде двојниот интеграл од $x + 2y - 1$ во областа D од вежбата 10.

3.2. Риманови двојни интеграли

Римановите двојни интеграли се дефинираат слично како римановите определени интеграли кај функциите од една променлива. (Да се види **III.5.1.**)

Не споменувајќи го тоа специјално, подолу под "област" ќе подразбираме "ограничена и затворена област". Потоа, ако D е област, тогаш нејзиниот **дијаметар** $\delta(D)$ е супремумот на множеството растојанија $\overline{AB}$, каде што $A, B \in D$. Егзистенцијата на дијаметарот $\delta(D)$ следува од ограниченоста на D.(Ако се има предвид и фактот што D е затворено, се добива дека постојат точки $A_0, B_0 \in D$, такви што $\delta(D)$ е растојанието меѓу тие две точки.)

Подолу, ќе сметаме дека D е дадена област со плоштина P, а $f(x, y)$ е функција дефинирана на D.

Нека $\{D_1, \ldots, D_n\}$ е разбивање на D на n подобласти. Плоштината на D_i ќе ја означуваме со P_i. Во секоја подобласт D_i избираме точка (ξ_i, η_i) и ја формираме сумата:

$$\sigma_n = f(\xi_1, \eta_1)P_1 + \cdots + f(\xi_n, \eta_n)P_n \qquad (1)$$

за која велиме дека е **риманова сума од** $f(x, y)$ на D. Таа риманова сума зависи од следниве фактори:

i) функцијата $f(x, y)$; ii) областа D;

iii) разбивањето $\{D_1, \ldots, D_n\}$ на D и

iv) точките $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$.

За натаму ќе сметаме дека $f(x, y)$ и D се фиксни, па според тоа доаѓаат до израз само третиот и четвртиот фактор.

Ако $\{D_1, \ldots, D_n\}$ е дадено разбивање на D, тогаш со $\delta^{(n)}$ го означуваме најголемиот од броевите $\delta(D_1), \ldots, \delta(D_n)$.

За натаму под **риманова низа** ќе подразбираме низа риманови суми: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$, таква што

$$\lim_{n\to\infty} \delta^{(n)} = 0 . \tag{2}$$

За функцијата $f(x, y)$ ќе велиме дека е **интеграбилна во риманова смисла** (за пократкo, ќе велиме **интеграбилна**) на ограничената и затворена област D акко: секоја риманова низа σ_n е конвергентна, а границите на кои било две такви низи се еднакви. Во тој случај, заедничката граница на сите риманови низи (од $f(x, y)$ над D) ќе ја означуваме со:

$$\mathrm{Rim}\,(f(x, y), D) \quad \text{или} \quad \mathrm{Rim}\,(f, D) \tag{3}$$

и за неа ќе велиме дека е **риманов двоен интеграл од** $f(x, y)$ **на** D. Ако се спореди тукуштo дадената дефиниција за риманов двоен интеграл со дефиницијата за риманов определен интеграл, формулирана во III.**5.1**, ќе се воочи соодветна сличност, што не е случајна. Имено, и двата поима се специјални случаи на риманов интеграл на функции од n променливи. (Во **3.5** ќе разгледаме риманови тројни интеграли на функции од три променливи.)

Подолу ќе формулираме неколку својства на римановите двојни интеграли, главно, без докази.[1] На читателот нема да му биде тешко да ги препознае својствата соодветни на Т.1, Т.2 и Т.3 од III.**5.1**, Т.3 од III.**5.2** и Т.4 од III.**5.3**.

Теорема 1 (за риманов двоен интеграл од константа).

Ако $f(x, y) = c$, за секоја точка $(x, y) \in D$, тогаш $\mathrm{Rim}\,(f, D) = cP$, каде што c е која било константа, а P плоштината на D.

Доказ. Заклучокот е последица од фактот дека $\sigma_n = cP$, за секоја риманова сума σ_n. ◇

Теорема 2 (за линеарност).

Ако постојат римановите двојни интеграли $\mathrm{Rim}\,(f, D)$, $\mathrm{Rim}\,(g, D)$, тогаш постојат римановите двојни интеграли $\mathrm{Rim}\,(h, D)$ и $\mathrm{Rim}\,(cf, D)$, каде што c е која било константа и $h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$. Притоа, точни се равенствата:

---

[1] Доказите на Т.3–Т.5 се посложени па затоа ги изоставаме, а на читателите им препорачуваме да ја консултираат книгата: Фихтенгольц том III, Гл. XVI, §1.

$$\mathrm{Rim}(cf, D) = c\,\mathrm{Rim}(f, D);$$
$$\mathrm{Rim}(h, D) = \mathrm{Rim}(f, D) + \mathrm{Rim}(g, D).$$

Доказ. Тврдењето е последица од дефиницијата на римановиот двоен интеграл и својствата на конвергентни низи. $\diamondsuit$

Теорема 3 (за наследност).

Нека G е подобласт од областа D. Ако $f(x, y)$ е интеграбилна на D, тогаш $f(x, y)$ е интеграбилна и на G. $\diamondsuit$

Теорема 4 (за адитивност).

Нека $\{D_1, \dots, D_n\}$ е разбивање на областа D. Ако $f(x, y)$ е интеграбилна на D, тогаш:

$$\mathrm{Rim}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rim}(f, D_i). \qquad \diamondsuit$$

Теорема 5 (за интеграбилност на непрекинати функции).

Ако $f(x, y)$ е непрекината на областа D, тогаш $f(x, y)$ е и интеграбилна на D. $\diamondsuit$

Дека непрекинатоста не е нужен услов за интеграбилност се гледа од следниов едноставен

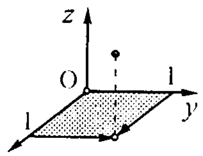
ПРИМЕР 1. Функцијата $f(x, y) = [xy]$ е дефинирана во областа

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

и притоа $f(x, y) = 0$ за $(x, y) \ne (1, 1)$ а $f(1, 1) = 1$. (Потсетуваме дека: $[x]$ е најголемиот цел број што не е поголем од x; б. Пр. 8 во I.2.2.)

Графикот на $f(x, y)$ е скициран на црт. 1. Функцијата има прекин во точката $(1, 1)$. Нека $\{D_1, \dots, D_n\}$ е разбивање на D, при што точката $(1, 1)$ ѝ припаѓа, на пример, на подобласта D_1, и $\delta = \max\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ каде што δ_i е дијаметарот на D_i. Ако σ_n е соодветната риманова сума, тогаш

$$0 \le \sigma_n \le P \le \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \pi.$$



Црт. 1

За $n \to +\infty$ имаме $\delta \to 0$, па $\sigma_n \to 0$. Според тоа, $\mathrm{Rim}(f, D)$ $(= 0)$ постои и покрај тоа што f има прекин во една точка од D.

Теорема 6 (за средна вредност).

Ако $f(x, y)$ е непрекината на областа D, тогаш постои точка $(\xi, \eta) \in D$, таква што

$$\mathrm{Rim}(f, D) = f(\xi, \eta)P,$$

каде што P е плоштината на областа D.

Доказ. Нека m е најмалата, а M најголемата вредност од $f(x, y)$ на D. Од дефиницијата на $\mathrm{Rim}(f, D)$ следува дека:

$$mP \le \mathrm{Rim}(f, D) \le MP,$$

т.е.

$$m \le \frac{1}{P}\mathrm{Rim}(f, D \le M,$$

а од тоа, според Т. 6 в) од V.1.6, следува дека постои точка $(\xi, \eta) \in D$ со бараното својство. $\diamondsuit$

Теорема 7 (геометриска интерпретација на римановиот двоен интеграл).

Ако $f(x, y)$ е непрекината и ненегативна функција на областа D, тогаш

$$\mathrm{Rim}\left(f(x, y), D\right) = V,$$

каде што V е бројната вредност на волуменот на телото заградено од рамнината $z = 0$, површината $z = f(x, y)$ и цилиндричната површина чија директриса е контурата на D, а генератрисите се паралелни со z-оската.

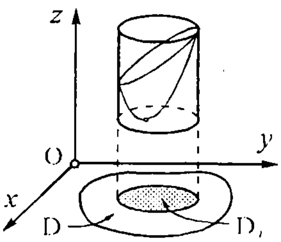
Доказ. Да воочиме едно разбивање $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ на D. На тоа разбивање му соодветствуваат (во општ случај) безброј многу риманови суми од кои две треба да се издвојат. Имено, од непрекинатоста на $f(x, y)$ следува дека постојат точки (x_i', y_i') (x_i'', y_i'') во D_i такви што $m_i = f(x_i', y_i')$ е најмалата, а $M_i = f(x_i'', y_i'')$ е најголемата вредност од $f(x, y)$ на D_i. Така ги добиваме следниве две риманови суми:

$$\sigma_n' = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \quad \sigma_n'' = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i.$$

Ако е

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i, \eta_i) P_i$$

која било риманова сума што й одговара на даденото разбивање, тогаш имаме $\sigma_n' \le \sigma_n \le \sigma''$. Освен тоа, σ_n' е збир од волумените на цилиндрите со плоштини на основите P_i и висини m_i, а во иста смисла σ_n'' е збир на волумените на цилиндрите со плоштина на базисите P_i и висини M_i. Притоа, првите цилиндри лежат целосно во внатрешноста на телото што е предмет на разгледување, додека пак, тоа тело се наоѓа во унијата на цилиндрите од вториот вид (в. црт. 2). Од сето тоа следува дека $\sigma_n' \le V \le \sigma_n''$, па значи и:



Црт. 2

$$\lim_{x\to\infty} \sigma_n' = V = \lim_{n\to\infty} \sigma_n'',$$

т.е. дека $\mathrm{Rim}(f, D) = V$. ◇

Забелешка 1. Последниов доказ е доволно коректен само при претпоставка дека претходно е дефиниран поимот волумен на тело и е изградена соодветна теорија. При недостиг на таква теорија, направената дискусија во доказот сугерира *двојниот интеграл* $\mathrm{Rim}(f, D)$ *да се смета за дефиниција на волумен на телото што е предмет на дискусија во теоремата.*

Користејќи го последниот резултат, ќе покажеме сега дека поимот за двоен интеграл дефиниран во **3.1** има иста содржина како и поимот риманов двоен интеграл.

Теорема 8.

Ако $f(x, y)$ е непрекината функција на областа D, којашто има стандардно разбивање на подобласти, тогаш

$$\operatorname{Rim}\big(f(x,\,y),\,D\big)=\iint\limits_{D} f(x,\,y)dx\,dy \tag{4}$$

Доказ. Ако $f(x,y)$ е ненегативна на D, тогаш равенството (4) е точно според претходната теорема и Т. 1 од **3.1**. Во случај пак $f(x,\,y)$ да прима и негативни вредности на D, тогаш функцијата $g(x,\,y)=f(x,\,y)+m$, каде што $-m$ е најмалата вредност од $f(x,\,y)$ на D, е ненегативна, па според тоа имаме:

$$\iint\limits_{D} f(x,\,y)dx\,dy=\iint\limits_{D} g(x,\,y)dx\,dy-mP=\operatorname{Rim}\big(g(x,\,y),\,D\big)-mP=$$
$$=\operatorname{Rim}\big(g(x,\,y)-m,\,D\big)=\operatorname{Rim}\big(f(x,\,y),\,D\big)\,.\qquad\Diamond$$

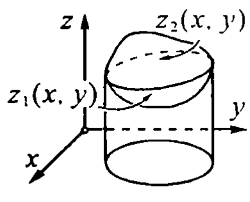
Резултатот од Т. 7 може да се искористи и за пресметување на волуменот V на тело определено со:

$$G=\{(x,\,y,\,z)\mid z_1(x,\,y)\le z\le z_2(x,\,y),\quad (x,\,y)\in D\}\,,$$

каде што $z_1(x,\,y)$, $z_2(x,\,y)$ се непрекинати функции на рамнинската (затворена и ограничена) област D, при што $z_1(x,\,y)\le z_2(x,\,y)$ за секоја точка $(x,\,y)\in D$. Ќе покажеме дека:

9^0. $V=\iint\limits_{D}\big(z_2(x,\,y)-z_1(x,\,y)\big)dx\,dy\,.$

Доказ. Ако $z_1(x,\,y)\ge 0$ за секоја точка $(x,\,y)\in D$, тогаш јасно е дека $V=V_2-V_1$, каде што V_i е волуменот на соодветното тело, во смисла на Т. 7.



Црт. 3

Во општ случај, нека $-m$ е најмалата вредност од $z_1(x,\,y)$ на D. Тогаш ставајќи

$$z_1^*=z_1+m\,,\quad z_2^*=z_2+m$$

ќе добиеме ненегативни функции на D, такви што $z_2^*-z_1^*=z_2-z_1$. Потоа, ако ставиме

$$G^*=\{(x,\,y,\,z)\mid z_1^*(x,\,y)\le z\le z_2^*(x,\,y),\quad (x,\,y)\in D\}\,,$$

ќе добиеме тело со ист волумен V^* како и G бидејќи G^* е добиена од G со транслација за векторот $|\,m\,|\,\mathbf{k}$, од што следува дека:

$$V=V^*=\iint\limits_{D}(z_2^*-z_1^*)dx,\,dy=\iint\limits_{D}(z_2-z_1)dx\,dy\,.\qquad\Diamond$$

Забелешка 2. Уште во почетокот на овој раздел ја внесовме претпоставката дека D е област, но слично како и во претходниот раздел може да се обопштат резултатите и за случај кога D не е област но има разбивање $\{D_1,\,D_2,\ldots,D_n\}$, такво што D_i е област за секој $i=1,\,2,\ldots,n$. Тогаш, равенството

$$\operatorname{Rim}(f,\,D)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Rim}(f,\,D_i)\,, \tag{5}$$

го сметаме за точно по дефиниција.

Забелешка 3. Читателот (веројатно) ќе се праша зошто во дефиницијата на риманов двоен интеграл, претпоставката $\delta^{(n)}\to 0$ не ја заменивме со

$$P^{(n)} \to 0\,, \tag{2'}$$

каде што $P^{(n)} = \max\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Одговор ќе најдеме во резултатот од вежбата 4.

Забелешка 4. Резултатот од Т. 8 го добивме како последица од геометриската интерпретација на двојниот интеграл. Читателот може да најде аналитичен доказ на тој резултат, на пример, во Фихтенгольц, кн. III, Гл. XVI, § 1, а за случај кога областа D е правоаголна, таков доказ се дава во вежбата 6.

Вежби

1. Да се покаже дека ако D е ограничено и затворено множество (во рамнината) со плоштина P и дијаметар δ, тогаш:

   а) $P < \delta^2\pi$; $b)P < \frac{\delta^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

2. Нека D и δ се како и во претходната вежба и нека (p) е права (во рамнината) што има барем една заедничка точка со D. Да се покаже дека ако $M \in D$, а d е растојанието од M до (p), тогаш $d \leq \delta$.

3. Да се покаже дека функцијата $[x+y]$ е интеграбилна по Риман во областа D, каде што:

   а) $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$; б) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

4. Разгледувајќи ја функцијата $z = xy$ на квадратот $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, да се покаже дека (при дефиницијата на риманов интеграл) не може условот $\max \delta(D_n) \to 0$ да се замени со $\max P_n \to 0$. (Види ја забелешката 3.)

5. Да се покаже дека секоја интеграбилна функција (по Риман) е ограничена.

6. Да се докаже Т. 8 за случај кога D е правоаголна област.

7. Да се покаже дека, ако $f(x, y)$ и $g(x, y)$ се интеграбилни (по Риман) на областа D и ако $f(x, y) \leq g(x, y)$ за секоја точка $(x, y) \in D$, тогаш:

$$\mathrm{Rim}\left(f(x, y)D\right) \leq \mathrm{Rim}\left(g(x, y), D\right).$$

Во задачите 8 и 9, не пресметувајќи го дадениот (риманов) интеграл J, да се определи сегмент (со што помала должина) во кој се наоѓа вредноста на интегралот.

8. $J = \mathrm{Rim}\,(x + y + 10, D)$, $D\colon x^2 + y^2 \leq 4$.

9. $J = \mathrm{Rim}\,(x^2 + y^2 + 10 - 4x - 4y, D)$, $D\colon x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.

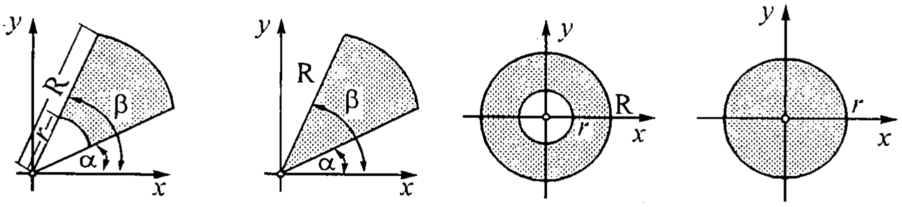
3.3. Двојни интеграли во поларни координати

Пресметувањето на еден двоен интеграл е наједноставно кога соодветната област е правоаголна. Често, меѓутоа, се појавуваат области што се делови од кругови, какви што се, на пример, областите од црт. 1.

Ако овие области ги посматраме во однос на поларниот координатен систем при кој полот е во координатниот почеток, а поларната оска се совпаѓа со позитивниот дел од апсцисната оска, тогаш тие се определени на следниов начин: областа на црт. 1, а) е определена со

$$D = \{(\varphi, \rho) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ r \leq \rho \leq R\} \tag{1}$$

каде што r, R, α, β се реални броеви такви што $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, $0 < r < R$; за $r = 0$, (1) ја претставува областа б), а ако покрај тоа, земеме и $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ ќе добиеме дека со (1) е претставена и областа г); областа в) е определена со (1) ако се земе $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ и $r > 0$. Така, б), в) и г) се специјални случаи од а).



а) б) в) г)

Црт. 1

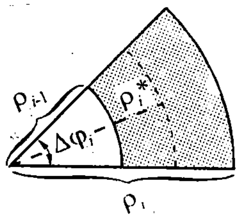
Ќе ја докажеме следнава (важна)

Теорема 1 (за двојни интеграли во поларни координати).

Ако D е област определена со (1), каде што $0 \le r < R$, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, и ако $f(x, y)$ е непрекината функција на D, тогаш е точно равенството

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_r^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi,)\rho\, d\rho. \tag{2}$$

Доказ. Да ја разделиме областа D од црт. 1 а) со прави што минуваат низ координатниот почеток и со лаци на концентрични кругови. Да уочиме една од така добиените подобласти D_i и да ја пресметаме нејзината плоштина P_i (црт. 2):



Црт. 2

$$P_i = \frac{1}{2}\rho_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}) - \frac{1}{2}\rho_{i-1}^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i-1})(\rho_i - \rho_{i-1})(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \rho_i^* \,\Delta\rho_i\, \Delta\varphi_i\,,$$

каде што $\rho_i^* = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i-1})$, $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Нека $\varphi_{i-1} \le \varphi_i^* \le \varphi_i$. Да ги разгледаме: сумата

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)P_i = \sum_{i=1}^n f(\rho_i^* \cos \varphi_i^*, \rho_i^* \sin \varphi_i^*)\rho_i^* \,\Delta\rho_i\, \Delta\varphi_i\,,$$

каде што $\xi_i = \rho_i^* \cos \varphi_i^*$, $\eta_i = \rho_i^* \sin \varphi_i^*$, и двојниот интеграл

$$\iint_{D^*}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\,\rho\, d\varphi\, d\rho,\ D^* = \{(\varphi, \rho) \mid \alpha \le \varphi \le \beta,\ r \le \rho \le R\}.$$

Ако φ и ρ го интерпретираме како правоаголни декартови координати, тогаш σ_n ќе биде интегрална сума за последниот двоен интеграл. Оттука следува дека

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)dx\, dy = \iint\limits_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r}^{R} f(\rho \cos \varphi,\, \rho \sin \varphi)\rho\, d\rho\,,$$

што и сакавме да докажеме. $\diamondsuit$

ПРИМЕР 1. **Да го пресметаме волуменот на телото ограничено со површините (в. Пр. 2 в од 3.1):**

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4 \quad \text{и} \quad z = 0.$$

Ја користиме равенката (2):

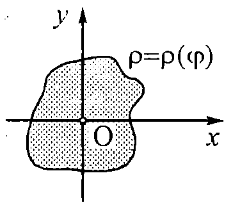
$$V = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dx\, dy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{2} (rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)\rho\, d\rho =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1}^{2} \rho^3 d\rho = \frac{15\pi}{2}\,.$$

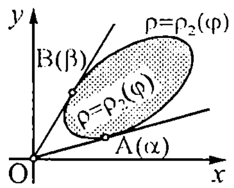
Да претпоставиме, сега, дека D е област чија контура, правите што минуваат низ координатниот почеток, не ја сечат во повеќе од две точки. Можни се следниве два случаја:

I. Координатниот почеток е во внатрешноста на D (црт. 3). Ако $\rho = \rho(\varphi)$ е равенката на контурата во поларен систем, тогаш е точно равенството:

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)dx\, dy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi,\, \rho \sin \varphi)\rho\, d\rho\,. \tag{3}$$



Црт. 3



Црт. 4

II. Координатниот почеток е надвор од областа D, а $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) се екстремни вредности на аголот φ на точките од контурата на D која е поделена на два дела со равенки $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, како на црт. 4. Тогаш точно е равенството:

$$\iint\limits_{D} f(x,\, y)dx\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi,\, \rho \sin \varphi)\rho\, d\rho\,. \tag{4}$$

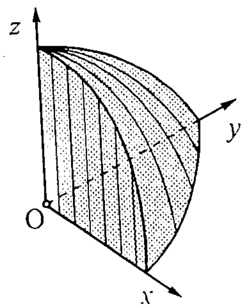
Во горните разгледувања, без да биде експлицитно нагласено, покрај непрекинатоста на $f(x,\, y)$ на D, се претпоставува дека и $\rho(\varphi)$, $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ се непрекинати функции на соодветните сегменти.

За разлика од равенството (2) кое го докажавме, равенствата (3) и (4) ги изнесовме без доказ. Тие можат да се докажат директно, но ние нив ќе ги добиеме како последици од поопшти резултати што ќе бидат формулирани во **3.7**.

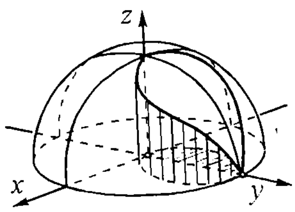
ПРИМЕР 2. **Ќе го пресметаме волуменот на топката $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, така што ќе пресметаме волумен на само една нејзина осминка (црт. 5):**

$$\frac{V}{8} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3}\right]_0^a d\rho = \frac{\pi a^3}{6},$$

т.е. $V = 4\pi a^3/3$.



Црт. 5



Црт. 6

ПРИМЕР 3. **Да го пресметаме волуменот на телото што го исечува цилиндарот $x^2+y^2-ax=0$ $(a>0)$ од топката $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ (црт. 6). Земајќи ја предвид симетријата на телото, имаме:**

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho = 4\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3}\right]_0^{a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} a^3(1-\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{2a^3}{9}(3\pi-4).$$

Следната дискусија ќе не доведе до формула за **двоен интеграл во обопштени поларни координати**.

Нека D е ограничена рамнинска област и нека D^* е областа дефинирана со:

$$D^* = \{(x^*, y^*) \mid x = ax^*,\ y = by^*,\ (x, y) \in D\}, \tag{5}$$

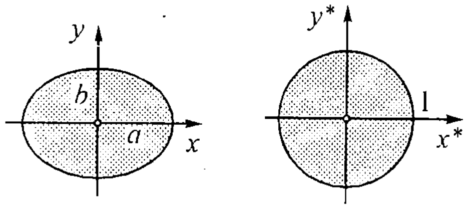
каде што a и b се дадени (ненулти) броеви.

На пример, ако D е областа ограничена со елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (црт. 7 а), тогаш D^* е областа ограничена од кружницата $x^{*2} + y^{*2} = 1$ (црт. 7 б).

Се покажува дека е точно следново равенство:

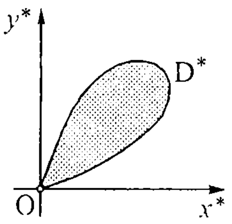
$$\iint_D f(x, y) = ab \iint_{D^*} f(ax^*, by^*)dx^*\,dy^*. \tag{6}$$

И формулата (6) е специјален случај од поопшта формула што ќе биде формулирана во **3.7**. Во вежбата 10 ќе му биде предложено на читателот да даде детален доказ на (6) за случај кога D е правоаголна област.)



а) б)

Црт. 7



Црт. 8

ПРИМЕР 4. Ќе ја искористиме формулата (6) за пресметување на плоштината на елипсата, т.е. на областа а) од црт. 7. Според (6), имаме:

$$P = \iint\limits_D dx\,dy = ab \iint\limits_{D^*} dx^*\,dy^* = ab\cdot 1\cdot\pi = ab\pi\,.$$

ПРИМЕР 5. Да го пресметаме двојниот интеграл

$$I = \iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy\,,$$

каде што D е делот од првиот квадрант, ограничен со кривата $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4 = xy/\sqrt{6}$.

Ако ставиме $x=\sqrt{2}x^*$, $y=\sqrt{3}y^*$, ќе добиеме

$$I = \sqrt{6}\sqrt[4]{6}\iint\limits_{D^*}\sqrt{x^*y^*}\,dx^*\,dy^*\,,$$

при што $(x^{*2}+y^{*2})^4 = x^*y^*$ (црт. 8).

Ако преминеме, сега, во поларен систем, ќе ја добиеме областа ограничена со кривата $\rho^6=\cos\varphi\,\sin\varphi$, така што,

$$I = \sqrt[4]{6^3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[6]{\cos\varphi\,\sin\varphi}} \rho^2\sqrt{\cos\varphi\,\sin\varphi}\,d\rho = \frac{\sqrt[4]{6^3}}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi = 1/\sqrt[4]{6}\,.$$

Интегралот во претходниот пример можевме да го решиме само со една, наместо со две последователни смени. Имено, Ако со смената $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, областа D се пресликува (биективно) во D^*, тогаш се покажува дека е точно равенството

$$\iint\limits_D f(x,\,y)dx\,dy = ab\iint\limits_{D^*} f(a\rho\cos\varphi,\ a\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,. \tag{7}$$

Во примерот 5, директната смена, според погоре изнесеното, ќе биде

$$x=\sqrt{2}\rho\cos\varphi\,,\qquad y=\sqrt{3}\rho\sin\varphi\,.$$

Забелешка. Ако a и b се дадени позитивни реални броеви, тогаш броевите φ и ρ $(0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\rho<+\infty)$, определени со формулите

$$x=a\rho\cos\varphi\,,\qquad y=b\rho\sin\varphi \tag{8}$$

се викаат **обопштени поларни координати** на точката $M(x,\,y)$. Од (8) се добиваат формулите

$$\rho^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}\,. \tag{9}$$

Вежби

1. Да се пресмета двојниот интеграл од вежба 13 во **3.1** со помош на поларни координати.

Во задачите 2–3, да се пресмета двојниот интеграл на функцијата $f(x, y)$ над областа D.

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2.$
3. $f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}, \quad D: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2.$

Со премин во поларен координатен систем, во 4–5 да се пресмета плоштината на фигурата ограничена со дадените криви.

4. $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ y = x,\ y = 0.$
5. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy.$

Во 6–9 да се пресмета волуменот на телото ограничено со дадените површини.

6. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0.$
7. $2az = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 - z^2 = a^2,\ z = 0$; a е дадена позитивна константа. Што се добива ако се претпостави дека $a < 0$?
8. $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ z = 0,\ y = \sqrt{2x - x^2},\ 4z = x^2 + y^2.$
9. $2z = x^2 + y^2,\ z = 2.$
10. Да се докаже равенството (6) кога D е правоаголна област.
11. Нека е даден обопштен поларен систем при кој $a = 3$, $b = 2$. Што претставуваат линиите $\rho = 1$, $\varphi = \pi/4$?

3.4. Несвојствени двојни интеграли

Поимот несвојствен примитивен определен интеграл е воведен во III.**1.3**, а несвојствен риманов интеграл во III.**5.3**. Слична дискусија ќе спроведеме овде и за двојните интеграли.

Да се задржиме прво на едноставниот Пр. 1 од **3.2**. Имено, во **3.2.** покажавме дека $\mathrm{Rim}\big([xy], D\big) = 0$, каде што D е квадратот $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. И покрај тоа што областа е затворен (и ограничен) квадрат, двокатниот интеграл $\iint\limits_D [xy]dx\,dy$ не постои, бидејќи $[xy]$ е прекината во точката $(1, 1)$, што е теме на квадратот. Избирајќи два броја a, b, такви што $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, добиваме дека $[xy]$ е непрекината на правоаголникот:

$$D_{a,b} = \{(x, y) \mid 0 < x < a,\ 0 < y < b\}\,, \tag{1}$$

па според тоа постои интегралот

$$J_{a,b} = \iint\limits_{D_{a,b}} [xy]dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b [x\,y]dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b 0 \cdot dy = 0\,.$$

Според тоа, $\lim_{a\to 0,\, b\to 0} J_{a,b} = 0 = \mathrm{Rim}\big([xy], D\big)$. Затоа, можеме да сметаме дека двокатниот несвојствен интеграл $\iint\limits_D [x\, y]dx\, dy$ е конвергентен и има вредност 0.

Подолу ќе претпоставуваме дека D е област во рамнината, а $f(x, y)$ функција од две реални променливи. Според Т.5 од **3.2**, ако се исполнети условите:

а) D е затворено множество во $\mathbf{R}^2$,

б) D е ограничено множество во $\mathbf{R}^2$,

в) $f(x, y)$ е непрекината во секоја точка $(x, y) \in D$,

тогаш постои римановиот интеграл $\mathrm{Rim}\big(f(x, y), D\big)$. Ако, освен тоа, областа D има стандардно разбивање $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ на подобласти, тогаш, според Т.4 од **3.2**,

$$\mathrm{Rim}\big(f(x, y), D\big) = \iint\limits_D f(x, y)dx\, dy.$$

За натаму, ако барем еден од условите а), б), в) не е исполнет, ќе велиме дека $J(f, D) = \iint\limits_D f(x, y)dx\, dy$ е **несвојствен двоен интеграл**. Да претпоставиме дека $\{D_{(k)} \mid k = 1, 2, \ldots, \}$ е бесконечна низа рамнински области таква што:

i) ако во а), б), в) D се замени со $D_{(k)}$, тогаш ќе бидат исполнети соодветните услови а$\cdot k$), б$\cdot k$), в$\cdot k$), за секој природен број k;

ii) $\lim_{k\to\infty} D_{(k)} = D$; [1)]

За несвојствениот интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dx\, dy$ ќе велиме дека е **конвергентен** и има **вредност** J акко за секоја низа области $\{D_{(k)} \mid k = 1, 2, \ldots\}$ со својствата i), ii) е исполнето и својството iii) $\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_{(k)}} f(x, y)dx\, dy = J$, и притоа границата J не зависи од изборот на низата области. Во спротивност, соодветниот интеграл ќе го викаме **дивергентен**.

Ќе се задоволиме со дадената дефиниција, а заинтересираниот читател би можел да ја консултира, на пример, книгата Фихтенгольц, кн. III, гл. XVI §5.

Од дискусијата што ја спроведовме во почетокот на овој раздел, добиваме дека несвојствениот двокатен интеграл

[1)] Се надеваме дека овој поим на граница од низа области на читателот му е интуитивно доволно јасен, и покрај тоа што дефиниција на таков вид конвергенција немаме дадено.

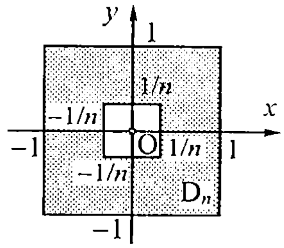
$\iint\limits_D [x\,y]dx\,dy$ (каде што D е споменатиот квадрат) е конвергентен и има вредност нула, а во **3.2** видовме дека и соодветниот риманов интеграл има иста вредност. Во врска со ова, да нагласиме дека, и покрај тоа, што непрекинатоста на подинтегралната функција не е неопходен услов за интеграбилност во риманова смисла, секогаш кога овој услов (т.е. условот в)) е нарушен, ќе сметаме дека соодветниот двоен интеграл е несвојствен.

Да разгледаме неколку примери.

ПРИМЕР 1. Ако $f(x,y) = (x^4 + x^2y^2)/(x^2 + y^2)$, а D е квадратот: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$, тогаш $f(x, y)$ не е дефинирана во координатниот почеток, од што следува дека двојниот интеграл

$$J = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$$

е несвојствен. Но, за секој $n \in \mathbf{N}$, функцијата $f(x, y)$ е непрекината во областа $D_n = D \setminus D_n^*$, каде што D_n^* се состои од точките на квадратот (црт. 1) D_n^*: $\frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}$, $\frac{-1}{n} < y < \frac{1}{n}$. Тогаш $f(x, y) = x^2$, за секоја точка $(x, y) \in D_n$. Од тоа следува дека:



Црт. 1

$$J_n = \iint\limits_{D_n} f(x, y)dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{-1/n} dx \int_{-1}^{1} x^2dy + \int_{-1/n}^{1/n} dx \int_{1/n}^{1} x^2dy + \int_{-1/n}^{1/n} dx \int_{-1}^{-1/n} x^2dy + \int_{1/n}^{1} dx \int_{-1}^{1} x^2\,dy$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{3n^4}.$$

Имајќи предвид дека $D_n \to D$ кога $n \to +\infty$, а $J_n \to \frac{4}{3}$ кога $n \to \infty$, добиваме: $J = \frac{4}{3}$.

ПРИМЕР 2. Ако $D = \{(x, y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0\}$ и $z = xy \cdot \exp(-x^2 - y^2)$, [2] тогаш интегралот $J = \iint\limits_D z\,dx\,dy$ е несвојствен (зашто D е неограничена област). Да ја испитаме неговата природа.

За таа цел, ќе ја определиме областа D_n со:

$$D_n = \{(x, y) \mid 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le n\};$$

можеме да сметаме дека $D_n \to D$ за $n \to +\infty$. Според тоа:

$$J = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} z\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^n xe^{-x^2}dx \int_0^n ye^{-y^2}dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^n \cdot \left[-\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_0^n = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n^2} - 1\right)\left(e^{-n^2} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

[2] Со $\exp(t)$ ја означуваме функцијата e^t.

Значи, дадениот несвојствен интеграл е конвергентен.

ПРИМЕР 3. Функцијата $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ е непрекината во областа $D = \mathbb{R}^2$, но не е исполнет условот б), па $J = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ е несвојствен интеграл.

Нека R_n е низа од позитивни реални броеви и нека $R_n \to +\infty$ кога $n \to +\infty$. Тогаш е природно да сметаме дека $D_n \to D$ за $n \to \infty$, каде што

$$D_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le R_n^2\}.$$

Тогаш имаме

$$J_n = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\pi \int\limits_0^{R_n} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho = -\pi e^{-\rho^2}\Big|_0^{R_n} = \pi[1 - \exp(-R_n^2)],$$

од што следува дека $J_n \to \pi$ за $n \to \infty$, т.е. $J = \pi$.

Вежби

Во задачите 1–3 (претпоставувајќи дека е познато дека соодветниот интеграл е конвергентен), да се најде вредноста на несвојствениот интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$.

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $D{:}\ x^2 + y^2 \le 1$.
2. $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $D{:}\ 1 \le x^2 + y^2$.
3. $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$, $D{:}\ 1 \le x^2 + y^2$.

4*. Да се пресмета $J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

3.5. Тројни интеграли

Тројните интеграли можат да се дефинираат со три последователни определени интеграли, со еден определен и еден двоен интеграл, а и директно, со помош на граници на риманови суми. Раководејќи се од фактот што постои (речиси) комплетна аналогија меѓу својствата на двојните и тројните интеграли, овде ќе ги дадеме само нужните дефиниции и формулациите на неколку од соодветните својства, препуштајќи му на читателот да ги формулира другите.

Ќе се задржиме прво на римановите тројни интеграли.

Нека G е просторна ограничена и затворена област. [1] Ако $G_1, G_2, \ldots, G_n$ се подобласти на G, такви што

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n, \tag{1}$$

при што G_i и G_j (за $i \ne j$) немаат заеднички внатрешни точки, тогаш велиме дека $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ е **разбивање** на G. Притоа,

[1] За натаму, претпоставката дека областа G е "ограничена и затворена" ќе ја подразбираме, без тоа да го споменуваме.

со V го означуваме волуменот на G, а со V_i волуменот на G_i за $i = 1, 2, \ldots, n$. Следново својство ќе го сметаме за интуитивно јасно:

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \,. \tag{$*$}$$

И смислата на поимот дијаметар δ_i на G_i ќе ја сметаме за јасна. Како и во **3.2**, со $\delta^{(n)}$ ќе го означуваме најголемиот од дијаметрите $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.

Да претпоставиме дека $f(x, y, z)$ е функција од три променливи дефинирана на G. Да избереме по една точка (ξ_i, η_i, ζ_i) од секоја подобласт G_i и да ја формираме сумата:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i \tag{2}$$

за која ќе велиме дека е **интегрална сума** од $f(x, y, z)$ над G.

За низата интегрални суми $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$, ќе велиме дека е **риманова низа** од $f(x, y, z)$ над G акко:

$$\lim_{n\to\infty} \delta^{(n)} = 0\,, \tag{3}$$

каде што смислата на $\delta^{(n)}$ е објаснета погоре.

За функцијата $f(x, y, z)$ велиме дека е **интеграбилна по Риман** (за пократко: **интеграбилна**) на G акко секоја риманова низа σ_n е конвергентна, а притоа сите имаат иста граница. Таа граница ќе ја означуваме со

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dx\,dy\,dz \tag{4}$$

за која ќе велиме дека е **риманов троен интеграл** од $f(x, y, z)$ над G.

Гледаме дека дадената дефиниција е наполно аналогна со дефиницијата за риманов двоен интеграл. Истото се однесува и за соодветните својства, што и овде ќе ги викаме Т.1–Т.6, со тоа што во **3.3** треба $f(x, y)$, D да се заменат со $f(x, y, z)$, G соодветно. Покрај тоа, во Т.1 треба "плоштината P на D" да се замени со "волумен V на G". Експлицитно ќе ги формулираме само Т.1 и Т.5:

Теорема 1.

Ако V е волуменот на G, тогаш $\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = V$. ◊

Теорема 5 (за интеграбилност на непрекинати функции).

Ако $f(x, y, z)$ е непрекината на G, тогаш $f(x, y, z)$ е интеграбилна на G. ◊

Да забележиме дека за нас не е осмислено својство аналогно на Т.7 од **3.2**, бидејќи немаме воведено поим за "волумен на четиридимензионални тела".

За да формулираме својство аналогно на Т.8 ни треба следнава дефиниција. За областа G велиме дека е **правилна во правец на z–оската** акко постојат функции $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ непрекинати на дводимензионалната област D такви што:

$$G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}. \tag{5}$$

Притоа $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ за секоја точка $(x, y) \in D$, а $z_1(x, y) < z_2(x, y)$, за секоја внатрешна точка $(x, y) \in D$.

Теорема 8_z.

Нека $f(x, y, z)$ е непрекината функција на областа G, што е од облик (5). Тогаш:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dx\,dy\,dx = \iint\limits_D F(x, y)dx\,dy, \tag{6}$$

каде што:

$$F(x, y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{7}$$

(Забележуваме дека $F(x, y)$ е непрекината на D според својството (3) од **1.3.**) ◊

Јасно е како се дефинира поимот (тридимензионална) област правилна во правец на y–оската (односно x–оската), како и соодветните теореми 8_y и 8_x. Во случај кога G не е правилна во правец на ни една од оските, но постои разбивање $\{G_1, \ldots, G_n\}$ на G, такво што, за секој i, G_i е правилна во правец на барем една од оските, за пресметување на тројниот интеграл (4), се користи, теоремата за адитивност, т.е. равенството:

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_G f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \\ &= \iiint\limits_{G_1} f(x, y, z)dx\,dy\,dz + \cdots + \iiint\limits_{G_n} f(x, y, z)dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{8}$$

Како и кај двојните интеграли (види забелешка 2 од **3.2**), равенството (8) ќе го сметаме за точно и во случај кога G не е област, но има разбивање $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, каде што G_i е област (за секој i) на која $f(x, y, z)$ е интеграбилна.

Ќе разгледаме еден пример.

