



Pitagorine¹ trojke i Fibonaccijevi² brojevi

Šefket Arslanagić³, Alija Muminagić⁴

U ovom članku ćemo pokazati kakvu vezu imaju *Fibonaccijevi* brojevi i *Pitagorine* trojke brojeva. Najprije, podsjetimo se.

1. Najjednostavnija kvadratna diofantska jednačba je Pitagorina jednačba

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Prirodne brojeve (a, b, c) koji su rješenja jednačbe (1) nazivamo Pitagorinim trojkama. Opće rješenje jednačbe (1) može se napisati u obliku

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2), \tag{2}$$

gdje su m i n relativno prosti prirodni brojevi takvi da je jedan od njih paran, drugi neparan i $m > n$.

2. Fibonaccijev niz (F_n) zadan je rekurzivnom relacijom

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 1. \tag{3}$$

To je dakle niz dan u donjoj tablici:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...

Napravimo sada novu tablicu na sljedeći način: Uzmimo da su m i n uzastopni Fibonaccijevi brojevi i napišimo odgovarajuće Pitagorine trojke.

m	n		a	b	c
2	1		3	4	5
3	2		5	12	13
5	3		16	30	34
8	5		39	80	89
13	8		105	208	233
21	13		272	546	610
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮

Pažljivim promatranjem ovih tablica, uočavamo da su u koloni ispod c u drugoj tablici neki Fibonaccijevi brojevi. Preciznije, to su počev od 5 Fibonaccijevi brojevi

¹ Pitagora, veliki starogrčki matematičar koji je živio i djelovao u 6. stoljeću prije Krista.
² Leonardo Pisano Fibonacci (1170.–1240.), talijanski matematičar (glavno njegovo djelo je *Liber Abaci* iz 1202. godine).
³ Izvanredni profesor u mirovini na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba
⁴ Nykøbing F., Danska

neparnog indeksa i osim toga je:

$$\begin{aligned} 2^2 + 1^2 &= 5, & \text{tj. } F_3^2 + F_2^2 &= F_5 \\ 3^2 + 2^2 &= 13, & \text{tj. } F_4^2 + F_3^2 &= F_7 \\ 5^2 + 3^2 &= 34, & \text{tj. } F_5^2 + F_4^2 &= F_9 \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

Naslućujemo da vrijedi

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}, \quad (4)$$

odnosno: Fibonaccijev broj neparnog indeksa jednak je zbroju kvadrata dva uzastopna Fibonaccijeva broja.

Da bismo dokazali tvrdnju (4), prethodno ćemo dokazati da vrijedi jednakost:

$$F_{m+n} = F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}, \quad (m > 1). \quad (5)$$

Jednakost (5) se najčešće (i najlakše) dokazuje pomoću principa matematičke indukcije ili se primjenjuje kombinatorni dokaz. Rjeđe nailazimo na dokaz koji slijedi.

Dokaz. Poznat je *Binetov*⁵ obrazac za izračunavanje n -tog Fibonaccijevog broja:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

ili stavljajući da je $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n). \quad (6)$$

Uočimo da je

$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{i} \quad \alpha \cdot \beta = -1. \quad (7)$$

Napomena 1. Obrazac (6) možemo također dokazati na različite načine, a dokaz prepuštamo čitaocima (metoda matematičke indukcije ili rješavanjem karakteristične jednačbe rekurzivnog obrasca (3) ili tako da se odredi funkcija izvodnica za niz (F_n) Fibonaccijevih brojeva i pomoću toga izračuna F_n).

Sada, zbog (6), imamo:

$$\begin{aligned} & F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^m - \beta^m) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \\ &= \frac{1}{5} [(\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})(\alpha^n - \beta^n) + (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})] \\ &= \frac{1}{5} (\alpha^{m+n-1} - \alpha^n \beta^{m-1} - \alpha^{m-1} \beta^n + \beta^{m+n-1} + \alpha^{m+n+1} - \alpha^m \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \beta^m + \beta^{m+n+1}) \end{aligned}$$

[a odavde zbog (7)

$$\alpha^n \cdot \beta^{m-1} = (-\beta^{-1})^n \cdot \beta^{m-1} = (-1)^n \cdot \beta^{m-n-1}$$

i slično:

$$\alpha^{m-1} \cdot \beta^n = (-1)^n \cdot \alpha^{m-n-1}, \quad \alpha^m \beta^{n+1} = -(-1)^n \cdot \alpha^{m-n-1}, \quad \alpha^{n+1} \cdot \beta^m = -(-1)^n \cdot \beta^{m-n-1}]$$

⁵ Jacques Phillipe Marie Binet (1786.–1856.), francuski matematičar i astronom.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} (\alpha^{m+n-1} - (-1)^n \cdot \beta^{m-n-1} - (-1)^n \cdot \alpha^{m-n-1} + \beta^{m+n-1} + \alpha^{m+n+1} \\
&\quad + (-1)^n \cdot \alpha^{m-n-1} + (-1)^n \cdot \beta^{m-n-1} + \beta^{m+n+1}) \\
&= \frac{1}{5} (\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1} + \alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1})
\end{aligned}$$

[a odavde zbog $\alpha \cdot \beta = -1$, tj. $\alpha = -\beta^{-1}$ i $\beta = -\alpha^{-1}$ te $\alpha - \beta = \sqrt{5}$]

$$= \frac{1}{5} (\alpha - \beta) (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) = F_{m+n}.$$

Uvrstimo li sada u obrazac (5) $m = n + 1$, dobijemo

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2,$$

što predstavlja obrazac (4) koji je trebalo dokazati.

Napomena 2. Uvrštavanjem $m = n$ u obrazac (5), dobijemo:

$$\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{n-1} \cdot F_n + F_n \cdot F_{n+1} = F_n (F_{n-1} + F_{n+1}) \\
&\stackrel{(3)}{=} (F_{n+1} - F_{n-1}) (F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2; \quad (n \geq 2).
\end{aligned}$$

Napomena 3. Bilo bi interesantno utvrditi da li postoji neka veza između Fibonaccijevih i trokutastih brojeva.

Da ponovimo trokutasti brojevi su:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}, \quad \mathbf{3}(= 1 + 2), \quad \mathbf{6}(= 1 + 2 + 3), \quad \mathbf{10}(= 1 + 2 + 3 + 4), \quad \mathbf{15}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5), \\
\mathbf{21}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6), \quad \mathbf{28}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7), \\
\mathbf{36}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8), \quad \mathbf{45}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9), \\
\mathbf{55}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10), \dots
\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}, \\
T_2 &= 1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}, \\
T_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}, \\
T_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}, \\
T_5 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2} \\
&\quad \vdots \\
T_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},
\end{aligned}$$

što znači da je svaki broj koji se može napisati u obliku $\frac{n(n+1)}{2}$ trokutasti.

Uočavamo ovdje da je

$$\begin{aligned}
F_1 = F_2 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = T_1, \quad F_4 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} = T_2, \quad F_8 = 21 = \frac{6 \cdot 7}{2} = T_6, \\
T_{10} = 55 = \frac{10 \cdot 11}{2} = F_{10}, \dots
\end{aligned}$$

Literatura

- [1] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
- [2] A. DUJELLA, *Fibonaccijsvi brojevi*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2000.
- [3] V. MIČIĆ, Z. KADELBURG, D. ĐUKIĆ, *Uvod u teoriju brojeva*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, Sveska 15, Beograd, 2004.
- [4] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.