

Zlatna prava i zlatni paralelepiped (kvadar)

Alija Muminagić^a

^a*Penzioner, Danska*

Sažetak: U ovom članku dajemo konstrukciju zlatne prave, izvodimo njenu jednačinu i dokazujemo neke sume na više načina, primijenjujući znanja o zlatnoj pravoj. U drugom dijelu definišemo zlatni paralelepiped, dokazujemo kako se izračunava njegova površina i prostorna dijagonala i izvodimo jedan interesantan odnos između konstanti ϕ i π (zlatnog broja ϕ i broja π). Ukazujemo na vezu između zlatnog pravougaonika i zlatnog kvadra (zlatni kvadar je prostorni analogon zlatnog pravougaonika).

1. Uvod

Matematička literatura vrvi člancima o zlatnom presjeku, zlatnom trouglu, pravougaoniku, rombu, zlatnoj elipsi, zlatnoj spirali i superzlatnom pravougaoniku. Rijetko nalazimo članke o zlatnoj pravoj i zlatnom paralelepipedu (kvadru), mada je o zlatnoj pravoj pisao J. Metz u časopisu FIBONACCI QUARTERLY, augusta 1977. godine. U ovom članku i mi pišemo o zlatnoj pravoj, s nešto drugačijim pristupom, kao i o zlatnom paralelepipedu (kvadru).

Prethodno ćemo se sjetiti nekih definicija i teorema, koje će biti primijenjene nešto kasnije u ovom izlaganju.

Definicija 1.1. *Ako tačka C dijeli duž \overline{AB} , pri čemu je $a = |AC|$, $b = |BC|$ (Slika 1) tako da vrijedi*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, \tag{1}$$

kažemo da je ona dijeli u omjeru zlatnog presjeka (reza).



Slika 1.

Teorem 1.2. *Tačka C dijeli dužinu \overline{AB} u omjeru zlatnog presjeka ako je*

$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339 \dots \tag{2}$$

Broj ϕ se naziva *zlatni broj*. Jasno je da je

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\phi} = \phi^{-1} \approx 0,6180339 \dots$$

Ciljna skupina: srednja škola
Ključne riječi: zlatni presjek, zlatna prava, zlatni paralelepiped
Kategorizacija: Stručni rad
Rad preuzet: maj 21.02.2022.

Iz (1) slijedi

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff a^2 - ab - b^2 = 0 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

to jest

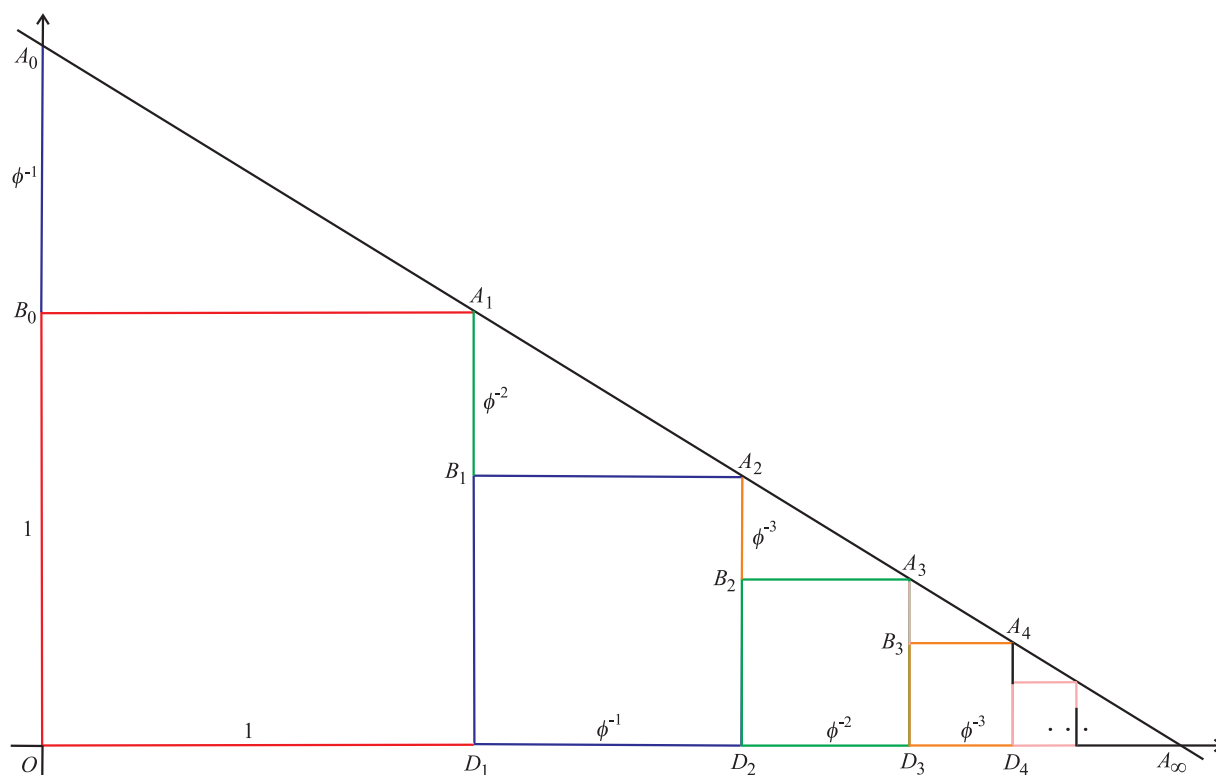
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \iff \phi^2 = \phi + 1 \quad (3)$$