ПРИМЕР 1. Ќе го пресметаме тројниот интеграл

$$J = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)dx\,dy\,dz,$$

каде што

$$G = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2\}.$$

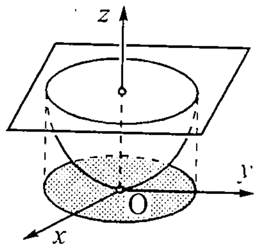
Решение. Областа G и нејзината проекција $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ на xy–рамнината се прикажани на црт. 1. Од дадените сведенија, добиваме

$$J = \iint_D \left[\int_{(x^2+y^2)/2}^{2} (x^2+y^2) dz \right] = \iint_D (x^2+y^2) \left(2 - \frac{x^2+y^2}{2} \right) dx\, dy \,.$$

Добиениот двоен интеграл може да се пресмета и во декартови координати, но преминот во поларни координати е далеку попрепорачлив. Така, добиваме:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \left(2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2} \right) d\rho = \pi \left(\rho^4 - \frac{\rho^6}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{3} \,.$$



Црт. 1

Забелешка за риманов интеграл во $\mathbf{R}^n$. Природно е да се постави прашањето како би се дефинирал поимот риманов интеграл во $\mathbf{R}^4$, а и поопшто во $\mathbf{R}^n$, за кој било $n \geq 4$. За да можеме да работиме аналогно како и во случаите $n = 2$ и $n = 3$, би требало да имаме поим што е обопштување на поимите плоштина (во $\mathbf{R}^2$) и волумен (во $\mathbf{R}^3$), т.е. да се дефинира соодветен поим за *мера* во $\mathbf{R}^n$. Но, ако се погледне дефиницијата на риманов интеграл во $\mathbf{R}$ (в. III.5.1) ќе се воочи дека не се користи (барем не експлицитно) поимот *должина*, туку се работи со сегмент, што се дели на потсегменти. Во $\mathbf{R}^2$ на сегмент му одговара специјален вид правоаголник, а имено, множество од обликот

$$D = \{(x,\, y) \mid a_1 \leq x \leq b_1,\ a_2 \leq y \leq b_2\} \,,$$

а во $\mathbf{R}^3$–паралелопипед:

$$G = \{(x,\, y,\, z) \mid a_1 \leq x \leq b_1,\ a_2 \leq y \leq b_2,\ a_3 \leq z \leq b_3\} \,.$$

Воочуваме дека:

$D = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2]$, $G = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] \times [a_3,\, b_3]$.

Поопшто, ако $a_1 < b_1,\ a_2 < b_2, \cdots, a_n < b_n$, тогаш:

$$E = [a_1,\, b_1] \times [a_2,\, b_2] \times \cdots \times [a_n,\, b_n]$$

е n–**димензионален паралелопипед**, што ќе го означуваме и со $E[a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n]$. За дијаметарот δ на E важи равенството:

$$\delta^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2 \,. \tag{9}$$

За поедноставно, ќе се задржиме на случајот $n = 2$. Нека $f(x,\, y)$ е функција од две променливи, дефинирана на $E = E[a_1,\, a_2;\ b_1,\, b_2]$ и нека дефиницијата за риманов интеграл од $f(x_1,\, x_2)$ остане иста како и во **3.2**, со тоа што "се дозволуваат" само поделби од E на правоаголници. Со други зборови, ако

$$a_1 = a_{10} < a_{11} < \cdots < a_{1k} = b_1,\ a_2 = a_{20} < a_{21} < \cdots < a_{2m} = b_2 \,,$$

тогаш E се претставува во обликот

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{k} [a_{1\,i-1},\, a_{1\,i}] \times [a_{2\,j-1},\, a_{2\,j}]\,. \tag{10}$$

На тој начин ќе биде осмислен поимот за риманов интеграл $\mathrm{Rim}\big(f(x_1,\, x_2),\, E\big)$ само ако E е правоаголна област. (Од тоа се гледа како се обопштува поимот за риманов интеграл $\mathrm{Rim}\ \big(f(x_1, \ldots, x_n),\, E\big)$ во случај кога $E = E[a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n]$ е n–димензионален паралелопипед.)

Да претпоставиме сега дека D е кое било ограничено множество во $\mathbf{R}^2$ и $f(x_1,\, x_2)$ функција дефинирана на D. Тогаш постојат $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, такви што $D \subseteq E[a_1, a_2;\, b_1, b_2] = E$. Дефинираме функција $g(x_1, x_2)$ на E со: $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ ако $(x_1, x_2) \in D$, $g(x_1,\, x_2) = 0$ за $(x_1,\, x_2) \notin D$. Интегралот $\mathrm{Rim}\ \big(f(x_1,\, x_2),\, D\big)$ се дефинира со:

$$\mathrm{Rim}\big(f(x_1,\, x_2),\, D\big) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Rim}\big(g(x_1,\, x_2),\, E\big)\,, \tag{11}$$

а релативно лесно се покажува дека левата страна не зависи од изборот на E, Покрај другото, остануваат во сила и теоремите од **3.2**.

Ако се погледне дефиницијата на двоен риманов интеграл што е дадена овде ќе се воочи дека поимот на плоштина не е користен, па затоа можеме Т.1 од **3.2** да ја искористиме како дефиниција за плоштина. Имено, за ограниченото подмножество D од $\mathbf{R}^2$ велиме дека е **измерливо во жорданова смисла** акко постои интегралот $\mathrm{Rim}(1,\, D) = P$, а за P велиме дека е **плоштина** на D.

Се надеваме дека на читателот не ќе му биде тешко да ја формулира новата дефиниција на риманов троен интеграл, а и поопшто риманов n–катен интеграл за кој било n. (Забележуваме дека жордановата мера на тридимензионални множества е, всушност, **волумен**.)

Да истакнеме дека новите дефиниции за плоштина и волумен овозможуваат давање на прецизни докази на својства што, обично и така ги сметаме за точни. Такво е, на пример, следново својство:

9^0. *Ако контурата на тридимензионална ограничена област Γ се состои од конечен број мазни површини, тогаш G е измерливо множество, т.е. G има еднозначно определен волумен.* $\diamondsuit$

Аналогно својство е точно и за рамнински фигури, а и за кои било n–димензионални ограничени области.

Вежби

Во 1–3 да се пресмета тројниот интеграл J од $f(x, y, z)$ во областа G, при дадени f и G.

1. $f(x, y, z) = x\sqrt{y}\,\sqrt[3]{z}$, $G = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3,\ 1 \le z \le 2\}$.
2. $f(x, y, z) = xy^2z$; G е делот од просторот ограничен со рамнините: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$.
3. $f(x, y, z) = 1$; $G = \{(x, y, z) \mid 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2},\ 0 \le z \le \frac{x^2+y^2}{4}\}$.
4. Да се пресмета интегралот од Пр. 1 без премин во поларни координати.
5. Да се интерпретира геометриски резултатот од вежбата 3.
6. Да се пресметаат волумените од вежбата 1–3 во **3.1** со помош на тројни интеграли.
7. Без да се искористи Т.8_z, да се покаже дека:

$$J = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{b_1}^{b_2} f(x, y, z)dy =$$
$$= \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)dz,$$

каде што $f(x, y, z)$ е непрекината во паралелопипедот

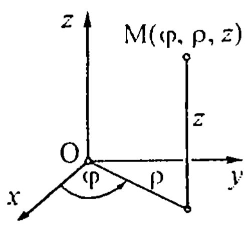
$$G = \{(x, y, z) \mid a_1 \le x \le a_2,\ b_1 \le y \le b_2\ c_1 \le z \le c_2\}.$$

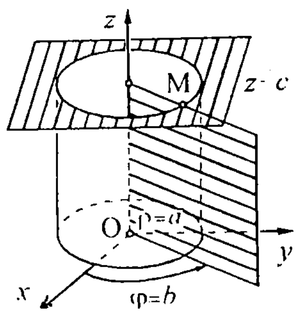
3.6. Тројни интеграли во цилиндрични и сферни координатни системи

Цилиндричните и сферните просторни координатни системи, при пресметувањето на тројните интеграли, имаат аналогна улога на рамнинскиот поларен координатен систем при пресметувањето на двојните интеграли.

Цилиндричен координатен систем се добива кога во еден просторен декартов систем $Oxyz$, z–координатата остане иста, а во Oxy–рамнината декартовиот правоаголен систем се замени со соодветниот поларен систем. Според тоа, секоја точка M е одредена со една подредена тројка броеви φ, ρ и z (црт. 1). Врската меѓу овие координати и декартовите е дадена со:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{1}$$





Ако ставиме $\rho = a\,(=$ конст.), тогаш добиваме цилиндрична површина, имено, ја добиваме кружната цилиндрична површина $x^2 + y^2 = a^2$ (поради тоа, и системот е наречен "цилиндричен"). За $\varphi = b\,(=$ конст.) се добива полурамнина што минува низ оската Oz, додека $z = c =($ конст.) е рамнина паралелна со рамнината Oxy (црт. 2).

Од изнесеното се гледа дека секоја точка M се добива како пресек на една цилиндрична површина, една полурамнина и една рамнина. Со други зборови, **координатните површини** при цилиндричниот систем сè кружните цилиндрични површини со заедничка оска (оската Oz), полурамнините што минуваат низ оската Oz и рамнините нормални на оската Oz (црт. 2).

Да видиме, сега, како се пресметува тројниот интеграл

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

со премин во цилиндричен систем. Нека D е ортогоналната проекција врз рамнината Oxy од областа

$$G = \{((x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

каде што $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ се непрекинати функции на D. Натаму, нека во однос на рамнинскиот поларен систем, D се добива кога φ се менува од α до β, а ρ од $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$ при што $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ се непрекинати на сегментот $[\alpha, \beta]$. Тргнувајќи од

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dx\,dy,$$

ако изразот во средните загради го означиме со $g(x, y)$, ќе имаме:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_G f(x, y, z)dx\,dy\,dz &= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho = \\ &= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\varphi,\rho)}^{z_2(\varphi,\rho)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz,\end{aligned} \tag{2}$$

каде што $z_i(\varphi, \rho) = z_i(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, $i = 1, 2$.

ПРИМЕР 1. Да го пресметаме тројниот интеграл

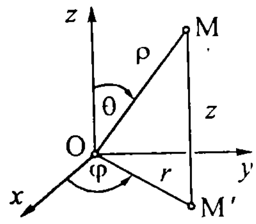
$$J = \iiint\limits_G \frac{z\,dx\,dy\,dx}{1 + x^2 + y^2},$$

каде што G е определена со: $x^2 + y^2 \leq r^2$, $0 = z \leq h$.

Ако преминеме во цилиндричен систем, ќе добиеме:

$$J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^r \rho\,d\rho \int\limits_0^h \frac{z}{1+\rho^2}\,dz = \pi\ln(1+\rho^2)\Big|_0^r \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^h = \frac{\pi h^2}{2}\ln(1+r^2).$$

Да се запознаеме и со **сферниот** (или **просторниот поларен) координатен систем**. Да земеме обичен декартов систем, и во рамнината Oxy да го воведеме рамнинскиот поларен систем $O\varphi r$ (црт. 3), при што оската Ox е поларната оска. Со θ го означуваме аголот меѓу векторот $\overrightarrow{OM}$ и оската Oz. Нека ρ е растојанието од O до M. Броевите φ, θ и ρ ги сметаме за координати на точката M, т.е. тие се **сферните координати** на M. За да се добие целиот простор, доволно е ρ да се менува во интервалот $[0, +\infty)$, θ во сегментот $[0, \pi]$ и φ во сегментот $[0, 2\pi]$.



Црт. 3

Ако се има предвид дека $r = \rho \sin\varphi$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, ги добиваме следниве врски меѓу декартовите и сферните координати на произволната точка M:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{3}$$

Координатните површини при овој систем се: сферите со центар во O ($\rho =$ конст.), едностраните конуси со врв во O ($\theta =$ конст.) и полурамнините што минуваат низ оската Oz ($\varphi =$конст.). Секоја точка во просторот, според тоа, се добива како пресек на сфера, конусна површина и полурамнина.

Смената од декартови координати во сферни, при тројните интеграли, се врши по следната формула:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \int_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f(x,y,z)\rho^2\sin\theta\, d\rho, \tag{4}$$

при што, целата област G се добива кога φ се менува од φ_1 до φ_2, θ се менува од $\theta_1(\varphi)$ до $\theta_2(\varphi)$ (се претпоставува дека овие функции се непрекинати на сегментот $[\varphi_1, \varphi_2]$), и ρ се менува од $\rho_1(\varphi,\theta)$ до $\rho_2(\varphi,\theta)$ кои се непрекинати функции во ортогоналната проекција D од G врз рамнината Oxy во која е воведен рамнински поларен систем. Натаму, во (4), $f(x, y, z)$ е скратен запис за $f(\rho\cos\varphi\sin\theta\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta)$.

И равенството (4) е специјален случај од поопштата формула што ќе биде изнесена во **3.7**.

ПРИМЕР 2. Да го пресметаме тројниот интеграл

$$J = \iiint_G \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

ако G е делот од просторот ограничен од полусферите $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ $(z \geq 0)$ и рамнината $z=0$.

Имаме:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho^2}\, d\rho = 2\pi \cdot 1 \cdot (2 - 1/2) = 3\pi .$$

Слично на случаите I и II кај двојните интеграли во поларни координати (в. **3.3**) можат да се разгледаат аналогни случаи и при тројните интеграли. На читателот му оставаме сам да го направи тоа.

Аналогно, пак, на обопштените поларни координати, можат да се воведат и обопштени сферни координати. Притоа, со смените

$$x = a\,\rho \cos\varphi \sin\theta, \quad y = b\,\rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = c\,\rho \cos\theta, \tag{5}$$

се преминува од декартов во обопштен сферен координатен систем. Ако областа G биективно се пресликува во G^* (инверзната биекција, т.е. биекцијата од G^* во G е определена со (5)), тогаш тројниот интеграл во новиот, обопштен сферен систем, се пресметува по формулата

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = abc \iiint_{G^*} f(x, y, z)\rho^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\rho, \tag{6}$$

каде што на десната страна од (6), $f(x, y, z)$ е кус запис за $f(a\,\rho\cos\varphi\sin\theta,\ b\,\rho\sin\varphi\sin\theta,\ c\,\rho\cos\theta)$.

Вежби

1. Да се решат задачите од Пр. 1 и вежбите 6–9 од **3.3** со тројни интеграли во цилиндричен систем.

Во задачите 2–3 да се пресмета тројниот интеграл J од $f(x, y, z)$ на областа G, преминувајќи во сферен или цилиндричен систем.

2. $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $G : x^2 + y^2 + z^2 \le z$.
3. $f = z^2$, $G : x^2 + y^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2$.
4. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со топките $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, при $x^2 + y^2 \ge z^2$.

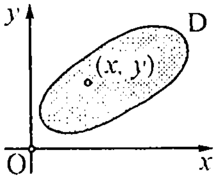
Во задачите 5–6 да се пресмета волуменот на телото ограничено со дадените површини, преминувајќи во обопштен сферен систем.

5. Елипсоидот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
6. Елипсоидот $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и рамнината $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, при x, y, z позитивни.
7. Најди пократок метод за решавање на претходните две задачи.
8. Да се определат координатните површини кај обопштениот: а) цилиндричен, б) сферен координатен систем.

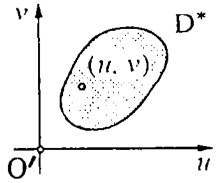
3.7. Општа смена на променливите при двојните и тројните интеграли

Овде ќе формулираме, без докази, два става што се однесуваат за општите смени на променливите при двојните и тројните интеграли, чии специјални случаи се соодветните формули изнесени во **3.3** и **3.6**.

Ќе се задржиме прво, на двојните интеграли.



Црт. 1



Црт. 2

Нека D е затворена и ограничена област во $\mathbf{R}^2$ и нека $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ се функции дефинирани за сите точки $(x, y) \in D$ (црт. 1). Ако (x, y) се менува во D, тогаш (u, v) формираат множество, коешто ќе го означуваме со D^* (црт. 2). Ќе претпоставиме дека две различни точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) од D немаат иста слика (u, v) во D^*. Во тој случај x и y можеме да ги изразиме како функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ од u и v при што сега D^* се пресликува во D. Се покажува дека:

1⁰. *Ако $u(x, y)$, $v(x, y)$ имаат непрекинати први и втори парцијални изводи во D, а $x(u, v)$, $y(u, v)$ ги имаат истите својства во D^*, и ако постои двојниот интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$, тогаш*

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{D^*} f\big(x(u, v)\; y(u, v)\big) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv\,, \tag{1}$$

каде што

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}. \tag{2}$$

(Доказ на ова тврдење може да се најде, на пример, кај Гребенча – Новоселов, том 2, стр. 441.)

Изразот (2) се вика **функционална детерминанта на Јакоби**, или **јакобијан** за пресликувањето $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Да покажеме дека формулите (2) и (6) од **3.3** се специјални случаи од (1).

1) Од $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ добиваме

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\rho & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\,,$$

па

$$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\rho)\rho\,d\rho\,d\varphi\,,$$

т.е. ја добивме формулата (2) од **3.3**.

2) Ако $x = ax^*$, $y = by^*$, тогаш $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)} = ab$, така што (1) поминува во (6) од **3.3**.

Слично својство важи и за тројните интеграли. Да претпоставиме дека $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ се функции дефинирани во затворената и ограничена област G и дека, кога (x, y, z) ја поминува целата област G, точките (u, v, w) го образуваат множеството точки G^*. Ќе претпоставиме дека различни точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) од G имаат различни слики во G^*, така што x, y и z можат да се изразат како функции $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ дефинирани во G^*.

2⁰. ***Ако $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ имаат непрекинати први и втори парцијални изводи во G, а $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ и $z(u, v, w)$ ги имаат истите својства во G^*, тогаш:***

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dx\,dx\,dz =$$

$$= \iiint\limits_G f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw\,, \tag{3}$$

каде што

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Лесно се забележува голема сличност меѓу својствата 1^0 и 2^0. Причината за тоа е што и двете својства се специјални случаи од поопштиот случај на функции од m независнопроменливи.

Вежби

1. Ако $D\colon 0 \le x \le 2,\ 1 - x \le y \le 2 - x$, во интегралот $J = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ да се изврши смената: $u = x + y,\ v = x - y$.
2. Да се пресмета двојниот интеграл $J = \iint\limits_D x^2 dx\,dy$, со помош на смената $y = ux,\ xy = v$, каде што D е фигурата ограничена со правите $y = x$, $y = 4x$ и хиперболите $xy = 2,\ xy = 5$.

Во задачите 3–4, со помош на смени слични како во 1–2, да се пресмета плоштината на фигурата определена со дадените податоци.

3. $y^2 = 2x,\ y^2 = 6x,\ x^2 = 4y,\ x^2 = 8y$.
4. $x+y = a,\ x+y = b,\ y = cx,\ y = dx$, каде што a, b, c, d се дадени константи такви што $0 < a < b,\ 0 < c < d$.
5. Секоја од задачите 2–4 да се реши:

   а) во поларен координатен систем;

   б) во декартов координатен систем, т.е. без замена.
6. Да се пресмета волуменот на телото ограничено со површините: $z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2),\ xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 2x\ (x, y > 0)$, со помош на троен интеграл и тоа на следниве три начини:

а) со смената: $y = \alpha x$, $xy = \beta$, $z = \gamma(x^2 + y^2)$, каде што α, β, γ се нови променливи; б) во цилиндричен систем; в) во декартов систем.

7. Да се покаже дека формулите за трансформација на троен интеграл во: а) цилиндричен систем, б) сферен систем, се специјални случаи од формулата (3).

3.8. Неколку примени на тројни и двојни интеграли

Во **3.1** (Т.1 и Т.1′) и **3.2** (Т.7) видовме дека двоен интеграл од ненегативна функција $f(x, y)$ над рамнинска област D е еднаков со волуменот на соодветниот дел од просторот "помеѓу областа D и површината $z = f(x, y)$". Притоа споменавме дека (ако претходно немаме изградено задоволителна теорија за волумен на тела) ова својство може да се смета и како дефиниција на **волумен**.

Донекаде е слична ситуацијата со проблемот за дефинирање на количество материјал (од соодветна природа) во просторна област G при дадена распределба на густината $\gamma(x, y, z)$, којашто е ненегативна и интеграбилна функција во G. Имено, **количеството** m **на материјалот** во областа G (најчесто: **масата** на G) се дефинира со:

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z)dx\,dy\,dz\,. \tag{1}$$

Земајќи ја формулата (1) за точна по дефиниција, нема потреба (односно *нема смисла*) да ја докажуваме. Но, со цел да ја оправдаме дадената дефиниција, ќе извршиме кратка дискусија, задржувајќи се на примерот за маса.

Имено, како што е добро познато, ако едно тело е **хомогено** (т.е. неговата густина γ е константна), тогаш **масата** на телото се пресметува по формулата

$$m = \gamma \cdot V\,,$$

каде што V е волуменот на телото. Но, ако густината $\gamma = \gamma(x, y, z)$ е неконстантна функција, тогаш "природно е" G да го разбиеме на "мали подобласти" $G_1, G_2, \dots, G_n$ со волумени V_1, $V_2, \dots, V_n$ – соодветно. Избирајќи по една точка M_k во секоја подобласт $G_k\,(k = 1, \dots, n)$, *ќе сметаме дека бараната маса* m *е приближно еднаква со*:

$$\gamma(M_1) \cdot V_1 + \cdots + \gamma(M_n) \cdot V_n\,. \tag{*}$$

Ако во (*) пуштиме n да се стреми кон $+\infty$, а притоа најголемиот од дијаметрите $\delta(G_1), \dots, \delta(G_n)$ се стреми кон нула, тогаш изразот (*) ќе се стреми кон тројниот интеграл од $\gamma(x, y, z)$ над G. Според тоа, сосема е "прифатливо" масата m на G да се дефинира со равенството (1).

З а б е л е ш к а 1. Наместо за *маса на тело*, може да станува збор за *количество: топлина, електричество, злато, ...*, а притоа во некои случаи (на пример кај електричеството) густината да прима и негативни вредности.

Тројниот интеграл доаѓа до израз и при определувањето на тежиштето од едно тело.

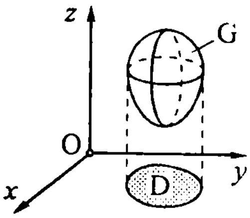
Прво, ако (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, \dots, n$, е систем од материјални точки со соодветни маси m_i, тогаш **тежиштето** $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ се определува со помош на формулите:

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad \overline{z} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \tag{2}$$

каде што $m = m_1 + \cdots + m_n$ е масата на целиот систем (в. и (1) во III.**6.3**).

Да претпоставиме сега дека се работи за тело со густина $\gamma = \gamma(x, y, z)$, распоредена во областа G (црт. 1). Тогаш **тежиштето** $T(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ на телото се дефинира со:

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \cdot S_{yz}, \quad \overline{y} = \frac{1}{m} \cdot S_{zx}, \quad \overline{z} = \frac{1}{m} \cdot S_{xy}, \tag{3}$$



Црт. 1

каде што m е масата на телото (т.е. m е определено со (1)), а S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} се дефинираат со:

$$\begin{aligned} S_{yz} &= \iiint_G x\gamma \, dx\, dy\, dz\,, \\ S_{zx} &= \iiint_G y\gamma \, dx\, dy\, dz\,, \\ S_{xy} &= \iiint_G z\gamma \, dx\, dy\, dz \end{aligned} \tag{4}$$

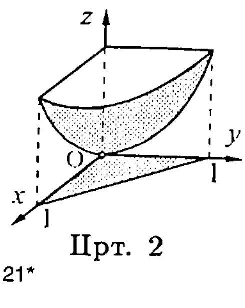
и се викаат **статични моменти** на телото во однос на рамнините Oyz, Ozx, Oxy – соодветно.

ПРИМЕР 1. Да ги најдеме координатите на тежиштето на хомогеното тело (со $\gamma = 1$), ограничено со површините (црт. 2):

$$z = x^2 + y^2\,, \quad x + y = 1\,, \quad x = 0\,, \quad z = 0\,,$$

Р е ш е н и е. Според (1) и (4), имаме

$$m = \iiint_G \gamma\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{6},$$



Црт. 2

$$S_{yz} = \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{15}\,,$$

$$S_{zx} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y\, dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{15}\,,$$

$$S_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z\, dz = \frac{7}{180}\,,$$

па според формулите (3):
$$\overline{x}=\frac{2}{5}=\overline{y}\,,\quad \overline{z}=\frac{7}{30}\,.$$

Ќе го дефинираме сега поимот инерцијален момент, при што пак ќе почнеме со материјална точка $M(x,\,y,\,z)$ со маса m.

Нека Σ, (p), N се дадени: рамнина, права, точка – соодветно, а h, r, q се соодветните растојанија од M до нив. Тогаш:

$$I_\Sigma=m\cdot h^2\,,\quad I_p=m\cdot r^2\,,\quad I_N=m\cdot q^2 \tag{5}$$

се вика **инерцијален момент** на материјалната точка M во однос на: **рамнината** Σ, **правата** (p), **точката** N – соодветно. Ако се работи за тело распоредено во областа G со густина $\gamma=\gamma(x,\,y,\,z)$, тогаш соодветните инерцијални моменти се дефинираат со:

$$I_\Sigma=\iiint\limits_G h^2\gamma\,dV\,,\quad I_p=\iiint\limits_G r^2\gamma\,dV\,,\quad I_N=\iiint\limits_G q^2\gamma\,dV\,, \tag{5'}$$

каде што ознаката dV стои наместо $dx\,dy\,dz$.

Од (5′) се добиваат следните формули за **инерцијалните моменти** на телото во однос на:

а) *координатниот почеток*:

$$I_o=\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\gamma\,dV\,, \tag{5a}$$

б) *координатните оски*: [1]

$$I_x=\iiint\limits_G (y^2+z^2)\gamma\,dV\,,\ I_y=\iiint\limits_G (z^2+x^2)\gamma\,dV\,,\ I_z=\iiint\limits_G (x^2+y^2)\gamma\,dV\,, \tag{5б}$$

в) *координатните рамнини*[1]:

$$I_{yz}=\iiint\limits_G x^2\gamma\,dV\,,\quad I_{zx}=\iiint\limits_G y^2\gamma\,dV\,,\quad I_{xy}=\iiint\limits_G z^2\gamma\,dV\,. \tag{5в}$$

Од формулите (5а)–(5в) се добиваат следниве врски:

$$\begin{aligned} &I_x=I_{zx}+I_{xy},\quad I_y=I_{xy}+I_{yz},\quad I_z=I_{yz}+I_{zx},\\ &I_0=I_x+I_y+I_z=2(I_{xy}+I_{yz}+I_{zx})\,. \end{aligned} \tag{6}$$

ПРИМЕР 2. За пирамидата формирана од координатните рамнини и рамнината $x+y+z=1$, со хомогена густина γ, да го најдеме инерцијалниот момент во однос на

а) x–оската; б) xy–рамнината.

---

[1] Индексите: x, $xy,\ldots$ укажуваат дека се работи за инерцијален момент во однос на: x–оската, xy–рамнината ...

Решение. а) Според (5б), имаме:

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2+z^2)\gamma\, dx\, dy\, dz = \gamma \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (y^2+z^2)dz =$$

$$= \gamma \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} [y^2(1-x-y) + (1/3)(1-x-y)^3]dy = \gamma/30\,;$$

б) $$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma\, dx\, dy\, dz = \gamma \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1/3)(1-x-y)^3 dy = \gamma/60.$$

(Патем да споменеме дека, според (6): $I_{zx} = I_x - I_{xy} = \gamma/60$.)

Да го разгледаме сега случајот на "рамна плоча". За таа цел ќе се вратиме на формулата (1) и ќе претпоставиме дека: G е правилна област во правец на z–оската (црт. 1), ограничена со површините $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, при што $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$ за секоја точка $(x, y) \in D$, каде што D е ортогоналната проекција на G врз xy–рамнината. Тогаш, според правилото за пресметување троен интеграл, (1) ќе го добие обликот:

$$m = \iint\limits_D \gamma^*(x, y)dx\, dy\,, \tag{7}$$

каде што

$$\gamma^*(x, y) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \gamma(x, y, z)dz\,. \tag{8}$$

Притоа можеме да сметаме дека целата маса е сместена на "плочата" D, па затоа $\gamma^*(x, y)$ се вика **густина на плочата** во точката $(x, y) \in D$; за натаму ќе пишуваме $\gamma(x, y)$ наместо $\gamma^*(x, y)$, па во таа смисла (7) можеме да ја запишеме:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)dx\, dy\,. \tag{7'}$$

Во рамнинскиот случај и моментите добиваат поедноставен облик. Имено, за **инерцијалните моменти** I_x I_y (во однос на координатните оски Ox, Oy – соодветно) и за I_0 (во однос на координатниот почеток) ќе ги добиеме следниве формули:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_D y^2\gamma\, dx\, dy\,, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma\, dx\, dy\,, \\ I_0 &= \iint\limits_D (x^2+y^2)\gamma\, dx\, dy = I_x + I_y\,, \end{aligned} \tag{9}$$

а за **статичните моменти** S_x, S_y на плочата во однос на оската Ox, Oy соодветно:

$$S_x = \iint\limits_D y\cdot\gamma(x, y)dx\, dy\,, \quad S_y = \iint\limits_D x\cdot\gamma(x, y)dx\, dy\,. \tag{10}$$

Тежиштето $T(\overline{x}, \overline{y})$ на D се определува со помош на равенствата

$$m\cdot\overline{x} = S_x\,, \quad m\cdot\overline{y} = S_y\,; \tag{11}$$

во случај кога $\gamma = 1$, масата m на "плочата" D е еднаква со плоштината P на D, па формулите (11) стануваат

$$\overline{x} = \frac{1}{P}\iint_D x\,dx\,dy, \quad \overline{y} = \frac{1}{P}\iint_D y\,dx\,dy. \tag{11'}$$

Забелешка 2. Во случај кога густината $\gamma(M) = 1$ за секоја точка $M \in G$ (односно $M \in D$, во рамнинскиот случај) се вели дека станува збор за **геометриско тежиште** на G (односно на D), за **геометриски инерцијален момент на** G (односно на D) итн.

ПРИМЕР 3. **Да ги најдеме координатите на тежиштето на фигурата** D, **ограничена со елипсата** $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$ **и правата** $(x/5) + (y/3) = 1$, **во првиот квадрант.**

Решение. За плоштината P на D (црт. 3) имаме:

$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^5 dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_0^5 (y_2 - y_1)dx = 15(\pi - 2)/4;$$

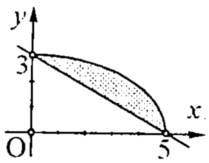
притоа: $y_1 = 3 - 3x/5$, $y_2 = (3/5)\sqrt{25 - x^2}$;

$$\overline{x} = \frac{1}{P}\iint_D x\,dx\,dy = \frac{1}{P}\int_0^5 x\,dx \int_{y_1}^{y_2} dy =$$

$$= \frac{1}{P}\int_0^5 (y_2 - y_1)dx = \frac{4}{15(\pi - 2)} \cdot \frac{25}{2} = \frac{10}{3(\pi - 2)};$$

$$\overline{y} = \frac{1}{P}\iint_D y\,dx\,dy = \frac{1}{P}\int_0^5 x\,dx \int_{y_1}^{y_2} y\,dy =$$

$$= \frac{1}{P}\cdot\frac{1}{2}\int_0^5 [y_2^2 - y_1^2]dx = \frac{4}{30(\pi - 2)} \cdot 15 = \frac{2}{\pi - 2}.$$



Црт. 3

Забелешка 3. Претпоставуваме дека на повеќето од читателите им е јасна смислата на воведените поими во механиката. Затоа овде ќе се задоволиме со забелешката дека: *инерцијалниот момент во однос на една оска, при ротација со константна брзина околу таа оска, се однесува како масата при праволиниско движење со константна брзина.*

Вежби

Во задачите 1–2 да се пресмета масата m на назначеното тело, со зададена густина γ.

1. Единична коцка во првиот октант ($x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$), $\gamma = x + y + z$.
2. Топката $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$, $\gamma(M)$ е еднаква со растојанието на M од координатниот почеток.

3. Да се пресмета масата на кружна плоча со радиус r, чијашто густина γ е пропорционална со растојанието од центарот, а на периферијата е константна, $\gamma = k$.

4. Да се пресмета статичниот момент во однос на рамнината Oxy, на заедничкиот дел од топките $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$, ако густината γ е еднаква со растојанието од рамнината Oxy.

Во задачите 5–8 да се најдат координатите на тежиштето на телото, ограничено со дадените површини. Притоа, густината во $5-7$ е $\gamma = 1$.

5. $x = 0,\ z = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ x + 2z = 3.$ **6.** $z^2 = xy,\ x = 5,\ y = 5,\ z = 0.$

7. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ 6z = 18 - x^2 - y^2,\ z = 0.$

8. Горната половинка на топката $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$, при која густината се менува пропорционално со растојанието од координатниот почеток.

9. Да се пресмета моментот на инерција на кружен цилиндар со висина h и радиус на основата a, со густина $\gamma = 1$, во однос на:

а) еден дијаметар на основата, б) оската на цилиндарот.

10. Да се најде инерцијалниот момент во однос на координатниот почеток, на телото со густина $\gamma = 1$, ограничено со површината $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

Во задачите 11–12, сметајќи дека $\gamma = 1$, да се пресметаат моментите на инерција во однос на координатните рамнини, за телото ограничено со дадените површини.

11. $z^2 = x^2 + y^2,\ \ z = h\ \ (z \geq 0).$ **12.** $z = x^2 + y^2,\ z = 2x + 2y.$

13. Да се пресметаат истите елементи како во вежбите: а) 2, б) 4, в) 8, при претпоставка дека $\gamma = 1$.

14. Сметајќи дека $\gamma = 1$, да се најдат: а) тежиштето, б) моментите на инерција во однос на координатните оски и координатниот почеток, на пирамидата, ограничена со: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ (x/a) + (y/b) + (z/c) = 1.$

15. Да се најде моментот на инерција во однос на y–оската, на рамнинската фигура (со $\gamma = 1$) ограничена со: $y = 4x - x^2,\ y = x^2.$

16. Да се пресмета инерцијалниот момент на квадрат со страна a, во однос на едно од неговите темиња, ако неговата густина γ во произволна точка M е пропорционална со: а) y, б) квадратот од растојанието на M до спомнатото теме на квадратот.

Во вежбите 17–19, да се најдат координатите на тежиштето на рамнинската фигура, ограничена со дадените линии.

17. $y^2 = ax,\ x = 0,\ y = 0\ (y > 0).$ **18.** $y^2 = 4x + 4,\ \ y^2 = -2x + 4.$

19. $\rho = a(1 + \cos\varphi).$

20. Нека Σ_1 и Σ_2 се паралелни рамнини, при што Σ_1 минува низ тежиштето T на телото сместено во областа G. Да се докаже следнава **формула на Штајнер**:

$$J_2 = J_1 + m \cdot d^2\,,$$

каде што: J_ν е моментот на инерција во однос на рамнината Σ_ν, m е масата на телото, а d е растојанието меѓу рамнините Σ_1 и Σ_2.

21. Каков облик добиваат формулите а) (3), б) (11), во случај кога $\gamma(x,\,y,\,z) = 1$ е константна функција?

VI.4. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ

Во 4.1 се разгледува проблемот за плоштина на криви површини, а во 4.2 и 4.3 – површински интеграли од прв и втор тип. Разделот 4.4 е посветен на врски меѓу интеграли од различна природа, а на крајот, во 4.5, се искажуваат некои од порано формулираните дефиниции и докажани резултати во термини на векторски полиња.

4.1. Плоштина на крива површина

Со проблемот за пресметување плоштини на криви површини досега се сретнавме на две места: во **III.4.6** – каде што е укажан начин за пресметување плоштината на ротациона површина и во **2.2** – на цилиндрична.

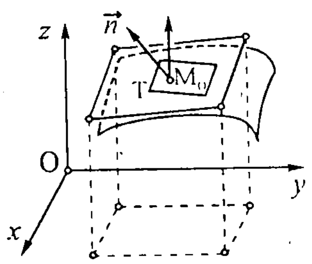
Овде ќе изведеме формула за пресметување плоштина на дел од површина, зададена со равенка $z = f(x, y)$, што се добива кога (x, y) се менува во некоја затворена и ограничена област $D \subset \mathbf{R}^2$ (в. црт. 1 и црт. 2). Притоа претпоставуваме дека

$$f(x, y), \quad f_x = p, \quad f_y = q$$

се непрекинати на D. Секако, прво треба да се договориме што ќе подразбираме под *плоштина* на споменатиот дел Σ од површината зададена со равенка $z = f(x, y)$.

Од егзистенцијата на изводите p и q, и од нивната непрекинатост следува дека во секоја точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ постои тангентна рамнина:

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0 \cdot (y - y_0), \tag{1}$$



Црт. 1

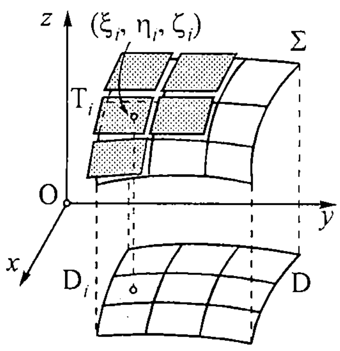
каде што $p_0 = f_x(x_0, y_0)$, $q_0 = f_y(x_0, y_0)$. Природно е да се смета дека делот од површината Σ, во близина на точката M_0, може да се замени со соодветниот дел на тангентната рамнина (1) (црт. 1). Тоа сугерира областа D да се подели на n подобласти $D_1, D_2, \ldots, D_n$, така што две по две да немаат заеднички внатрешни точки.

Ако D_i е една од тие подобласти (црт. 2), избираме точка $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ и повлекуваме тангентна рамнина во точката (ξ_i, η_i, ζ_i), каде што $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$. Да го означиме со T_i делот од тангентната рамнина што се проектира на D_i, а плоштината на T_i – со $\Delta\sigma_i$.

Да претпоставиме дека таа постапка е спроведена за секој $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогаш можеме да ја замислиме кривата површина Σ како да е прекриена со "рамнински плочки" (како на црт. 2), т.е. како да е Σ заменета со некоја "лушпеста површина". Поради тоа е природно да се земе збирот

$$\sigma_n = \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \cdots + \Delta\sigma_n$$

за "претставник на плоштината" σ од Σ. Притоа, како и при дефиницијата на риманов двоен интеграл се бара: најголемиот од дијаметрите на подобластите $D_1, D_2, \ldots, D_n$, означен со $\delta^{(n)}$, да се стреми кон нула кога $n \to +\infty$.



Црт. 2

Ако секоја можна низа σ_n (што го задоволува условот $\delta^{(n)} \to 0$, за $n \to +\infty$) е конвергентна, а границите на сите такви низи се еден ист број σ, тогаш σ ќе го викаме **плоштина на површината** σ.

Подолу ќе покажеме дека

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \cdot P_i\,, \tag{2}$$

каде што P_i е плоштината на D_i, а $p_i = f_x(\xi_i, \eta_i)$, $q_i = f_y(\xi, \eta_i)$. Според тоа,

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \cdot P_i\,. \tag{3}$$

По претпоставка, парцијалните изводи $p = z_x$ и $q = z_y$ се непрекинати во областа D, од што следува дека и функцијата $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ е непрекината на D, па според Т. 8 од **3.2** добиваме

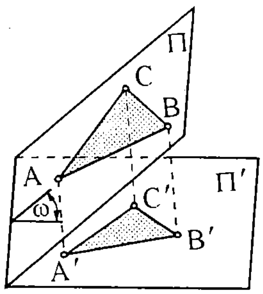
$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy\,. \tag{4}$$

За да го докажеме равенството (2), ќе го користиме следното помошно тврдење, чијшто доказ му го препуштаме на читателот (Вежба 8).

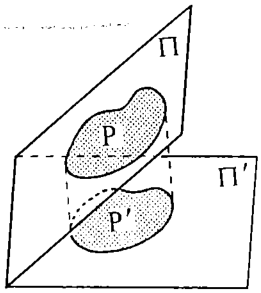
1^0 *Нека се дадени две рамнини* Π, Π', *коишто се сечат под агол* ω. *На* Π *нека се дадени три точки* A, B, C, *чии ортогонални проекции на* Π' *се* A', B', C' *соодветно* (црт. 3). *Ако* P *е плоштината на* $\triangle ABC$, *а* P' *на* $\triangle A'B'C'$, *тогаш*

$$P' = P \cos\omega\,. \quad \diamondsuit \tag{5}$$

Имајќи предвид дека плоштината на секој многуаголник може да се претстави како збир од плоштини на триаголници, добиваме дека равенството (5) е точно и во случај кога P е плоштината на еден многуаголник во Π, а P' е плоштината на неговата ортогонална проекција во Π'.



