Ристо Малчески
Скопје

ПРИМЕНА НА ФУНКЦИИТЕ $[x]$ И $\{x\}$

Функциите цел дел и дробен дел ($[x]$ и $\{x\}$) се од посебен интерес во теоријата на броеви. Во [1] и [2] се разгледани овие функции и за истите се докажани повеќе својства, при што се решени и неколку примери. Во [3] се дадени голем број решени задачи во врска со овие функции. Во оваа статија ќе разгледаме неколку задачи во врска со овие функции.

1. Докажи дека за секој природен број n важи

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]. \qquad (1)$$

Решение. За секој природен број n важи

$$\begin{aligned}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 &= 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\\ &< 2n+1+\sqrt{4n^2+4n+1}\\ &= 4n+2,\end{aligned}$$

па затоа $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$, од каде што следува

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\le[\sqrt{4n+2}].$$

Ако

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]<[\sqrt{4n+2}],$$

тогаш постои m таков што

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<m\le\sqrt{4n+2},$$

од каде по двократно квадрирање добиваме

$$(2n+1)^2-1<(m^2-2n-1)^2\le(2n+1)^2,$$

па затоа $(m^2-2n-1)^2=(2n+1)^2$, од каде следува $m^2=2(2n+1)$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека за секој природен број n е исполнето равенството (1).

2. Во множеството $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ реши ја равенката

$$x+\tfrac{2015}{x}=[x]+\tfrac{2015}{[x]}.$$

Решние. Бидејќи $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ имаме $x-[x]\neq 0$, па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$x-[x]=\frac{2015(x-[x])}{x[x]},$$
$$x[x]=2015.$$

Ако $[x]\geq 45$, тогаш $x>45$ и $x[x]>45^2=2025>2015$.

Ако $-44\leq[x]\leq 44$, тогаш $-44<x<45$ и затоа $x[x]<44\cdot 45<2015$.

Ако $[x]\leq -46$, тогаш $x<-45$ и $x[x]>45\cdot 46>2015$.

Останува $[x]=-45$ и тогаш $x=-\frac{2015}{45}=-\frac{403}{9}$.

3. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$[x]+[3x]=2010.$$

Решение. Ако искоритиме дека $x=[x]+\{x\}$, каде со $\{x\}$ е означен дробниот дел од реалниот број x, и ги искористиме својствата на функцијата $[x]$, последователно добиваме

$$[x]+[3x]=2010,$$
$$[x]+[3[x]+3\{x\}]=2010,$$
$$4[x]+[3\{x\}]=2010,$$
$$4([x]-502)+[3\{x\}]-2=0. \qquad (1)$$

Сега, бидејќи $0\leq\{x\}<1$, добиваме $0\leq 3\{x\}<3$, па затоа $0\leq[\{3x\}]<3$, односно $[3\{x\}]=0{,}1$ или 2. Понатаму, од равенството (1) следува дека $[x]=502$ и $[3\{x\}]=2$, односно $[x]=502$ и $\frac{2}{3}\leq\{x\}<1$. Конечно,

$$502\tfrac{2}{3}\leq x=[x]+\{x\}<503, \text{ т.е. } x\in[502\tfrac{2}{3},503).$$

4. Реши ја равенката
$$[2x]+[3x]+[5x]=2013.$$

Решение. Секој реален број x може да се запише во видот $x=[x]+\sim$, каде $0\leq\sim<1$. Бидејќи за секој цел број t важи
$$[tx]=[t[x]+t\sim]=t[x]+[t\sim],$$
дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$10[x]+[2\sim]+[3\sim]+[5\sim]=2013. \qquad (1)$$

Ако $[x]\geq 202$, тогаш $10[x]\geq 2020$ и во (1) равенство не е можно. Ако $[x]\leq 200$, тогаш од (1) следува

$$2013=10[x]+[2\sim]+[3\sim]+[5\sim]\leq 2000+[2\sim]+[3\sim]+[5\sim],$$

па затоа $[2\sim]+[3\sim]+[5\sim]\geq 13$, што не е можно, бидејќи $[2\sim]\leq 1$,

$[3\sim]\le 2$ и $[5\sim]\le 4$. Значи, $[x]=201$ и тогаш $[2\sim]+[3\sim]+[5\sim]=3$.

Ако $\sim<\frac{2}{5}$, тогаш $[2\sim]+[3\sim]+[5\sim]<0+1+1=2$ и равенство не е можно. Ако $\frac{2}{5}\le\sim<\frac{1}{2}$, тогаш $[2\sim]+[3\sim]+[5\sim]=0+1+2=3$, а ако $\sim\ge\frac{1}{2}$, тогаш $[2\sim]+[3\sim]+[5\sim]\ge 1+1+2=4$.

Според тоа, решенијата на дадената равенка се $x\in[201\frac{2}{5},201\frac{1}{2})$.

5. Реши ја равенката

$$\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=1.$$

Решение. Равенката има смисла ако $[x]\neq 0$ и $\{x\}\neq 0$. Освен тоа, од $\frac{1}{[x]}=1-\frac{1}{\{x\}}$ и $0<[x]<1$ следува $[x]<0$. Нека $[x]=-n$, каде $n\in\mathbb{N}$. Тогаш со замена во равенката добиваме $\{x\}=\frac{n}{n+1}$, па затоа

$$x=[x]+\{x\}=-\frac{n^2}{n+1}.$$

Од $x=-\frac{n^2}{n+1}=-n+\frac{n}{n+1}$ и $0<\frac{n}{n+1}<1$ следува $[x]=-n$ и $\{x\}=\frac{n}{n+1}$, па непосредно се проверува дека $x=-\frac{n^2}{n+1}$ навистина е решение на дадената равенка.

6. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$[\tfrac{x}{2}]\cdot[\tfrac{x}{3}]\cdot[\tfrac{x}{4}]=x^2. \qquad (1)$$

Решение. Очигледно $x=0$ е решение на дадената равенка. Нека $x\neq 0$. Од $[a]\le a$, за секој $a\in\mathbb{R}$ следува $x^2\le\frac{x^3}{24}$, што значи $x\ge 24$. Од друга страна од $x=nm+q, 0\le q\le n-1$ следува

$$[\tfrac{x}{n}]=m \text{ и } \{\tfrac{x}{n}\}=\frac{q}{n}\le\frac{n-1}{n},$$

па затоа

$$[\tfrac{x}{n}]=\frac{x}{n}-\{\tfrac{x}{n}\}\ge\frac{x}{n}-\frac{n-1}{n}=\frac{x-n+1}{n}.$$

Сега, од последното неравенство и од условот на задачата следува

$$x^2\ge\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{24},$$

т.е.

$$x^3-30x^2+11x-6\le 0.$$

Во множеството цели броеви решение на последната неравенка е $x \le 29$ и како $x \ge 24$, добиваме дека треба да провериме кои од дозволените случаи $x \in \{24, 25, 26, 27, 28, 29\}$ се решение на (1). Лесно се добива дека единствено ненулто решение е $x = 24$.

7. Определи ги сите реални броеви a и b, за кои равенството

$$[ax + by] + [bx + ay] = (a + b)[x + y]$$

важи за секои реални броеви x и y.

Решение. За $x = 1$, $y = 0$ добиваме $[a] + [b] = a + b$. Сега, бидејќи $[a] \le a$ и $[b] \le b$, при што равенсвта важат ако и само ако a и b се цели броеви, од последното равенство следува дека $a, b \in \mathbb{Z}$. За $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ добиваме $[\frac{a}{2}] + [\frac{b}{2}] = 0$.

Ако $a \ge 0$ и $b \ge 0$, добиваме дека $[\frac{a}{2}] = [\frac{b}{2}] = 0$, од каде што следува дека $a = 0,1$ и $b = 0,1$. Ако $a = 0, b = 1$ (или $a = 1, b = 0$) добиваме $[x] + [y] = [x + y]$, што не е точно за $x = y = \frac{3}{4}$. Според тоа, во овој случај решенија се $a = b = 0$ и $a = b = 1$.

Случајот $a \le 0, b \le 0$ и $ab \ne 0$ не е можен, бидејќи тогаш $[\frac{a}{2}] \le 0$ и $[\frac{b}{2}] \le 0$, при што барем едно од неравенствата е строго.

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a > 0$ и $b < 0$. Ставаме $x = \frac{1}{a+1}$, $y = 0$ и добиваме $[\frac{a}{a+1}] + [\frac{b}{a+1}] = 0$, од каде следува $[\frac{b}{a+1}] = 0$ што не е можно за негативен број $\frac{b}{a+1}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека единствени решенија се $a = b = 0$ и $a = b = 1$..

8. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 4,3 \\ y + [z] + \{x\} = 5,5 \\ z + [x] + \{y\} = 6,4. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме трите равенства и искористиме дека за секој реален број a важи $a = [a] + \{a\}$, добиваме

$$2x + 2y + 2z = 16,2,$$

т.е. $x + y + z = 8,1$. Според тоа,

$$\{y\}+[z]=x+y+z-(x+[y]+\{z\})=8{,}1-4{,}3=3{,}8$$
$$\{z\}+[x]=x+y+z-(y+[z]+\{x\})=8{,}1-5{,}5=2{,}6$$
$$\{x\}+[y]=x+y+z-(z+[x]+\{y\})=8{,}1-6{,}4=1{,}7.$$

Од последните равенства следува

$$[z]=3, \{y\}=0{,}8$$
$$[x]=2, \{z\}=0{,}6$$
$$[y]=1, \ \{x\}=0{,}7$$

па затоа

$$x=[x]+\{x\}=2{,}7$$
$$y=[y]+\{y\}=1{,}8$$
$$z=[z]+\{z\}=3{,}6.$$

9. Нека p и q, $1\le q\le p$, се природни броеви и $a=(p+\sqrt{p^2+q})^2$. Докажи дека бројот a е ирационален и дека $\{a\}>\frac{3}{4}$.

Решение. Од

$$p^2<p^2+q<p^2+p+1<(p+1)^2$$

следува дека бројот $\sqrt{p^2+q}$ е ирационален. Според тоа, бројот

$$a=(p+\sqrt{p^2+q})^2=2p^2+q+2p\sqrt{p^2+q}$$

е ирационален.

Да ставиме $b=(-p+\sqrt{p^2+q})^2$. Како погоре лесно се докажува дека b е ирационален број и $b>0$. Последното е еквивалентно на

$$\sqrt{p^2+q}<\frac{2p^2+q}{2p}=p+\frac{q}{2p},$$

па како $q\le p$ добиваме $\sqrt{p^2+q}<p+\frac{1}{2}$. Според тоа, $\sqrt{p^2+q}-p<\frac{1}{2}$, па затоа

$$b=(-p+\sqrt{p^2+q})^2<\frac{1}{4}.$$

Останува да забележиме дека $a+b=4p^2+2q$ е природен број.

Литература

1. Малчески, Р. Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015 (Математички талент, 2021)
2. Малчески, Р. Теорија на броеви, Математички талент, Скопје , 2022
3. Малчески, Р. Збирка задачи по теорија на броеви, Математички талент, Скопје, 2022
4. Баралић, Ђ., Радичевић, И. Функција цео део, Тангента, 2003