i

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \iff \phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \iff \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \iff \phi - 1 = \phi^{-1} \implies 1 + \phi^{-1} = \phi. \quad (4)$$

2. Zlatna prava

Posmatrajmo sada Sliku 2.



Slika 2.

U pravougli koordinatni sistem xOy konstruišimo redom kvadrate $OB_0A_1D_1$, $D_1B_1A_2D_2$, $D_2B_2A_3D_3$, \dots , čije su dužine stranica redom $1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \dots$. Konstruišimo pravu kroz tačke A_1 i A_2 i presječne tačke te prave s osama Ox i Oy i označimo sa A_∞ i A_0 , respektivno. Sada lako dobijemo da prava kroz tačke $A_1(1, 1)$ i $A_2(1 + \phi^{-1}, \phi^{-1})$ ima jednačinu

$$y - 1 = \frac{\phi^{-1} - 1}{1 + \phi^{-1} - 1}(x - 1) \iff y - 1 = \frac{\phi^{-1} - 1}{\phi^{-1}}(x - 1)$$

$$\iff y - 1 = (1 - \phi)(x - 1) \iff y - 1 = -(\phi - 1)x - 1 + \phi$$

$$\begin{aligned} & \text{(zbog (4), to jest } \phi - 1 = \phi^{-1} \iff -(\phi - 1) = -\phi^{-1}) \\ & \iff y = -\phi^{-1}x + \phi. \end{aligned} \quad (5)$$

Jednačina (5) je **jednačina zlatne prave**.

Uočimo da tačka A_k ima koordinate $(1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \dots + \phi^{-k}, \phi^{-k}) = (\frac{1-\phi^{-k-1}}{1-\phi^{-1}}, \phi^{-k})$, $k = 1, 2, \dots$, odakle slijedi, koristeći jednakost (4), da je i $A_\infty = (\frac{1}{1-\phi^{-1}}, 0) = (\frac{\phi}{\phi-1}, 0) = (\phi^2, 0)$. Nije se teško uvjeriti da i tačke A_3, A_4, A_5, \dots leže na zlatnoj pravoj. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned} y &= (1 - \phi) \left(\frac{1 - \phi^{-k-1}}{1 - \phi^{-1}} \right) + \phi = (1 - \phi) \frac{1 - \phi^{-k-1}}{\frac{\phi-1}{\phi}} + \phi \\ &= -\phi(1 - \phi^{-k-1} + \phi) = -\phi + \phi^{-k} + \phi = \phi^{-k}, \end{aligned}$$

za $k = 3, 4, 5, \dots$, a da tačke A_0 i A_∞ imaju koordinate $A_0(0, \phi)$ i $A_\infty(\phi^2, 0)$ (jer je $y = -\phi^{-1} \cdot 0 + \phi = \phi$ i $0 = -\phi^{-1} \cdot x + \phi \iff x = \frac{\phi}{\phi-1} = \frac{\phi}{\phi} = \phi^2$).