Црт. 3



Црт. 4

Потоа, да воочиме во Π произволна фигура со плоштина P и нека P' е плоштината од нејзината ортогонална проекција на Π'. Од дефиницијата за плоштина на рамнински ликови следува дека P е граница од плоштини P_n на низа многуаголници во Π, па тогаш P' ќе биде граница од низата P_n', каде што P_n' е плоштината од ортогоналната проекција во Π' на соодветниот триаголник во Π со плоштина P_n. Имајќи предвид дека, за секој n, е точно равенството $P_n' = P_n \cos\omega$, добиваме

$$P' = \lim_{n\to\infty} P_n' = \lim_{n\to\infty} P_n \cos\omega = (\cos\omega) \lim_{n\to\infty} P_n = P\cos\omega. \qquad (5')$$

Значи, равенството (5) важи и за случај на произволен ("измерлив") рамнински лик.

Ќе го докажеме сега равенството (2).

За таа цел, треба да го пресметаме $\cos\omega$, каде што ω е аголот меѓу тангентната рамнина

$$z - \zeta_i = p_i(x - \xi_i) + q_i(y - \eta_i), \qquad (6)$$

и рамнината Oxy, т.е. аголот меѓу z-оската и векторот $\mathbf{n}_i = (p_i, q_i, -1)$, нормален на тангентната рамнина (6). Според тоа,

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{p_i^2 + q_i^2 + 1}},$$

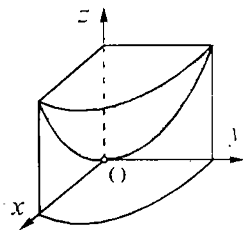
од што, поради (5'): $P' = P\cos\omega$ (за $P' = P_i$ и $P = \Delta\sigma_i$), добиваме:

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{\cos\omega}\cdot P_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}\cdot P_i. \qquad \diamond$$

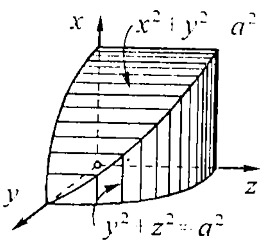
ПРИМЕР 1. Да ја пресметаме плоштината на делот од параболоидот $z = x^2 + y^2$ што го исечува цилиндарот $x^2 + y^2 = a^2$. Имаме:

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{(1+4a^2)^3}-1\right).$$

(На црт. 5 е скицирана четвртинка од површината чија плоштина е σ.)



Црт. 5



Црт. 6

ПРИМЕР 2. Нека σ е плоштината на делот од површината $x^2+y^2=a^2$, што ја отсекува цилиндарот $y^2+z^2=a^2$. (Осминка од отсечениот дел на таа површина е претставен на црт. 6 – засенчениот дел.) Да ја пресметаме σ.

Овде, површината има равенка $x=\sqrt{a^2-y^2}$ ($x \geq 0$), т.е. равенка од обликот $x=x(y,z)$, така што улогата на z во формулата (4) ја презема x. Воведуваме поларни координати во рамнината Ozy со: $z=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Притоа, доменот D на двојниот интеграл од (4), за овој случај е четвртината од кругот $z^2+y^2\leq a^2$, $x=0$, којшто се добива за $0\leq\varphi\leq\pi/2$, $0\leq\rho\leq a$. Поради: $x_z=0$, $x_y=-\frac{y}{x}$ имаме $\sqrt{1+x_z^2+x_y^2}=\frac{a}{x}$, од што следува

$$\sigma = 8\iint\limits_D \frac{a}{x}\,dz\,dy = 8a\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^a \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\varphi}} = 8a^2.$$

Забелешка. За дефинирање плоштина на крива површина можевме да помислиме на идејата со впишување на полигони во дадената површина Σ, исто како што дефиниравме плоштина на рамнински лик со впишување полигони (в. III.**4.1**). Меѓутоа, се покажува дека тој процес е неупотреблив, зашто во општ случај не води кон гранична вредност. Германскиот математичар Шварц, [1] кон крајот на минатиот век, покажал дека, дури и во таква проста површина како што е кружниот цилиндар, може да се впише полиедарска површина со произволно голема плоштина, така што таквата граница не го дава она што сме навикнати да го викаме "плоштина на цилиндар" (В. на пример, Фихтенгольц кн. III, Гл. XVII, §2, стр. 648.) Поради тоа е употребен методот, заснован на апроксимација на површината, во близина на точка, со тангентната рамнина.

Вежби

Во задачите 1–3 да се пресмета плоштината σ на назначениот дел од дадената површина.

1. Делот од цилиндарот $y^2+z^2=a^2$, отсечен со цилиндарот $x^2+y^2=a^2$.
2. Делот од сферата $x^2+y^2+z^2=a^2$, што го отсечува цилиндарот $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

---

[1] Херман Шварц (*Hermann Amandus Schwarz*, 1843–1921),

3. Делот од конусот $y^2 = x^2 + z^2$ што се наоѓа во првиот октант и е заграден од рамнината $x + z = 2$.

4. Дали може во вежбата 1 да се искористи резултатот од Пр. 2?

Во задачите 5–6, да се покаже дека дадената формула е специјален случај од формулата (4).

5. Формулата (3) од III.**4.6** за плоштина на ротациона површина:
$$\sigma = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

6. Формулата 1^0 од **2.2** за плоштина на цилиндрична површина:
$$\sigma = \int_{AB} F(x,\,y)\,ds\,.$$

7. Да се докаже теоремата 1^0.

8. Нека површината Σ е дадена со параметарски равенки
$$x = x(u,\,v), \quad y = y(u,\,v), \quad z = z(u,\,v)\,, \tag{7}$$
каде што $x(u,\,v)$, $y(u,\,v)$, $z(u,\,v)$ се диференцијабилни функции во затворената и ограничена област D. Да се покаже дека плоштината σ на делот од Σ што се добива кога $(u,\,v)$ се менува во D, се пресметува со формулата
$$\sigma = \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv\,, \tag{8}$$
каде што A, B, C се функционалните детерминанти (в. **3.7**):
$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}. \tag{9}$$

9. Нека $\mathbf{r}(u,\,v)$ е векторска функција од две променливи, определна со параметарските равенки (7), нека A, B, C се детерминантите (9), а E, F, G се коефициентите на првата основна диференцијална форма на соодветната површина (в. V.**4**):
$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v\,.$$
Да се покаже дека:

а) $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|^2$;

б) плоштината σ на Σ од вежбата 9 е:
$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,. \tag{10}$$

4.2. Површински интеграли од прв тип

Површинските интеграли од прв тип претставуваат природно обопштување на двојните интеграли, во иста смисла како што линиските интеграли од прв тип се обопштување на обичните определени интеграли.

Имено, нека е дадена површина со равенка $z = z(x,\,y)$, при што функцијата f и нејзините изводи $f_x = z_x$, $f_y = z_y$ се непрекинати во затворена и ограничена област D (т.е. површината "над" D е *мазна*; в. V.4.). Да го означиме со Σ делот од дадената површина што се добива кога $(x,\,y)$ се менува во D. Потоа, нека функцијата $P(x,\,y,\,z)$ е непрекината во една просторна област G, во која се содржи Σ. **Површински интеграл по плоштината** σ на Σ од функцијата $P(x, y, z)$ (или: **површински интеграл од прв тип**) се дефинира со равенството:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)d\sigma = \iint_{D} P\big(x, y, f(x, y)\big)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy\,. \tag{1}$$

Интегралот (1) може да се дефинира и како граница на соодветни интегрални суми, на ист начин како и секој тип двоен интеграл.

Имено, нека областа D се разбие на подобласти $D_1, \ldots, D_n$, така што најголемиот од дијаметрите $\delta(D_1), \ldots, \delta(D_n)$ да се стреми кон нула, кога $n \to \infty$. Во D_i избираме точка (ξ_i, η_i) и повлекуваме тангентна рамнина на Σ во точката (ξ_i, η_i, ζ_i), каде што $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$. Нека $\Delta\sigma_i^*$ е плоштината на делот од тангентната рамнина што се проектира (ортогонално) на D_i. Тогаш, како и во **4.1**, се покажува дека

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta\sigma_i^*\,. \tag{2}$$

Уште повеќе, ако $\Delta\sigma_i$ е плоштината на делот од Σ што се проектира на D_i, тогаш равенството (2) ќе остане во сила и во случајот кога во него $\Delta\sigma_i^*$ ќе се замени со $\Delta\sigma_i$.

Горната дефиниција е осмислена само во случај кога правите паралелни со z–оската немаат повеќе од една заедничка точка со Σ. Ако тој услов не е исполнет, и ако Σ може да се раздели на k делови $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ така што да е исполнет горниот услов во секој од тие делови, тогаш левата страна од (1) е, по дефиниција, еднаква на збирот од површинските интеграли по тие k делови, т.е.

$$\iint_{D} P\, d\sigma = \int_{\Sigma_1} P\, d\sigma = \int_{\Sigma_2} P\, d\sigma + \cdots + \int_{\Sigma_k} P\, d\sigma\,. \tag{3}$$

Забелешка. Ако Σ е мазна површина таква што правите паралелни со x–оската ја сечат најмногу во една точка, т.е. Σ е зададена со равенка $x = h(y, z)$ на затворената и ограничена област D_{yz}, која што е ортогоналната проекција на Σ врз yz–рамнината, тогаш

$$\int_{\Sigma} P(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} P\big(h(x, z), y, z\big)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dy\, dz\,. \tag{4}$$

Аналогно, кога Σ се проектира на D_{xz}:

$$\int_{\Sigma} P(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{D_{xz}} P\big(x, g(x, z), z\big)\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\, dx\, dz\,. \tag{5}$$

ПРИМЕР 1. Нека Σ е делот од рамнината $x+y+z=1$ што лежи во првиот октант (црт. 1). Да го пресметаме површинскиот интеграл $\iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma$.

Имаме: $P(x,\,y,\,z)=z$, $\Sigma\colon z=1-x-y$, $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$,

$$D=\{(x,\,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\},$$

па:

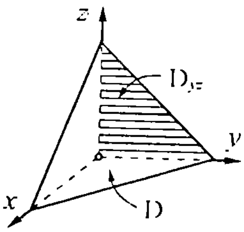
$$\iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma=\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Површината Σ, во овој случај, можеме да ја проектираме и на рамнината Oyz, при што се добива триаголникот

$$D_{yz}=\{(x,\,y)\mid 0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z\},$$

па

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma=\sqrt{3}\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{1-z} z\,dy=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Црт. 1

(Ако се извршат сите пресметувања, ќе се види дека вториот начин, во овој случај, е попрепорачлив.)

Вежби

Во задачите 1-5 да се пресмета површинскиот интеграл $J=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)d\sigma$.

1. $f=x^2y^2$; Σ: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\ge 0$. **2.** $f=x^2y^2$; Σ: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3. $f=\sqrt{x^2+y^2}$; Σ: $b^2x^2+b^2y^2=a^2z^2$, $0\le z\le b$.

4. $f=1/(1+x+z)^2$; Σ: $x+y+z=1$, за $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

5. f како во 4; Σ: површината на тетраедерот, заграден од рамнините $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

6. Нека за површината Σ важат претпоставките од вежбата 8 во **4.1** и нека $f(x,\,y,\,z)$ е непрекината во некоја област G, во која се содржи Σ. Да се покаже дека:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,\,y,\,z)d\sigma=\iint\limits_{D} f\big(x(u,\,v),\ y(u,\,v)\ z(u,\,v)\big)\cdot g(u,\,v)du\,dv, \tag{6}$$

каде што $g(u,\,v)=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, а A, B, C се како во вежбата 8 од **4.1**.

4.3. Површински интеграли од втор тип

Површинските интеграли од втор тип се дефинираат со помош на површинските интеграли од прв тип, со тоа што се избира насока на површината (слично како што се избира насока на лакот по кој се интегрира, кај линиските интеграли од втор тип).

Нека Σ е дадена двострана мазна површина што лежи во некоја просторна, затворена и ограничена област G. Нека е фиксирана едната од двете страни на Σ, т.е. нека е избрана ориентација на Σ. Тоа значи дека на секоја точка M од Σ ѝ е придружен единичен вектор $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$. Притоа, компонентите на $\mathbf{n}$ се непрекинати функции од точката M, поради претпоставката дека површината Σ е мазна.

Да ги означиме со α, β, γ аглите што ги зафаќа векторот $\mathbf{n}$ со позитивните делови на координатните оски Ox, Oy, Oz – соодветно, и да претпоставиме дека $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ се непрекинати функции во точките од површината Σ. Тогаш, површинскиот интеграл по плоштината на површината Σ

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \alpha) d\sigma \tag{1}$$

се вика **површински интеграл од втор тип** по ориентираната површина Σ.

Значи, разликата меѓу двата површински интеграли е во тоа што кај вториот тип е битна ориентацијата на Σ, т.е. насоката на $\mathbf{n}$. Навистина ако ставиме $\mathbf{n}^*(M) = \mathbf{n}(M)$, т.е. ако ја землеме спротивната насока на $\mathbf{n}$, тогаш ќе добиеме

$$\iint_{\Sigma} \big(P \cos(\pi - \alpha) + Q \cos(\pi - \beta) + R \cos(\pi - \gamma)\big) d\sigma =$$
$$= -\iint_{\Sigma} (P \cos\alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma .$$

Според тоа:

1^0. *Со промена на ориентацијата на површината Σ, површинскиот интеграл* (1) *не ја менува својата апсолутна вредност, но го менува знакот.* $\diamondsuit$

Исто така имаме:

2^0. $\iint_{\Sigma} (P \cos\alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma =$

$$= \iint_{\Sigma} P \cos \alpha \, d\sigma + \iint_{\Sigma} Q \cos \beta \, d\sigma + \iint_{\Sigma} R \cos \gamma \, d\sigma. \qquad \diamondsuit$$

Интегралот (1) се пресметува како и секој површински интеграл од прв тип. Од равенството 2^0 следува дека е доволно да се пресмета секој од собирците на десната страна, па затоа ќе видиме како се пресметуваат тие собирци. Притоа ќе се задржиме подробно на третиот собирок, а за другите два ќе се користи соодветна аналогија. Да претпоставиме дека површината Σ има равенка $z = z(x, y)$. Тогаш, според (1) од 4.2 имаме

$$\iint_{\Sigma} R \cos \gamma \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} R \cos \gamma \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \cdot dx \, dy , \tag{2}$$

каде што D_{xy} е проекцијата од Σ на рамнината Oxy, а $R = R\big(x, y, z(x, y)\big)$. Од друга страна, имајќи предвид дека $(z_x, z_y, -1)$ е векторот на нормалата во дадена точка $\big(x, y, z(x, y)\big)$, добиваме дека

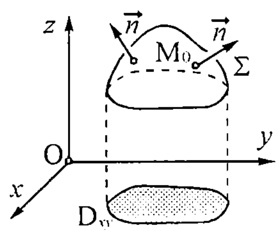
$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}. \tag{3}$$

Се разбира, за секој конкретен случај, во (3) треба да се избере само еден од броевите +1, −1. Изборот не е произволен, туку зависи од насоката на нормалниот вектор **n**. Од фактот што **n** се менува непрекинато на Σ следува дека, ако за една точка $M_0 \in \Sigma$ имаме +1, тогаш и во сите точки од Σ имаме +1. Таков е случајот претставен на црт. 1, каде што **n** е насочен нанадвор, т.е. нагоре.

Заменувајќи ја вредноста на $\cos\gamma$ од (3) во (2), добиваме:

3⁰. $\iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R\big(x, y, z(x, y)\big)dx\, dy$. **(Притоа се зема знакот "+" ако насоката на n е избрана како на црт. 1 (т.е. "нагоре"), а "−" ако за n се избере спротивната насока.)**

Значи, пресметувањето на површински интеграл од втор тип(левата страна на **3⁰**) се сведува на пресметување двоен интеграл (десната страна на **3⁰**).



Црт. 1

Ако некои прави паралелни со z–оската имаат со Σ по две или повеќе заеднички точки, тогаш Σ се дели (се разбира, ако е тоа можно), на конечно многу делови $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$, така што секој од нив да го задоволува условот за примена на формулата **3⁰** и, по дефиниција, се става:

$$\iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} R\cos\gamma\, d\sigma + \cdots + \iint\limits_{\Sigma_k} R\cos\gamma\, d\sigma. \tag{4}$$

Интегралите $\iint\limits_{\Sigma} Q\cos\beta\, d\sigma$, $\iint\limits_{\Sigma} P\cos\alpha\, d\sigma$ се пресметуваат по формули, аналогни на **3⁰**.

Интегралот $\iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma\, d\sigma$, во согласнот со **3⁰** се означува и со $\iint\limits_{\Sigma} R\, dx\, dy$, т.е.

$$\iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} R\, dx\, dy. \tag{5}$$

(Притоа: $R = R(x, y, z)$ и, всушност, $\cos\gamma\, d\sigma = dx\, dy$). Аналогно:

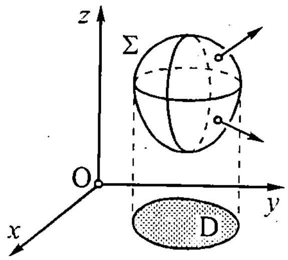
$$\iint\limits_{\Sigma} Q\cos\beta\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} Q\, dx\, dz, \quad \iint\limits_{\Sigma} P\cos\alpha\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} P\, dy\, dz. \tag{5'}$$

Според тоа, равенството 2^0 може да се претстави во обликот:

$$4^0.\ \iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+R\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma=\iint\limits_{\Sigma}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy\,.$$

Притоа, десната страна на 4^0, врз основа на 3^0, може да се разгледува како збир на соодветни двојни интеграли, при што нивните знаци (односно знаците на производите $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$) се земаат според правилото наведено по 3^0. Поради врската 4^0, површинските интеграли од втор тип се викаат **површински интеграли по координати.**

З а б е л е ш к а. Ориентацијата на една површина Σ може да биде произволна. Но, кога се работи за (едноставна) затворена површина, нормалата во една точка $M\in\Sigma$ обично е ориентирана така што насоката и́ е кон надворешната страна од Σ (црт. 2). Оваа ориентација ја викаме **стандардна ориентација** на Σ.



Црт. 2

ПРИМЕР 1. Да ги пресметаме површинските интеграли

$$J_1=\iint\limits_{\Sigma}yz\,dx\,dy,\qquad J_2=\iint\limits_{\Sigma}y^2z\,dx\,dy\,,$$

каде што Σ е сферата $x^2+y^2+z^2=1$ со стандардната ориентација.

Р е ш е н и е. Прво ја делиме Σ на два дела Σ_1, Σ_2, каде што Σ_1 е горниот дел, а Σ_2 е долниот дел. Според тоа:

$$\begin{aligned}J_1&=\iint\limits_{\Sigma_1}yz\,dx\,dy-\iint\limits_{\Sigma_2}yz\,dx\,dy=\\&=\iint\limits_{D}y\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot dx\,dy-\iint\limits_{D}y\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dx\,dy=\\&=2\iint\limits_{D}y\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot dx\,dy\,,\end{aligned}$$

каде што D е кругот $x^2+y^2\le 1$, т.е. проекцијата од Σ на рамнината Oxy. (Притоа, во вториот интеграл се појавува знакот " − " двапати, зашто нормалата на Σ_2 зафаќа тап агол со z–оската, а равенката на Σ_2 е $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.) Поминувајќи во поларни координати, добиваме:

$$J_1=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\sin\varphi\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=2\left(\int\limits_0^1\sin\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cdot d\rho\right)=0$$

(зашто интегралот во првите загради е 0). За J_2, на ист начин, добиваме:

$$J_2=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\sin^2\varphi\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=2\left(\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\right)\,;$$

интегралот во првите загради изнесува π, а за интегралот во вторите загради, со смената $1-\rho^2=t^2$, добиваме

$$\int_0^1 (t^2-t^4)dt = 2/15\,.$$

Значи,

$$J_2 = 2\cdot\pi\cdot\frac{2}{15} = 4\pi/15\,.$$

Вежби

Во задачите 1–6 да се пресмета површинскиот интеграл

$$J=\iint_{\Sigma_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy;$$

притоа, површината Σ, кога е затворена, има стандардна ориентација.

1. $P=x,\ Q=y,\ R=z;\ \Sigma\colon x^2+y^2+z^2=1.$
2. $P=x,\ Q=y,\ R=z;\ \Sigma\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$
3. $P=x^2,\ Q=y^2,\ R=z^2;\ \Sigma\colon x^2+y^2+z^2=1.$
4. $P,\ Q,\ R$ се како во задачата 3, а Σ е горниот дел од сферата $x^2+y^2+z^2=1.$
5. $P=2x+y+z,\ Q=x-2y+z,\ R=x-z;\ \Sigma$ е:

   а) површината на делот од цилиндарот $x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1$ (без основите);

   б) цилиндарот од а) заедно со основите.
6. $P=x^3,\ Q=y^3,\ R=z^3;\ \Sigma\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$
7. Нека стандардно ориенираната затворена површина Σ е таква што областа ограничена со неа е правилна (во правец на трите оски). Да се покаже дека:

   $$\iint_\Sigma x\,dy\,dz = \iint_\Sigma y\,dz\,dx = \iint_\Sigma z\,dx\,dy = V,$$

   каде што V е волуменот на телото ограничено со Σ.
8. Што може да се рече за случајот кога во условот од претходната вежба зборот "правилна" се замени со "правилна во правец на z–оската"?
9. Да се покаже дека двојните интеграли се специјални површински интеграли од втор тип.

4.4. Формули на: Гаус-Остроградски, Грин и Стокс

Во овој дел ќе докажеме три формули за соодветни врски меѓу различни видови интеграли. Првата од нив е искажана со следнава

Теорема 1 (на Гаус–Остроградски[1]).

Нека G е тридимензионална едноставна област со контура Σ, со стандардна ориентација. Ако $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, P_x, Q_y, R_z се непрекинати функции на G, тогаш е точно равенството:

$$\iiint_G (P_x + Q_y + R_z)dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{1}$$

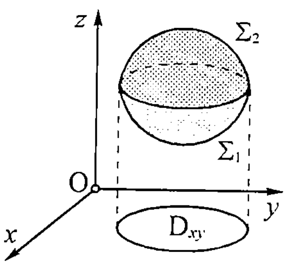
(*познато како* **формула на Гаус–Остроградски**).

Доказ. Ќе го разгледаме само случајот кога областа G е правилна (црт. 1). Нека Σ е поделена на горен дел Σ_2 со равенка $z = z_2(x,y)$ и долен дел Σ_1 со равенка $z = z_1(x,y)$. Ако D_{xy} е проекцијата од G на рамнината Oxy, тогаш, според правилото за пресметување тројни интеграли, имаме:

$$\iiint_G R_z\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1}^{z_2} R_z\,dz\right] dx\,dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} R\big(x,y,z_2(x,y)\big)dx\,dy - \iint_{D_{xy}} R\big(x,y,z_1(x,y)\big)dx\,dy \tag{1_z}$$

$$= \iint_{\Sigma_2} R(x,y,z)dx\,dy - \iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)dx\,dy = \iint_\Sigma R(x,y,z)dx\,dy\,.$$



Црт. 1

Слично се покажува дека

$$\iiint_G Q_y\,dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma Q(x,y,z)dz\,dx\,, \tag{1_y}$$

$$\iiint_G P_x\,dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma P(x,y,z)dz\,dx\,. \tag{1_x}$$

Со собирање на (1_x), (1_y) и ($1z$) се добива (1). ◇

Ако се има предвид формулата 4^0 од **4.3**, тогаш на формулата (1) може да и се даде и следниов вид:

$$\iiint_G (P_x + Q_y + R_z)dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma\,, \tag{1*}$$

каде што α, β, γ се аглите меѓу ортот на нормалниот вектор на Σ и координатните оски.

Формулата (1) често се користи за пресметување површински интеграли. Тоа ќе го илустрираме со два примера.

ПРИМЕР 1. Нека Σ е сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ со стандардна ориентација (т.е. нормалата е ориентирана нанадвор), а G е соодветната топка. Со помош на (1) добиваме:

[1] Карл Гаус (*Carl Friedrich Gauss*, 1777–1855). Михаил Остроградски (*Михаил Василевич Остроградский, 1801–1862).*

а) $\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iiint\limits_{G} 3\,dx\,dy\,dz = 4a^3\pi;$

б) $\iint\limits_{\Sigma} xy\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + yz\,dx\,dy = \iiint\limits_{G} (y + 2y + y)dx\,dy\,dz$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} \rho^3 \sin\varphi \sin^2\theta\,d\rho = 0.$$

Врска меѓу двоен интеграл по дадена област и линиски интеграл по контурата на таа област дава следнава

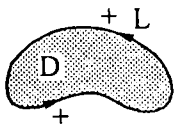
Теорема 2 (Грин[2]).

Ако функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$, P_y и Q_x се непрекинати на затворената и ограничена едноставна област D со контура L, тогаш е точно следново равенство

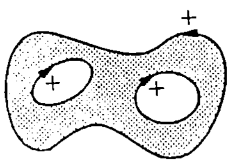
$$\iint\limits_{D} (Q_x - P_y)dx\,dy = \oint_{L} P\,dx + Q\,dy, \tag{2}$$

познато под името **формула на Грин.**

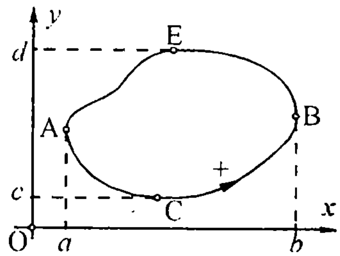
(Притоа, на L е избрана **стандардна насока**, а тоа значи: кога набљудувачот се движи по контурата L, областа D постојано да се наоѓа од неговата лева страна (било да се работи за контура на едноставна област како на црт. 2, било за контура на сложена област како на црт. 3. За оваа насока на L се вели дека е и **позитивна насока.**)



Црт. 2



Црт. 3



Црт. 4

Доказ. Да претпоставиме дека областа D е правилна (во правец на двете оски). Нека A, B, C, E се точки од L, такви што: A има најмала, а B – најголема можна апсциса, C има најмала, а E – најголема можна ордината, како на црт. 4. (Да нагласиме дека фактот што областа D на црт. 4 е сместена во првиот квадрант не е битен.)

Нека лаците ACB, AEB имаат равенки: $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ соодветно. Во иста смисла, равенките на лаците CAE, CBE нека се: $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ (црт. 4). Ако точките A и B имаат координати $(a, y_1(a))$ и $(b, y_1(b))$ соодветно, тогаш имаме:

[2] Џорџ Грин (*George Green*, 1793–1841), англиски физичар.

$$\iint_D P_y\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P_y\,dy = \int_a^b \big[P\big(x,\,y_2(x)\big) - P\big(x,\,y_1(x)\big)\big]dx$$

$$= -\int_b^a P\big(x,\,y_2(x)\big)dx - \int_a^b P\big(x,\,y_1(x)\big)dx \qquad (2_x)$$

$$= -\int_{BEA} P(x,\,y)dx - \int_{ACB} P(x,\,y)dx = -\oint_L P\,dx\,.$$

На сосема ист начин се добива дека:

$$\iint_D Q_x\,dx\,dy = \oint_L Q\,dy\,. \qquad (2_y)$$

Со одземање на (2_x) од (2_y) ќе се добие **(2).** ◊

ПРИМЕР 2. **Да го пресметаме линискиот интеграл**

$$J = \oint_L (x^2 + y^2 - y)dx + 2xy\,dy\,,$$

каде што L е елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, со позитивна насока.

Ако D е областа ограничена со L, тогаш според (2) добиваме:

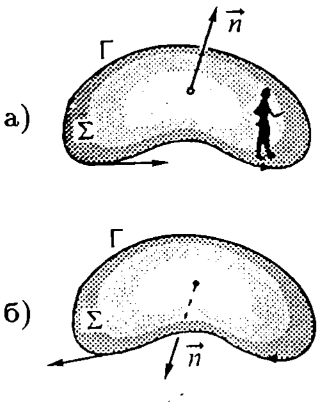
$$J = \iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy = \iint_D dx\,dy = ab\pi$$

(притоа го искористивме фактот дека плоштината на D е $ab\pi$).

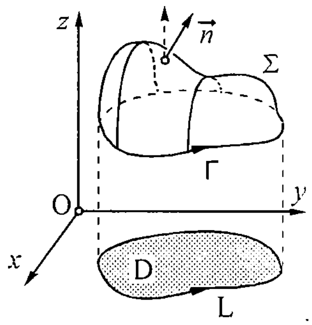
Ќе формулираме подолу едно обопштување на Гриновата теорема, со кое се дава врска меѓу интеграл по површина Σ и линиски интеграл по контурата Γ на таа површина. Претходно ќе биде потребно да воведеме поим за "согласност на ориентациите" на Σ и Γ.

За таа цел, нека Σ е незатворена мазна двострана површина, ограничена со едноставна затворена контура Γ. Да избереме определена страна Σ, т.е. определена насока на ортот на нормалата. Ќе сметаме дека насоката на контурата Γ **е согласна** со насоката на површината Σ, ако набљудувачот, наоѓајќи се во положба таква што насоката "од нозете кон главата" се совпаѓа со насоката на ортот $\mathbf{n}$ на нормалата Σ, се движи по контурата Γ, тогаш точките од Σ се наоѓаат од неговата лева страна (црт. 5).

Ако, покрај горните претпоставки, површината Σ е зададена со равенка $z = f(x,\,y)$, т.е. правите паралелни со z–оската ја прободуваат најмногу во една точка, како на црт. 6, тогаш ортогоналната проекција од нејзината контура Γ врз рамнината Oxy е контурата L на областа D во која се проектира Σ. Во тој случај, **позитивна насока** на Γ се задава во согласност со позитивната насока на L во рамнината Oxy, како што е прикажано на црт. 6.



Црт. 5



Црт. 6

Ќе ја формулираме сега следнава

Теорема 3 (на Стокс[3]).

Нека Σ е едноставна, мазна, ориентирана површина во просторот и нека нејзината контура е мазна едноставна затворена крива Γ, чија ориентација е согласна со ориентацијата на Σ. Потоа, нека $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ се непрекинати функции што имаат непрекинати први парцијални изводи во една просторна област G во чија внатрешност се содржи Σ. Тогаш точно е следново равенство (познато како **формула на Стокс***):*

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \\ &= \iint_\Sigma [(R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma)d\sigma,\end{aligned} \tag{3}$$

каде што α, β, γ се аглите што ги зафаќа ортот **n** *на нормалата, во произволна точка од Σ, со позитивните делови на координатните оски Ox, Oy, Oz соодветно.*

Доказ. Ќе се ограничиме на случајот опишан пред формулацијата на теоремата, а илустриран со црт. 6, и покрај тоа што формулата (3) важи и во поопшти случаи.

[3] Џорџ Стокс (*Sir George Gabriel Stokes*, 1819–1903), ирски математичар и физичар.

Нека D е проекцијата од Σ на рамнината Oxy. Тогаш, контурата L на D е проекција од Γ. Ако равенката на површината Σ е $z(x, y)$ и ако ставиме $P^*(x, y) = P\big(x, y, z(x, y)\big)$, ќе добиеме:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx = \int\limits_{L} P\big(x, y, z(x, y)\big)dx = \int\limits_{L} P^*(x, y)dx. \tag{4}$$

Ставајќи во Гриновата формула $Q = 0$ и $P = P^*$, добиваме

$$\int\limits_{L} P^*(x, y)dx = -\iint\limits_{D} P^*_y \, dx\, dy. \tag{5}$$

Според правилото за извод на сложена функција, имаме

$$P^*_y = P_y\big(x, y, z(x, y)\big) + P_z\big(x, y, z(x, y)\big) \cdot z_y,$$

па (5) го добвива обликот

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx = -\iint\limits_{D} \big[P_y\big(x,y,z(x,y)\big) + P_z\big(x,y,z(x,y)\big)z_y\big]\, dx\, dy. \tag{6}$$

Векторот $(z_x, z_y, -1)$ е паралелен со $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, па

$$\frac{z_y}{\cos\beta} = -\frac{1}{\cos\gamma}, \quad \text{т.е.} \quad z_y = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Имајќи предвид дека (во случаи како на црт. 6) важи равенството

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

од (6) добиваме

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} P\, dx &= -\iint\limits_{D} (P_y \cos\gamma - P_z \cos\beta)\frac{1}{\cos\gamma}\, dx\, dy = \\ &= -\iint\limits_{D} \big[P_y\big(x,y,z(x,y)\big)\cos\gamma - P_z\big(x,y,z(x,y)\big)\cos\beta\big)\frac{dxdy}{\cos\gamma} = \\ &= \iint\limits_{\Sigma} (P_z \cos\beta - P_y \cos\gamma)d\sigma.\end{aligned} \tag{3_x}$$

На сличен начин се добиваат и равенствата

$$\int\limits_{\Gamma} Q\, dy = \iint\limits_{\Sigma} (Q_x \cos\gamma - Q_z \cos\alpha)d\sigma, \tag{3_y}$$

$$\int\limits_{\Gamma} R\, dz = \iint\limits_{\Sigma} (R_y \cos\alpha - R_x \cos\beta)d\sigma. \tag{3_z}$$

Ако ги собереме равенствата (3_x), (3_y) и (3_z), ќе го добиеме равенството (3), т.е. формулата на Стокс. $\diamondsuit$

Имајќи го предвид равенството 4^0 од **4.3**, формулата на Стокс можеме да ја претставиме и во следниов облик:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \\ &= \iint\limits_{\Sigma} (R_y - Q_z)dy\, dz + (P_z - R_x)dz\, dx + (Q_x - P_y)dx\, dy.\end{aligned} \tag{3*}$$

Како што споменавме, Т. 3 е едно обопштување на Гриновата теорема, т.е. Гриновата формула (2) е специјален случај од Стоксовата формула (3).

Навистина ако D, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ ги задоволуваат условите од Т. 2, тогаш, ставајќи

$$\overline{P}(x, y, z) = P(x, y), \quad \overline{Q}(x, y, z) = Q(x, y), \quad \overline{R}(x, y, z) = 0 .$$

ќе добиеме дека функциите $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ ги задоволуваат условите од Т. 3, при што Σ е делот од рамнината $z = 0$ што се совпаѓа со D, а Γ е контурата L на D. Тогаш $dz = 0$, па

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \oint_L \overline{P}\,dx + \overline{Q}\,dy + \overline{R}\,dz =$$
$$= \iint_\Sigma (0-\overline{Q}_z)dy\,dz + (\overline{P}_z - 0)dz\,dx + (\overline{Q}_x - \overline{P}_y)dx\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)dx\,dy,$$

т.е ја добиваме формулата на Грин.

Забелешка 1. Доказите на Т. 1 и Т. 2 не се потполни, бидејќи се работи со специјални (правилни) области. Некои можности за докомплетирање на овие докази се укажуваат во вежбите 11–13. За Т. 3, в. Рождественский Гл. XII, §8.

Забелешка 2. Како последица од Гриновата формула се добива дека, при претпоставката дека се исполенти условите на Т. 2, *линиски интеграл по затворена крива во D е нула акко во D е точно равенството*

$$P_y = Q_x ,$$

т.е. резултатите од **2.4**.

Како последица пак од Стоксовата формула се добиваат и соодветни резултати за независноста од патот на интеграцијата кај линиски интеграли по просторни криви. Имено:

Теорема 4 (Последици од Стоксовата формула).

Ако P, Q, R и нивните парцијални изводи се непрекинати во просторната едноставна област G, тогаш следниве четири тврдења се еквивалентни:

(i) $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ *за секоја затворена крива L што се наоѓа во G.*

(ii) $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *не зависи од кривата што ги сврзува точките A и B во G, туку само од точките A и B.*

(iii) *Постои функција $u(x, y, z)$, таква што*

$$u_x = P, \quad u_y = Q, \quad u_z = R$$

за секоја точка (x, y, z) од G. (Една таква функција е

$$F(x,\, y,\, z) = \int\limits_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,,$$

каде што $(a,\, b,\, c)$ *е фиксна точка од* G.)

(iv) *Во сите точки од обласпа* G *точни се равенствата*

$$R_y = Q_z, \quad R_z = R_x, \quad Q_x = P_y\,. \quad \diamondsuit$$

Вежби

Во задачите 1–2 да се провери формулата на Гаус–Остроградски.

1. $P = x,\ Q = y,\ R = z^2;\ G\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1.$

2. $P = 2xy + z,\ Q = y^2,\ R = x + 3y;$ G е областа ограничена со: $2x + 2y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Во задачите 3–4 да се провери формулата на Грин.

3. $P = x^2 + y^2 - y,\ \ Q = 2xy$ (Пр. 2); $D\colon\ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ x^2 + y^2 \le 1.$

4. $P = y,\ Q = -x;\ D\colon b^2x^2 + a^2 + y^2 \le a^2b^2.$

Во задачите 5–6 да се провери формулата на Стокс.

5. $P = x^2y^2,\ Q = 1,\ R = z,$ L е кружницата $x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0;$ $\Sigma\colon x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0.$

6. $P{=}2y,\ Q{=}3x,\ R{=}-z^2;\ \Sigma\colon x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \ge 0,$ а L е контурата на Σ.

Во задачите 7–8 да се пресмета $\oint P\,dx + Q\,dy$ со помош на Гриновата формула.

7. $P = x^2 + y^2 - y,\ \ Q = 2xy$ (Пр. 2); $L\colon 2x^2 + 3y^2 = 6.$

8. $P = x + y,\ Q = 2x - y;\ L\colon x^2 + y^2 = 1.$

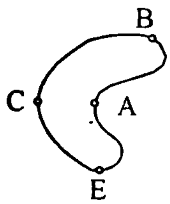
Во задачите 9–10 да се пресмета $\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ со помош на формулата на Гаус–Остроградски.

9. $P = yz,\ Q = xz,\ R = xy;$ Σ е контурата на која било правилна тридимензионална ограничена и затворена област.

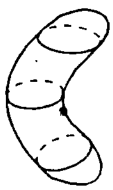
10. $P = x^2,\ Q = y^2,\ R = z^2;\ \Sigma\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

11. Да се докаже формулата на Грин за случај кога областа D има облик како на црт. 7.

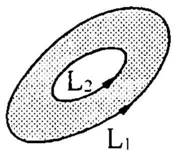
12. Да се докаже формулата на Гаус–Остроградски за случај кога областа G има облик како на црт. 8.



Црт. 7



Црт. 8



Црт. 9

13. За функциите P и Q нека се исполнети условите од теоремата на Грин во областа D (црт. 9), што се наоѓа меѓу двете криви L_1 и L_2, вклучувајќи ги и самите криви. Да се докаже равенството:

$$\iint\limits_D (Q_x - P_y)dx\,dy = \oint_{L_1} P\,dx + Q\,dy - \oint_{L_2} P\,dx + Q\,dy\,,$$

каде што L_1 е ориентирана позитивно, а L_2 – негативно (како на црт. 9).

14. Да се најде функција $u(x,\,y,\,z)$, за која:

а) $du = \frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$; б) $du = \frac{z^2-y}{x^2}\,dx + \frac{dy}{x} - \frac{2z}{x}\,dz$.

4.5. Векторска интерпретација на површинските и линиските интеграли

И кај линиските и кај површинските интеграли од втор тип имаме работа со три функции $P(x,\,y,\,z)$, $Q(x,\,y,\,z)$ и $R(x,\,y,\,z)$ од три променливи. Тие определуваат едно векторско поле (в. V.4):

$$\mathbf{F} = \big(P(x,\,y,\,z),\; Q(x,\,y,\,z),\; R(x,\,y,\,z)\big)\,.$$

Површинскиот интеграл по дадена ориентирана површина Σ може да се изрази и во следниов облик:

$$\iint\limits_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = \iint\limits_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma\,, \tag{1}$$

каде што $\mathbf{n} = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma)$ е ортот на нормалата на површината Σ. Според тоа, интегралот (1) зависи од Σ и од полето $\mathbf{F}$. За да се истакне тоа, се вели дека (1) е **флукс** (т.е. **поток**) на векторското поле $\mathbf{F}$ низ површината Σ. (Името "флукс" е позајмено од хидромеханиката, бидејќи *интегралот* (1) *може да се интерпретира како количество течност што минува низ* Σ *за единица време*, при што $\mathbf{F}$ е брзината на движењето на течноста.)

Во иста смисла, линискиот интеграл

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{2}$$

се вика **циркулација** на полето $\mathbf{F}$ низ кривата L; притоа $d\mathbf{r} = (dx,\, dy,\, dz)$.

Ако $\overrightarrow{\tau} = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma)$ е ортот на тангентата од L, тогаш според $\mathbf{9^0}$ од **2.5** е точно равенството:

$$\int\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_L \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{\tau}\cdot ds = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds\,. \tag{2'}$$

Подолу ќе формулираме неколку резултати веќе порано докажани, но сега со помош на термините флукс, циркулација, ротација и дивергенција на векторско поле $\mathbf{F}$ (в. и V.4), при што ќе ги подразбираме условите што треба да ги задоволуваат функциите P, Q, R, т.е. полето $\mathbf{F}$.

1^0 (Теорема на Стокс).

Флуксот од ротацијата на едно векторско поле **F** *низ дадена површина* Σ *е еднаков со циркулацијата на полето низ контурата* Γ *на површината, т.е.*

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathrm{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad \diamond \tag{3}$$

2^0 (Последица од **1^0**, Т. 4 од **2.5** и Т. **3** од V.**4.6**).

За едно векторско поле **F** *следниве услови се еквивалентни:*

(i) *Полето* **F** *е потенцијално.*

(ii) *Циркулацијата на полето* **F** *низ секоја едноставна затворена крива е нула.*

(iii) *За кои било точки* A, B *и која било крива* L *што ги сврзува точките* A, B *со насока од* A *кон* B, *циркулацијата на полето е еднаква со* $u(B) - u(A)$, *каде што* $u(x, y, z)$ *е потенцијал на полето* **F**.

(iv) *Ротацијата на полето* **F** *е нула. (се вели и дека полето е* **без вртежи.**) $\diamond$

Формулата на Гаус–Остроградски, со помош на споменатите термини и ознаки за поле, може да се запише во обликот:

$$\iiint\limits_{G} \mathrm{div}\, \mathbf{F}\, dv = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \tag{4}$$

(Овој резултат е познат и под името **теорема за дивергенција.**)

3^0 (Последица од теоремата на Гаус–Остроградски).

Флуксот на едно соленоидално поле **F** *низ затворена површина* Σ *е нула, т.е.*

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0. \tag{5}$$

(Важи и обратното.)

Ќе го завршиме овој дел со уште една последица на теоремата на Гаус–Остроградски. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е една фиксна точка во отворената област G во која се претпоставуваат соодветните услови формулирани во теоремата на Гаус-Остроградски. Потоа, нека $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ е низа затворени површини што ги задоволуваат следниве услови:

а) $\Sigma_k \subset G$, за секој k;

б) $\lim_{k\to\infty} \delta(\Sigma_k) = 0$, каде што $\delta(\Sigma_k)$ е дијаметарот на Σ_k.

Нека G_k е областа ограничена со Σ_k и нека V_k е волуменот на G_k. Ако ја примениме теоремата на Гаус–Остроградски, а потоа теоремата за средна вредност при тројни интеграли, добиваме

$$\iint\limits_{\Sigma_k} F \cdot \mathrm{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{G_k} \mathrm{div}\, F \cdot dx\, dy\, dz = (\mathrm{div}\, F)_{M_k} \cdot V_k\,,$$

за некоја точка $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in G_k$. Имајќи предвид дека растојанието $d_k = d(M_k, M_0) \to 0$ за $k \to \infty$, добиваме дека $\lim M_k = M_0$ за $k \to +\infty$. Од сето тоа следува дека:

$$(\operatorname{div} F)_{M_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{\int\limits_{\Sigma_k} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma}{V_k},$$

а ова равенство може (работејќи послободно) да се формулира на следниов начин:

4^0. $\operatorname{div} F(x_0, y_0, z_0) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$,

каде што V е волуменот на телото обвиено со површината Σ и лимесот е добиен со стегање на Σ кон точката M_0 (т.е. $V \to 0$).

Вежби

Во задачите 1–4 да се пресмета флуксот на векторското поле $\mathbf{F}$ низ дадената површина Σ.

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; Σ е контурата: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.
2. $\mathbf{F} = (z^2 - x, -xy, 3z)$; $\Sigma: z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$.
3. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; Σ е надворешната страна на параболоидот $y = x^2 + z^2$ што лежи во првиот октант и е ограничен со рамнината $y = 1$.
4. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, во првиот октант.

Во задачите 5–6 да се пресмета циркулацијата на полето $\mathbf{F}$ низ дадената крива L, со стандардна ориентација.

5. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; $L: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$.
6. $\mathbf{F} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $L: x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.
7. а) Да се покаже дека е потенцијално полето $\mathbf{F} = (2xz^3 + 6y,\ 6x - 2yz,\ 3x^2z^2 - y^2)$.

   б) Да се пресмета циркулацијата на полето $\mathbf{F}$ низ која било крива $\widehat{AB}$, каде што $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$.
8. Да се даде физичко толкување на резултатите добиени во 5–7.

VI.5. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Дадени се интегралите: $I(x)=\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy$, $\quad J(x)=\int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dy$.
Да се покаже дека, при $x>0$, $\quad I'(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$, $\quad J'(x)=2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$,
а) со помош на Т. 3 од **1.1**; б) со непосредно интегрирање и потоа барање извод.

2. Користејќи го равенството $\int\limits_0^a \frac{dx}{1+yx}=\frac{1}{y}\ln(1+ay)$, со помош на диференцирање по параметарот y, да се покаже дека
$$\int\limits_0^a \frac{x\,dx}{(1+xy)^2}=\frac{1}{y^2}\ln(1+ay)-\frac{a}{y(1+ay)}\,.$$

Да се диференцира функцијата $F(y)$ (во 3–4).

3. $F(y)=\int\limits_0^y \frac{1}{x}\cdot\ln(1+xy)dx\,.$ $\quad$ 4. $F(y)=\int\limits_y^{y^2}\exp(-yx^2)dx\,.$ $\quad[\exp(t)=e^t]$

Да се пресмета дадениот интеграл со помош на диференцирање на парамертар (5–6).

5. $\int\limits_0^\pi \frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}dx\ (y^2<1)$. $\quad$ 6. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}dx$.

Во задачите 7–12 да се провери дали дадениот израз е тотален диференцијал од некоја функција $u(x,\,y)$ или $u(x,\,y,\,z)$. Во потврден случај, да се најде таква функција.

7. $x(2x^2+y^2)dx+y(x^2+2y^2)dy$. $\quad$ 8. $(x+e^{-y})dx+(y-e^{-y})dy$.

9. $yx^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy$. $\quad$ 10. $(x^2+\sin y)dx+(1+x\cos y)dy$.

11. $2xy\,dx+(x^2+e^z)dy+ye^z dz$. $\quad$ 12. $2x\,dx+\frac{dy}{y+z}+\frac{dz}{y+z}$.

Да се реши диференцијалната равенка (13–14):

13. $3x^2e^y\,dx+(x^3e^y-1)dy=0,\ y(0)=1$. $\quad$ 14. $\frac{2x}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\cdot y'=0\,,\ y(1)=1$.

Да се интегрира дадената диференцијална равенка, откако ќе се провери дека има интегрален множител λ што зависи само од x или само од y.

15. $(x^2\cos x-y)dx+x\,dy=0,\quad \lambda=\lambda(x)$.

16. $y\sqrt{1-x^2}\,dx+\left(x\sqrt{1-y^2}+y\right)dy=0,\ \lambda=\lambda(y)$.

Да се реши диференцијалната равенка 17–20.

17. $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x},\ y(0)=0$. $\quad$ 18. $xy'+y-e^x=0$.

19. $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1}$. $\quad$ 20. $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}-\frac{1}{2x}$.

21. Да се реши диференцијалната равенка $(1-x^2)y'+xy=ax$. Да се покаже дека интегралните криви се елипси и хиперболи со центри во точката $(0,\,a)$ и оски паралелни со координатните оски.

22. Да се провери дека со равенките $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ за $t \in [0, 2\pi]$ е определена крива L без повторување. Потоа да се пресмета $\int\limits_L y^2\, ds$, од точката $A(0, 0)$ до точката $B(2\pi, 0)$.

23. Да се пресмета $\int\limits_L x\, ds$ ако: а) L е отсечката AB, $A(0, 0)$ и $B(2, 1)$; б) L е кривата $y = x^2/4$ од $A(2, 1)$ до $B(4, 4)$.

Во задачите 24–28 да се пресмета линискиот интеграл од прв тип $\int\limits_L f\, ds$, при дадена функција f и дадена крива L.

24. $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$; $L\colon 9y^2 = 4x^3$ од $\left(3, 2\sqrt{3}\right)$ до $\left(8, \frac{32}{3}\sqrt{2}\right)$.

25. $f(x, y) = x + y$; $L\colon \rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$.

26. $f(x, y, z) = \sqrt{2y^2 + z^2}$; $L\colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$.

27. $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$; $L\colon x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$, $t \in [0, 2\pi]$.

28. $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$; $L\colon x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

Во задачите 29–40 да се пресмета линискиот интеграл од втор тип, $\int\limits_L P\, dx + Q\, dy$ или $\int\limits_L P\, dx + Q\, dy + R\, dz$, за дадена линија L и дадени подинтегрални функции P, Q или P, Q, R. (Ако не е наведено поинаку, да се зема "стандардната позитивна насока".)

29. $P = xy - y^2$, $Q = x$; $L : AB$, од $A(0, 0)$ кон $B(1, 2)$, по линијата: а) $y = 2x$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2\sqrt{x}$; г) искршената линија AMB, каде што $M(1/2, 3)$.

30. $P = xy - x$, $Q = x^2/2$; по истите линии од задачата **29**. Да се образложи добиениот резултат.

31. $P = x^2 - y^2$, $Q = x^2 + y^2$; $L\colon b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

32. $P = x^2y$, $Q = x^3$; L: затворениот дел од кривите $y = x^2$, $x = y^2$.

33. $P = x$, $Q = xy$; $L\colon x^2 + y^2 = 2x$ – горната полукружница (во позитивна насока).

34. $P = y$, $Q = -x^2 - y$; L е лакот на параболата $y = 2x - x^2$ над x–оската, во негативна насока.

35. $P = y$, $Q = 2x$; L: контурата на ромбот чии страни лежат на правите $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1$ (во позитивна насока).

36. $P = -xy^2$, $Q = x^2y$; $L\colon x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$, $0 \le t \le \pi/2$.

37. $P = x + y$, $Q = x - y$; L: лакот на кружницата што почнува во точката $A(-1, 1)$, минува низ координатниот почеток и завршува во точката $B(1, 1)$, од A кон B.

38. Нека $L\colon x \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $0 \le \theta \le 4\pi$; $K\colon x = \cos t^2$, $y = \sin t^2$, $0 \le t \le 2\sqrt{\pi}$. Да се покаже дека за $P = x^3y$, $Q = y^2x$, важи:

$$I = \int\limits_L P\, dx + Q\, dy = \int\limits_K P\, dx + Q\, dy = J\,.$$

Да се даде објаснение за ова равенство.

39. $P = y$, $Q = -x$, $R = -z^2$; $L\colon x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t^2$, $0 \le t \le 1$.

40. $P = xy,\ Q = x^2 z,\ R = xyz;\ x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t^2,\ 0 \le t \le 1.$

41. а) Да се покаже дека $\int\limits_{AB} 2xy\,dx + (x^2 + 2yz)dy + (y^2 + 1)dz$ не зависи од лакот што ги сврзува точките $A(0, 0, 0)$ и $B(1, 1, 1)$. б) Да се најде функција $u(x, y, z)$ чиј тотален диференцијал е подинтегралниот израз. в) Да се пресмета интегралот под а).

42. Да се пресмета $\int\limits_{AB} 2xyz^3 dx + (x^2 z^3 + 2y)dy + 3x^2 yz^2\,dz$, каде што AB е отсечката со крајни точки $A(1, 2, 3)$ и $B(3, 2, 1)$. Каков резултат ќе се добие ако AB е лак од прозволна крива?

Во задачите 43–46 се зададени функција f и (рамнинско множество D. Да се скицира D и да се пресмета двојниот интеграл $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$.

43. $f = \sin y$; D е ограничена со: $2y = x,\ y = 2x,\ x = \pi$; да се интегрира: а) прво по y, а потоа по x; б) прво по x, а потоа по y.

44. $f = \sqrt{xy}$; $D\colon x \ge 0,\ y \ge x^2,\ y < 2 - x^2$; да се интегрира како во а) и б) од задачата 43.

45. $f = Ax^3 + Bx^2 y + Cy^3$ (A, B, C - константи); D е кружен прстен образуван од кружниците со радиуси r_1 и r_2, а центри – во координатниот почеток.

46. $f = x^n y^m$ ($m, n \in \mathbb{N}$); D е ограничена со $y = x^2,\ y^2 = x$.

Во задачите 47–49 да се пресмета двојниот интеграл користејќи поларни координати.

47. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,\ D\colon x^2 + y^2 \ge \pi^2/9,\ x^2 + y^2 \le \pi^2.$

48. $\iint\limits_D \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx\,dy,\ D\colon x^2 + y^2 \le R^2$. Да се даде геометриско толкување на добиениот резултат.

49. $\iint\limits_D \rho^2 \cos\varphi\,d\varphi\,d\rho,\ D : 0 \le \varphi \le \pi/2,\ 1 \le \rho \le 1 + \sin\varphi.$

Во задачите 50–55 се бара волуменот V на просторната фигура G (т.е. на телото) ограничена со зададените површини. Пред тоа, да се направи (груба) скица на фигурата G.

50. G е ограничена со: $x^2 + y^2 = 4x,\ z = x,\ z = 2x.$

51. $G\colon z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z \ge 3.$

52. G е ограничена со цилиндрите $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + z^2 = a^2$.

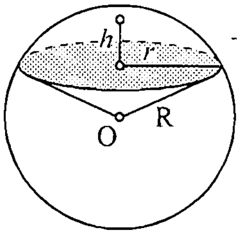
53. $G\colon z = 3 - x^2 - 2y^2,\ x^2 + y^2 \le 1,\ z \ge 0.$

54. G е областа меѓу сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ и параболоидот $x^2 + y^2 = z$ (што не го содржи центарот на сферата).

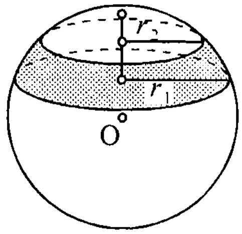
55. G е ограничена со: $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

56. Со помош на двоен интеграл, да се изведат познатите формули од стереометријата за волумен на: а) прав кружен конус со висина H и радиус на основата R: $V = \pi H R^2/3$; б) топка со радиус R: $V = 4\pi R^3/3$; в) топкин отсечок (црт. 1) со висина h: $V_0 = \pi h^2(3R - h)/3 = \pi h(3r^2 + h^2)$, каде што r е радиусот на основниот круг на отсечокот;

г) топкин исечок (црт. 1) чиј соодветен отсечок има висина h: $V_u = 2\pi h R^2/3$; д) топкин слој со дебелина $v(= h_1 - v_2)$ и со радиуси r_1, r_2 на основните кругови на соодветните отсечоци (црт. 2):
$V_c = \pi v(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2)$.



Црт. 1



Црт. 2

57. Да се изведат формулите за волумен од претходната задача (56) со помош на определен интеграл, т.е. со функцијата $V = \pi \int_a^b y^2\, dx$.

58. Да се пресмета волуменот на елипсоид со полуоски a, b, c.

Со помош на двоен интеграл да се најде плоштината на рамнинскиот лик D, ограничен со дадените линии (59–61).

59. Лемнискатата $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

60. D е ограничена со: $x^2+y^2 = 2ax$, $y^2 = 2ax$ и $x = 2a$, во првиот квадрант.

61. $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = x^2 y$. **62.** Да се пресмета несвојствениот двоен интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 - y^2)\cdot\cos(x^2 + y^2)dx\,dy\,.$$

63. Да се испита природата на несвојствениот двоен интеграл

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}\,, \quad D: |\, y\,| \le x^2\,, \quad x^2 + y^2 \le 1\,.$$

Во задачите 64–67 е зададена функција $f(x, y, z)$ и просторна област G. Да се направи груба скица на G и да се пресмета тројниот интеграл

$$\iiint_G f(x, y, z)dx\,dy\,dz\,.$$

64. $f = x^2 + y^2 + z^2$; G е ограничена со: $x + y + z = a$ $(a > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

65. $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; G е ограничена со $z = 3$ и $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

66. $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$; G е ограничена со: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, каде што $a > b > 0$.

67. $f = [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2 - (z/c)^2]^{1/2}$; G е ограничена со елипсоидот $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.

Во задачите 68–69, со помош на троен интеграл, да се пресмета волуменот на областа G, ограничена со дадените површини.

68. G е ограничена со: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x^2 + y^2$.

69. G е делот од сферата $\rho = 2a\cos\theta$ "над" конусот $\theta = \alpha$, каде што $0 < \alpha < \pi/2$ (т.е. делот во кој се наоѓа центарот на сферата). Да се дискутира случајот $\alpha = \pi/2$.

Во задачите 70–71, со помош на двоен интеграл, да се пресмета плоштината на рамнинскиот лик D, ограничен со дадените линии.

70. D е ограничен со параболата $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a}-\frac{y}{b}$ $(a, b > 0)$ и оската Ox.

71. D: $xy = 4,\ xy = 8,\ xy^3 = 5,\ xy^3 = 15$ (во првиот квадрант).

72. Нека $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Да се најде јакобијанот $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (како функција од u и v).

73. Да се најде волуменот на телото ограничено со површините:
$z = x^2 + y^2,\ x^2 - y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9,\ xy = 2,\ xy = 4,\ z = 0.$

74. Да се пресмета волуменот V на телото добиено со ротација на областа од првиот квадрант, ограничена со параболите $y^2 = x,\ y^2 = 8x,\ x^2 = y,\ x^2 = 8y$, околу x–оската.

75. Да се најде волуменот на телото, ограничено со хиперболичните цилиндрични површини: $xy = 1,\ xy = 9,\ xz = 4,\ xz = 36,\ yz = 25,\ yz = 49$, во првиот октант.

Во задачите 76–81 да се најде плоштината σ на назначениот дел Σ од дадената површина.

76. Делот од конусот $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, зафатен со цилиндарот $x^2 + y^2 = 2x$.

77. Делот од параболоидот $2az = x^2 + y^2$ одрежан со цилиндарот $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

78. Делот од сферата $x^2+y^2+z^2 = a^2$, зафатена во цилиндарот $x^2+y^2 = ay$.

79. Делот од параболоидот $x = 1 - y^2 - z^2$, одрежан со цилиндарот $y^2 + z^2 = 1$.

80. Делот од цилиндричната површина $y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$, изрежан од цилиндричната површина $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

81. Делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, зафатен меѓу рамнините $z = a$ и $z = b$, каде што $0 < a < b < R$ (сферен појас).

82. Со помош на двоен интеграл (како во задачата 56), да се изведат познатите формули од стереометрија за пресметување плоштина на: а) бочната површина на прав кружен конус со висина H и радиус R на основата: $M = \pi R\sqrt{R^2 + H^2} = \pi Rs$; б) површината на сфера со радиус R: $P = 4\pi R^2$; в) површината на калота со висина h, при сфера со радиус R (в. црт. 1, кај зад. 56): $P = 2\pi Rh$; г) површината на сферен појас (в. црт. 2 кај зад. 56), со висина v при сфера со радиус R: $P = 2\pi Rv$.

83. Да се изведат истите формули од зад. 82 со помош на определен интеграл, т.е. со формулата $P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$.

Во задачите 84–87, да се пресмета плоштината на рамнинската фигура, ограничена со дадената крива L, со помош на линиски интеграл (т.е. со помош на формулите: $P = \oint_L x\,dy = -\oint_L y\,dx = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx$)).

84. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$ (астроида).

85. $y^2 = x^2 - x^4$. **86.** $9y^2 = 4x^3 - x^4$.

87. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, лемниската. Помош. Стави $y = x\operatorname{tg}\varphi$.

Во задачите 88–89 да се пресмета површинскиот интеграл од прв тип: $\iint\limits_{\Sigma} u(x,\, y,\, z)d\sigma$.

88. $\Sigma\colon z = 2 - x^2 - y^2$, над xy–рамнината; а) $u = 1$; б) $u = x^2 + y^2$; в) $u = 3z$.

89. $\Sigma\colon z^2 = 3(x^2 + y^2)$, меѓу $z = 0$ и $z = 3$; $u = x^2 + y^2$.

Во задачите 90–91 да се пресмета дадениот површински интеграл од втор тип.

90. $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\,dx\,dy$, Σ е горната страна од горната половина на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

91. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$, Σ е надворешната страна на елипсоидот $(x/a^2) + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.

92. Со помош на теоремата на Гаус–Остроградски да се пресмета

$$\iint\limits_{\Sigma} (2x + 3z)dy\,dz - (xz + y)dz\,dx + (y^2 + 2z)dx\,dy\,,$$

каде што Σ е сферата со центар во точката $(3,\, -1,\, 2)$ и радиус 3.

93. Да се пресмета $\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\cdot d\sigma$, каде што $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, а Σ е (која било) затворена површина.

Во задачите 94–96, да се пресмета потокот (т.е. флуксот) на векторското поле $\mathbf{F}$ низ дадената површина Σ.

94. $\mathbf{F} = (xy,\, -x^2,\, x+z)$; Σ: делот од рамнината $2x+2y+z = 6$ во I октант, а нормалниот вектор е насочен нагоре (т.е. зафаќа остар агол со оската Oz).

95. $\mathbf{F} = (xy,\, yz,\, zx)$; Σ е затворената површина $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ во I октант (нормалниот вектор е насочен нанадвор).

96*. $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$, низ:
а) бочната површина на конусот $x^2 + y^2 = R^2z^2/H^2$, $0 \le z \le H$;
б) низ целата (затворена) површина на конусот од а).

97. Со помош на Стоксовата формула да се пресмета $\iint\limits_{\Sigma} (\overrightarrow{\nabla} \times \mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$, каде што $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$, а Σ е површината на делот од конусот над xy–рамнината.

Во задачите 98–100 да се пресмета циркулацијата на даденото векторско поле $\mathbf{F}$ по назначената контура Γ, а) непосредно; б) по формулата на Стокс.

98. $\mathbf{F} = (x,\, xz,\, z)$; Γ е пресекот на површината $z^2 = 4 - x - y$ со координатните рамнини.

99. $\mathbf{F} = (3y,\, -xz,\, yz^2)$; Γ е кружницата $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

100*. $\mathbf{F} = (xz,\, -yz^2,\, xy)$; Γ е затворената линија $z = x^2 - y^2 + 2a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

IV.1. Вектори и нивни координати

IV.1.1.

2. а) и в) Не. б) и г) Да. **4.** Важи, само ако A, B, C, D не лежат на иста права.

IV.1.2.

1. $\mathbf{c} = \mathbf{m} + \mathbf{p}$. Помош. Ненулти вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, надоврзани еден на друг, формираат триаголник ако и само ако $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}= 0$.

2. $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DA} = -\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. **3.** $\mathbf{o}$. **4.** $\mathbf{o}$

5. а) Иста насока со $\mathbf{a}$ и $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. б) При $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ има иста насока со $\mathbf{a}$ и $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

6. а) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни и имаат иста насока. б) и в) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни, со спротивни насоки. г) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се меѓусебно нормални.

7. Помош. Нека $ABCD$ е паралелограм и $S = AC \cap BD$. За да се докаже дека S е средина на AC и BD, доволно е да се докаже дека $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \mathbf{o} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$. За обратното, доволно е да се докаже дека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

IV.1.3.

1. $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c})$, $\overrightarrow{CC_1} = -\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

2. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{o}$. Помош. Да се искористи вежбата 1.

3. $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\mathbf{b}$.

4. $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$; $\overrightarrow{DC} = \frac{a-b}{a}\cdot\mathbf{a}$; $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \frac{a-b}{a}\mathbf{a}$; $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b} - \frac{b}{a}\mathbf{a}$.

5. $3\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$. **6.** $\mathbf{x} = -\mathbf{a}$.

7. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\overrightarrow{DA}$.

9. Ако $\lambda \neq 0$, тогаш $\mathbf{a} = \frac{\mu}{\lambda}\mathbf{b}$, а ако $\mu \neq 0$, тогаш $\mathbf{b} = \frac{\lambda}{\mu}\mathbf{a}$. Ако $\lambda = \mu = 0$, тогаш $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се произволни.

IV.1.4.

1. а) $x = 2$, $y = 3$. б) $x = \frac{1}{3}$, $y = 1$. **2.** 1:3. **3.** 3:2

4. а) и в) Зависни. б) Независни.

5. а) Да. б) Независни. Решение. а) Елиминирајќи ги $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, добиваме $2\mathbf{x} + \mathbf{y} - 2\mathbf{z} = \mathbf{o}$. Значи, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ се линеарно зависни.

IV.1.5.

4. а) $\mathbf{a} = (-2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 1, -3)$. б) $(-6, 7, -6)$. в) $(-2, 0, 5)$.
5. а) Да. б) Не.
6. Да. Помош. Да се покаже дека $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, се компланарни.
7. $x = -3$, $y = -9$. **8.** Да. Помош. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **9.** $(0, 2, 1)$
10. а) $(5, 5, 3)$. б) $(8, 2, -3)$. в) $\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 4\right)$.
12. 8. **13.** а) $A(0, -3)$, $B(-4, 5)$, $C(8, 1)$. б) 40.
14. Има три решенија: $(-3, 2)$; $(3, -6)$; $(7, 8)$.

IV.2. Детерминанти од втор и трет ред

IV.2.1.

1. а) 13. б) 11,01. в) 1.
2. а) -10. б) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$. в) $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
4. а) $x = 4$, $y = -1$. б) Нема решение. в) Има безброј многу решенија: $x = 3 + 2t$, $y = t$ $(t \in \mathbf{R})$. **5.** За $\alpha \neq 3$, системот е противречен; за $\alpha = 3$, тој има безброј многу решенија: $x = 2t + 1$, $y = t$ $(t \in \mathbf{R})$.
6. За $\alpha \neq -9$: $x = \frac{3+5\alpha}{9+\alpha}$, $y = \frac{-14}{9+\alpha}$; за $\alpha = -9$: правите се паралелни.
7. а) $x = -\frac{13t+2}{3}$, $y = -6t - 1$, $z = t$, $t \in \mathbf{R}$. б) $(23t, 6t, 39t)$, $t \in \mathbf{R}$.
8. Да. **9.** Да. **10.** Не. **11.** Да. **12.** Да, $a = -1$.

IV.2.2.

1. -20. **2.** 20. **3.** $\cos(\alpha + \beta)$. **4.** -37. **5.** $abc + a^3 + b^3 + c^3$.
6. $2(1 - a^2)$. **7.** 12. **8.** 0. **9.** 1 и 2. **10.** 1 (двоен); -2.
11. -25. **12.** 27. **13.** 4. **14.** Првата и третата редица се еднакви.
15. Првата и третата колона се пропорционални. **16.** Според својството 5 и последицата 1, ако третата колона ѝ се додаде на втората.
17. a^2. (На пример: третата колона, помножена со -1, да се додаде на првата и на втората колона.)
18. $2(a^3 + b^3)$. Помош. II и III колона да се додадат на првата и да се извлече пред детерминантата множителот $2(a + b)$. Потоа, во новодобиената детерминанта, од II и III редица да се одземе I редица и детерминантата да се развие по I колона.
19. 0. Помош. Да се помножи I колона прво со $-\cos\alpha$ и да се додаде на II колона, а потоа со $-\cos\beta$ и да се додаде на III колона; развивањето по првата редица лесно ќе доведе до резултатот.
20. $(a - b)(b - c)(c - a)$. **21.** Решение. Точноста на тврдењето следува од принципот за компланарност, зашто според тој принцип: $D = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се компланарни $\Leftrightarrow x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{o}$, за некои броеви x, y, z од кои барем еден не е нула.
24. а) 5. б) 336.

IV.2.3.

1. (1, 1, 1). **2.** (1, 3, 5) . **3.** (1, 2, 3) . **4.** (3, −2, −4)

5. Системот е противречен; $D = 0$, $D_x = -20 (\neq 0)$. **6.** (2, −1, 3)

7. Системот има бескрајно многу решенија: $x = 2z - 1$, $y = z + 1$, z, за произволни вредности на z. Решение. $D = D_x = D_y = D_z = 0$ – детерминантата од втор ред составена од коефициентите пред x и y во првите две равенки е $\delta = -3 \neq 0$, па сметајќи го z за познато, од системот $x + 2y = 1 + 4z$, $2x + y = 5z - 1$ го определуваме $x = 2z - 1$ и $y = z + 1$; така, за произволно z тројката $(x = 2z - 1,\ y = z + 1, z)$ ги задоволува првите две равенки од дадениот систем од трите линеарни равенки. Со проверка се уверуваме дека оваа тројка ја задоволува и третата равенка од системот.

8. Системот е противречен; $D = D_x = D_y = D_z = 0$.

9. Системот е противречен. **10.** $(-1,\ t,\ 2 - t)$, $t \in \mathbf{R}$.

11. За $a \neq 1, -2$ системот има единствено решение: $x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$. За $a = 1$ системот има безброј многу решенија. За $a = -2$ системот е противречен. Помош. $D = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$, $D_x = -a^3 + a^2 + a - 1 = -(a-1)^2 \cdot (a+1)$, $D_y = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$, $D_z = a^4 - 2a^2 + 1 = (a-1)^2(a+1)^2$.

12. $(t,\ t,\ -t)$, $t \in \mathbf{R}$, за $a \neq b$; $\left(u,\ v, -\frac{u+v}{2}\right)$, $u,\ v \in \mathbf{R}$, за $a = b$.

13. (0, 0, 0); $D = 18 \neq 0$. **14.** $(2t,\ -3t,\ 5t)$, $t \in \mathbf{R}$.

15. Помош. Ако трите прави се сечат во една точка $(x_0,\ y_0)$, тогаш нејзините координати ги задоволуваат равенките на трите прави: $a_i x_0 + b_i y_0 + c_i = 0$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Тие равенства покажуваат дека хомогениот систем $a_i x + b_i y + c_i z = 0\,(i = 1,\ 2,\ 3)$ има ненулто решение: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 1$. Следствено, детерминантата на тој систем е нула.

16. Решение. а) $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$, $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{c} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{d} = (-2, -1, 3)$. Имаме: $\mathbf{a}$ е компланарен со $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (зашто: $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$), но $\mathbf{d}$ не е компланарен со $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Следствено, системот нема решение.

    б) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = (1, 2, 3)$, но $\mathbf{d}$ не е колинеарен со $\mathbf{a}$, па системот е противречен.

    в) $\mathbf{a} = (1, -1, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 5)$, $\mathbf{d} = (1, 2, 7)$, $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$, па значи $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се компланарни; но, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ не се компланарни, па системот нема решение.

17. Решение. Ако ставиме $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$ и ако парот x_0, y_0 е решение на системот (11), тогаш $\mathbf{c} = x_0\mathbf{a} + y_0\mathbf{b}$, од што следува дека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се компланарни. Според принципот за компланарност се добива (12). Одговорот на поставеното прашање е негативен. На пример, системот $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x + y = 1$ нема решение и покрај тоа што (12) важи.

18. $\mathbf{x} = (-1,\ 2)$, $\mathbf{y} = (1,\ -1)$.

IV.3. Скаларен, векторски и мешан производ

IV.3.1.

1. Равенствата а), в), д), ѓ) и е) се точни за кои било вектори **a** и **b**, а равенствата б) и г) се точни само ако **a** и **b** се колинеарни.

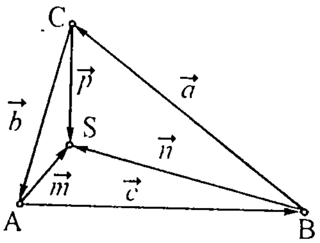
2. Равенството д) геометриски означува дека сумата од квадратите над дијагоналите е еднаква со удвоената сума од квадратите над страните, а ѓ) означува дека скаларниот производ на векторите, поставени на дијагоналите, е еднаков со разликата од квадратите на страните OA и OB. е) Разликата од квадратите над дијагоналите е еднаква со четирикратниот скаларен производ на векторите, положени на страните.

3. а) 4. б) 3. в) $\cos\varphi = 2\sqrt{2}/9$. **4.** а) $\pi/3$. б) $\alpha = \arccos\sqrt{2}/4$.

5. $\cos\varphi = -4/5$. Решение. Да ставиме $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{u}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \mathbf{v}$. Тогаш $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}}{2}$, $\mathbf{uv} = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = -a^2$ (бидејќи $b = a$), $uv = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{5a^2}{4}$, па $\cos\varphi = \frac{|\mathbf{uv}|}{uv} = -\frac{4}{5}$.

6. Решение. Од $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$, имаме: $\mathbf{c} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $c^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{ab} = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - \gamma)$, т.е. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

7. Решение. Нека **a**, **b**, **c** се векторите положени на страните од $\triangle ABC$, а **m** и **n** векторите што се положени на висините од темињата A и B до пресекот S (црт. 1). Тогаш $-\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{n} - \mathbf{m}$, $\mathbf{am} = 0$, $\mathbf{bn} = 0$. Да ставиме $\overrightarrow{CS} = \mathbf{p}$. Имаме $\mathbf{n} - \mathbf{p} = \mathbf{a}$, $\mathbf{p} - \mathbf{m} = \mathbf{b}$, па множејќи го првото равенство со **m**, а второто со **n**, добиваме $\mathbf{mn} - \mathbf{mp} = 0$, $\mathbf{np} - \mathbf{nm} = 0$, а откога ги собереме: $(\mathbf{m} - \mathbf{n})\mathbf{p} = 0$. Оттука: $\mathbf{cp} = (\mathbf{m} - \mathbf{n})\mathbf{p} = 0$, т.е. **p** и **c** се заемно нормални, што значи **p** е положен на висината спуштена од C и таа минува низ S.



Црт. 1

8. а) 15 и 7. б) $\cos\varphi = 1/7$. **9.** а) $4\sqrt{2}$. б) -32. в) 0. г) 0.

IV.3.2.

1. б) $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$; $\overline{BC} = \sqrt{29}$; $\overline{CA} = \sqrt{11}$. в) 0. г) 90^0.

2. $\mathbf{x}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ (две решенија). Помош. Ако $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, тогаш: $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $\mathbf{ax} = 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, $\mathbf{xk} = x_3 = 0$ (три равенки со три непознати).

3. $\mathbf{a} = (\pm 6, 2, -3)$. **4.** $\mathbf{b}_1^0 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$, $\mathbf{b}_2^0 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$ (две решенија).

5. $\mathbf{a}_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ (две решенија).

6. 3. Помош. $\mathbf{b} = (4, 2, -4)$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 18$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|\ \mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$. **7.** (7, 5, 1).

10. Помош. $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathbf{b} = (\cos\beta, \sin\beta)$; $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha - \beta$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

IV.3.3.

1. а) $30\sqrt{3}$. б) $15\sqrt{\frac{3}{19}}$.

2. $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2 = a^2b^2(1-\cos^2\alpha) = (ab\sin\alpha)^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2$.

3. $\lambda = -\frac{2}{3}$. Помош. $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = (3\lambda+2)(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

4. Решение. Точноста се покажува со помош на $\mathbf{6}^0$. Имајќи го предвид својството $\mathbf{1}^0$, заклучуваме дека плоштината на паралелограмот, чии (соседни) страни се дијагоналите на паралелограмот $ABCD$, е двапати поголема од плоштината на $ABCD$.

5. Решение. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се единични вектори што лежат во рамнината Oxy и со оската Ox зафаќаат агли α и β соодветно. Тогаш имаме: $\mathbf{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, $\mathbf{b} = (\cos\beta, \sin\beta, 0)$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (0, 0, \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)$. Бидејќи плоштината P на паралелограмот, конструиран над $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, е: $P = ab\,|\sin(\alpha-\beta)| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, добиваме
$$|\sin(\alpha-\beta)| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta|,$$
од каде што со понатамошна дискусија добиваме
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

6. а) $(4, 2, -3)$. б) $(0, 0, 0)$. в) $\sqrt{29}$. г) $\sqrt{29/6}$.

7. $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -1)$.

8. а) $(-58, -20, 1)$. б) $(-7, -29, -21)$. в) -80.

9. Ако $\mathbf{ab}\neq 0$, постои еден таков вектор $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{ab}}(\mathbf{xb}+\mathbf{a}\times\mathbf{c})$. Ако $\mathbf{ab} = 0$ и $\alpha\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$, постојат безброј многу такви вектори $\mathbf{x}$, а ако $\mathbf{ab} = 0$ и $\alpha\mathbf{b}\neq\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, таков вектор $\mathbf{x}$ не постои.
Помош. Да се помножи векторски со $\mathbf{a}$ (оддесно) втората равенка $\mathbf{x}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}$ – ќе се добие равенството $\mathbf{b}(\mathbf{xa}) - \mathbf{x}(\mathbf{ba}) = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$, па користејќи го првото равенство $\mathbf{xa} = \alpha$, ќе се добие: $\alpha\mathbf{b} - \mathbf{x}(\mathbf{ab}) = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

10. Сите за собирањето и дистрибутивните закони. Не важат: комутативниот и асоцијативниот закон за множењето; не постои неутрален елемент за множењето.

13. Помош. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. **14.** Помош. $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}$.

15. Помош. $(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}$.

16. Помош. $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

IV.3.4.

1. 14. **2.** а) Да. б) Не.

3. Да. Помош. Да се покаже дека $(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}) = 0$. **4.** 135.

5. $V = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = 12{,}5$. **6.** $V = 14$; $H = \sqrt{14}$. Помош. $V = \frac{1}{6}(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = 14$; $H = \frac{6V}{P}$, каде што P е плоштината на $\triangle ABC$; $P^2 = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|^2 = b^2c^2 - (\mathbf{bc})^2 = 520 - 16 = 504$, па $P = 6\sqrt{14}$.

7. $\frac{40}{\sqrt{194}}$. Помош. $H = \frac{V}{P}$, $P = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{194}$, $V = |(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})| = 40$.

8. $V=23$, $H=\frac{46}{\sqrt{29}}$. Помош. $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}=(-3,\,4,\,0)$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}=(-3,\,0,\,6)$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AD}=(-1,3,9)$; $V=\frac{1}{6}\,|(\mathbf{abc})|=\frac{1}{6}\cdot 138$; $H=\frac{6V}{P}$, $P=\frac{1}{2}\,|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=3\sqrt{29}$.

9. а) 42. б) $\frac{21}{2}$. в) 4. г) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{13}}$, $\cos\gamma=\frac{5}{2\sqrt{13}}$.

11. $\mathbf{d}=(\mathbf{di})\mathbf{i}+(\mathbf{dj})\mathbf{j}+(\mathbf{dk})\mathbf{k}$, т.е. мешаните производи се проекциите на векторот $\mathbf{d}$ врз координатните оски.

12. Помош. а) Со 2^0. б) $\lambda(\mathbf{a\,b\,c})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\big((\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}\big)\cdot\mathbf{c}$.
в) $\big((\mathbf{a}+\mathbf{x})\mathbf{bc}\big)=(\mathbf{a\,b\,c})+(\mathbf{x\,b\,c})$.

IV.4. Равенки на рамнина и права

IV.4.1.

1. Рамнини чии равенки се: а) $x=2$, б) $x+2y=0$, в) $x-y+2z=1$.

2. $3x-y+2z-5=0$; P и Q – не, R – да.

3. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$. **4.** $x+y+z=3$.

5. а) $x-3=0$. б) $3x-2y=0$. в) $y+5=0$.

6. 1, $-\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$ на Ox, Oy, Oz соодветно.

7. $x+5y-2z+6=0$; C му припаѓа, а D – не. Помош. Од $\overline{AM}=\overline{BM}$ се добива $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(x-1)^2+(y+4)^2+(z-1)^2$, а по средувањето – бараната равенка.

9. $4x+4y+z-2=0$.

IV.4.2.

1. $x+7y+2z-21=0$.

2. а) Да; $5x-7y+11z+4=0$. б) Да; $x+5y-4z+1=0$. в) Не.