Sa Slike 2. vidimo da je

$$|OA_\infty| = |OD_1| + |D_1D_2| + |D_2D_3| + |D_3D_4| + \dots = 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \dots = \phi^2. \quad (6)$$

Dokažimo (6) i na ovaj način. Neka je

$$S = 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \dots \quad (7)$$

Nakon množenja sa ϕ^{-1} dobijamo:

$$\phi^{-1} \cdot S = \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \dots \quad (8)$$

i nakon oduzimanja (7) i (8) slijedi

$$S(1 - \phi^{-1}) = 1 \iff S = \frac{1}{1 - \phi^{-1}} \iff S = \frac{\phi}{\phi - 1} \iff S \stackrel{(4)}{=} \frac{\phi}{\phi^{-1}} \iff S = \phi^2.$$

Pokažimo sada zašto se prava čija je jednačina (5) s pravom naziva zlatnom pravom.

Imamo (v. Sliku 2) da je $|OA_0| = |OB_0| + |B_0A_0|$, to jest

$$\phi = 1 + |B_0A_0| \iff |B_0A_0| = \phi - 1 \iff \text{(zbog 4)} |B_0A_0| = \phi^{-1}. \quad (9)$$

Sada je $\frac{|OA_0|}{|OB_0|} = \frac{\phi}{1} = \phi$, što znači da tačka B_0 dijeli duž $\overline{OA_0}$ u omjeru zlatnog presjeka. Takođe je $\frac{|D_1A_1|}{|D_1B_1|} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$, $\frac{|D_2A_2|}{|D_2B_2|} = \frac{\phi^{-1}}{\phi^{-2}} = \phi, \dots$ pa zaključujemo da tačka B_i dijeli duž $\overline{D_iA_i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) u omjeru zlatnog presjeka.

Do istog zaključka možemo doći i a sljedeći način.

Svi pravougli trouglovi $\triangle A_i B_i A_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ su slični i $\frac{|B_0A_1|}{|B_1A_2|} = \frac{1}{\phi^{-1}} = \phi$. Dobijamo, zbog (9), da je

$$\frac{|A_0B_0|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_0A_1|}{|B_1A_2|} \iff \frac{\phi^{-1}}{|A_1B_1|} = \phi \iff |A_1B_1| = \frac{\phi^{-1}}{\phi} \iff |A_1B_1| = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}$$

i slično

$$|A_2B_2| = \phi^{-3}, |A_3B_3| = \phi^{-4}, \dots$$

Dakle, ϕ^{-i} , $i = 1, 2, \dots$ su dužine kateta trougla normalnih na Ox -osu, pa odavde vidimo da tačka B_i dijeli duž $\overline{D_iA_i}$ ($i = 1, 2, \dots$) u omjeru zlatnog presjeka.

Čitaocima prepuštamo da dokažu da tačke A_1, A_2, A_3, \dots dijele dužine $A_0A_2, A_1A_3, A_2A_4, \dots$ u omjeru zlatnog presjeka.