3. а) $x=1+2u-3v$, $y=2+v$, $z=3-u-2v$. б) $(x+7y+2z-21)/3\sqrt{6}=0$.

4. а) 3. б) 0. в) 5/4. **5.** 4. **6.** $M_1(0,\,0,\,5)$ и $M_2(0,\,0,\,9)$ (две решенија).

IV.4.3.

1. $\pi/2$. **2.** $\pi/3$. **3.** $\cos\alpha=\frac{8}{21}$.

4. $x+y-z+6=0$. **5.** $x+y-2z=0$. **6.** $x+2y-z=3$.

7. $x\pm y\sqrt{26}+3z=3$. Помош. $Ax+By+C(z-1)=0$, $3A-C=0$, $C=3A$, па $Ax+By+3A(z-1)=0$; не може $A=0$, па $x+by+3(z-1)=0$; итн.

8. $(-3,\,2,\,0)$. **9.** Имаат бесконечно множество заеднички точки; рамнините минуваат низ една права.

10. Рамнините немаат заедничка точка.

IV.4.4.

1. $S(3,\,-1,\,2)$; а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-1}$. б) $x=1+2t$, $y=2-3t$, $z=3-t$.

2. в) $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$. б) $2x-y=0$, $3x-2z=0$. **3.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-5}$.

4. Прави чии равенки се: а) $x=4$, $y=1$, $z=t$; б) $x=2$, $y=t$, $z=-3t-5$.

IV.4.5.

1. $\frac{\pi}{4}$. **2.** $\frac{\pi}{4}$. **3.** $\cos\alpha = 3/7\sqrt{2}$. **4.** $\frac{\pi}{2}$. **5.** $\frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$.

6. $M(5,\ 5,\ 5)$. **7.** $\left(T \pm \sqrt{2},\ 1,\ 1\right)$.

8. Лежат во рамнината $x + 2y - 5z = 0$; пресек: $S(-1,\ 3,\ 1)$.

9. Лежат во $2x - 6y + 3z + 14 = 0$; пресек $\left(3,\ \frac{7}{2},\ \frac{1}{3}\right)$.

10. Се разминуваат. **11.** Паралелни, во $4x - 5y + 7z = 51$.

12. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$. Помош. Да се постави рамнина низ M, нормална на дадената права (p) – ќе се добие $2x - y + 3z - 4 = 0$, а потоа да се најде нејзиниот пробод со (p) – тоа е точката $N(-1,\ 0,\ 2)$; на крајот да се напишат равенките на правата (n) што минува низ M со правец $\overrightarrow{MN} = (3,\ 3,\ -1)$. **13.** $2x - 4 = -3y - 3 = 3z$.

IV.4.6.

1. 60^0. **2.** $x - 2y - 2z + 2 = 0$. **3.** а) $(2,\ -2,\ 5)$. б) $(8,\ 3,\ 2)$.

4. а) $(0,\ 1,\ 7)$. б) $(-1,\ 7,\ -2)$. **5.** $S(-4,\ 0,\ -7)$. **6.** $T(3,\ 4,\ -1)$.

7. Правата $x - y + 3z + 8 = 0$, $x - 2y - z + 7 = 0$.

8. а) $7x + 8y - 7z = 0$. б) $2x + 7y - 13z = 11$. в) $x + 2y - 3z = 2$. г) $2x + y + z = -3$.

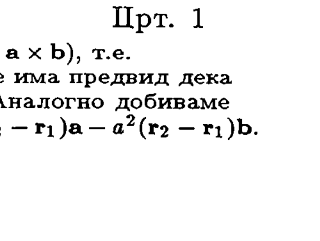
IV.4.7.

1. 6. **2.** $\frac{1}{8}$. Помош. Рамнините се паралелни; должината од работ на коцката е еднаква со растојанието меѓу тие рамнини.

3. 2. **4.** а) $\sqrt{5}$. б) $\sqrt{\frac{27}{14}}$. **5.** $\frac{1}{3}\sqrt{153}$. **6.** $\frac{45}{\sqrt{59}}$. **7.** $\frac{8}{13}$.

8. 0 (правите се сечат). **9.** 3. **10.** $\sqrt{\frac{15}{11}}$; (p): $x = 1+9t$, $y = 1+2t$, $z = 1-5t$.

11. Решение. Низ правата (p) ја поставуваме рамнината Σ_1: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$, а низ правата (q) – рамнината Σ_2: $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$. (Притоа, со $(\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z})$ е означен мешаниот производ на векторите $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}$). Пресекот на рамнините Σ_1 и Σ_2 е заедничката нормала (n) на правите (p) и (q) (црт. 1). Точката M^* лежи на рамнината Σ_2, па:
$(\mathbf{r}_1 + \lambda_0\,\mathbf{a} - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$, т.е.
$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \lambda_0(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$.



Црт. 1

Поради $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = c^2$, имаме $c^2\lambda_0 = -(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b})$, т.е. $c^2\lambda_0 = (\mathbf{ab})(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{b} - \mathbf{b}^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{a}$ (ако се има предвид дека $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)[\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$). Аналогно добиваме $c^2\mu_0 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{a},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b})$, т.е. $c^2\mu_0 = (\mathbf{ab})(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{a} - a^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{b}$.

12. $\mathbf{r}^* = \frac{1}{35}(127,\ 73,\ -16)$, $\mathbf{r}^{**} = \frac{1}{5}(13,\ 19,\ -9)$.

IV.5. Површини

IV.5.1.

1. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$.
2. а) $C(-1,\,3,\,2)$, $R=1$. б) $(3/4,\,0,\,0)$, $R=5/4$.
3. $x^2+y^2+z^2-2z=0$. **4.** а) $x-y=0$. б) $x+y=0$.
8. $x^2+y^2-(x^2-y^2)z=0$. Делот од површината меѓу $z=-1$ и $z=1$ е отсечката на z–оската што се наоѓа меѓу точките $(0,\,0,\,-1)$ и $(0,\,0,\,1)$.
9. Една од можностите: $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$, $z=u+v+\frac{u}{v}$. Помош. Да се стави: $x+y=u$, $x-y=v$.
10. а) Празно множество. б) Точката $(1,\,1,\,1)$. в) Множеството од сите точки $M(x,\,y,\,z)$, за кои $z\geq 0$. (Според тоа, во ниеден од трите случаи, со дадената равенка, не е определена површина.)

IV.5.2.

1. а) Кружницата $(x-2)^2+y^2=4$, $z=0$. б) $\parallel Oz$. в) Кружен цилиндар.
2. б) $\parallel Oy$. в) Елиптичен цилиндар.
3. а) Параболата $z=(x-1)^2$, $y=0$. в) Параболичен цилиндар.
4. в) Пар рамнини: $x+y=0$, $x-y=0$.
5. в) Хиперболичен цилиндар; $4(y-1)^2-9(z-2)^2=36$.
6. в) Хиперболичен цилиндар.
7. $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(z+\frac{y}{2}\right)^2=1$. Помош. Да се стави: $x=u$, па од $u^2+z^2=1$ ќе биде $z=\pm\sqrt{1-u^2}$; потоа: $X=u+v$, $Y=2v$, $Z=-v\pm\sqrt{1-u^2}$; на крајот да се елиминираат u и v. (Може и инаку: да се стави $x=\cos u$, $z=\sin u$; итн.)
8. $\left(x-\frac{5z}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3z}{2}\right)^2=25$.
9. $(x+2z)^2-10(x+2z)+25y^2=0$. Помош. Генератрисите се паралелни со $\mathbf{a}=(2,\,0,\,-1)$, а ставајќи $x=u$, се добива $z=2u$ и $y=\pm\sqrt{2u-u^2}$; $\frac{X-u}{2}=\frac{Z-2u}{-1}=v$, $Y=\pm\sqrt{2u-u^2}$, и се елиминираат u и v.
10. $4(y-x)^2+(2z-x)^2=(x-2)^2$. Помош. $x=0$, $y=\cos u$, $z=\sin u$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2-\cos u}=\frac{z-1}{1-\sin u}=v$. (Може и направо: $\frac{X-2}{2}=\frac{Y-2}{2-y}=\frac{Z-1}{1-z}$, па од: $(X-2)(2-y)=2(Y-2)$, $2(Z-1)=(X-2)(1-z)$ и од $y^2+z^2=1$, ги елиминираме z и y.)
11. $(az-cx)^2+(bz-cy)^2-2(z-c)(az-cx)=0$. Помош. $\frac{X-a}{x-a}=\frac{Y-b}{y-b}=\frac{Z-c}{-c}$; од првиот израз и третиот: $-cX=xZ-cx$, т.е. $(a-1)Z-c(X-1)=(x-1)(Z-c)$; од вториот и третиот: $bZ-cY=y(Z-c)$; последниве две равенства ги квадрираме и го користиме условот $(x-1)^2+y^2=1$.
12. $9(x^2+z^2)=16y^2$. Помош. $x^2+z^2=16$, $y=3$; $x=4\cos u$, $z=4\sin u$, $y=3$.

IV.5.3.

1. а) $z^2=(x^2+y^2)^3$. б) $y^2+z^2=x^6$. **2.** а) $y^4=4(x^2+z^2)$. б) $y^2+z^2=2x$.

3. $y^2 = 4(x^2 + z^2)$. **4.** а) $y^2 = x^2 + z^2$. б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. $z = 1/(x^2 + y^2 - 1)$. **6.** а) $x^2 - (y^2 + z^2) = 1$. б) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

IV.5.4.

1. Точка – координатниот почеток.

2. Конусна површина со врв во координатниот почеток и директриса $x^2 + 2y^2 = 3,\ z = 1$.

3. Права – оската Oz. **4.** Параболичен цилиндар.

5. Сфера со центар во точката $(1,\ 2,\ 3)$ и радиус 4.

6. Пар рамнини: $2x - y = 0,\ 2x + y = 0$.

7. Елипсоид со центар во точката $(0,\ 1,\ 1)$ и полуоски $a = 2 = c,\ b = \sqrt{2}$.

8. Конусна површина со врв во $O(0,\ 0,\ 0)$ и директриса, на пример, $x^2 + z^2 = 1,\ y = 1$.

9. Еднокрилен хиперболоид (црт. 2 од **5.3**, со заменети улоги на z и y).

10. Кружен параболоид со теме $T(0,\ 1,\ 0)$ и оска, паралелна со оската Oz.

11. Двокрилен хиперболоид (црт. 3 од **5.3**, со заменети улоги на z и x).

12. Елиптичен параболоид со теме $T(2,\ 0,\ 3)$ и оска паралелна со Oy.

13. Елиптичен цилиндар. **14.** Хиперболичен параболоид.

15. $10x - 11y - 2z + 189 = 0$ и $10x - 11y - 2z - 261 = 0$. Решение. Равенката на бараната рамнина има облик $10x - 11y - 2z + D = 0$; слободниот член D се определува од условот: рамнината се наоѓа на растојание r од центарот S на сферата: $S(4,\ 0,\ 2),\ r = 15$.

16. $x + 2y - 2z + 3 = 0$ и $3x - 4y - 5 = 0$. Помош. Да се најде онаа рамнина од праменот $(2+\lambda)x - (1+3\lambda)y - (1-\lambda)z - (1+4\lambda) = 0$ што е на растојание 1 од $O(0,\ 0,\ 0)$, т.е. $|\,1 + 4\lambda\,|^2 = (2+\lambda)^2 + (1+3\lambda)^2 + (1-\lambda)^2$; значи, $5\lambda^2 - 5 = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$.

IV.5.5.

1. На пример, $x + z = 0,\ x - z = 0$.

2. а) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$. б) $x^2 + y^2 = 1,\ z = 2$.

3. Секој од дадените системи е еквивалентен со системот: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, од што следува дека кривата е кружницата во рамнината $z = 1$, со центар $C(0,\ 0,\ 1)$ и радиус 1. Проекцијата од (L) на рамнината Oxy е кружницата $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$, на Oxz - отсечката $z = 1,\ -1 \le x \le 1$, а на Oyz – отсечката $z = 1,\ -1 \le y \le 1$.

4. а) $x^2 - y^2 = 9,\ z = 0$ (при што: $|\,x\,| \le 5,\ |\,y\,| \le 4$). б) $x^2 + z^2 = 25,\ y = 0$.

5. Исполнета елипса; $2x^2 + (z+3)^2 \le 18$ во Oxz.
Решение. Треба да се состави равенка на цилиндричната површина формирана од зраците што ја допираат сферата. Да ја земеме за директриса кружницата што се добива како пресек на сферата со рамнината што минува низ нејзиниот центар и е нормална на зраците, т.е. со рамнината $y + z = 3$, а за генератриси – правите паралелни со векторот $\mathbf{a} = (0,\ 1,\ 1)$. Тогаш, ставајќи $z = u$, добиваме $y = 3 - u$ и $x^2 = 9 - 2u^2$, па елиминирајќи ги u и v од $\frac{X - \sqrt{9-2u^2}}{0} = \frac{Y - u + 3}{1} = \frac{z-u}{1} = v$

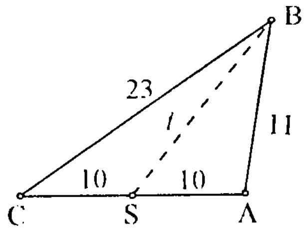
добиваме $2X^2 + (Z - Y + 3)^2 = 18$. Пресекот на оваа површина со рамнината $Y = 0$ (т.е. со Oxz) е: $2X^2 + (Z+3)^2 = 18$, што претставува равенка на периферијата од сенката. Значи, сенката има форма на (исполнета) елипса.

6. а) На пример: $x = 0$, $y = t$, $z = 0$. б) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$; за втората крива: x, y – како во а), а $z = 2$. в) Има два дела: $x = 4\cos t$, $y = 4\cos t$, $z = 4\sin t$ и $x = 4\cos t$, $y = -4\cos t$, $z = 4\sin t$.

7. Решение. Ако ставиме, на пример, $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, добиваме $z^2 = 16\cos^2 t$. Според тоа, кривата може да се подели на две криви, едната од кои е дадена со параметарските равенки: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 4\cos t$, а другата – со: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $t = -4\cos t$.

IV.6. Задачи за повторување

1. 30. Помош. Нека $ABCD$ е паралелограм, формиран од векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при што $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогаш $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ е должината на дијагоналата BD, чија половина е еднаква со должината на тежишната линија BS на $\triangle ABC$, спуштена од темето B (црт. 1). Тогаш, од $\triangle BCS$, користејќи ја косинусната теорема, имаме: $t^2 = 23^2 + 10^2 - 2\cdot 23\cdot 10\cdot \cos\gamma$, а од $\triangle ABS$: $11^2 = 23^2 + 20^2 - 2\cdot 23\cdot 20\cdot\cos\gamma$. На крајот: $t = 15$, па $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 30$.



Црт. 1

2. 24. **3.** а) и б) 25. **4.** а) $\sqrt{129} \approx 11,4$. б) 7.

7. а) $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. б) $\mathbf{a} = 2\mathbf{c} - b$.

8. $\mathbf{c} = \frac{2}{3}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$. Помош. Во равенството $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ да се заменат $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ со изразите добиени при нивното претставување со векторите $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

9. $6\sqrt{3}$. **10.** $\mathbf{c} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}\sqrt{3}$. Помош. $\angle AOB = 30^0$.

12. $\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$; $\overrightarrow{OC} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overline{OC} = \sqrt{6}$.

13. $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. **14.** а) 13. б) 15.

15. $\mathbf{a}$ е двапати подолг од $\mathbf{b}$ и се спротивно насочени.

16. Да. Помош. $\overrightarrow{AB} = (6, -6, 4)$, $\overrightarrow{CD} = (-3, 3, -2)$; $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$,

17. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **18.** $x = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

19. Секој реален број x. **20.** Секој позитивен реален број x.

21. $k(a-b)(b-c)(c-a)$. **22.** $-4\sin\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

23. $(a-b)(b-c)(c-a)$. **24.** $abc(a-b)(b-c)(c-a)$.

26. Помош. Од втората колона да се одземе третата – ќе се добие првата.

27. $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$. **28.** $x = (a+b)/2$, $y = (b+c)/2$, $z = (c+a)/2$.

29. Бесконечно многу решенија: x–произволно, $y = x + 1$, $z = 2x - 1$.

30. Нема решение. **31.** а) $a \neq -3$. б) $a = -3$, $b \neq 1/3$.в) $a = -3$, $b = 1/3$.

32. $a = 7$. **33.** а) -18. б) 19.

34. Равенство важи кога **a** и **b** се колинеарни и тоа: $\mathbf{ab} = ab$ кога **a** и **b** имаат иста насока и $\mathbf{ab} = -ab$ кога **a** и **b** имаат спротивна насока.

35. $\lambda = \pm 4/3$. **36.** а) $-\frac{3}{2}$. Помош. Отсечките a, b, c формираат рамностран триаголник. б) -19.

37. $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$. **38.** а) 90^0. б) Не. **39.** $D(1,\ 1,\ -1)$; $\varphi = 120^0$.

40. 45^0. **41.** $\mathbf{x} = (12,\ -6,\ -4)$. **42.** $\mathbf{x}(0,\ 5,\ 6)$.

43. 5. Помош. $\mathbf{mn} = |\ \mathbf{m}\ |\cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{m}}\mathbf{n}$, па $\mathrm{pr}_{\mathbf{m}}\mathbf{n} = \frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{m}|}$; $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = \mathbf{c}$.

44. 4. **45.** а) 3. б) 27. **46.** $50\sqrt{2}$. **47.** **a** и **b** да се колинеарни.

48. **a** и **b** да се заемно нормални. **50.** $(1,\ 5,\ 7)$. **51.** $\frac{3}{2}$. **52.** $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.

55. 11. **56.** 52. **57.** $D_1(0,\ 0,\ 8)$, $D_2(0,\ 0,\ -7)$. **59.** $4x - 6y + 3z - 24 = 0$.

60. $x + 5y - 7z = 0$. **61.** $M(5,\ 5,\ 5)$. **62.** $5x - 7y + 6z - 27 = 0$.

63. $y - z = 0$. **64.** $x + y + z\sqrt{2} = 5$. **65.** Се сечат во една права.

66. а) $n \neq 7$. б) $m = 3$, $n = 7$. в) $m \neq 3$, $n = 7$.

67. $(0,\ 2,\ 0)$ и $\left(0,\ \frac{17}{4},\ 0\right)$. **68.** $2x + 14y - 12z + 7 = 0$ и $6x + 6y + 8z + 5 = 0$.
Помош. $\frac{2x+5y-z+3}{\sqrt{2^2+5^2+1^2}} = \frac{2x-4y+10z-1}{\pm\sqrt{2^2+4^2+10^2}}$.

69. а) На различни страни. б) На исти страни.
Помош. Точките P и Q лежат на иста страна од рамнината (т.е. во ист полупростор формиран со таа рамнина), ако вредноста на изразот од левата страна на равенката на рамнината, кога се заменат координатите на P, има ист знак со вредноста добиена со заменувањето на координатите од Q; ако пак имаат спротивни знаци, P и Q лежат на спротивните страни од рамнината.

70. а) Во ист. б) Во накрсни. в) Во соседни.

71. $23x + y + 4z - 4 = 0$. **72.** $x + 5y - z - 4 = 0$, $3x - 2y = 0$.

73. $8x - 5y - z + 3 = 0$. **74.** $x = 8 - 17t$, $y = t$, $z = 8 + 5t$.

75. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta = 90^0$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

76. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-2}{6}$. Помош. Правецот на симетралата е определен со векторот **s** што е збир на ортовите на векторите $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

77. $x = -3 - 10\,t$, $y = -2 + t$, $z = 1 + 2\,t$; $\cos\varphi = 28/\sqrt{2485}$.

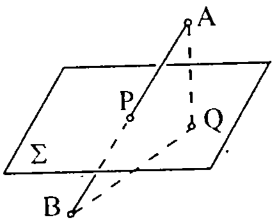
78. $d = 21$. **79.** $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+1}{2}$. **80.** $x = 5t - 4$, $y = 3t - 1$, $z = 2t + 2$.

81. $(4,\ 3,\ -2)$. **82.** $N(-3,\ 0,\ 0)$. **83.** $N(1,\ 0,\ -5)$. **84.** $N(3,\ 1,\ -6)$.

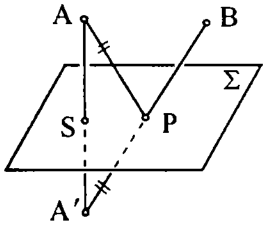
85. а) $P(5,\ -3,\ 3)$. Помош. Точките A и B лежат на различни страни од рамнината Σ, па збирот $\overline{PA} + \overline{PB}$ ќе биде најмал кога точките A, P, B ќе бидат колинеарни (црт. 1; докажи!) Според тоа, точката P ќе биде прободот на правата AB врз рамнината Σ.

б) $P(1,\ -1,\ 2)$. Помош. Точките A и B лежат на иста страна од рамнината Σ, па збирот $\overline{PA} + \overline{PB}$ ќе биде најмал кога точките A', P, B ќе бидат колинеарни, каде што A' е симетричната точка на A во однос на рамнината Σ (црт. 2).

86. а) $P(2, -3, 6)$. Точките A и B лежат на иста страна од рамнината Σ, па разликата $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ ќе биде најголема кога точките A, B, P ќе бидат колинеарни (црт 3; докажи!). Значи, P ќе биде прободот на правата AB со рамнината Σ.

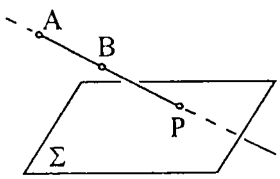


Црт. 1 (85 а)

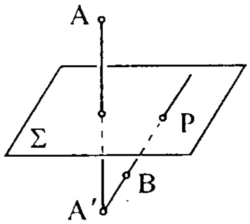


Црт. 2 (85 б)

б) $P(2, 9, -6)$. Точките A и B лежат на различни страни од рамнината Σ, па разликата $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ ќе биде најголема кога точките A', B, P ќе бидат колинеарни, каде што A' е симетричната точка на A во однос на рамнината Σ (црт. 4).



Црт. 3 (86 а)



Црт. 4 (86 б)

87. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 1$. **88.** $x = 2 + t$, $y = -3 - 2t$, $z = 1 + 3t$.

89. 5. **90.** $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 26$.

91. а) Минува надвор од неа. б) Ја прободува. **92.** $T(-2, 7, -2)$, $d = 3$.

93. $a = \pm 6$. **94.** $2x - 6y - 3z + 11 = 0$, $3x + 2y + 6z - 30 = 0$.

96. а) $1 < |m| < \sqrt{2}$. б) $|m| < 1$. **97.** $m = \pm 18$.

98. $9x^2 - 16y^2 - 16z^2 - 90x + 225 = 0$.

99. а) Конус. б) Еднокрилен хиперболоид. в) Параболоид.

100. $C(2, 3, -1)$, $r = 8$.

V.1. Функции од n променливи

V.1.1.

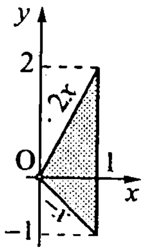
3. Решение. Од $a, b \geq 0$ имаме $2\sqrt{ab} \geq 0$, $a+b+2\sqrt{ab} \geq a+b$, $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geq a + b$, па $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$. **4.** Помош. Да се примени неравенството (7) или да се искористи: $(ad - bc)^2 \geq 0$.

5. а) и б) Да. в) Не, не важи: $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. г) Да. Решение. Функцијата $\operatorname{arctg} x$ е дефинирана за секој $x \in \mathbf{R}$, еднозначна и непарна.

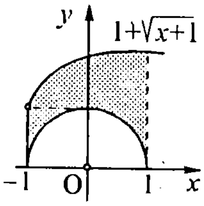
Според тоа, за $d(x, y) = | \operatorname{arctg}(x - y) |$ важат аксиомите (i) и (ii). За да покажеме дека важи аксиомата за триаголник, прво треба да покажеме дека за кои било $a \geq 0$ и $b \geq 0$ е точно неравенството $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b \geq \operatorname{arctg}(a + b)$; за ова е доволно да се докаже дека при фиксен $b > 0$, функцијата $f(a) = \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg}(a + b)$ расте; бидејќи $f(0) = 0$, тогаш при $a > 0$ имаме $f(a) > 0$.

V.1.2.

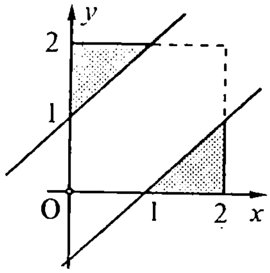
1. Црт. 1. **3.** Црт. 2. **5.** Црт. 3 (засенчениот дел).



Црт. 1



Црт. 2



Црт 3

7. $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 > 4$. **8.** $y^2 \leq x + 1,\ y \geq x - 1$.

9. а) и б) Точките од делот на параболата $y^2 = x$.

10. а) На пример, $\mathrm{M} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ е составено само од рабни точки. б) На пример: $\mathrm{M} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y > x^2 + 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

11. Решение. Нека ε е произволно избран позитивен број. Можеме да ја формираме опаѓачката низа (ε_n) од броеви $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$. Во ε_n–околината на C, за секој $n \in \mathbf{N}$, постои барем една точка од M различна од C, па значи ε–околината на C има безброј многу точки од M.

12. На пример: $\mathrm{M} = \left\{ \left(\frac{n}{n+1},\ 2^{-n}\right) \middle| n \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ \left(3,\ \frac{2n}{n+1}\right) \middle| n \in \mathbf{N} \right\}$.

13. а) $(0, 0) \notin \mathrm{M}$. б) M има безброј многу точки на згуснување и тоа: $(1, 0), (1/2, 0), (1/3, 0), \cdots$; $(0, 1), (0, 1/2), (0, 1/3), \cdots$ – сите од M и $(0, 0) \notin \mathrm{M}$.

14. а) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран број. Тогаш точките $(4, 2 - \varepsilon/n)$ и $(4, 2 + \varepsilon/n)$ лежат во ε–околината на точката $(4, 2)$, при што $(4, 2 - \varepsilon/n) \in \mathrm{M}$, а $(4, 2 + \varepsilon/n) \notin \mathrm{M}$. Значи, $(4, 2)$ е рабна точка за M. б) Множеството $\mathrm{M}_1 = \{(x, y) | y^2 < x\}$ е отворена област, а негов раб е множеството $M_2 = \{(x, y) | y^2 = x\}$. Бидејќи M е добиено од M_1 со додавање на работ M_2, следува дека M е затворена област.

15. а) Да. б). Не. (M е отворено, но не е сврзано.) в) Не. (M е отворено, но не е сврзано – тоа е унија од двете дисјунктни отворени множества, определени со неравенствата: $x^2 + y^2 < 1$ и $(x - 3)^2 + y^2 < 1$.)

16. а) На пример: M од вежбата 15 в).

б) На пример: $\mathrm{M} = \{(x, y) | x^2 - y^2 \leq 1\}$ (види и вежба 15 б)).

V.1.3.

1. Конвергентна; $A = (3,\ 2)$. **2.** Конвергентна; $A = (1,\ 1)$.

3. Дивергентна. **4.** Дивергентна.

9. б$_1$) $(-1,\ 1)$ и $(1,\ 3)$. б$_2$) $(0,\ e^{-1},\ 0)$ и $(0,\ e^{-1},\ 2)$.

10. 1^0. Доказ. Нека низата A_k е ограничена и нека a_{ik}, $i = 1, \cdots, n$, се нејзините компонентни низи. Тогаш постои позитивен реален број R таков што $\overline{OA_k} \leq R$, т.е. $\sqrt{a_{1k}^2 + \cdots + a_{nk}^2} \leq R$, за секој $k \in \mathbf{N}$. Оттука: $| a_{1k} | \leq R, \cdots, | a_{nk} | \leq R$, а тоа значи дека секоја компонентна низа е ограничена.

Обратно, нека A_k е низа во $\mathbf{R}^n$ и нека нејзините компонентни низи се ограничени. Тоа значи дека постојат позитивни реални броеви $r_1, r_2, \cdots, r_n$ такви што $| a_{1k} | \leq r_1, \cdots, | a_{nk} | \leq r_n$ за секој $k \in \mathbf{N}$. Да ставиме: $R = r_1 + \cdots + r_n$. Тогаш $\overline{OA_k} \leq r_1 + \cdots + r_n = R$, што значи дека низата A_k е ограничена.

11. Доказ. б) Нека $A_k = (a_{1k}, \cdots, a_{nk})$. Тогаш: A_k е конвергентна $\Leftrightarrow$ a_{ik}, $i = 1, \cdots, n$, се конвергентни $\Leftrightarrow$ a_{ik}, $i = 1, \cdots, n$, се фундаментални $\Leftrightarrow$ A_k е фундаментална.

V.1.4.

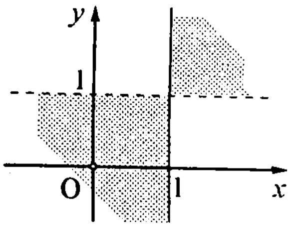
1. $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,\ y) | y \neq x\}$, т.е точките од рамнината што не се на правата $y = x$.

2. $y^2 \leq x$. **3.** Црт. 1. **4.** $x^2 - y^2 \geq 1$ (црт. 2).

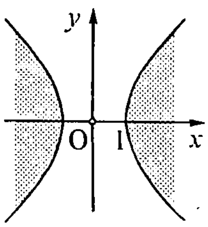
5. $y < x$. **6.** $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

7. $-1 \leq x/y \leq 1$, т.е. $-y \leq x \leq y$ за $y > 0$ и $y \leq x \leq -y$ за $y < 0$, без $(0,\ 0)$.

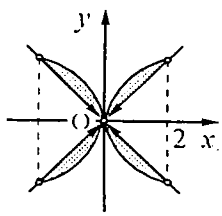
8. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,\ y) \,|\, y = k\pi x,\ \ k$ е цел број$\}$. **9.** $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1 \wedge y^2 \leq | 2x |$ (црт. 3).



Црт. 1



Црт. 2



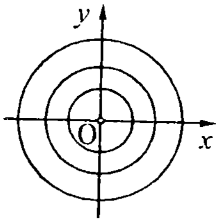
Црт. 3

10. а) $z = 2x^2 + 4xy$. б) $z = \pi x \frac{y^2 - x^2}{3}$.

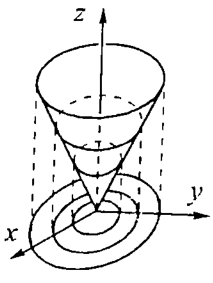
11. а) Не, не е сврзано. б) Не. в) Не, не е отворено. г) Да. д) Да.

12. За 1: а) Да. б) Не. в) Не (не е сврзано).

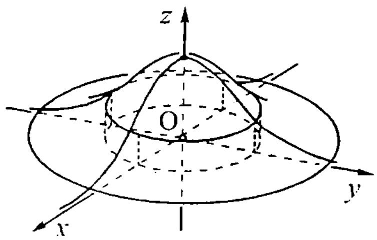
13. Црт. 4. **19.** Црт. 5. **23.** Црт. 6.



Црт. 4



Црт. 5



Црт. 6

V.1.5.

1. 3/4. **2.** Не постои. Помош. Пример 2.

3. 0. Помош. $|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}| \le (x^2+y^2)\cdot 1 \to 0$ при $x,\ y \to 0$.

4. 1. Помош. $f(x,\ y) = \frac{(x-2y)(x+2y)}{(x-2y)(x+4)}$.

5. 0. Помош. $f(x,\ y) = \frac{\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \to 0$ при $\rho\to\infty$.

6. 0. Помош. $\frac{2|xy|}{x^2+y^2} \le 1$, па $|\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \le \frac{|x|}{2} \to 0$. **7.** Не постои.

8. Не постои. Решение. Нека $(x_n,\ y_n)$ е низа точки во $\mathbf{R}$, такви што $(x_n,\ y_n) \neq (0,\ 0)$ и $(x_n,\ y_n) \to 0$. Ако $x_n\, y_n \neq 0$, на пример: $(x_n,\ y_n) = \left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$, тогаш $f(x_n,\ y_n) \to 1$, а ако $x_n\, y_n = 0$, на пример: $(x_n,\ y_n) = (1/n,\ 0)$, тогаш $f(x_n,\ y_n) \to 0$. Следствено, не постои граница на f во $(0,\ 0)$.

9. Решение. Поради $\frac{\sin t}{t} \to 1$ кога $t \to 0$, множејќи го броителот и именителот со y, добиваме:

$$L = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y = \lim_{xy\to 0} \frac{\sin xy}{xy}\cdot \lim_{y\to 2} y = 2\,;$$

$$L' = \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y\right) = \lim_{y\to 2} y = 2\,;$$

$$L'' = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 2} \frac{\sin xy}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2\,.$$

10. Решение. Земајќи $y = kx$, добиваме $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)} = \frac{(1-k^2)}{(1+k^2)}$; за различни k се добиваат различни лимеси, а тоа значи дека L не постои. Лесно се добива: $L' = -1$, $L'' = 1$.

11. Решение. $L = \lim_{y\to 0} y\cos\frac{1}{x} = 0$, бидејќи $\lim_{y\to 0} y = 0$, а функцијата $\cos x$ е ограничена. Потоа, $L'' = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} y\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$; L' не постои, бидејќи $\lim_{x\to 0} y\cos\frac{1}{x}$ не постои.

12. Решение. При $y = kx$ имаме $\lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$, па значи L не постои, $L' = 0 = L''$.

13. Решение. Бидејќи $|x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}| \leq | x | + | y | \to 0$, имаме $L = 0$, а бидејќи $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ и $\lim_{x\to 0} f(x, y)$ не постојат, следува дека L' и L'' не постојат.

V.1.6.

1. Непрекината. **2.** Прекината. **3.** Прекината. **4.** Непрекината. Решение. Имаме: $0 \leq f(x, y) \leq x^2$. Ако низата (x_n, y_n) конвергира кон $(0, 0)$, тогаш $x_n \to 0$, па значи и $x_n^2 \to 0$. Од тоа следува дека $f(x_n, y_n) \to 0 = f(0, 0)$.

5. Непрекината. **6.** Непрекината.

7. а) $(0, 0)$. б) Сите точки од координатните оски $x = 0$, $y = 0$. в) Сите точки од рамнината чии координати се цели броеви. г) Сите точки од координатните рамнини $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

8. а) Има лимес. б) Не е непрекината.

9. а) Има лимес. б) Непрекината.

10. а) Нема лимес (види вежба 8 од **1.5**), па има прекин во $(0, 0)$.

11. а) Нема лимес. б) Не е непрекината.

12. Решение. За секоја низа x_n, таква што $x_n \to a$, добиваме низа (x_n, b) од точки што припаѓаат на D_f, а со граница (a, b). Поради непрекинатоста на $f(x, y)$ во (a, b) имаме:

$$g(a) = f(a, b) = \lim_{x\to\infty} f(x_n, b) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x).$$

13. Решение. Имаме $g(x) = f(x, 0) = 0$ и $h(y) = f(0, y) = 0$, па јасно е дека $g(x)$ и $h(y)$ се непрекинати во $x = 0$ и $y = 0$ соодветно. Ако ставиме $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$, добиваме $(x_n, y_n) \to (0, 0)$, но $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$. Значи, $f(x, y)$ во точката $(0, 0)$ не е непрекината.

V.1.7.

1. 0; 4. **2.** $\frac{\pi}{2}$; 0. **3.** $-\frac{2}{3}$; -1; **4.** 1; -1. **5.** 0; $\frac{1}{4}$.

6. $z_x = y^2(1+xy)^{y-1}$; $z_y = (1+xy)^y \ln(1+xy) + xy(1+xy)^{y-1}$.

7. $z_x = -y/(x^2+y^2)$; $z_y = x/(x^2+y^2)$.

8. $z_x = \frac{3}{x \ln y}\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$; $z_y = -3\frac{\ln x}{y \ln^2 y}\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$.

9. Да **10.** Не; но: $xz_x + yz_y = \frac{z}{2}$.

11. Да. **12.** а) Да. б) Да. **13.** а) ρ. б) 2ρ.

14. Решение. Бидејќи $f(x, 0) = 0$ за $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, имаме $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, т.е. $f_x(x, 0) = 0$. Аналогно: $f_y(0, 0) = 0$.

15. Решение. Бидејќи $f(x, 0) = 0$ за $x \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, имаме: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$, $f_x(0, 0) = 0$. Аналогно: $f_y(0, 0) = 0$.

16. $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\operatorname{tg}\beta = 4$.

V.1.8.

1. Да. **2.** Да. **3.** Не; левата страна од равенството е еднаква со 0.

4. Да. **5.** Не; левата страна од равенството е 0. **6.** Да.

7. а) $z_{xxy} = -3e^{x-3y} - 3\cos(x+3y)$; $z_{xxyy} = 9z$.

б) $z_{xxy} = -e^x \sin y - e^y \cos x$; $z_{xxyy} = -z$.

8. $z_{xxy} = \cos x = z_{xyx} = z_{yxx}$.

9. $f_{xy} = (y^2 - x^2)/(x^2+y^2)^2 = f_{yx}$, $f_{xy}(1,2) = 3/25$.

10. Решение. Имаме:

$$f(x,0) = f(0,y) = 0,\ f_x(x,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,0) - f(x,0)}{\Delta x} = 0.$$

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = x,$$

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = -y,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x} = 1,$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = -1,$$

Значи: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Да забележиме дека функцијата од вежбата 9 ги задоволува условите од теоремата 1, додека функцијата од вежбата 10 не ги задоволува; имено, f_{xy} и f_{yx} не се непрекинати во точката $(0,0)$.

11. Решение. Тврдењето следува од тоа што сите изводи на $u(x,y,z)$ се непрекинати функции.

12. Помош. Да се искористи фактот што, при таква функција, парцијалните изводи од втор ред z''_{xy} и z''_{yx} би биле непрекинати па според теоремата за мешаните изводи, тие би биле еднакви (а тука: $z''_{xy} = 2 \neq 3 = z''_{yx}$).

13. а) Не. б) Да; $z = xy^2 + C$.

V.2. Диференцијабилни функции

V.2.1.

1. а) $\Delta z = (2x_0 - 3y_0)\Delta x + (-3x_0)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$, $\alpha = \Delta x$, $\beta = -3\,\Delta x$.

2. Не, заштo z_x и z_y во $(0,0)$ не постојат.

3. Помош. Да се покаже прво дека $|\ f(x,y)\ | \leq |\ x\ |$, од што следува непрекинатост во $(0,0)$. Потоа, да се покаже дека $f_x(x,y)$ и $f_y(x,y)$ постојат во секоја точка и дека тие се по апсолутна вредност помали од 1, исто во секоја точка. (Види и вежба 14 од **1.7**). Нараснувањето $\Delta f(0,0)$ има облик:

$$\Delta f(0,0) = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \alpha\,\Delta y,$$

каде што: $2\alpha = \Delta y(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-1/2}$, $2\beta = \Delta x(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-1/2}$, не се стремат кон нула кога $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

4. Помош. Да се покаже дека $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, и: $\Delta f(0, 0) = f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y + \Delta x \sin[1/(\Delta x^2 + \Delta y^2)] + \Delta y \sin[1/(\Delta x^2 + \Delta y^2)]$, од што следува дека $f(x, y)$ е дифернцијабилна во $(0, 0)$. Потоа, изводите $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ постојат во секоја точка (x, y). Специјално $f_x(x, 0) = 2x \sin(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2)$, од што следува дека $f_x(x, y)$ нема граница кога $(x, y) \to (0, 0)$. Слично и за $f_y(x, y)$. Од сето тоа следува дека $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ имаат прекин во $(0, 0)$, и покрај тоа што тие изводи постојат (и се конечни) во секоја точка (x, y).

V.2.2.

1. а) $4(x-2) - 2(y-1) = z - 3$. б) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$.

2. б) $\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{-1}$. 3. б) $x - 2 = -y - 1 = -z$.

4. а) $x + z + 1 = 0$. б) $x = z,\ y = 0$. 5. а) $2a(x+y) - z + a^2 = 0$.

6. $M_0(1, -2, 18)$; $4x - 16y - z = 22$; $-4(x-1) = y + 2 = 16(z - 18)$.

7. $M_0(4/3, 4/3, 1/3)$; $x + y + z = 3$.

8. а) $\frac{x-a}{b} = \frac{y-b}{a} = \frac{z-ab}{-1}$; $bx + ay - z = ab$.

б) (p) $x = a,\ z = ay$; (q) $y = b,\ z = bx$. Помош. Тангентната рамнина има равенка $z = bx + ay - ab$. Заменувајќи во $z = xy$ добиваме $bx + ay - xy = ab$, т.е. $(x-a)(x-b) = 0$, од каде што $x = a$ или $y = b$. Според тоа, пресеци се правите (p): $x = a,\ z = ay$; (q): $y = b,\ z = bx$.

9. $V = \frac{9a^3}{2}$.

V.2.3.

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy^2}{1+xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2y}{1+xy}$. 2. $z_x = 2x\cos 2y$, $z_y = -2x^2 \sin 2y$.

3. $4/\sin 2t$. 4. $z_u = 0$, $z_v = 1$.

5. $z_x = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $z_y = \frac{-x}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. 6. Исти се како во веж. 1.

7. а) Да. б) Не, ако f не е нулта функција. в) Да.

9. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}$.

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy\frac{\partial z}{\partial u} + (3x^2 - 6xy)\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2)\frac{\partial z}{\partial u} - 3x^2\frac{\partial z}{\partial v}$.

10. $z_{xy} = (x^2 - y^2)\,[tf''(t) + 3f'(t)]$.

11. а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u}$.

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}$.

V.2.4.

1. $|\,x\,|\,(x\,dy - y\,dx)/\left(x^2\sqrt{x^2 - y^2}\right)$. 2. 0. 3. 0,06.

4. а) $dp = \frac{R}{v}d\theta - \frac{R\theta}{v^2}dv = p\left(\frac{d\theta}{\theta} - \frac{dv}{v}\right)$,

$dv = v\left(\frac{d\theta}{\theta} - \frac{dp}{p}\right)$, $d\theta = (v\,dp + p\,dv)/R$.

5. 0,005. 6. $-0,0034$. 7. 40π cm^3.

8. а) $\Delta z \approx -0,05 = dz$; $z = z_0 + \Delta z \approx 10 - 0,05 = 9,95$.
б) $\Delta z = -0,0495\cdots$; $z = \sqrt{6,05^2 + 7,9^2} \approx 9,9505$.

10. $z = 60$ m $\pm 2,8$ m. Помош. $z = x \sin y$, $x = 120$, $\Delta_x = 2$, $y = \pi/6$, $\Delta_y = \pi/180$; да ќе примени формулата $(*)$.

11. $2,48$ kg/m^3 $\pm 0,26$ kg/m^3.

V.2.5.

1. $\frac{2}{y^3}(y^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2)$. **2.** $-\frac{1}{xy^2}(y\,dx - x\,dy)^2$. **4.** 2.

5. $z(a\,dx + b\,dy)^n$.

6. $f(x, y) = 3 + 10(x-2) + 2(y-1) + 6(x-2)^2 - 2(x-2)(y-1) + 3(y-1)^2 + R_2$.

7. $f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) =$
$= \ln(x+y) + \frac{1}{x+y}(\Delta x + \Delta y) - \frac{1}{2(x+y)^2}(\Delta x^2 + 2\Delta x\,\Delta y + \Delta y^2) + R_2$.

8. а) $(1+h)^{1+k} - 1^1 = k + kh + (h^2k/2) + R_3$. **9.** $1,1021$.

10. $\operatorname{arctg}\frac{x+h}{y+k} =$
$= \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{1}{x^2+y^2}(yh - xk) + \frac{1}{(x^2+y^2)^2}[-xyh^2 + (x^2-y^2)hk + xyk^2] + R_2$.

11. $e^{x+h}\sin(y+k) =$
$= e^x \sin y + e^x(h\sin y + k\cos y) + \frac{e^x}{2}(h^2 \sin y + 2hk\cos y - k^2 \sin y) + R_2$.

12. $1,105$. Помош. За $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $h = 0,1$ и $k = -\frac{\pi}{100}$, добиваме: $e^{0,1}\sin 0,49\pi \approx 1 + 0,01 + \frac{1}{2}\cdot 0,01 - \pi^2/(2\cdot 10^4) \approx 1,105$.

13. $f(x, y) \approx \frac{\pi}{4} + x - xy$.

V.2.6.

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2w\frac{\partial w}{\partial x}$.

3. Решение. Во (A) ќе ги сметаме x, y, z за "константи" и ќе ставиме $\xi = tx$, $\eta = ty$, $\zeta = tz$. Ако левата и десната страна на (A) ги диференцираме по t, ќе добиеме

$$x\frac{\partial f}{\partial \xi} + y\frac{\partial f}{\partial \eta} + z\frac{\partial f}{\partial \zeta} = kt^{k-1}f(x, y, z).$$

За $t = 1$ го добиваме равенството (Б).

4. Помош. а) $F(y/x,\, z/x)$ да се претстави во обликот $F(\xi, \eta)$, каде што $\xi = y/x$, $\eta = z/x$ и да се диференцира по x; y; z функцијата $x^kF(\xi, \eta)$ по правилото за извод на сложена функција.

5. Помош. Во (A): $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ да се стави: $t = 1/x$ и $f(1,\, y/x,\, z/x) = F(y/x,\, z/x)$.

6. $6\,dx\,dy\,dz$. **7.** $2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right)$. **8.** $e^{ax+by+cz}(adx + bdy + cdz)$.

V.2.7.

1. а) Да. б) Не, зашто $F_y(-1, 2) = 0$. **2.** Да. **3.** Не.

4. а) Не. б) Да. **5.** Да, за $M_0(\pi, \pi)$ или за $N_0(\pi/2, \pi/2)$.

6. Да, за $M_0(1, 0)$. **7.** Да – во 1,5 и 6, а не – во 2,3 и 4.

8. Само во 1, 3 и 4.

9. Равенката $\ln t = \operatorname{arctg} t$ има точно едно решение $t = c$, каде што $1 < c < 3/2$. Според тоа, $y = cx$ $(x \neq 0)$ е единствената функција $y = y(x)$ со бараното својство.

10. Помош. Извод се бара само во случај да е добиен позитивен одговор за егзистенција на функцијата. (Значи, отпаѓаат 1 б), 3 и 4 а).) Изводот $y'(x)$ се наоѓа по формулата (3) или по правилото за извод на сложена функција. Така, во вежбата 2 имаме:

$$3x^2 + 6y^2y' - 3y - 3xy' = 0, \text{ т.е. } y'(x) = (y - x^2)/(2y^2 - x), \qquad (a)$$

па $y'(1) = 0$. Ако $F(x, y)$ има непрекинати изводи од втор ред, $y''(x)$ се наоѓа со барање извод од двете страни на (3′), или директно од $F(x, y) = 0$, па правилото за изводи од сложени функции. Така, во примерот од вежбата 2 имаме:

$$6x + 12yy'^2 + 6y^2y'' - 3y' - 3xy'' = 0\,; \qquad (b)$$

за наоѓањето на $y''(1)$, заменуваме $x = y = 1$ и $y' = 0$, па добиваме $y''(1) = -2$; ако сакаме да го најдеме $y''(x)$, за кој било x, треба да се замени во (b) вредноста на $y'(x)$, добиена во (a), и да се реши по y''.
Понекогаш е тешко да се определи точка (x_0, y_0) со својството $F(x_0, y_0) = 0$, но ако сме сигурни дека $F(x, y)$ има непрекинати парцијални изводи F_x и F_y, при што F_y не е идентично еднаков со нула, тогаш можеме да бараме извод по правилото за извод од сложени функции, па ќе го добиеме резултатот (3′). Но сега, добиениот резултат треба да се прифати "условно": тој ќе биде точен само ако сме сигурни дека постои точка (x_0, y_0) (макар и да не е одредена од нас), таква што $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Така, во примерот од вежбата 9, имаме:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{xy' - y}{x^2} - \frac{1}{1 + y^2/x^2}\cdot\frac{xy' - y}{x^2} = 0\,, \text{ т.е. } \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)(xy' - y) = 0,$$

од што следува дека $y' = y/x$ за $x, y \neq 0$. Барајќи втор извод, ќе добиеме

$$y'' = \frac{xy' - y}{x^2} = 0\,.$$

Од тоа следува дека $y' = c$ ($=$ константа), па $y = cx$, т.е. дојдовме до ист резултат како во вежбата 9. Но, потребно е да се покаже дека постои константа c, таква што $y = cx$ (за $x \neq 0$) да е определна со дадената релација.
Во случај кога однапред ни е јасно дека не постои функција $y(x)$ определена со равенката $F(x, y) = 0$ (како, на пример, во вежбата 3), нема никаква смисла да се бара извод.

11. $z_x = (y - x)/z$, $z_y = -x/z$. **12.** $z_x = 2x/(y + 2z)$, $z_y = -z(y + 2z)$.

13. $z_x = (z\cos xz)/(y - x\cos xz)$, $z_y = z/(x\cos xz - y)$.

14. $z_x = -z(y + x\ln z)/x(x + z\ln y)$, $z_y = -z(z + y\ln x)/y(x + z\ln y)$.

15. Во 13 и 14. Помош. Во 11 и 12 имаме квадратни равенки по непознатата z, па решавајќи по z добиваме две диференцијабилни функции $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ со иста дефинициона област. Притоа, добиените формули за изводите z_y важат и за двете функции.

Во 13 немаме постапка за решавање на равенката $\sin xz - yz = 0$, по непозната z, но јасно е дека, за кои било x_0, y_0, точката $(x_0, y_0, 0)$ ја задоволува равенката, како и дека: $x_0 \neq y_0 \Rightarrow F_z(x_0, y_0, 0) \neq 0$, каде што $F(x, y, z)$ е левата страна од равенката. Според тоа можеме да ја примениме Т. 2. Но (како што ќе покажеме подоцна, во Гл. X), нултата функција $z = 0$ е единствената функција со горното својство, па затоа се наложува прашањето дали постои решение (x_0, y_0, z_0) на равенката $F = 0$, такво што $z_0 \neq 0$. Одговорот е позитивен, бидејќи, на пример, за $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$, постојат точно три решенија на равенката: 0, a, $-a$, каде што $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

16. $3x + 3y + 4z = 20$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$.

17. $x_0x + y_0y - z_0z = 1$, $\frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} = \frac{z-z_0}{-z_0}$.

18. $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = -1$, $\frac{a^2(x-x_0)}{x_0} = \frac{b^2(y-y_0)}{y_0} = \frac{c^2(z-z_0)}{-z_0}$.

19. $z_0z = \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 3(x + x_0)$.

20. $P = \frac{3a^2b^2c^2}{|2hx_0y_0z_0|}$, каде што h е растојанието од координатниот почеток до тангентната рамнина. Помош. Тетраедарот $OABC$ што го формира тангентната рамнина со координатните рамнини има волумен $V = a^2b^2c^2/6x_0y_0z_0$. Од друга страна $V = Ph/3$, па $P = 3V/h$.

21. Решение. Равенката на тангентната рамнина во (x_0, y_0, z_0) е:

$$\frac{x - x_0}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y - y_0}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z - z_0}{2\sqrt{z_0}} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}\,.$$

(Притоа е користен фактот дека $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a}$). Така, збирот на отсечките ќе биде: $\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}\right) = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a =$ конст.

V.2.8.

1. $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$. 3. $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. 4. $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$. 5. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$. 6. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = 2w$.

7. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial x}/\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1/\frac{\partial y}{\partial z}$, па $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x-z}$. 8. $A = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2$.

9. $B = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$. 10. $C = \rho^2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}$. 11. $D = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}$.

V.3. Екстремни вредности

V.3.1.

1. $(2, 0)$. 2. $(0, 0)$, $(0, -6)$, $\left(\pm\sqrt{3}, -3\right)$.

3. $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 1)$. 4. $(0, 0)$, $(\pi/3, \pi/3)$.

5. $(0, 0)$, $(0, 3a)$, $\left(a\sqrt{3}/2, 3a/2\right)$; $\left(-a\sqrt{3}/2, 3a/2\right)$. 6. Нема.

7. 4, за $x = 2$, $y = -1$; $z = 4$ е НМВ, па затоа е минимум.

8. 5 за $x = 1$, $x = -1$; $z(1, -1) = 5$ е НГВ, па затоа е и максимум. Помош. $z = 5 - (1 + 2y + y^2 + y^2 + x^2 + 2xy) = 5 - [(y + 1)^2 + (y + x)^2]$.

V.3.2.

1. НГВ $f = \sqrt{2}$ во $\left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$; НМВ $f = -\sqrt{2}$ во $\left(-\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2\right)$.
2. НГВ $f = 5$ во $(3/5,\ 4/5)$; НМВ $f = -5$ во $(-3/5,\ -4/5)$.
3. НГВ $f = 3$ во $(\pm 1, 0)$; НМВ $f = 0$ во $(0,\ 0)$.
4. НГВ $f = e$ во $(-1,\ \pi)$; НМВ $f = -e$ во $(-1,\ 0)$.
5. НГВ $f = 0$ во $(0,\ 0)$; НМВ $f = -9/2$ во $(-3/2,\ -1/2)$.
6. НГВ $f = 2$ во $(0,\ 0)$; НМВ $f = 0$ во $(1,\ 1)$.
7. а) НГВ f не постои; НМВ $f = 0$ во $(1,\ 1)$.
   б) НГВ $f = \sqrt[3]{4}$ во $\left(1 + \sqrt{2}/2,\ 1 + \sqrt{2}/2\right)$; НМВ $f = 0$ во $(1,\ 1)$.
   Помош. Да се стави: $x - 1 = \cos t$, $y - 1 = \sin t$, па $z = \cos^{2/3} t + \sin^{2/3} t$, $0 \le t \le 2\pi$; поради симетрија, можеме да се ограничиме на сегментот $[0,\ \pi/2]$.
8. НГВ $f = 4$ во $(1,\ 2)$; НМВ $f = -64$ во $(2,\ 4)$.
9. НГВ $f = 16$ во $(2,\ 2)$; НМВ $f = -1$ во $(0,\ -1)$.
10. Бараниот триаголник е рамностран.
11. Решение. Од $(*)$ следува дека постојат броеви r_1, R_1, такви што $r < r_1 < R_1 < R$, т.е. постои кружен прстен $D_1\{(x,\ y) | r_1^2 \le x^2 + y^2 \le R_1\}$ во чија внатрешност се наоѓа стационарната точка $(x_0,\ y_0)$ и притоа

$$f(x,\ y) > z_0 \quad \text{за} \quad x^2 + y^2 = r_1^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = R_1^2\,. \qquad (**)$$

Освен тоа, $f(x,\ y)$ е непрекината во затворената ограничена област D_1. Според Т. 6 од **1.6**, постојат точки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ од D_1 такви што $z_1 = f(x_1,\ y_1)$ е најмала, а $z_2 = f(x_2,\ y_2)$ е најголема вредност на $f(x,\ y)$. Од $(**)$ следува дека $(x_1,\ y_1)$ е во внатрешноста на прстенот D_1, па значи $f(x_1,\ y_1)$ е минимум. Но, ако во внатрешноста на D_1 постои минимум, тогаш тој е во стационарната точка $(x_0,\ y_0)$, па значи $(x_0,\ y_0) = (x_1,\ y_1)$. Со тоа е комплетиран доказот на тврдењето.

V.3.4.

1. $f(1,\ 1) = 6$, минимум. **2.** $f(21,\ 20) = 282$, максимум.
3. $f\left(a\sqrt{3}/2,\ 3a/2\right) = -3a^3\sqrt{3}/4$, минимум; $f\left(-a\sqrt{3}/2,\ 3a/2\right) = 3a^3\sqrt{3}/4$, максимум. **4.** $f(a,\ a) = 3a^2$, минимум.
5. Екстрем: $f(c/3a,\ c/3b) = -c^3/27ab$; за $ac/b < 0$ тој екстрем е максимум, а за $ac/b > 0$ – минимум.
6. $f(-1,\ -1) = 1$, максимум.
7. $f(0,\ 0) = 0$, минимум; $f(0,\ \pm 1) = 2/e$, максимум.
   Помош. Стационарни точки се: $(0,\ 0)$, $(0,\ \pm 1)$, $(\pm 1,\ 0)$.
8. Минимуми за $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \mp 2$, еднакви на -8; во стационарната точка $(0,\ 0)$ нема екстрем.
   Помош. Во $(0,\ 0)$: $z_{xx} = z_{yy} = -4$, $z_{xy} = 4$, па $AC - B^2 = 0$ не дава информација за екстрем. Но, за $x = y$: $z = 2x^4 > 0$, а за $x = -y$: $z = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 8) < 0$ за мали $|\ x\ |$. Значи, во $(0,\ 0)$ нема екстрем.

9. $f(2/5,\ 2/5) = 16/3125$ и $f(0,\ 0) = 0$ се максимуми. Екстрем (еднаков со 0) има и во секоја точка $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$, за $a \neq 1$, $b \neq 1$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$. Притоа:

$$\left.\begin{array}{ll} a > 1 \Rightarrow 0 = f(a,\ 0) & \text{е максимум;} \\ 0 < a < 1 \Rightarrow 0 = f(a,\ 0) & \text{е минимум;} \\ a < 0 \Rightarrow 0 = f(a,\ 0) & \text{е максимум.} \end{array}\right| \qquad (*)$$

Симетрично за $(0,\ b)$.

Ниеден од екстремите $f(a,\ 0) = 0 = f(0,\ b)$ не е стриктен. Помош. $f_{xx} = 2y^2 - 6xy^2 - 2y^3$, $f_{yy} = 2x^2 - 6x^2y - 2x^3$, $f_{xy} = 4xy - 6x^2y - 6xy^2$. Во точката $(2/5,\ 2/5)$: $AC - B^2 = (-24/125)(-24/125) - (-16/125)^2 > 0$, т.е. има екстрем, максимум. За $(a,\ 0)$ и $(0,\ b)$: $AC - B^2 = 0$, па немаме одговор за егзистенција на екстрем. Затоа е неопходно дополнително испитување (по можност, без повисоките изводи). За $(a,\ 0)$ и $a \neq 1$, за доволно мали $|\ x_0 - 1\ |$ и $|\ y_0\ |$, изразот $1 - x_0 - y_0$ има постојан знак, а $x_0^2y_0^2 > 0$, па $f(a,\ 0) = 0$ е екстрем. Притоа, важат $(*)$. (Геометриски, можеме да замислиме дека површината $z = x^2y^2(1-x-y)$ има "гребен" од максимуми: по x–оската за $a > 1$ и за $a < 0$, односно по y–оската за $b > 1$ и $b < 0$, а "гребен" од минимуми: по x–оската за $0 < a < 1$, односно по y–оската за $0 < b < 1$.)

10. Стационарни точки: $(1/2,\ 1/3)$, $(a,\ 0)$ и $(0,\ b)$ за кои било $a,\ b \in \mathbb{R}$. $f(1/2,\ 1/3) = 1/432$ е максимум. Екстрем има и во секоја точка $(a,\ 0)$ за $a \neq 1$ и $a \neq 0$; притоа важат $(*)$ од одговорот на вежбата 9. Помош. $z_{xx} = 6xy^2(1-2x-y)$, $z_{yy} = 2x^2(1-x-3y)$, $z_{xy} = x^2y(6-8x-9y)$; за $(1/2,\ 1/3)$: $AC - B^2 = (-1/9)\cdot(-1/8) - 1/144 > 0$. За $(a,\ 0)$ и $(0,\ b)$: $AC - B^2 = 0$, т.е. нема информација за екстрем. За $(a,\ 0)$ и $a \neq 1$, аналогна дискусија како во вежбата 9 доведува до горенаведениот заклучок. Во точката $(0,\ 1)$ нема екстрем. Имено, ако $|\ x_0\ |$ и $|\ y_0 - 1\ |$ се доволно мали, тогаш $f(x_0,\ y_0)$ го менува знакот (за $x_0 < 0$ имаме $x_0^3y_0^2 < 0$ и за $x_0 > 0$: $x_0^3y_0^2 > 0$, а $1 - x_0 - y_0$ во двата случаја има ист знак). И во $(0,\ b)$, за $b \neq 1$ нема екстрем. Имено, за доволно мали $|\ x_0\ |$ и $|\ y_0 - b\ |$, $1 - x_0 - y_0$ има ист знак како $1 - b$, а $x_0^3y_0^2$ го менува знакот, од што ќе следува дека $f(x_0,\ y_0)$, во околина на точката $(a,\ b)$ ќе имаат различни знаци, т.е. $f(0,\ b)$ не е екстрем.

11. $u(1,\ 1,\ 1) = 4$ е минимум. Решение. Од потребните услови $u'_x = 0$, $u'_y = 0$, $u'_z = 0$ го добиваме системот равенки $2x+y+z = 4$, $x+2y+z = 4$, $x + y + 2z = 4$, чиешто решение е $x = y = z = 1$. Потоа

$$d^2u = 4(h^2 + k^2 + p^2 + hk + kp + ph) = 2(h + k + p)^2 + 2(h^2 + k^2 + p^2) > 0$$

при $h^2 + k^2 + p^2 > 0$, каде што h, k и p се диференцијалите на x, y, z соодветно. Бидејќи $d^2u > 0$, во точката $(1,\ 1,\ 1)$ имаме минимум $u = 4$.

13. Во $\left(\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}\right)$ – максимум.

14. Во $\left(a\sqrt[8]{3},\ a\sqrt[8]{27}\right)$ – максимум, а во $\left(-a\sqrt[8]{3},\ -a\sqrt[8]{27}\right)$ – минимум.

15. $z(-2,\ 0) = 1$ е минимум, $z(16/7,\ 0) = -8/7$ е максимум.

16. $z\left(-\sqrt{3/2},\ 0\right) = 1/\sqrt{6}$ – максимум.

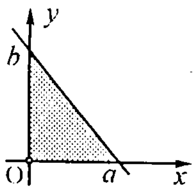
17. Стационарни точки: $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{\ln 2},\ 0\right)$ и $\left(-\sqrt{\ln 2},\ 0\right)$ во $(0,\ 0)$ има максимум, а во другите две точки нема екстрем; но, максимумот $z(0,\ 0) = 2$ не е НГВ, зашто на пример, $z(-2,\ 0) = 4 + 2\cdot e^{-4} > 2$.

V.3.5.

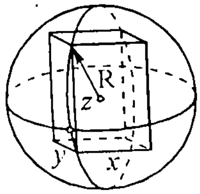
1. $z(0,\,0)=0$ – врзан минимум. **2.** Нема екстреми. Помош. "Кандидат" за екстрем е точката $(0,\,4,\,4)$, при што x_4 е "елиминирано" и е добиено: $u=x_1x_2+x_2x_3+x_3(8-x_1-x_2-x_3)=x_1x_2+8x_3-x_1x_3-x_3^2$. Ако ставиме: $x_1=\alpha_1,\ x_2=4+\alpha_2,\ x_3=4+\alpha_3$ ќе добиеме $u=16+\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3-\alpha_3^2$, па за $\alpha_1=0$: $u=16-\alpha_3^2<0$. Ако пак $\alpha_3=0$, а $\alpha_1>0$ и $\alpha_2>0$, тогаш $u=16+\alpha_1\alpha_2>16$. Значи, во $(0,\,4,\,4)$ нема екстрем.

3. $u(1,\,1,\,1)=2$ е условен максимум.
Решение. Ја формираме функцијата $\Phi=u+\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$, т.е.
$$\Phi=xy+yz+\lambda_1(y^2+x^2-2)+\lambda_2(y+z-2)$$
и, според потребните услови за екстрем, го добиваме системот од пет равенки:
$y+2\lambda_1x=0,\ x+z+2\lambda_1y+\lambda_2=0,\ y+\lambda_2=0,\ x^2+y^2-2=0,\ y+z-2=0$ по непознатите $x,\ y,\ z,\ \lambda_1$ и λ_2. Единственото решение на овој систем (при $x>0,\ y>0,\ z>0$) е $x=y=z=1,\ \ \lambda_1=1/2.\ \ \lambda_2=-1.$ $d^2\Phi=-dx^2+2dx\,dy-dy^2+2dy\,dz$ го менува знакот. Сепак, во точката $(1,\,1,\,1)$ функцијата $u=xy+yz$ има условен максимум, $u(1,\,1,\,1)=2$, што лесно се проверува од функцијата $u=y\sqrt{2-y^2}+2y-y^2$, добиена од $u=xy+yz$ и дадените врски.

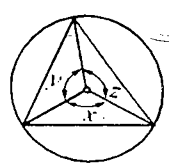
4. $V_{\min}=9$. Решение. Имаме: $X/a+Y/b+Z/c=1;\ 1/a+2/b+1/c=1$ $V=abc/6$. Да ставиме $z=1/V$. Тогаш
$$z=\frac{6}{abc}=6\frac{1}{a}\frac{1}{c}\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{2}=3xy(1-x-y)\,.$$
каде што $x=1/a,\ y=1/c$ и $x>0,\ y>0,\ x+y<1$. Значи треба да ја најдеме најголемата вредност на функцијата z во внатрешноста на триаголникот (црт. 1). Од $z_x=0$ и $z_y=0$ добивме $x=y=1/3$, т.е. $a=c=3,\ b=6$. Според тоа, $V_{\min}=9$.
Оваа задача може да се реши и со помош на врзани екстреми. Имено, ја формираме функцијата $\Phi(a,\,b,\,c)=V+\lambda\varphi$, каде што $V=abc/6$, $\varphi=1/a+2/b+1/c-1$ и од условите за екстрем го добиваме системот
$$\frac{bc}{6}-\frac{\lambda}{a^2}=0,\quad \frac{ac}{6}-\frac{2\lambda}{b^2}=0,\quad \frac{ab}{6}-\frac{\lambda}{c^2}=0,\quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1\,.$$
Одовде $a=c=b/2=3$.



Црт. 1



Црт. 2



Црт. 3

5. $x=y=z=2R/\sqrt{3}$. Решение. Ако страните на паралелопипедот ги означиме со $x,\ y,\ z$, тогаш тие го задоволуваат условот $x^2+y^2+z^2=$

$4R^2$ (црт. 2), а волуменот е определен со $V = xyz$. Од условите за врзани екстреми имаме: $yz + 2x\lambda = 0$, $xz + 2y\lambda = 0$, $xy + 2z\lambda = 0$, $x^2 + x^2 + z^2 = 4R^2$; $yz/x = xz/y = xy/z$, па $x = y = z$, $3x^2 = 4R^2$, $x = 2R/\sqrt{3}$.

Од геометриски причини е јасно дека се работи за најголема вредност. Значи, коцката е правоаголниот паралелопипед со најголем волумен што може да се впише во дадената топка.

6. Рамностраниот триаголник. Решение. Плоштината на триаголникот е $P = \frac{1}{2}r^2(\sin x + \sin y + \sin z)$, а x, y, z го исполнуваат условот $x+y+z = 2\pi$ (црт. 3), па $P = \frac{1}{2}r^2\big(\sin x + \sin y - \sin(x+y)\big)$. Во примерот 4 од **3.2** видовме дека оваа функција, при $x+y < 2\pi$ $x > 0$, $y > 0$, има најголема вредност за $x = y = 2\pi/3$, а тогаш е и $z = 2\pi/3$. Значи, од сите триаголници што можат да се впишат во даден круг, рамностраниот има најголема плоштина.

Аналоген резултат важи и за впишан n–аголник $n > 3$.

7. $\sqrt{30}$. Решение. Задачата се сведува на наоѓање врзан максимум на функцијата $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условите φ_1: $x^2 + y^2 - z = 0$ и φ_2: $x + 2y - z = 0$. Изедначувајќи ги со нула парцијалните изводи на помошната функција $\Phi = u + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$, се добиваат равенствата

$$2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0\,, \quad 2y + 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 = 0\,, \quad 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0\,,$$

од каде што $x = -\lambda_2/2(1+\lambda_1)$, $y = -\lambda_2/(1+\lambda_1)$, $z = (\lambda_1+\lambda_2)/2$. Заменувајќи во двете равенки на врските, се добива квадратна равенка по $\lambda_2/(1+\lambda_1)$, чиј еден корен доведува до $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ (во тој случај се добива координатниот почеток), а другиот корен е $\lambda_2/(1+\lambda_1) = -2$. Потоа лесно се добива $x = 1$, $y = 2$ и $z = 5$, т.е. дека точката $M(1, 2, 5)$ е најоддалечена од O; $\overline{OM} = \sqrt{30}$.

V.4. Диференцијална геометрија и векторски полиња

V.4.1.

1. а) $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$. б) $(2, 1/2\sqrt{t+1}, -1/t^2)$. в) $\big(t^2, \frac{2}{3}(t+1)^{3/2}, \ln t\big)$.
   г) $\big(3, 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}, \ln 2\big)$.
2. $\mathbf{v} = a(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $v = a\sqrt{2}$; $\mathbf{w} = a\mathbf{i}$, $w = a$.
3. а) $2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$. б) $\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}$. в) $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$. г) $(\mathbf{r}\ \dot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}})$.
4. Решение. $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow 2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{r}^2) = 0 \Rightarrow \mathbf{r}^2 = a^2$, т.е. $|\,\mathbf{r}\,| = a =$ конст. (≥ 0). Важи и обратното тврдење.
5. Решение. Од $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{o}$ следува дека $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ се колинеарни, па $\dot{x}/x = \dot{y}/y = \dot{z}/z (= \lambda)$, за секој t. Од тоа, при претпоставката дека $x, y, z \neq 0$, имаме $\ln|\,x\,| = \lambda t + c_1$, $\ln|\,y\,| = \lambda t + c_2$, $\ln|\,z\,| = \lambda t + c_3$, каде што c_1, c_2, c_3 се константни, т.е. $\mathbf{r} = (x, y, z) = (a_1 e^{\lambda t}, a_2 e^{\lambda t}, a_3 e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}(a_1, a_2, a_3)$, каде што $a_\nu = e^{c_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3)$. Значи $\mathbf{r}(t) = f(t)\cdot\mathbf{a}$, каде што $f(t) = e^{\lambda t}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. При претпоставката дека некоја од компонентните функции x, y, z е нула, следува дека соодветната компонента на константниот вектор $\mathbf{a}$ е нула.

Важи и обратното тврдење.

6. Помош. Да се искористи резултатот од вежбата 5: $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{o}$, $\mathbf{r} \times \mathbf{r}^{(n)} = \mathbf{o}$ – индукција по n.

7. а) $\mathbf{j} - \mathbf{k}$. б) и в) $\mathbf{o}$. **9.** Не; да се види на пример $\mathbf{r}$ од вежбата 7.

11. а) $\omega(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. б) $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$.

12. $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, $v = \sqrt{14}$; $\mathbf{w} = (0, 2, 6)$, $w = 2\sqrt{10}$.

V.4.2.

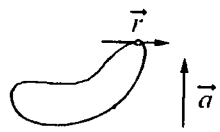
1. Параболата $y^2 = b^2 x/a$. **2.** Елипсата $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

3. Хиперболата $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$. **4.** Параболата $y^2 = b^2 x^3/a^3$.

5. Права: $x/a = y/b = z/c$, (a, b, c – константни). Решение. Од $\dot{x} = \lambda x$ имаме $\frac{dx}{x} = \lambda\, dt$, $\ln x = \lambda t + a_1$, $x = a e^{\lambda t}$ $(a = e^{a_1})$, $x/a = e^{\lambda t}$; аналогно, $y/b = e^{\lambda t}$, $z/c = e^{\lambda t}$.

6. Доказ. Од $\mathbf{r} \perp \dot{\mathbf{r}}$ следува дека $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = 0$, па $\mathbf{r}^2 = a^2$ ($a =$ конст.), што значи дека кривата е сферна. Обратно, ако $\mathbf{r}(t)$ е крива што лежи на сфера со радиус a, т.е. $\mathbf{r}^2 = a^2$, тогаш $2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = 0$, т.е. $\mathbf{r} \perp \dot{\mathbf{r}}$.

7. Решение. Ако ставиме $f(t) = \mathbf{a}\mathbf{r}(t)$, тогаш $f(t_1) = f(t_2)$, а од тоа следува дека $f(t^*) = 0$ за некој $t^* \in [t_1, t_2]$, т.е. имаме $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(t^*) = 0$, што значи дека $\mathbf{a} \perp \mathbf{r}(t^*)$. Од $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ следува дека кривата е затворена, па добиениот резултат може да се интерпретира геометриски на следниов начин. Ако во секоја точка од една затворена крива постои тангента, тогаш за секој вектор $\mathbf{a}$ постои точка во која тангентата е нормална на $\mathbf{a}$ (црт. 1).



Црт. 1

8. $x = t - 1$, $y = 1 - 2t$, $z = 3t - 1$; $x - 2y + 3z + 6 = 0$.

9. $x = 1 - 2t$, $y = 1$, $z = \sqrt{2}(1 + t)$; $x\sqrt{2} - z = 0$.

10. $x = -1 + 2t$, $y = 13 + 3t$, $z = 6t$; $2x + 3y + 6z = 37$.

11. $x = 1 + 2t$, $y = -1$, $z = 1 + t$; $2x + z - 3 = 0$.

12. 60^0. **13.** $\mathbf{r}(4\cos t,\, 4\sin t,\, 3t)$; $ds = 5\,dt$. **14.** $s = 2\,sh\,1$. **15.** $s = 15/2$.

V.4.3.

1. а) $\vec{\tau} = (1/9)(8, 4, 1)$. Помош. Да $\vec{\tau} = \dot{\mathbf{r}}/\mid\dot{\mathbf{r}}\mid$.

б) $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t,\, \sin t + \cos t,\, 1)$.

2. $\mathbf{r}(s) = \left(p,\, \frac{1}{p},\, \sqrt{2}\ln p\right)$, $p = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 + 4}\right)$.

3. а) $\vec{\tau} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $\vec{\beta} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$, $\vec{\nu} = (0, -1, 0)$.
Помош. $\vec{\beta} \parallel \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{b}$ (види (10)), $\vec{\beta} = \mathbf{b}/\mid\mathbf{b}\mid$; $\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$.

б) $\vec{\tau} = (1, 4, 2)/\sqrt{21}$, $\vec{\beta} = (-2, 0, 1)/\sqrt{5}$, $\vec{\nu} = (-4, 5, -8)/\sqrt{105}$.

4. $\vec{\omega} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} + \frac{1}{r}\vec{\beta}$. Решение. Да ставиме: $\vec{\omega} = a\vec{\tau} + b\vec{\nu} + c\vec{\beta}$; тогаш: $a = \vec{\omega}\vec{\tau}$, $b = \vec{\omega}\vec{\nu}$, $c = \vec{\omega}\vec{\beta}$. Со помош на формулите на Френе се добива: $a = -1/R$, $b = 0$, $c = 1/r$.

5. $K = \sqrt{19}/7\sqrt{14} = 1/\rho$; $T = -3/19 = 1/R$. 6. $\rho = 2\sqrt{2}$, $R = \infty$, $T = 0$.

7. $\rho = 4$, $R = \infty$, $T = 0$. 8. $\rho = R = 2a\,\mathrm{ch}^2\,t$.

9. $K = \sqrt{2}/\sin t = T$. 10. $K = e^{-t}\sqrt{2}/\sqrt{3}$, $T = e^{-t}/3$.

11. а) $2(x-3)+(y-1)+2(z-6)=0$. б) $-2(x-3)+2(y-1)+(z-6)=0$. в) $(x-3)+2(y-1)-2(z-6)=0$.

12. а) $\frac{x-4}{4} = \frac{y-8/3}{2} = \frac{z-2}{1}$. б) $\frac{x-4}{1} = \frac{y-8/3}{-4} = \frac{z-2}{4}$. в) $\frac{x-4}{4} = \frac{y-8/3}{-5} = \frac{z-2}{-6}$.

13. а) $x = e(1+u)$, $y = e^{-1}(1-u)$, $z = \sqrt{2}(1+u)$ (u – параметар). б) $x = e - e^{-1}u$, $y = e^{-1} + eu$, $z = \sqrt{2}(1+u)$. в) $x = e + u$, $y = e^{-1} + u$, $z = \sqrt{2}(1 - u\,\mathrm{sh}\,1)$.

14. а) $2x+y-z=1$. б) $x+y-z=0$. **Решение.** а) Бидејќи $(\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}) = 0$, за торзијата имаме $T = 0$, па значи кривата е рамнинска. Векторот на бинормалата е $\mathbf{B} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (4, 2, -2)$ за секој t, т.е. е константа, па оскулаторната рамнина на кривата во секоја точка е една иста. За $t = 0$ имаме $\mathbf{r}_0 = (1, 2, 3)$, па равенката на оскулаторната рамнина, во која лежи кривата, е: $4(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0$, т.е. $2x+y-z=1$. Оваа равенка може да се добие и со исклучување на параметарот t од равенките $x = 1-t$, $y = 2+t^2$, $z = 3-2t+t^2$.

V.4.4.

1. а) Рамнина, кога векторите $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ не се колинеарни. б) Права, кога $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни и барем еден не е нула; таа минува низ точката $C(c_1, c_2, c_3)$ и е паралелна со векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. в) Точка (точката C), кога $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

2. $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \geq 0$, т.е. полусфера со радиус a и центар во координатниот почеток.

3. $x^2+y^2 = a^2$, т.е. ротационен цилиндар.

4. Хиперболичен параболоид, $z = axy$.

5. За $u = u_0$(= конст.) добиваме $\mathbf{r} = \left(u_0 \cos v,\ u_0 \sin v,\ \sqrt{a^2-u_0^2}\right)$, т.е $x = \cos v$, $y = \sin v$, $z = \sqrt{a^2-c^2}$ = конст. ($c < a$). Значи, координатните криви се кружници $x^2+y^2 = u_0^2$ во кои рамнините z = конст. ја сечат полусферата $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \geq 0$. За $v = v_0$(= конст.) се добиваат криви во кои рамнините $y = x\,\mathrm{tg}\,d$ ја сечат полусферата.

6. Површината е ротационен цилиндар со радиус a. Координатните криви u = конст. се прави, а v = конст. се винтови линии.

7. Површината е конусна: $x^2+y^2 = z^2$. Кривите u = конст. се кружници, а v = конст. се прави.

8. $2x+2y-\sqrt{2}(z+1)=0$.

V.4.5.

1. а) Сфери: $x^2+y^2+z^2 = c^2$.
б) Конуси: $z^2 = (\sin c)^2(x^2+y^2)$, со врв во координатниот почеток.

2. а) $\mathrm{grad}\,u(A) = (9, -3, -3)$, $|\,\mathrm{grad}\,u(A)\,| = 3\sqrt{11}$;
$\mathrm{grad}\,u = 3(x^2-yz)\mathbf{i} + 3(y^2-xz)\mathbf{j} + 3(z^2-xy)\mathbf{k}$.

б) Во точките $M(x, y, z)$, за кои е $z^2 = xy$. Помош. $(grad\,u)\cdot \mathbf{k} = 0$.

в) $grad\,u = \mathbf{o}$ во точките $M(x, y, z)$ за кои $x = y = z$.
Помош. $\text{grad}\,u = \mathbf{o} \Leftrightarrow x^2 - yz = 0,\ y^2 - xz = 0,\ z^2 - xy = 0$; овие равенства да се помножат со x, y, z соодветно.

3. а) $\text{grad}\,u = -12\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $|\,\text{grad}\,u\,| = \sqrt{145}$.

б) $\text{grad}\,w(M_0) = \frac{1}{81}(-4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$; $|\,grad\,w = 1/9$.
Помош. Градиентот на полето $w(M)$ да се пресмета со помош на формулата 3^0 ставајќи: $u(M) = y$, $v(M) = x^2+y^2+z^2$; притоа $u(M_0) = 1$, $v(M_0) = 9$, $\text{grad}\,u(M_0) = \mathbf{j}$, $\text{grad}\,v(M_0) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

в) $\text{grad}\,f = f'(r)\cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$; $|\,\text{grad}\,f(r)\,| = |\,f'(r)\,|$.
Помош. Да се примени формулата $4'$; притоа: $\text{grad}\,r = \mathbf{r}/r$.

4. а) $\max \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 28$. Помош. Да се примени формулата (4). б) 9.

5. а) $-8/63$. Помош. $\mathbf{n} = \frac{1}{7}(2, 6, 3)$, $\text{grad}\,u(A) = \frac{2}{9}(1, -2, 2)$. б) $\frac{2}{3}$.

6. $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}\cdot\left(-\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$ (види вежба 3 в)); за $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ да е нула, треба $\mathbf{n}$ да е нормален на радиус-векторот $\mathbf{r}$.

7. $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = \frac{2}{r}\,u$, каде што $r = |\,\mathbf{r}\,|$; $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = |\,\text{grad}\,u\,|$ кога $a = b = c$, т.е. кога ниво–површините се сфери.