Posmatrajmo sada opet Sliku 2. Vidimo da je

$$\begin{aligned} |A_0B_0| + |A_1B_1| + |A_2B_2| + |A_3B_3| + \dots &= |OA_0|, \text{ to jest} \\ \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \dots &= \phi \iff (\text{zbog (3)} \phi^2 = \phi + 1 \iff \phi = \phi^2 - 1) \\ \iff \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \dots &= \phi^2 - 1 \iff 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \dots = \phi^2 \end{aligned}$$

i to je geometrijski dokaz za formulu (6). Označim sa $[XYZ]$ i $[PQRS]$ površine trougla $\triangle XYZ$ i kvadrata $\square PQRS$. Imamo da je (Slika 2)

$$\left. \begin{aligned} [A_0B_0A_1] &= \frac{1}{2}|A_0B_0| \cdot |B_0A_1| = \frac{1}{2}\phi^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{2}\phi^{-1} \\ [A_1B_1A_2] &= \frac{1}{2}|A_1B_1| \cdot |B_1A_2| = \frac{1}{2}\phi^{-2} \cdot \phi^{-1} = \frac{1}{2}\phi^{-3} \\ [A_2B_2A_3] &= \frac{1}{2}|A_2B_2| \cdot |B_2A_3| = \frac{1}{2}\phi^{-3} \cdot \phi^{-3} = \frac{1}{2}\phi^{-5} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} [OB_0A_1D_1] &= 1 = \phi^0 \\ [D_1B_1A_2D_2] &= (\phi^{-1})^2 = \phi^{-2} \\ [D_2B_2A_3D_3] &= (\phi^{-2})^2 = \phi^{-4} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Koristeći opet Sliku 2 i formule (10) i (11) možemo dokazati da je

$$1 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \dots = \phi. \quad (12)$$

Formulom (12) predstavljen je zbir površina kvadrata, čije su dužine stranica $1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \dots$ i taj zbir jednak je razlici između površine trougla $\triangle A_0OA_\infty$ i zbira površina trouglova $\triangle A_iB_iA_{i+1}$ $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Prema tome,

$$1 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \dots = [A_0OA_\infty] - \sum [A_iB_iA_{i+1}].$$

Kako je površina $\triangle A_0OA_\infty$

$$\triangle [A_0OA_\infty] = \frac{1}{2}A_0O \cdot OA_\infty = \frac{1}{2}(1 + \phi^{-1}) \cdot \phi^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi + 1}{\phi} \right) \cdot \phi^2 = \frac{1}{2}\phi(\phi + 1),$$

imamo da je

$$\begin{aligned} 1 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \dots &= \frac{1}{2}\phi(\phi + 1) - \frac{1}{2}(\phi^{-1} + \phi^{-3} + \phi^{-5} + \dots) \\ \iff 2 + 2 \cdot \phi^{-2} + 2 \cdot \phi^{-4} + 2 \cdot \phi^{-6} + \dots &= \phi^2 + \phi - \phi^{-1} - \phi^{-3} - \phi^{-5} - \dots \\ \iff (\text{zbog } \phi^2 \stackrel{(6)}{=} 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \dots) & \\ \iff 2 + 2 \cdot \phi^{-2} + 2 \cdot \phi^{-4} + 2 \cdot \phi^{-6} + \dots &= 1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \phi^{-5} + \phi - \phi^{-1} - \phi^{-3} - \phi^{-5} - \dots \\ \iff 1 + \phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \dots &= \phi. \end{aligned}$$

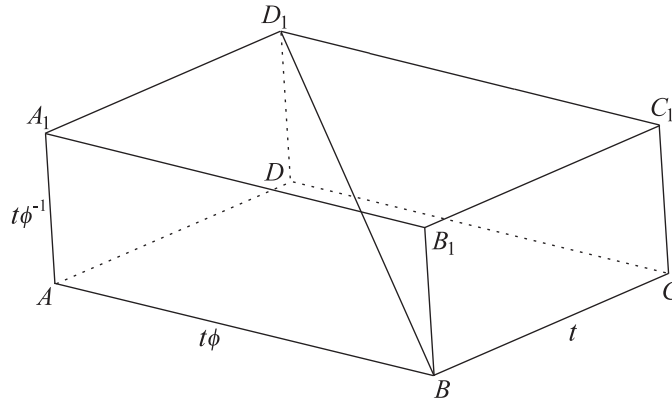
3. Zlatni paralelepiped (kvadar)

Paralelepiped je četverostrana prizma kojoj je baza paralelogram.