8. $\max \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 2\sqrt{2}/3$.

9. $\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = 3/\sqrt{10}$, каде што $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \text{grad}\,u(M_0)$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}+\frac{1}{2}\cdot\mathbf{j} = \text{grad}\,v(M_0)$.

V.4.6.

1. 3. **2.** 0. **3.** 0. **4.** 2c.

5. а) $\text{div}(u\mathbf{a}) = 4xy^2(x+y)$; $\text{rot}(u\mathbf{a}) = (-2x^2yz,\ 0,\ y^4 - 2x^3y)$.

б) $\text{div}(u\mathbf{a}) = 6x^3z + x^2z^2$; $\text{rot}(u\mathbf{a}) = (-2x^2yz,\ x^2z^2 - x^4,\ 2xyz^2)$.

6. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. б) 0.

в) Изразот $\text{rot}(\text{div}\,\mathbf{a})$ нема смисла, заштo $\text{div}\,\mathbf{a}$ е скалар.

10. а) Не, зашто $\text{div}\,\mathbf{r} = 3 \neq 0$. б) Не мора, зашто $\text{div}\,[f(r)\mathbf{r}] = rf'(r) + 3f(r)$, во општ случај, не е нула.

11. а) $f(r) = c/r^3$; б) $f(r) = c/r^2$, c е произволна константа.
Помош. а) Според вежбата 10 б): $\text{div}[f(r)\mathbf{r}] = rf'(r) + 3f(r) = 0$, па $r\frac{df}{dr} = -3f$, $\frac{df}{f} = \frac{3}{r}dr$; по интегрирањето и средувањето: $f(r) = c/r^3$.

12. Помош. а) $\text{rot}\mathbf{a} = \mathbf{o}$ и да се примени Т. 3.
б) $\text{grad}\,u = (y+x)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k} = \text{rot}\mathbf{a}$, па (11).
в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(y+z) = 0$ итн.

13. Помош. а) $\text{rot}\,\mathbf{a} = \frac{1}{r^3}\text{rot}\,\mathbf{r} + \left(\text{grad}\,\frac{1}{r}\right) \times \mathbf{r} = \mathbf{o} + \left(-\frac{3\mathbf{r}}{r^3}\right) \times \mathbf{r} = \mathbf{o}$.

в) $u_{xx} = (r^2 - 3x^2)/r^5$, $u_{yy} = (r^2 - 3y^2)/r^5$, $u_{zz} = (r^2 - 3z^2)/r^5$.

V.5. Задачи за повторување

1. а), б), г) се ограничени; в) неограничено.

2. а) На пример: $M = \{(x, y) \mid \mid x \mid \leq 1, \mid y \mid \leq 1\}$ во $\mathbb{R}^2$ и $N = \{x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{Q},\ k = 1, \ldots, n\}$ во $\mathbb{R}^n$.

б) $P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$ во $\mathbb{R}^2$.

3. $T(A; \varepsilon)$ и $T(B; \varepsilon)$, на пример за $\varepsilon = \frac{1}{3}\overline{AB}$, се дисјунктни.

5. Затворена едноставна област. **6.** Отворена едноставна област.

7. – **8.** Затворена сложена област; 7 – неограничена, 8 – ограничена.

9. Не е област (множеството не е сврзано).

11. $0 \leq xy \leq 1$. **12.** $1 < x^2 + y^2 < 4$. **13.** $2k \leq x^2 + y^2 \leq 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

14. $y > 0 \land 2k\pi < x < (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

15. $D = \{(x, y) \mid 0 < y < x - 1\} \cup \{(x, y) \mid x - 1 < y < 0\}$.

16. $-x^2 \leq y \leq x^2$, $0 < x \leq 2$. **17.** $z = \pi\left(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)$; D_z: $x, y > 0$.

18. $z = \frac{1}{2x}\sqrt{y^2 - 2x^2y}$, D_z: $x > 0$, $y > 2x^2$. **19.** $f(x, y) = x^2 - x - y$. Помош. $x + y = u$, $x - y = v$; $x = (u + v)/2$, $y = (u - v)/2$.

20. $f(y) = y^2 - 2y$, $z(x, y) = x^2 + y - 1$, за $y \geq 0$. **21.** 1. **22.** Не постои.

23. 2. **24.** 1. **25.** L' и L'' не постојат, а $L = 0$.

26. Непрекината во целата рамнина. (Имено, f е елементарна па – Т. 5 од **1.6.**)

27. Непрекината во $\mathbb{R}^3$. Помош. Да се стави $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \cos \beta$, $z = \rho \cos \gamma$, каде што $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ се косинуси на правецот на векторот $\overrightarrow{OX}$, $X = (x, y, z)$; $\mid f(X) \mid = \rho \mid \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \mid \leq \rho \to 0$ кога $X \to 0$.

28. Прекината во (0, 0). **29.** Непрекината во $\mathbb{R}^2$. Помош. Во прашање се само точките од кружницата $x^2 + y^2 = 1$;

$$\lim_{x^2+y^2 \to 1^-} f(x, y) = \lim_{\rho \to 1^-} \sqrt{1 - \rho^2} = 0.$$

31. Решение.

$$\lim_{t \to 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2(t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha)} = 0 = f(0, 0).$$

Но, граница на f во (0, 0) не постои. Имено, ако се земе низа точки $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ од кривата $y = x^2$, така што $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ кога $n \to \infty$, тогаш $f(x_n, y_n) = x_n^4/(x_n^4 + x_n^4) \to 1/2 \neq f(0, 0)$.

32. $2yz$. **34.** 1. **35.** 1. **38.** Да.

40. Решение. а) $f(0, 0) = 0$ и $\Delta f(0, 0) = \sqrt{\mid \Delta x \, \Delta y \mid} \to 0$ кога $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, т.е. f е непрекината во (0, 0).

б) $f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|}}{x} = 0$ и, аналогно, $f_y(0, 0) = 0$.

в) Кога дадената функција би била диференцијабилна во точката $(0,\ 0)$, би имале

$$\Delta f(0,\ 0) = \sqrt{|\ \Delta x\, \Delta y\ |} = \alpha\, \Delta x + \beta\, \Delta y\,,$$

каде што $\alpha,\ \beta \to 0$ кога $\Delta x\, \Delta y \to 0$. Но, да земеме $0 < \Delta x = \Delta y \to 0$; тогаш би добиле $1 = \alpha + \beta$, што противречи на претпоставката дека α и β се стремат кон нула.

г) Од равенството $f_x(x,\ y) = \frac{1}{2}\sqrt{|\frac{y}{x}|}\cdot \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$, и од тоа што

$$\lim_{n\to\infty} f_x\left(\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n}\right) = \lim \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty\,.$$

следува дека f_x не е ограничена во околина на точката $(0,\ 0)$. Истото важи и за f_y.

41. Помош. $f_x = 2(x+y)\sin(x^2+y^2)^{-1/2} + x(x+y)^2(x^2+y^2)^{-3/2}\cos(x^2 + y^2)^{-1/2}$, $f_x(0,\ 0) = 0$; за $x = y = 1/n\ (n \to \infty)$, f_x нема граница (зашто $\cos\left(n/\sqrt{2}\right)$ кога $n \to \infty$ нема граница), па f_x е прекината во $(0,\ 0)$. Истото важи за f_y. Но: $\Delta f(0,\ 0) = (\Delta x + \Delta y)^2 \sin(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-1/2} = \alpha\, \Delta x + \beta\, \Delta y$, каде што $\alpha = (\Delta x + \Delta y)\sin(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-1/2} = \beta \to 0$ кога $\Delta x,\ \Delta y \to 0$, т.е. f е диференцијабилна во $(0,\ 0)$.

42. Решение. а) Јасна е непрекинатоста на f во точката $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$. Поради $|\ xy/(x^2+y^2)\ | \leq \frac{1}{2}$, следува дека $f(x,\ y) \to 0$ кога $(x,\ y) \to (0,\ 0)$, а $f(0,\ 0) = 0$, па значи f е непрекината во $(0,\ 0)$.

б) $f_x = 2xy^3/(x^2+y^2)^2$ $f_y = x^2(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ при $x^2+y^2 > 0$, $f_x(0,\ 0) = f_y(0,\ 0) = 0$.

в) На пример, при $y = x = 1/n$ имаме $f_x\,(1/n,\ 1/n) = 2\cdot(1/n)^4/4\cdot(1/n)^4 \to 1/2 \neq 0 = f_x(0,\ 0)$.

43. а) $z_{xy} = (x^2-y^2)[tf''(t) + 3f'(t)]$. б) $f(t) = c_1\cdot\frac{1}{2t^2} + c_2$, каде што c_1 и c_2 се произволни константи.

44. $z_x = 2x + 2v/(x+y)$, $z_y = \cos y + 2v/(x+y)$.

45. $z_x = (1 + \sin x - \cos x)/(1+\sin x)^2$, $z_y = 0$.

46. $z_x = 1$ за $(4k-1)\frac{\pi}{2} < x + \alpha < (4k+1)\frac{\pi}{2}$, $z_x = -1$ за $(4k+1)\frac{\pi}{2} < x+\alpha < (4k+3)\frac{\pi}{2}$.

47. $z_x = 2xy\cdot z_u + yx^{y-1}\cdot z_v$, $z_y = x^2\cdot z_u + z_v x^y \ln x$.

48. а) $z_x = 4x\cdot f'$, $z_y = -3f'$; $z_{xx} = 16x^2 f'' + 4f'$, $z_{xy} = -12xf''$, $z_{yy} = 9f''$.

б) $f(t) = c_1 e^{t/3} + c_2$, каде што c_1 и c_2 се произволни константи.

49. $z_x = 2xz_u + ye^{xy}z_v$; $z_y = -2yz_u + xe^{xy}z_v$;

$z_{xx} = 4x^2 z_{uu} + 4xye^{xy}z_{uv} + y^2e^{2xy}z_{vv} + 2z_u + y^2e^{xy}z_v$, $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$

50. $\frac{x\,dy - y\,dx}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}$. **51.** $\frac{1}{2}$. **53.** $4z_{uu}\cdot dx^2 + 12z_{uv}\cdot dx\,dy + 9z_{vv}\cdot dy^2$.

54. а) $dz = (2x\cdot z_u + yz_v)dx + (-2y\cdot z_u + xz_v)dy$, $u = x^2 - y^2$, $v = 1 + xy$.
б) $d^2z = (4x^2\cdot z_{uu} + 4xy\cdot z_{uv} + y^2\cdot z_{vv} + 2z_u)dx^2 + (-8xy\cdot z_{uu} + 4(x^2 - y^2)z_{uv} + 2xy\cdot z_{vv} + 2z_v)dx\,dy + (4y^2z_{uu} - 4xyz_{uv} + x^2z_{vv} - 2z_u)dy^2$.
Помош. (Види (2′) од **2.6** или Пр. 5 од **2.7.**)

55. а) $u \approx 1 + \frac{1}{2}(x - y)$. б) $u \approx 1 + \frac{1}{2}(x - y - z)$.

56. $f(x, y) = 1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) + R_2$.

57. $f(x, y) = y + xy + \frac{1}{3!}(3x^2y - y^3) + R_3$. **58.** $\approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$.

66. а) $du = dx - dy$, $dv = \frac{1-v}{u}dx + \frac{v}{u}dy$.

б) $d^2u = 0$, $d^2v = \frac{2(v-1)}{u^2}du + \frac{2-4v}{u^2}dx\,dy + \frac{2v}{u^2}dy^2$,

67. $\frac{\partial u}{\partial x} = -(xu + yv)/(x^2 + y^2) = -2xy/(x^2 + y^2) = -\frac{\partial v}{\partial y}$;

$\frac{\partial u}{\partial y} = (xv - yu)/(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2 = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

68. $d^2u = \frac{2}{(1+y)^2}dx\,dy - \frac{2x}{(1+y)^3}dy^2 = -d^2v$.

69. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{5}{u}\sin v$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{5}{u}\cos v$, Решение. Диференцирајќи ги првите две дадени равенки и решавајќи по dv, добиваме $dv = -\frac{\sin v}{u}dx + \frac{\cos v}{u}dy$. Од третата равенка $dz = 5dv = \frac{-5\sin v}{u}dx + \frac{5\cos v}{u}dy$.

70. $dz = \frac{1}{2}\left[e^{-u-v}(u + v)dx + (v - u)e^{-u+v}dy\right]$. **71.** $x - 2y + z \mp 3 = 0$.

72. а) $(0, 0, \pm 6)$. б) $T_1(4, 1, -4)$, $T_2(-4, -1, 4)$.

73. $P = \frac{a^2b^2c^2}{|2H\,x_0y_0z_0|}$, каде што H е растојанието од координатниот почеток до тангентната рамнина, т.е. $1/H^2 = (x_0/a^2)^2 + (y_0/b^2)^2 + (z_0/c^2)^2$.

75. а) $\pm 5\sqrt{5}$. б) $3x - 2y + z = \pm 10$; $(\mp 2, \pm 1, \mp 2)$.

в) $(a, 3a/4, 3a)$, $a = \pm\sqrt{80/57}$.

76. $(\pm a^2/d, \pm b^2/d, \pm c^2/d)$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

77. а) $\cos\varphi = 3/\sqrt{10}$. б) $\varphi = \pi/2$; $3x + y + z = \sqrt{22} - 4$; $3x + y + z = 15 + 3\sqrt{11}$.

84. $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$. **85.** $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$. **86.** $\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho}{\rho'}$. $\left(\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}\right)$.

87. а) $K = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$. б) $K = \frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}$.

88. $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}$. **89.** $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}$. **90.** $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

91. $u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = w^2\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$, т.е. ист облик како дадената.

92. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$. **93.** $x = yf(z) + g(z)$, f и g се произволни двапати диференцијабилни функции.

94. а) $w = f(u)$, т.е. $\ln z = x + y + f(x^2 + y^2)$, f – произволна диференцијабилна функција. б) $z = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}f(x) + g(x)$, f и g – произволни двапати диференцијабилни функции.

95. $f(1,1) = 3$ - минимум. **96.** Нема екстреми. **97.** $f(2,2) = 12$ - минимум.

98. $f(1/a, 1/a) = 3a$: максимум ако $a < 0$, минимум ако $a > 0$.

99. $f(a, a) = 3a$: максимум при $a < 0$, минимум при $a > 0$.

100. $f(a/2, a/3) = a^6/432$ максимум. Стационарни точки се и: $(p, 0)$, $(0, q)$ за секои p, q. Неопходна е дискусија аналогна со таа за в. 9 од V.**3.4.**

101. $f\left(\frac{4a-2b}{3}, \frac{4b-2a}{3}\right) = \frac{4}{3}(ab - a^2 - b^2)$ минимум.

102. $3\sqrt[3]{3}$ минимум при $x = y = 1/\sqrt[3]{3}$. **103.** $f(4, 4) = 8$ – максимуум.

104. НМВ $f = -1$ во $(-1, 0)$; НГВ $f = 1$ во $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

105. НМВ $f = 0$ за $x = y = 0$; НГВ $f = \sqrt{3} + 1/2$ за $x = y = \pi/3$.

106. НМВ $f = 0$ за $x, y \in \{0, \pi\}$; НГВ $f = 8/3$ за $x = y = \pi/3$.

107. $a^3/27$ за $x = y = z = a/3$. **108.** $x = 3$, $y = 6$, $z = 9$.

109. Коцка со раб $\sqrt{P/6}$.

110. $1/\sqrt{2}$. Помош за а) p: $x = u + 1$, $y = 2u$, $z = u$; q: $x = v$, $y = v$, $z = v$; $A(u + 1, 2u, u) \in p$, $B(v, v, v) \in q$; да се најде минумум на функцијата $w = w(u, v)$, $w = \overline{AB}^2$.

111. Во точката $\left(a\sqrt[8]{3}, a\sqrt[8]{27}\right)$: максимум при $a > 0$, минимум при $a < 0$. За точката $\left(-a\sqrt[8]{3}, -a\sqrt[8]{27}\right)$ важат обратните заклучоци.

113. а) $f(3/5, 4/5) = 5$ – условен максимум, $f(-3/5, -4/5) = -5$ – условен минимум. б) $f(2, 2) = 4$ - условен минимум.

в) Условен максимум $\sqrt{2}$ за $x = y = \pm 2^{-1/4}$ и за $x = -y = \pm 2^{-1/4}$; условен минимум 1 за $x = 0$, $y = \pm 1$ и за $x = \pm 1$, $y = 0$.

г) Условен максимум: $\sqrt{3}$ за $x = y = z = 3^{-1/2}$; Условен минимум: $-\sqrt{3}$ за $x = y = z = -3^{-1/2}$.

114. $x = a/\sqrt{3}$, $y = b/\sqrt{3}$, $z = c/\sqrt{3}$, каде што x, y, z се координатите на она од темињата на паралелопипедот што лежи во првиот октант.
Помош. Волуменот е $v = 8xyz$. Наместо v, може да се разгледа $u = v^2/64a^2b^2c^2 = (x^2/a^2)(y^2/b^2)(z^2/c^2)$.

115. Решение. Ако r_1 и r_2 се полуоските на елипсата, тогаш плоштината е $P = r_1 r_2 \pi$. Значи, задачата се сведува на наоѓање полуоските на елипсата, т.е. најмалото и најголемото растојание на точките од елипсата до нејзиниот центар (координатниот почеток). Ќе ги одредиме екстремите на функцијата $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, при условите (E) и (Σ).

Од геометриски причини е јасно постоењето на маскимум и минимум. Ги составуваме равенките: $\Phi'_x = 2x + 2\lambda_1 x/a^2 + \lambda_2 k = 0$; $\Phi'_y = 2y + 2\lambda_1 y/b^2 + \lambda_2 m = 0$; $\Phi'_z = 2z + 2\lambda_1 z/c^2 + \lambda_2 n = 0$, каде што λ_1 и λ_2 се лагранжови множители. Ако ги помножиме овие равенки со x, y и z (по ред) и ги собереме, добиваме $r^2 = -\lambda_1$. Заменувајќи ги вредностите на x, y и z во (Σ), добиваме $\frac{k^2a^2}{a^2-r^2} + \frac{m^2b^2}{b^2-r^2} + \frac{n^2c^2}{c^2-r^2} = 0$, т.е. $\alpha r^4 - \beta r^2 + \gamma = 0$, каде што $\alpha = a^2k^2 + b^2m^2 + c^2n^2$, $\gamma = a^2b^2c^2(k^2+m^2+n^2)$, $\beta = a^2b^2(k^2+m^2) + a^2c^2(k^2+n^2) + b^2c^2(m^2+n^2)$. Таа е квадратна равенка во однос на r^2, а корените r_1^2, r_2^2 се квадратите на бараните полуоски на елипсата. Бидејќи $P = \pi r_1 r_2 = \pi\sqrt{r_1^2 r_2^2}$, а $r_1^2 r_2^2$ е еднаков со количникот од слободниот член спрема коефициентот при r^4 во горната равенка, добиваме: $P = \pi abc\sqrt{k^2+m^2+n^2}/\sqrt{a^2k^2+b^2m^2+c^2n^2}$.

116. Решение. Да ставиме $u = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Лесно се увидува дека $u = na$ е најмалата вредност на u при условите $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ и $x_1 x_2 \cdots x_n = a^n$. Од тоа следува дека $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > na$.
Да претпоставиме сега дека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се дадени позитивни броеви. Ако ставиме $x_1 x_2 \cdots x_n = a^n$, според горе добиениот резултат, ќе имаме $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq na = n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$.

117. а) 3. б) 6. в) $(1, -1, 1)$. г) -3.

119. а) Права што минува низ точката $(1, 2, 3)$, паралелно со векторот $(1, 1, -1)$.
б) Рамнострана хипербола $x^2 - z^2 = 1$ што лежи на рамнината $y = 2$.

120. Кривата е кружница што се добива како пресек на сфера (со центар во координатниот почеток) и рамнина (нормална на а).
Решение. Од $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ имаме: а) $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = 0$, што значи дека кривата е сферна; б) $\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{r}} = 0$, т.е. $\mathbf{ar} =$ конст., а тоа е рамнина, нормална на $\mathbf{a}$.

121. $M_1(0, 0, -1)$ и $M_2(2/3, -8/9, -1/27)$. **122.** $\arccos\left(14/3\sqrt{29}\right)$.

123. а) $\vec{\tau} = (1/3, 2/3, 2/3)$; $\vec{\beta} = (-2/3, 2/3, -1/3)$; $\vec{\nu} = (2/3, 1/3, -2/3)$.
б) 2/27. в) 2/27.

124. а) $\rho = (2a^2 + t^2)^2/4a^3 = -R$. б) $\rho = R = (t^2+1)^2/(t^2\sqrt{2})$.

126. а) Точката $(a, 0, 0)$ се добива за $t = \pi/2$ и за $t = 3\pi/2$. б) Равенката на нормалната рамнина е $X\cdot\sin 2t + Y\cdot\cos 2t - Z\cdot\sin t + D = 0$, каде што $D = -a\sin^2 t\sin 2t - a\sin t\cos t\cos 2t + a\sin t\cos t$; по соодветни трансформации, се добива дека десната страна е нула (за секој t, т.е. $D = 0$, што значи дека нормалната рамнина минува низ $(0, 0, 0)$.
в) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\sin^4 t + a^2\sin^2 t\cos^2 t + a^2\cos^2 t = a^2$, за секој t.

127. Помош. Тангентниот вектор во произволна точка t на кривата е $\dot{\mathbf{r}} = e^{t/\sqrt{2}}(-\sin t + (\cos t)/\sqrt{2},\ \cos t + (\sin t)/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, а векторот на правецот на генератрисите на површината $x^2 + y^2 = z^2$ во таа точка е $\mathbf{g} = (\cos t, \sin t, 1)$; $|\ \dot{\mathbf{r}}\ | = e^{t/\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$, $|\ \mathbf{g}\ | = \sqrt{2}$, $\dot{\mathbf{r}}\mathbf{g} = e^{t/\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$, па за аголот φ меѓу $\dot{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{g}$ имаме $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$ за секој t, т.е. $\varphi = \pi/4$.

128. Точката $(1, 0, 0)$ за $t = 0$. **129.** а) $x = \pi$, $z = y + 2$. б) $x = \pi$, $y + z = 6$.

130. $5 + 11\sqrt{3}/2$. **131.** а) $(f_x + f_y)/\sqrt{2}$. б) $-f_x$.

133. а) $2 + \sqrt{2}$. б) $(2, 2, 2)$, $2\sqrt{3}$. **134.** $(yz + xz + xy)/\sqrt{3}$; $5/\sqrt{3}$.

135. а) $\operatorname{grad} u(M) = (18, -9, 18)$, $|\operatorname{grad} u(M)| = 27$. б) (x, y, z), за кои $z^2 = xy$.
в) (x, y, z), такви што $x = y = z$.

137. а) $2/r$. б) $f'(r) + 2f(r)/r$. в) c/r^2, c е произволна константа.

VI.1. Еднокатни интеграли

VI.1.1.

1. Помош. Функцијата $F(x, y)$ е непрекината на целата рамнина, па $F(y)$ е непрекината за $y = 0$, а од тоа следува

$$\lim_{y\to 0} F(y) = F(0) = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} |\, x \,|\; dx = 2\int_{0}^{1} x\, dx = 1\,.$$

2. $8/3$. **3.** $\pi/4$ **4.** $\pi \ln\left(2 + \sqrt{4-y^2}\right) - \pi \ln 2$.

Помош. Во примерот 2 покажавме дека

$$F(0) = \pi \ln 2, \quad F'(y) = \frac{\pi}{y}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\right), \quad F'(0) = 0\,,$$

но не го определивме доменот на $F(y)$, зашто се интересиравме само за $F(1)$. Доменот на $F(y)$ се определува од: $2 + y\cos x > 0$, за $x \in [0, \pi]$. Според тоа: $2 + y > 0$, $2 - y > 0$, т.е. $|\, y \,| < 2$. Покрај тоа, $F(y)$ е непрекината во доменот, и

$$F(y) = F(0) + \int_0^y F'(t)dt = \pi \ln 2 + \pi \int_0^y \frac{1}{t}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}\right) dt =$$

$$= \pi \ln 2 + \pi \int_2^{\sqrt{4-y^2}} \frac{du}{u+2} = \pi \ln 2 + \pi \ln\left(2 + \sqrt{4-y^2}\right) - \pi \ln 4\,.$$

7. $\frac{32\,\pi}{3}$.

VI.1.2.

1. а) $x^2y + xy + \cos y$. б) $x^2y + xy + \ln y$. в) $x^2y + xy - 2y + \sqrt{y}$.
3. $x^3 + y^3 - 10$. **4.** $x^4 + 3y^2x + y^3 - 3$. **5–6.** Не постои.
7. $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 1$. **8.** $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. **9.** $\pi - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
10. 3–4: целата рамнина. 7: $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$.
    8: $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$. 9: $\{(x, y) \mid y < 0\}$.
11. Решение. Кога таква функција $z(x, y)$ би постоела, тогаш би имале $z = z_0 + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, каде што $z_0 = z(0, 1)$, $y > 0$. Потоа, со исти расудувања како во примерот 3, би добиле дека $z(x, y)$ има облик сличен на (9), со тоа што на десната страна секаде би требало да се додаде собирок z_0. Од тоа би следувало дека:

$$z = (0, 1) = \lim_{x\to 0+} z(x, -1) = z_0 + \pi\,,$$

а и:

$$z = (0, -1) = \lim_{x\to 0^-} z(x, -1) = z_0 - \pi\,.$$

VI.1.3.

1. $xyz + y^2z + z^2y + xy + y^2 + \sin(x + z)$.
2. $xy + xz + zy + C$ (C е која било константа).
3. Не постои. **4.** $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C$. **5.** $\frac{x-3y}{z} + \frac{z^3}{3} + C$, за $z \neq 0$.

VI.1.4.

1. $x^4 + 3xy^2 + y^3 + C$. **2.** Помош. а) Со помош на (8), добиваме $z = y\exp\big(F(x)\big) - y_0\exp\big(F(x_0)\big)$, па решението има облик $y\exp\big(F(x)\big) - y_0\exp\big(F(x_0)\big) = c_0$, каде што c_0 е константа и $\exp(t) = e^t$. Ставајќи $c = c_0 + y_0\exp\big(F(x_0)\big)$ и $f(x) = \int p\,dx$, ја добиваме формулата (6). б) Равенката $y' + p(x)y = 0$ може да се претстави во обликот $\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$.

3. $x + y^2 \ln\frac{x}{e} = C$. Помош. Заменувајќи во (9), по средувањето, ја добиваме ДР $x\lambda' + 2\lambda = 0$, за која $\lambda = x^{-2}$ е партикуларно решение, во секој интервал што не ја содржи нулата. Барајќи решение во $(0, +\infty)$, добиваме:

$$z = \int_1^x \frac{t+y^2}{t}\,dt + \int_1^y -2t\,dt = (x+1) + y^2\ln x - y^2 + 1 = x + y^2(\ln x - 1)\,.$$

7. $y = y_1[\exp(-\int p\,dx) + C_2] = y_1\left[\exp\left(-\int \frac{2y_1'+y_1}{y_1}\,dx\right) + C_2\right]$.

Помош. Заменувајќи: $y = y_1u$, $y' = y_1'u + y_1u'$, $y'' = y_1''u + 2y_1' + y_1u''$ во ДР $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ добиваме: $u(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1) + y_1u'' + 2y_1'u' + y_1u' = 0$, т.е. $u'' + pu' = 0$, каде што $p = (2y_1' + y_1)/y_1$. Од тоа следува: $u' = C_1\exp(-\int p\,dx)$, а потоа и: $u = C_1\exp(-\int p\,dx) + C_2$, па со $y = y_1u$ е дадено општото решение на дадената ДР.

VI.2. Линиски интеграли

VI.2.1.

1. 15. **2.** 24. **3.** а) 4/3. б) 13/12. в) 23/15. **4.** 12. **5.** 2π.

6. 0. (Треба да се забележи дека во задачите 5 и 6 немаме едноставни криви; имено, во 5, единичната кружница се обиколува двапати, а во 6 – петпати. Овде, десната страна од 1^0 (според забелешката 1) се смета за дефиниција на левата страна.)

VI.2.2.

2. 8. **3.** 4. **4.** а) 1/2. б) $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. **5.** $4\pi\sqrt{3}$.

VI.2.3.

1. 0. **2.** $-2ab\pi$. **3.** 0. **4.** 15. **5.** $3a^2\pi/8$. **6.** $2a^2\pi$.

VI.2.4.

1. 13/3 **2.** 14. **3.** 1/2. **4.** 0. **5.** $\sqrt{17} - \sqrt{7}$. **6.** $c - \operatorname{arctg}(x/y)$.

7. Левата страна е π, а десната е $-\pi$.

VI. 2.5.

1. 0. **2.** 0. **3.** $T(0, 0, 2b\pi)$. **4.** $T(0, 0, 0)$. **5.** 0. **6.** $a + 2b\pi$.

8. 1. $u = xyz$; 6. $u = x^2y^3z^4$; 7. $u = x + y + z$.

9. $A = \int\limits_{MNSM} \sin(x+y)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx - \int\limits_{\pi/2}^{0} dx = 1+\pi/2$. Силата не е потенцијална.

10. $A=0$; силата е потенцијална.

VI.3. Двојни и тројни интеграли

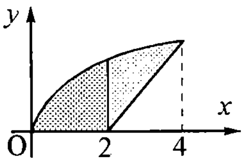
VI.3.1.

1. $V = \frac{16}{3}$. Помош. $V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, каде што $z = f(x,y) = x$, а областа D е определена со $x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 0$. Имајќи пак предвид дека рамнината $y=0$ го дели телото на два еднакви дела, би можело за D да се земе четвртинката од кругот во првиот квадрант со тоа што резултатот би се помножил со 2.

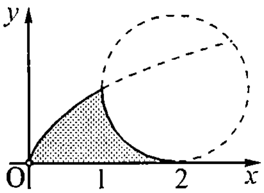
2. $V = \frac{a^4\pi}{4}$. Помош. Четвртинка од V ќе се добие ако се пресмета соодветниот двоен интеграл за $f(x,y)=y^2$, каде што D е четвртинка од кругот $x^2+y^2 \le a^2$ во првиот квадрат.

3. $V = 32\pi$. Помош. $V = 4\iint\limits_D f(y,z)\,dy\,dz$, каде што D е четвртинка од кругот $y^2+z^2 \le 16$, $4\cdot f(y,z) = y^2+z^2$.

4. $J = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} z\,dy + \int\limits_0^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} z\,dy$. Помош. Областа D е претставена на црт. 1(4).



Црт. 1(4)



Црт. 2(5)

5. $J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} z\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{y(x)} z\,dy$, каде што $y(x) = 1-\sqrt{4x-x^2-3}$.

Помош. Областа D е делот од рамнината ограничена со апсцисната оска, кривата $y^3 = x^2$ и долниот дел од кружницата $(x-2)^2+(y-1)^2=1$. (црт. 2(5)).

6. $J = \int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-y_1(x)}^{y_1(x)} z\,dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-y_2(x)}^{y_2(x)} z\,dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{-y_1(x)}^{y_1(x)} z\,dy$,

каде што $y_1(x) = \sqrt{9-x^2}$, $y_2(x) = \sqrt{1+x^2}$.

7. $J_4 = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} z\,dx$. $\quad J_5 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} z\,dx$.

$$J_6 = \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} z\,dx + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} z\,dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} z\,dx + \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} z\,dx + \int_{1}^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} z\,dx\,.$$

Притоа, со J_4, J_5, J_6 е означен интегралот J во вежбата 4, 5, 6 – соодветно.

8. Помош. Според **1.1**, $F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ е непрекината функција на $[a, b]$, од што според Т. 2 од III.5.3) следува дека постои ξ меѓу a и b, таков што:

$$J = \int_a^b F(x)\,dx = (b-a)F(\xi) = (b-a)\int_c^d f(\xi, y)\,dy;$$

од исти причини, постои η меѓу c и d, таков што

$$\int_c^d f(\xi, y)\,dy = (d-c)f(\xi, \eta)\,.$$

9. а) $\pi(e-1)/2$. б) $2/(e-1)$.

10. Помош. Имајќи ја предвид симетричноста на областа D, како и фактот што z не се менува ако x или y го промени знакот, добиваме:

$$V = 4\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy + 4\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy = J_1 - J_2\,;$$

$$J_1 = \frac{8}{3}\int_0^2 (2+x^2)\sqrt{4-x^2}\,dx, \quad J_2 = \frac{4}{3}\int_0^1 (1+2x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Ставајќи $x = 2\sin t$ во J_1, а $x = \sin t$ во J_2 добиваме дека $J_1 = 8\pi$, $J_2 = \pi/2$, па $V = J_1 - J_2 = 15\,\pi/2$.

11. Да се примени Т.6.

13. Со помош на формулата од в. 11, се добива $J = 0$.

14. Ако $D_{(i)}$ е делот од областа D во i–от квадрант ($i = 1, 2, 3, 4$), тогаш:

$$\iint_{D_{(i)}} (x+2y)\,dx\,dy = -\iint_{D_{(i+2)}} (x+y)\,dx\,dy\,,$$

за $i = 1, 2$, така што до резултатот $J = 0$ се доаѓа директно со помош на Т. 6.

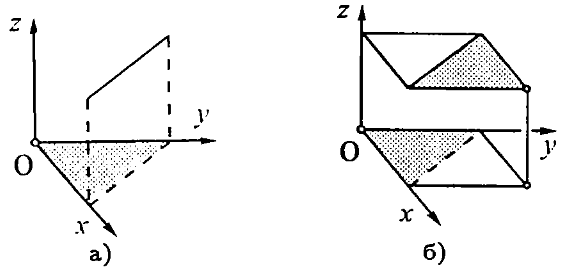
15. Директно, или со помош на резултатот од претходните две вежби, се добива дека бараниот интеграл е 3π.

VI.3.2.

1. Нека $A, B \in D$ се такви што $\overline{AB} = \delta$. Сите точки од D се наоѓаат во внатрешноста на кругот со центар во A и радиус δ, а од тоа следува а). Исто така, сите точки од D лежат во внатрешноста на кругот со центар во A и радиус δ, а и во внатрешноста на кругот со центар O и ист радиус δ; од тоа следува б). Дека и во двата случаја важи стриктно неравенство следува од фактот што дијаметарот на еден круг со радиус δ е 2δ, а дијаметарот на заедничкиот дел на круговите со центри A и B и ист радиус δ е $\delta\sqrt{3}$.

2. Заклучокот следува од неравенствата: $d \leq \overline{MP} \leq \delta$.

3. а) Имајќи предвид дека $[x+y]=0$, за $0 \leq x+y < 1$, $[x+y]=1$, за $x+y=1$, добиваме дека графикот на функцијата $z=[x+y]$ е како во црт. 3а), т.е. се состои од сите точки на триаголникот D (без хипотенузата) во рамнината $z=0$ и од точките на отсечката $\{(t,\, 1-t,\, 1) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ во рамнината $z=1$.



Црт. 3(3)

Нека $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ е разбивање на D, такво што $\delta^{(n)} = \max \delta(D_k) < \varepsilon$, каде што ε е доволно мал број. (На пример $\delta < 1/8$). Нека $D_1, D_2, \ldots, D_r$ $(r < n)$ имаат заеднички точки со правата $x+y=1$, додека D_k за $k > r$ нема заедничка точка со таа права. Тогаш, ако се има предвид резултатот од в. 2, добиваме дека за соодветната интегрална сума се задоволени релациите:

$$\sigma_n = f(\xi_1,\, \eta_1)P_1 + \cdots + f(\xi_r,\, \eta_r)P_r \leq P_1 + \cdots + P_r < \varepsilon\sqrt{2},$$

па значи: $\sigma_n \to 0$, кога $n \to \infty$, т.е. $\mathrm{Rim}([x+y],\, D) = 0$.

б) Да ја поделиме прво областа на две подобласти

$$D_1 = \{(x,\, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x,\, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x+y \geq 1\}.$$

Според а) имаме $\mathrm{Rim}([x,\, y], D_1) = 0$, а со слични расудувања како во примерот 1, се добива: $\mathrm{Rim}\,([x+y],\, D_2) = 0 + 1/2 = 1/2$.

4. Помош. Да ја поделиме D на подобласти $D_1, \ldots, D_n$, каде што:

$$D_k = \{(x,\, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ \frac{k-1}{n} \leq y \leq \frac{k}{n}\}.$$

Тогаш: $P_k = 1/n$ за секој k, па $\max P_k = \frac{1}{n} \to 0$, за $n \to \infty$. Ако ставиме $\xi = 0$, $\eta_k = \frac{k}{n}$, добиваме:

$$\sigma_n = f(\xi_1,\, \eta_1)P_1 + \cdots + f(\xi_n,\, \eta_n)P_n = 0,$$

па, значи, $\lim \sigma_n = 0$. Добиениот резултат противречи на фактот дека $\mathrm{Rim}(xy,\, D) = 1/4)$.

5. Помош. Слично како Т. 3, т.е. вежбата 4 од III.**5.1**.

6. Нека $D = \{(x,\, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, каде што: $a < b$, $c < d$. За секој природен број m, секој од сегментите $[a,\, b]$, $[c,\, d]$ се делат на по m еднакви дела $[x_{i-1},\, x_i]$, $[y_{i-1},\, y_i]$, каде што $i = 1, 2, \ldots, m$. Според тоа:

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad x_i = a + \frac{i(b-a)}{m}, \quad y_i = c + \frac{i(d-c)}{m}.$$

Тогаш правоаголникот D ќе се разбие на m правоаголници D_{ij}. Според вежбата 8 од **3.1**, постојат $(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$, такви што:

$$\iint\limits_{D_{ij}} f(x, y)\,dx\,dy = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1} f(\xi_i, \eta_j) = \frac{(b-a)(d-c)}{m^2} f(\xi_i, \eta_j). \qquad (*)$$

Од тоа следува дека:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{D_{ij}} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{(b-a)(d-c)}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j). \qquad (**)$$

Десната страна од (**) е еднаква со римановата сума σ_n, каде што $n = m^2$, при специјален избор на точките $(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$. Имајќи предвид дека дијаметарот на правоаголникот е неговата дијагонала $\sqrt{2}/m$, добиваме дека се исполнети сите услови σ_n да е риманова низа. Од сето тоа следува:

$$\mathrm{Rim}\big(f(x, y), D\big) = \lim_{m\to\infty} \sigma_{m^2} = \iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy.$$

8. Ги наоѓаме прво најголемата вредност z_1 и најмалата вредност z_2 од функцијата $z = x + y + 10$ на D. (Да се види V.**3.2.**) Се добива, имено, дека $z_1 = 2(5-\sqrt{2})$, $z_2 = 2(5+\sqrt{2})$, од каде што (според вежбата 7) се добива:

$$\iint\limits_{D} 2(5-\sqrt{2})\,dx\,dy \le J \le \iint\limits_{D} 2(5+\sqrt{2})\,dx\,dy,$$

т.е. $4\pi(5-\sqrt{2}) \le J \le 4\pi(5+\sqrt{2})$.

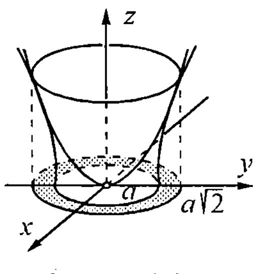
9. $4\pi \le J \le 22\pi$.

VI.3.3.

2. $2a^3\pi/3$. **3.** $-6\pi^2$. **4.** $\frac{3}{4}(\pi+2)$.

5. a^2. **6.** $45\pi/32$.

7. Претпоставуваме дека $a > 0$, така што треба да се пресмета волуменот на телото ограничено со параболоидот $2az = x^2 + y^2$, хиперболоидот $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, и рамнината $z = 0$, при што $z \ge 0$. Кругот $z = a$, $x^2 + y^2 = 2a^2$



Прт. 4(7)

е пресек на двете површини, а $z = 0$ и $x^2 + y^2 = a^2$, на xy–рамнината и хиперболоидот (прт. 4(7)). Минувајќи во поларен систем добиваме:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \frac{\rho^2}{2a}\cdot\rho\,d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2}} \sqrt{\rho^2 - a^2}\,\rho\,d\rho = \frac{a^3\pi}{3}.$$

За $a < 0$, $V = -a^3\pi/3$. **8.** $3\pi/32$. **9.** 4π.