Definicija 3.1. *Pravougli paralelepied (kvadar) čije se dužine ivica odnose kao*

$$\phi : 1 : \phi^{-1}$$

*naziva se **zlatnim paralelepipedom**.*



Slika 3.

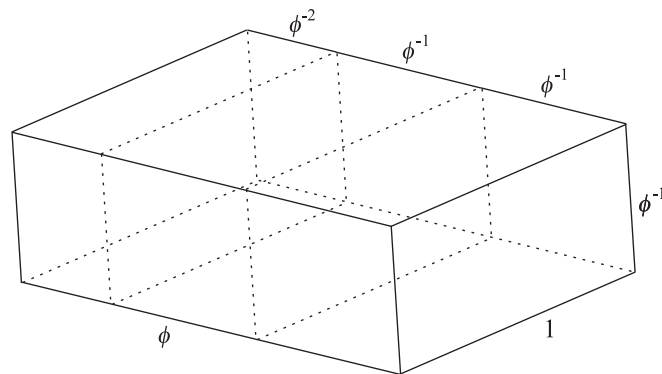
Na Slici 3 prikazan je zlatni kvadar čije su dužine ivica t , $t\phi$ i $t\phi^{-1}$, t je realan broj. Tako je:

$$\frac{t\phi}{t} = \phi \text{ i } \frac{t}{t\phi^{-1}} = \phi.$$

Na osnovu definicije zlatnog pravougaonika (*pravougaonik u kome je odnos između dužina duže i kraće stranice jednak ϕ se naziva zlatnim pravougaonikom*) vidimo da su pravougaonici $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ i ADD_1A , BCC_1B_1 zlatni, a pravougaonici ABB_1A_1 i DCC_1D_1 nisu (jer je $\frac{t\phi}{t\phi^{-1}} = \phi^2$).

(Napomena: pakovanja putera od 500g, brašna od 2kg i nekih sokova su zlatni kvadri.)

Posmatrajmo sada zlatni kvadar na Slici 4. Uočimo da je



Slika 4.

$$\phi^{-1} + \phi^{-1} + \phi^{-2} = 2\phi^{-1} + \phi^{-2} = \frac{2}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = \frac{2\phi + 1}{\phi^2} = \frac{\phi^3}{\phi^2} = \phi,$$

a zbog

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \iff \phi^2 = \phi + 1$$

je

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1.$$

Zapremina kvadra na Slici 3 jednaka je

$$V = t\phi \cdot t \cdot t \cdot \phi^{-1} = t^3 \cdot \phi \cdot \frac{1}{\phi} = t^3.$$

Dakle, za $t = 1$ je $V = 1$, a površina mu je

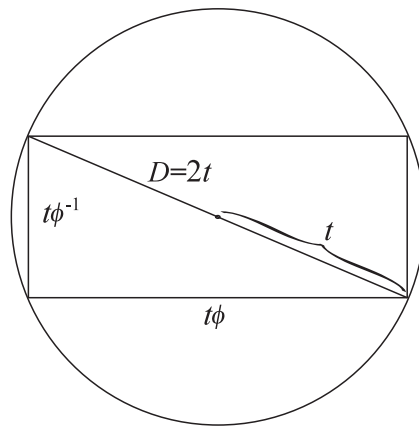
$$\begin{aligned} P_K &= 2 \cdot t \cdot \phi \cdot t + 2 \cdot t\phi \cdot t\phi^{-1} + 2t\phi^{-1} \cdot t = 2t^2(\phi + 1 + \phi^{-1}) \\ &= 2t^2 \left(\phi + 1 + \frac{1}{\phi} \right) = 2t^2 \left(\phi + \frac{\phi + 1}{\phi} \right) = (\text{zbog } \phi + 1 = \phi^2) \\ &= 2t^2 \left(\phi + \frac{\phi^2}{\phi} \right) = 2t^2 \cdot 2\phi = 4t^2\phi, \quad \text{za } t = 1 \text{ je } P = 4t^2. \end{aligned}$$