10. Нека $D = \{(x, y) \mid a_1 \le x \le a_2,\ b_1 \le y \le b_2\}$. Ако ставиме $x = ax^*$, $y = by^*$, тогаш

$$D^* = \{(x^*, y^*) \mid \frac{a_1}{a} \le x^* \le \frac{a_2}{a},\ \frac{b_1}{b} \le y^* \le \frac{b_2}{b}\}.$$

Да го поделиме D на m^2 правоаголници со правите $x = x_i$, $y = y_j$, каде што

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = a_2, \quad b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2 .$$

За $n = m^2$, на римановата сума:

$$\sigma_n = \sum_{i,j=1}^{m} f(x_i, y_j)(x_{i-1} - y_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

од $f(x, y)$ на D ѝ одговара римановата сума σ_n^* од $f(ax, by)$ на D^*:

$$\sigma_n^* = \sum_{i,j=1}^{n} f(ax^*, by^*)(x_i^* - x_{i-1}^*)(y_j^* - y_{j-1}^*),$$

а притоа $\sigma_n = ab\sigma_n^*$. Од тоа следува бараниот заклучок.

11. $x = 3\rho\cos\varphi$, $y = 2\rho\sin\varphi \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \rho^2 = 1$; значи $\rho = 1$ е елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$, $\varphi = \pi/4$ е полуправата $y = \frac{2}{3}x$, $x \geq 0$.

VI.3.4.

1. π. 2. Дивергентен. 3. πe.

4. $J^2 = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, каде што $D = \{(x, y)\ (x \geq 0, \ y \geq 0)\}$, па (според примерот 3) $J = \sqrt{\pi}$.

VI.3.5.

1. $\left(2 \cdot 2^{1/3} - 1\right)\left(3\sqrt{3} - 1\right)$. 2. $1/45$. 3. $3\pi/8$.

5. Тоа е половина од волуменот на телото ограничено со параболоидот $4z = x^2 + y^2$, цилиндарот $x^2 + y^2 = 2x$ и рамнината $z = 0$.

7. Помош. Според (3) од **1.3**, $F(x, y) = \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)dz$ е непрекината на $D\{(x, y) \mid a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq y \leq b_2\}$, од што (според Т. 2. од **3.1**) добиваме:

$$J = \int\limits_{a_1}^{a_2} dx \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x, y)\,dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{a_2} F(x, y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{a_2} dx \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)dz .$$

VI.3.6.

2. $\pi/15$. Помош. Во сферен систем. Имајќи предвид дека G е внатрешноста на топката со центар во $(0, 0, 1/2)$ и радиус $1/2$, добиваме дека: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \rho \leq \cos\theta$.

3. $7\pi/6$. Помош. Да се премине во цилиндричен систем.

4. $14\sqrt{2}\,\pi/3$. Помош. Ако се премине во сферен систем ќе се добие дека $V = 8\,J$, каде што:

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int\limits_1^2 \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho .$$

5. $V = 8abc \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho = 4abc\pi/3.$

6. Рамнината го дели елипсоидот на два дела. Волуменот V_1 на едниот дел изнесува:

$$V_1 = 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta\, d\rho = 4abc\pi(2-\sqrt{2})/6,$$

а на другиот: $V_2 = 2abc\pi\sqrt{2}/3$.

7. Резултатот од вежбата 5 може да се добие и со смената $x = ax^*$, $y = by^*$, $z = cz^*$, слично како во примерот 4 од **3.3.** Со таа смена, задачата 6 се сведува на определување на волуменот на калотата што ја исекува од една топка со радиус 1, рамнина што е на растојание $\sqrt{2}/2$ од центарот на топката.

8. б) За $\rho = \rho_0$ (=константа), елипсоид: $\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho_0^2$. За $\varphi = \varphi_0$, полурамнина $ay = bx \operatorname{tg}\varphi_0$. За $\theta = \theta_0$ $(0 \le \theta \le \pi)$, едностран елиптичен конус со врв во координатниот почеток и оска – оската Oz.

VI.3.7.

1. $J = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$

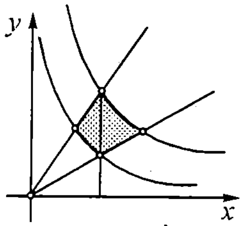
2. Ставајќи $y = ux$, $xy = v$, добиваме: $x = \sqrt{v/u}$, $y = \sqrt{uv}$, од што следува:

$$J = \int_1^4 du \int_2^5 \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{2u}\, dv = \frac{63}{16}.$$

3. $y^2 = ux$, $x^2 = vy$; $x = u^{1/3}v^{2/3}$, $y = u^{2/3}v^{1/3}$; $P = 16/3$.
4. $x + y = u$, $y = vx$; $x = u/(1+v)$,
$y = uv/(1+v)$; $2(1+c)(1+d)P = (b^2-a^2)(d-c)$.
6. 9/4. Во в) треба фигурата ограничена со кривите $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$ (во рамнината $z = 0$) да се подели на два дела D_1, D_2 (в. црт. 5(6)), така што

$$D_1: \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le 1, \quad \frac{1}{x} \le y \le 2x$$

$$D_2: 1 \le x \le \sqrt{2}, \quad x \le y \le \frac{2}{x}.$$



Црт. 5(6)

VI.3.8.

1. 3/2. **2.** $8\pi/5$. Помош. $\gamma(M) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3. $2\pi kr^2/3$. Помош. Координатниот почеток да се постави во центарот на кругот; $\gamma(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}/r$.

4. $59\pi/15$. Помош. $\gamma = z$; да се воведат цилиндрични координати.

5. (1, 2, 1/2). **6.** (3, 3, 45/32). **7.** (0, 0, 3). **8.** (0, 0, 4/5); $m = 8\pi$.

9. а) $I_k = (3a^2 + 4h^2)\pi a^2 h/12$. б) $I_z = \pi a^4 h/2$. Помош. Координатниот почеток да се постави во центарот на долната основа од цилиндарот, оската Ox – во правец на избраниот дијаметар, а оската Oz – во правец на оската на цилиндарот. Да се премине во цилиндрични координати.

10. $4\pi^2$; во сферни координати. **11.** $I_{yz} = I_{zx} = \pi h^5/20$, $I_{xy} = \pi h^5/5$.

12. $I_{xy} = 28\pi$, $I_{zx} = 8\pi/3 = I_{yz}$.

13. а) $V = 4\pi/3$. б) $S_{xy} = 10\pi$. в) $T(0,\,0,\,3/4)$. **14.** а) $(a/4,\,b/4,\,c/4)$. б) $I_x = a^3bc/60$, $I_y = b^3ac/60$, $I_z = c^3ab/60$, $I_0 = abc(a^2 + b^2 + c^2)/60$.

15. $I_y = 16/5$. **16.** а) $I_0 = 5ka^5/12$. Помош. $\gamma = ky$, k–коефициент на пропорционалноста. Координатниот почеток да се постави во едно од темињата на квадратот, а координатните оски – по две негови страни. б) $2a^4k/3$, k–коефициент на пропорционалноста.

17. $\overline{x} = 3a/5$, $\overline{y} = 3a/8$. **18.** $P = 8$; $\overline{x} = 2/5$, $\overline{y} = 0$. **19.** $\overline{x} = 5a/6$, $\overline{y} = 0$.

20. Помош. Да избереме координатен систем така што тежиштето $T(\overline{x},\,\overline{y},\,\overline{z})$ да се совпадне со координатниот почеток $O(0,\,0,\,0)$, а Σ_1 да е рамнината Oxy. Тогаш Σ_2 има равенка $z = H$. Да ја поделиме областа G на два дела, G^* и G^{**}, така што точката $(x,\,y,\,z)$ од G да е во G^* ако $z \le 0$, а во G^{**} за $z \ge 0$. Тогаш

$$J_2 = \iiint\limits_{G^*}(H - z)^2\gamma\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{G^{**}}(H - z)^2\gamma\,dx\,dy\,dz =$$
$$= mH^2 + J_1 - 2H\cdot\iiint\limits_{G} z\gamma\,dx\,dy\,dz = J_1 + mH^2\,,$$

бидејќи $0 = m\overline{z} = S_{xy} = \iiint\limits_{G} z\gamma\,dx\,dy\,dz$.

21. а) $V\cdot\overline{x} = \iiint\limits_{G} x\,dV$, $V\cdot\overline{y} = \iiint\limits_{G} y\,dV$, $V\cdot\overline{z} = \iiint\limits_{G} z\,dV$; притоа, V е волуменот на областа G.

б) $P\cdot\overline{x} = \iint\limits_{D} x\,dx\,dy$; $P\cdot\overline{x} = \iint\limits_{D} y\,dx\,dy$; притоа, P е плоштината на областа D.

VI.4. Површински интеграли

VI.4.1.

1. $8a^2$. (На ист начин како и во примерот 2.)

2. $2a^2(\pi + 4 - 4\sqrt{2})$. **3.** $2\sqrt{2}$.

4. Да, зашто плоштините на површините во примерот 1 и во вежбата 1 се еднакви. (Зошто?).

5. Доказ. Нека телото се добива со ротација на делот од кривата $y = f(x)$, за $a \le x \le b$, околу x–оската. Ја разгледуваме половината од добиената ротациона површина при која $z \ge 0$. (На црт. 1 е претставен еден дел од таква ротациона површина – четвртинката што се наоѓа во првиот квадрант.) Равенката на ротационата површина гласи: $\sqrt{y^2 + z^2} = f(x)$, т.е. $z = \sqrt{f^2 - y^2}$, при што е ставено f наместо $f(x)$. Од тоа добиваме: $z_x = ff'/\sqrt{f^2 - y^2}$, $z_y = -y/\sqrt{f^2 - y^2}$. па

$$1+z_x^2+z_y^2=[f^2+f^2f'^2]/\sqrt{f^2-y^2}.$$

Според тоа, заменувајќи во (4), добиваме:

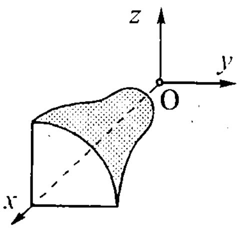
$$\sigma=2\int\limits_a^b dx\int\limits_{-f}^{f}\frac{f\cdot\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{f^2-y^2}}\,dy=\int\limits_a^b f\cdot\sqrt{1+f'^2}\,dx\int\limits_{-f}^{f}\frac{dy}{\sqrt{f^2-y^2}}.$$

Поради:

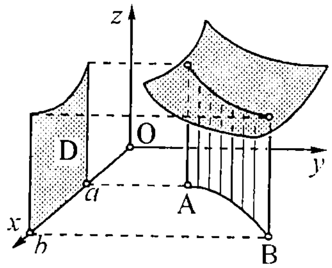
$$J=\int\limits_{-f}^{f}\frac{dy}{\sqrt{f^2-y^2}}=2\int\limits_0^f\frac{dy}{\sqrt{f^2-y^2}}=2\arcsin\frac{y}{f}\Big|_0^f=\pi,$$

имаме:

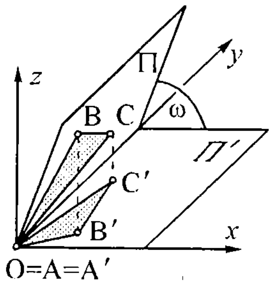
$$\sigma=2\pi\int\limits_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$



Црт. 1(5)



Црт. 2(6)



Црт. 3(7)

6. Доказ. Нека е дадена цилиндричнита површина $y=f(x)$ и површината $z=F(x,y)$. За поодредено, ќе претпоставиме дека работиме во првиот октант, т.е. $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$. Проекцијата од цилиндарот $y=f(x)$ врз рамнината $y=0$ е определена со: $a\leq x\leq b$, $0\leq z\leq F\big(x,f(x)\big)$ (црт. 2). Според (4), добиваме:

$$\sigma=\iint\limits_D\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\,dz=\int\limits_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\int\limits_0^{F(x,y(x))}dz$$
$$=\int\limits_a^b F\big(x,y(x)\big)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int\limits_{AB}F(x,y)\,ds.$$

7. Доказ. Да претпоставиме дека точката A лежи на пресекот од рамнините Π и Π' т.е. A и A' се совпаѓаат со координатниот почеток, Π' со рамнината $z=0$, а y–оската нека е на правата во која се сечат Π и Π' (црт. 3). Ако $B(b_1,b_2,b_3)$ и $C(c_1,c_2,c_3)$, тогаш $B'(b_1,b_2,0)$ и $C'(c_1,c_2,0)$. Векторот

$$\mathbf{n}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)=(n_1,n_2,n_3)$$

е нормален на Π, а векторот $\mathbf{n}'=\overrightarrow{OB'}\times\overrightarrow{OC'}=(0,0,b_1c_2-b_2c_1)$ е нормален на Π, па за аголот ω меѓу $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ имаме: $\cos\omega=|\,b_1c_2-b_2c_1\,|/\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}$. Бидејќи пак за плоштината P на $\triangle ABC$ и P' на $\triangle A'B'C'$ имаме: $2P=|\,\mathbf{n}\,|=\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}$ и $2P'=|\,\mathbf{n}'\,|=|\,b_1c_2-b_2c_1\,|$, добиваме дека $\cos\omega=P'/P$, т.е. формулата (5).

8. Помош. Формулата (8) може да се докаже ако се изврши смена на променливите на десната страна од (4) со $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Така добиваме

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv, \tag{8'}$$

при што овде D е областа во која се менуваат u и v за да се добие Σ. (При ова би требало во (4) D да се замени со друг знак, на пример со D_*.) Потоа, преостанува да се изразат изводите z_x и z_y со помош на u и v. За таа цел треба прво да се одредат u_x, u_y, v_x, v_y, а тоа се постигнува барајќи изводи по x и y во равенствата $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Со заменување во

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x, \qquad z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$$

и по средувањето, ќе се добие (8).

VI.4.2.

1. $2\pi R^6/15$. **2.** $4\pi R^6/15$. **3.** $2a^2\pi\sqrt{a^2+b^2}/3$. **4.** $\sqrt{3}(\ln 2 - 1/2)$.

5. $(\sqrt{3}-1)\ln 2 + (3-\sqrt{3})/2$. Помош. На резултатот од вежбата 4 му се додава збирот од интегралите по другите три ѕида на тетраедарот со равенки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – соодветно.

6. Помош. На сосема ист начин како при докажувањето на равенката (8) од вежбата 8 во **4.1**. (Имено, равенката (8) од **4.1** се добива ако во (6) (овде, во **4.2**) се стави $f(x, y, z) = 1$.)

VI.4.3.

1. 4π. Помош. $J = J_z + J_y + J_x$, каде што:

$$J_z = \iint_\Sigma z\,dx\,dy, \qquad J_y = \iint_\Sigma y\,dz\,dy, \qquad J_x = \iint_\Sigma x\,dy\,dz.$$

Притоа: $J_z = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = 4\pi/3$. Од причини на симетрија: $J_z = J_y = J_x$.

2. $4abc\pi$. (За $a = b = c = 1$ се добива резултатот од вежбата 1.)

3. 0. (Секој од интегралите J_z, J_y, J_x, определени аналогно како во вежбата 1, е нула.)

4. $\pi/2$. (Во овој случај $J_y = J_x = 0$, па $J = J_z = \pi/2$.)

5. а) 0. Помош. $J_z = \iint_\Sigma R\,dx\,dy = \iint_\Sigma R\cos\gamma\,d\sigma = 0$, бидејќи $\gamma = \pi/2$;

$$J_x = 4\int_0^1 dz \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 2\pi, \qquad J_y = -4\int_0^1 dz \int_{-1}^1 dz\sqrt{1-x^2}\,dx = -2\pi.$$

б) $-\pi$. (И на двете основи: $J_x = J_y = 0$; на горната основа: $J_{z1} = -\pi$, а на долната: $J_{z0} = 0$.)

6. $12abc\pi(a^2+b^2+c^2)/5$. Помош. Во обопштени поларни координати.

7. Помош. Ако горниот дел на површината Σ_1 (т.е. делот во кој $0 \le \gamma \le \pi/2$) има равенка $z = z_2(x, y)$, а $z = z_1(x, y)$ е равенката на долниот дел, тогаш:

$$J_z = \iint_\Sigma z\,dx\,dy = \iint_D z_2\,dx\,dy - \iint_D z_1\,dx\,dy = \iint_D (z_2 - z_1)\,dx\,dy = V\,,$$

каде што D е проекцијата од Σ на xy–рамнината.

8. И во овој случај важи формулата $V = J_z$, но не мора да е точна ни една од другите две формули.

9. Двојниот интеграл J од $f(x, y)$ во областа D е еднаков со површинскиот интеграл $\iint_\Sigma f(x, y)\,dx\,dy$, каде што Σ е делот од рамнината ограничен со D.

VI.4.4.

1. 3 е вредноста и на двете страни од (1).
2. 27, за двете страни од (1). **3.** $\pi/4$. **4.** $2ab\pi$.
5. 0. **6.** 9π. **7.** $\sqrt{6}\,\pi$. **8.** $-\pi$ **9.** 0. **10.** 0.
11. Помош. Да ја поделиме областа D на две подобласти D_1 и D_2 со отсечката AC (црт. 1). За секоја од добиените области можеме да ја примениме теоремата на Грин, така што добиваме:

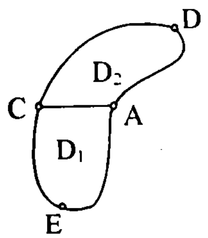
$$\iint_{D_1} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{EACE} P\,dx + Q\,dy$$

$$\iint_{D_2} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{ADCA} P\,dx + Q\,dy\,.$$

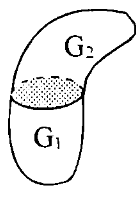
Собирајќи, добиваме:

$$\iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{EADCE} P\,dx + Q\,dy + \int_{ACA} P\,dx + Q\,dy =$$

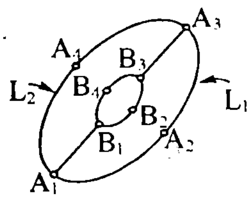
$$= \oint_L P\,dx + Q\,dy\,.$$



Црт. 1(11)



Црт. 2(12)



Црт. 3(13)

12. Помош. Слично како и во вежбата 11. Имено, во една рамнина (или друга "добра" површина) областа G ќе се подели на две подобласти

G_1, G_2, за кои може да се примени теоремата на Гаус–Остроградски. Собирајќи, ќе се добие дека важи оваа теорема и за целата област G, при што треба да се има предвид дека за сите точки од пресекот нормалите на контурите од G_1 и G_2 се спротивни.

13. Помош. Во суштина, се работи на ист начин како и во вежбата 11. Имено, се повлекуваат отсечките A_1A_4 и A_3A_5 и се применува теоремата на Грин на секоја од областите D_1, D_2. Притоа, по собирањето, ќе се добие бараниот резултат (црт. 3).

14. а) $u = \ln(x+y+z)+c$ б) $u = c+(y-z^2)/x$.

VI.4.5.

1. 3. **2.** 16. **3.** 1/15. **4.** $(\pi+4)/3$. **5.** $-R^2\pi/2$. **6.** 0.

7. Поради $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$, $Q_z = R_y$, полето е потенцијално; потенцијалот $u(x, y, z)$ се определува со:

а) $u(x, y, z) = u(0, 0, 0) + 2\int\limits_0^x (xz^3+6y)\,dx + \int\limits_0^y (-2yz)\,dy - \int\limits_0^z 0\,dz$
$= u_0 + x^2z^3 + 6yx - y^2z$, каде што $u_0 = u(0, 0, 0)$. б) $u(B) - u(A) = 3$.

VI.5. Задачи за повторување

3. $\frac{2}{y}\cdot\ln(1+y^2)$. **4.** $2y\cdot\exp(-y^3) - \exp(-y^2) - \int\limits_y^{y^2} x^2\exp(-yx^2)\,dx$.

5. $\pi \arcsin y$. **6.** $\ln a$. **7.** $u = x^4+x^2y^2+y^4+C$.

8. Нема таква функција.

9. $u = x^y + C$ **10.** $u = x^3+3y+3x\sin y + C$.

11. $u = x^2y + ye^7 + C$. **12.** $u = x^2 + \ln(y+z) + C$.

13. $x^3e^y - y + 1 = 0$. **14.** $y = x$ **15.** $y = x(C - \sin x)$, $\lambda = 1/x^2$.

16. $xy - \sqrt{1-y^2} = C$, $\lambda = 1/\sqrt{1-y^2}$. **17.** $y = x/\cos x$.

18. $y = (e^x + c)/x$. **19.** $y = (x-1)/(C-x)$. **20.** $x^2 = y\ln\frac{C}{y}$.

21. $x^2 + (y-a)^2/c = 1$. **22.** $\frac{256}{15}$. **23.** а) $\sqrt{5}$. б) 3. **24.** $\frac{2152}{45}$.

25. $a^2\sqrt{2}$. Помош. Кривата L е бернулиевата лемниската (којашто личи на "легната осумка", ∞, при што е земен само "десниот дел"); $ds = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi = a\sqrt{1/\cos 2\varphi}\,d\varphi$.

26. $2a^2\pi$. Помош. Да се стави: $x = \left(a/\sqrt{2}\right)\cos t = y$, $z = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

27. $8a\pi^2\sqrt{2/3}$. **28.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$.

29. а) 1/3. б) 31/30. б) $-8/15$. г) $-3,5$.

30. 1/2 (во сите случаи). Резултатот не зависи од патот по кој се интегрира, туку само од крајните точки, зашто $P_y = Q_x$.

31. 0. **32.** 6/35. **33.** $-4/3$. **34.** 4. **35.** 12. **36.** $\pi/4$.

37. 2. Помош. Кривата L е долната половина на кружницата $x^2+(y-1)^2=1$; $x=\cos t$, $y=1+\sin t$; $-\pi\le t\le 0$.

38. $I=\frac{\pi}{2}=J$, со непосредно интерпретирање. Со замената $\theta=t^2$ се добива дека L и K се само различни параметарски равенки на една иста крива – оттаму и даденото равенство.

39. 2/3. **40.** $(4e-5)/2$.

41. а) $P_y=2x=Q_x$; $Q_z=2y=R_y$; $R_x=0=P_z$.
б) $u(x,y,z)=x^2y+(y^2+1)z+C$. в) $3=u(A)-u(B)$.

42. -36 (во секој случај, зашто подинтегралниот израз е тотален диференцијал од $u=x^2yz^3+y^2+C$).

43. 2. **44.** 16/21.

45. 0. Помош. $f(-x,-y)=-f(x,y)$, а областа D е симетрична во однос на координатниот почеток, па $I=0$.

46. $3/(2n+m+3)(2m+n+3)$. **47.** 3π.

48. $R^3\pi/3$; тоа е волуменот на прав кружен конус со радиус на основата R и со висина R.

49. 3/10. **50.** 8π. **51.** $\frac{2\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$.

52. $16a^3/3$. Помош. $V=8\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy$.

53. $9\pi/4$. Помош. Во поларни координати.

54. $\pi/6$. **55.** $4\pi a^3(\left(2\sqrt{2}-1\right)/3$.

56. а) Помош. Конусот може да се добие со ротација на правата $z=Hy/R$, $x=0$, околу z–оската; $V=\iint\limits_D\left(H-\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$, $D\colon x^2+y^2\le R^2$. б) $V=2\iint\limits_D z\,dx\,dy$, $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $D\colon x^2+y^2\le R^2$.

58. $\frac{4\pi}{3}abc$. **59.** a^2. **60.** $a^2(16-3\pi)/6$. **61.** 27π.

62. $\pi/2$. (Да се премине во поларни координати.)

63. Конвергентен. **64.** $a^5/20$.

65. $27\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$. Помош. Да се премине во цилиндрични координати.

66. $6\pi\ln(a/b)$. **67.** $\pi^2abc/4$. Помош. Да се стави: $x=au$, $y=bv$, $z=cw$; потоа да се искористат сферни координати.

68. $\pi/6$. **69.** $\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$. За $\alpha=\pi/2$ се добива волуменот на топката.

70. $ab/12$. Помош. Да се воведат нови променливи: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=u$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=v$. Во координатниот систем O_1uv, равенката на параболата ќе биде $u^2=v$, а апсцисната оска $y=0$ ќе биде правата $u=v$. Јакобијанот на трансформацијата $x=a(u+v)/2$, $y=b(u-v)/2$ е $ab/2$.

71. $2\ln 3$. Помош. Да се стави $xy=u$, $xy^3=v$; јакобијанот е: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)}=\frac{1}{2v}$ (а може да се добие и директно, откако ќе се изразат x и y со помош на u, v).

72. $1/4\sqrt{u^2+v^2}$. Помош. $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 4(x^2+y^2)$; од идентитетот $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2$ се добива $(x^2+y^2)^2 = u^2+v^2$; $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}$.

(Јакобијанот може да се најде и директно, ако дадените равенки се решат по x и y, во зависност од u и v.)

73. 8. Помош. Со трансформацијата $x^2-y^2=u$, $2xy=v$, соодветната област од xy–рамнината ќе се претвори (во рамнината O_1uv) во правоаголникот: $1\le u\le 9$, $4\le v\le 8$; се користат и резултатите од претходната задача.

74. 147π. Помош. Нека $y^2=ux$, $x^2=vy$.

75. 64. Помош. Нека $xy=u$, $xz=v$, $yz=w$. **76.** $\pi\sqrt{2}$.

77. $a^2(20-3\pi)/9$.

78. $2a^2(\pi-2)$. Помош. $\sigma = 4a\iint\limits_D (a^2-x^2-y^2)^{-1/2}\,dx\,dy$, D е половината од кругот $x^2+y^2\le ay$ во I квадрант.

79. $\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)/6$. Помош.

$$\sigma = \iint\limits_D \left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2} dz\,dy = \iint\limits_D [1+4(z^2+y^2)]^{1/2}\,dz\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\varphi\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho.$$

80. $12a^2/5$.

81. $2\pi R(b-a)$. Помош. $\sigma = \iint\limits_D (1+z_x^2+z_y^2)^{1/2}\,dx\,dy$, $z_x = -\frac{x}{z}$, $z_y = -\frac{y}{z}$, а D е кружниот прстен со радиуси $\sqrt{R^2-b^2}$ (помал) и $\sqrt{R^2-a^2}$ (поголем).

84. $3\pi a^2/8$ **85.** $4/3$. **86.** $8\pi/3$. **87.** a^2.

88. а) $13\pi/3$. б) $149/30$. в) $111\pi/10$.

Помош. $\iint\limits_D u\,d\sigma = \iint\limits_D u\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2\le 2$, $z=0$.

89. 9π. **90.** $2\pi a^7/105$. **91.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. **92.** 108π.

93. $3V$, каде што V е волуменот на телото, ограничено со Σ.

94. $27/4$. **95.** $3\pi/16$.

96. а) $\frac{\pi}{10}R^2H(3R^2-4H^2)$. б) $\frac{3\pi}{10}\cdot R^2H(2H^2+R^2)$.

97. 12π. **98.** 0. **99.** 20π.

100. $-\pi a^4$. Помош. Параметарски равенки на L: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=a^2(2+\cos^2 t)$, $0\le t\le 2\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С.: *Лекции по аналитической геометрии*; Москва 1968

Банах С.: *Дифференциальное и интегральное исчисление*; Москва 1972

Демидович Б. П.: *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*; Москва 1963

Kaplan W. and Lewis D. J.: *Calculus and Linear Algebra*, volume 2; John Wiley and Sons, Inc. 1971

Карташев, А. П., Рождественский, Б. Л.: *Математический анализ*; Москва 1984

Кашанин Р.: *Виша математика* II, књ. прва; Београд 1949

Клетеник Д. В.: *Сборник задач по аналитической геометрии*; Москва 1969

Kreyszig E.: *Advanced Engineering Mathematics*; John Wiley, 1967

Кудрявцев Л. Д.: *Курс математичес. анализа*; Москва 1988

Пискунов Н. С.: *Дифференциальное и интегральное исчисления*, том II; Москва 1964

Понтрягин Л. С.: *Обыкновенные дифференциальные уравнения*; Москва 1974

Привалов И. И.: *Аналитическая геометрия;* Москва 1962

Рождественский Б. Л.: *Лекции по математическому анализу;* Москва 1972

Самарџиски А.: *Векторска алгебра низ задачи*; Скопје 1991

Слободецкий Л. Н.: *Интегральное исчисление*; Москва 1974

Smith E., Salkover M., Justice H.: *Calculus*; John Wiley, 1958

Толстов Г. П.: *Курс математического анализа*, том II; Москва 1957

Толстов Г. П.: *Элементы математического анализа*; том II. Москва 1966.

Улчар Ј.: *Аналитична геометрија со векторска алгебра*; Скопје 1958

Фихтенгольц Г. М.: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, том II и том III; Москва 1966

Целакоски Н.: *Задачи по линеарна алгебра*; Скопје 1985

Целакоски Н.: *Диференцијални равенки*; Скопје 1988

Чупона, Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н.: *Предавања по виша математика*, кн. I, II и III; Скопје 1971-72

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ И ИМИЊА

Агол меѓу
– два вектора 5
– две површини 241
– две прави 72
– две рамнини 66
– права и рамнина 76
акко (= ако и само ако) 124
апликата 21
апсциса 21

Бинормала 216
Буњаковски 114

Вектор 4
–, единичен 44
– на Дарбу 221
– на кривината 215
–, n–димензионален 113, 129
–, нулти 4
–, слободен 5
–, спротивен 4, 8
–, тангентен 209
вектори
–, колинеарни 5
–, линеарно зависни 18
–, линеарно независни 18
величина
–, векторска 1
–, скаларна 1
врв на конус 93
вредност
–, гранична 122, 130
–, најголема (НГВ) 127, 182, 202
–, најмала (НМВ) 127, 182, 202
– на функција 125
–, средна (на функција) 298

Гаус 339
генератриса 90, 93
геометрија, диференцијална 203
големина на вектор 4
градиент 229
граница
–, двојна 133
–, двократна 133
– на множество 117
– на низа 122
– на функција 130
– повторена 133
график на функција 88, 127
Грин 340
густина 322, 325

Дарбу 221
детерминанта
– на Јакоби 320
– на систем равенки 27, 38, 41
– од втор ред 26
– од трет ред 32
–, функционална 320
дивергенција 234
дијагонала (на детерминанта)
–, главна 26, 32
–, споредна 26, 32
дијаметар (на област) 298
директриса 90, 93
диференцијал 157
– на векторска функција 202
– од n–ти ред 160
–, парцијален 157
–, тотален 157, 165
диференцирање под знакот за интеграл 247
должина
– на вектор 4
– на лак 210
– на насочена отсечка 3
ДР (= диференцијална равенка) 263

Екстрем, локален 179
елемент (на детерминанта) 26, 32
елипсоид 99

Жордан 207

Закон, Бојл-Мариотов 159
збир на вектори 6

Идентитет, Лагранжов 50
извод
– во дадена насока 231

извод
– на векторска функција 202, 206
– од повисок ред 144
–, парцијален 140, 141,
142, 223, 232
израз, подинтегрален 256
интеграл
–, двоен 294
–, двокатен 291
–, дивергентен двоен 309
–, конвергентен двоен 309
–, линиски (од втор тип) 273, 288
–, линиски (од прв тип) 271, 288
–, линиски (по лак) 271, 288
–, линиски (по координати) 273, 288
–, неопределен 256
–, несвојствен двоен 309
– од векторска функција 202
–, површински (од втор тип) 335
–, површински (од прв тип) 333
–, површински (по координати) 337
–, површински (по плоштина) 333
–, по линија 271
–, риманов двоен 299
–, риманов троен 312
– што зависи од параметар 246
интензитет на вектор 4
инфимум 127

Јакобијан 320

Коефициент на систем равенки 37
колона (на детерминанта) 26, 32
комбинација, линеарна 18
комплемент, алгебарски 34
компонента (на векторска функција) 202, 206
контура 117
конус, ротационен 98
координати
–, гаусови 227
– на вектор 20
– на точка 21
–, обопштени поларни 307
–, сферни 318
–, тековни 87
–, цилиндрични 316
крај (на насочена отсечка) 2
крива
–, едноставна 207
крива
–, жорданова 207
–, затворена 207
–, мазна 208
–, мазна по делови 209, 280
кривина 215
–, втора 216
–, прва 215
критериум за компланарност 33

Лаплас 166
лента, мебиусова 226
лимес
– во бесконечна точка 132
– на низа 122
– на функција 130
– линија
–, асимптотска 228
–, винтова 210
–, геодезиска 227
–, координатна 227
– на кривина 228
–, непрекината n–димензионална 118
лист, мебиусов 226

Максимум
–, врзан 199, 201
–, локален 179
–, строг локален 179
–, условен 199, 201
маса (на тело) 322
Мебиус 226
метрика 115 минимум 179, 181
–, врзан 199, 201
–, строг локален 179
–, условен 199, 201
минор 34
множење на скалар и вектор 13
множество
– вредности 126
–, затворено 118
–, измерливо 315
–, ограничено 119
–, отворено 118
–, сврзано 118
множител, интегрален 267
модул на вектор 4
момент
–, инерцијален 324, 325
–, статичен 323, 325

Набла (оператор) 324
нараснување на функција 135
–, парцијално 141
насока на крива
–, позитивна 283, 340, 342
–, стандардна 340
насока на насочени отсечки
–, иста 2
–, спротивна 3
НГВ (= најголема вредност) 127, 182
неравенство на
– Коши–Буњаковски 114
– Коши–Шварц 114
– триаголник 113
ниво–линија 128
ниво–површина 229
низа
–, кошиева 125
–, компонентна 123
–, константна 124
–, ограничена 124
–, риманова 299, 312
–, фундаментална 125
низа од n–димензионални точки
–, дивергентна 122
–, конвергентна 122
НМВ (= најмала вредност) 127, 182
нормала
–, главна 215
–, заедничка (на две прави) 82
–, на површина 153, 225
носач на прамен 78

Област
–, едноставна 119
–, затворена 119
–, отворена 118
–, проста 119
–, сложена 119
област, правилна 251
– во правец на x–оската 251
– во правец на y–оската 251
– во правец на z–оската 313
ознака (за функција)
–, векторска 129
–, геометриска 128
околина 115
оператор
–, диференцијален 161
– набла 234
операција 7
опсег 126
ордината 21
ориентација, стандардна 337
орт 44
– на бинормалата 216
– на главната нормала 215
– на тангентата 213
оска
–, апликатна (или z–) 19
–, апсцисна (или x–) 19
– на прамен 78
– на ротација 94
–, ординатна (или y–) 19
оски, координатни 19
Остроградски 339
отсечка
–, насочена 2
–, нулта 2
–, n–димензионална

Параболоид 88
–, елиптичен 100
–, хиперболичен 101
паралелопипед, n–димензионален 314
параметар 63, 208, 246
–, природен 213
ПДР (= парцијална диференцијална равенка) 264
плоштина 315
– на површина 329
површина 86, 127
–, конусна 93, 100
–, координатна 317, 318
–, мазна 171, 223
–, обртна 94
– од втор ред 99
–, ротациона 94
–, цилиндрична 90
поле
– без вртежи 347
–, векторско 233
–, потенцијално 235
–, скаларно 229, 231
–, соленоидално 236

потенцијал 290, 235
поток (на поле) 346
почеток
–, координатен 19
– на насочена отсечка 2
прави, основни 219
правило
–, верижно 155
–, Крамерово 28, 39
– на паралелограм 8
– на полигон 10
– на триаголник 7
–, Сарусово 33
прамен рамнини 78
претставување на крива
–, параметарско 208
прикачување (на вектор за точка) 4
пробод 77
проекција
– на крива 103
– на множество 167, 260
– од вектор на вектор 44
– од права врз рамнина 77
– од точка 112
производ
–, векторски 50
–, мешан 55
– на број со вектор 11
–, скаларен 43
простор
–, евклидски 113
–, метричен 115
Раб 117
работа 290
равенка, диференцијална 263
–, –, Лапласова парцијална 166, 236
–, –, линеарна 267, 268
–, –, парцијална 264
равенка на
– крива (векторска) 208
– права (векторска) 69
– прамен рамнини 78
– рамнина (векторска) 58, 62
равенка на рамнина
–, векторска 58, 62, 63
–, координатна 58, 62
–, нормирана 64
–, општа 59
–, сегментна 60
равенки на
– бинормала 219
– главната нормала 219
– крива 103, 208
– површина 86, 89, 223
– права 70
– рамнина (параметарски) 63
– тангента 209
радиус–вектор 5, 19
радиус на
– кривина 215
– торзија 216
разбивање 294, 311
–, стандардно 295
рамнина
–, нормална 209
–, оскулаторна 220
–, проектирачка 77
–, ректификациона 220
–, тангентна 152, 224
рамнини, основни 220
растојание меѓу
– две прави 81
– n–димензионални точки 113
– паралелни рамнини 79
– точка и рамнина 65
редица на детерминанта 26, 32
решение на ДР
–, општо 263, 264
–, партикуларно 263, 264
решение на систем равенки 27, 38
–, нулто 40
ротација 234
Својство $\varepsilon - \delta$, за непрекинатост 134
сила, потенцијална 290
систем
–, декартов координатен 19
–, десен координатен 20
– ДР 269
–, координатен 20
– лев координатен 20
– ПДР 269
–, просторен поларен 318
–, сферен координатен 318
–, цилиндричен 316
систем равенки
–, еднозначно решлив 27
–, линеарен 27, 37
–, линеарен векторски 41
–, нерешлив 27

систем равенки
–, противречен 27
–, решлив 27
–, хомоген 40
слика 125
собирање на n–димензионални точки 112
степен на хомогеност 166
Стокс 342
сума
–, интегрална 312
– на вектори 6
–, риманова 299
суперпозиција 136
супремум 127
сфера 87, 99
–, дводимензионална 116
–, еднодимензионална 116
–, n–димензионална 116

Тангента (на крива) 209
тежиште 323, 325
теме на конус 93
теорема за
– адитивност 300
– врзани екстреми 199, 200, 201, 202
– граница (со $\varepsilon - \delta$) 113
– дивергенција 347
– диференцијабилност 149, 150
– должина на лак 211
– егзистенција на решение на ДР 264
– егзистенција на тангентна рамнина 153
– екстрем 180, 192, 195
– извод од сложена функција 155, 165
– имплицитни функции 167
– интеграбилност на непрекината функција 300
– компонентни низи 123
– линеарност 299
– мешаните изводи 145
– наследност 300
– непрекинатост 134, 135, 136, 138
– определување функција при даден тотален диференцијал 261
– рамномерна непрекинатост 139
– средна вредност 300
– тотален диференцијал (инваријантност) 158
– хомогени системи 40
теорема на
– Вајерштрас 138
– Гаус–Остроградски 339
– Грин 340
– Крамер 28, 39, 41
– Ојлер (за хомогени функции) 166
– Стокс 342
– Тејлор 163
топка
–, n–димензионална 116
–, отворена 117
торзија 216
торус 97
точка 115
–, внатрешна 117
–, двојна 208
–, елиптична 227
–, изолирана 117
–, критична (за екстрем) 180
–, кружна 227
–, n–димензионална 112
– на згуснување 117
– на натрупување 124
– на прекин 134
–, параболична 227
–, повеќекратна 208
–, рабна 117
–, сингуларна 209
–, стационарна 180, 227
–, хиперболична 227
трансформација, елементарна 35
триедар, природен 216
тројка вектори
–, десно (позитивно) ориентирана 55
–, лево (негативно) ориентирана 55

Флукс 346
форма
–, втора основна диференцијална 227
–, прва основна диференцијална 227
формула
–, Маклоренова 163
– на Гаус–Остроградски 339
– на Грин 340

формула
– на Стокс 342
– на Штајнер 327
–, Тејлорова 163
формули на Френе 217
Френе 217
функција
–, векторска 202, 206, 222, 232, 233
–, диференцијабилна
148, 149, 164, 202
–, елементарна 138
–, имплицитно определена 167
–, интеграбилна 205, 299, 312
–, компонентна 202, 206, 222, 232
–, мајорирана 127
–, минорирана 127
– на Лагранж 200
–, непрекината 134
–, ограничена 127
– од две променливи 125
–, примитивна 205
–, рамномерно непрекината 139
–, сложена 136, 205
–, хармониска 236
–, хомогена 166
–, x–примитивна 255
–, y–примитивна 256
Хиперболоид
–, двокрилен 98, 100
–, еднокрилен 97, 99
ходограф 207
Цилиндар 92
–, елиптичен 92
–, кружен 92
–, параболичен 92
–, хиперболичен 92
циркулација 346
Член, слободен (на равенка) 37
Шварц 114