Prostorna dijagonala zlatnog kvadra je (v Sliku 3)

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(t\phi)^2 + (t\phi^{-1})^2 + t^2} = t\sqrt{\phi^2 + \phi^{-2} + 1} = \left(\text{zbog } \phi^{-2} = (\phi^2)^{-1} = \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi + 1} \right) \\ &= t\sqrt{\phi^2 + \frac{1}{\phi + 1} + 1} = t\sqrt{\phi^2 + \frac{\phi + 2}{\phi + 1}} = t\sqrt{\frac{\phi^3 + \phi^2 + \phi + 2}{\phi + 1}} \quad \left(\text{zbog } \phi^3 = 2\phi + 1 \right) \\ &= t\sqrt{\frac{2\phi + 1 + \phi + 1 + \phi + 2}{\phi + 1}} = t\sqrt{\frac{4(\phi + 1)}{\phi + 1}} = 2t. \end{aligned}$$

Specijalno, za $t = 1$, je $D = 2$.

Neka je sada oko zlatnog kvadra opisana lopta (vidi presjek na Slici 5).



Slika 5.

Znači, lopta ima poluprečnik t . Površina lopte je

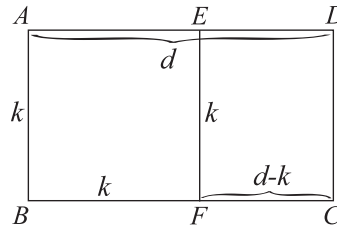
$$P_L = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot t^2.$$

Prema tome, dobijamo da je odnos između površine zlatnog kvadra i površine lopte opisane oko tog kvadra jednak

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{4t^2\phi}{4\pi t^2} = \frac{\phi}{\pi} \quad (\text{interesantan odnos između konstanti } \phi \text{ i } \pi).$$

Podsjetimo se sljedeće činjenice.

Teorem 3.2. *Ako iz zlatnog pravougaonika uklonimo kvadrat s najvećom mogućom površinom, onda je preostali pravougaonik takođe zlatni.*



Slika 6.

Dokaz: Neka je $ABCD$ zlatni pravougaonik i neka je duža stranica dužine $|AD| = d$ i kraća stranica dužine $|AB| = k$. Na Slici 6 je $ABFE$ kvadrat s najvećom mogućom površinom. Dokazaćemo da je $EFCD$ zlatni pravougaonik, to jest da vrijedi

$$\frac{k}{d-k} = \phi.$$

Iz definicije zlatnog pravougaonika slijedi da je

$$\frac{d}{k} = \phi \iff \frac{d}{k} - 1 = \phi - 1 \iff \left(\text{zbog } \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \right) \iff \frac{d-k}{k} = \frac{1}{\phi}, \text{ tj. } \frac{k}{d-k} = \phi,$$

što je i trebalo dokazati. \square

Šta vrijedi za zlatni kvadar? (v. Sliku 4.)

Ako iz zlatnog kvadra na Slici 4 uklonimo dva kvadra čije su dužine stranica ϕ^{-1} , $\phi-1$ i 1 , onda preostali kvadar ima dužine ivica 1 , ϕ^{-1} i $\phi-2\phi^{-1} = \phi^{-2}$ ($\phi-2\phi^{-1} = \phi - \frac{2}{\phi} = \frac{\phi^2-2}{\phi} = \frac{\phi+1-2}{\phi} = \frac{\phi-1}{\phi} = (\text{zbog } \phi-1 = \phi^{-1}) = \frac{\phi^{-1}}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}$).

Dakle, odnos ivica u preostalom kvadru je $1 : \phi^{-1} : \phi^{-2}$ i odavde nakon množenja sa ϕ slijedi $\phi : 1 : \phi^{-1}$ te zaključujemo da je preostali kvadar takođe zlatni.

Literatura

- [1] J. Carstensen, A. Muminagić: *Super zlatni pravokutnik*, Miš br. 89 /godina 18/ trvavanj 2017.
- [2] J. Carstensen, A. Muminagić: *Zlatna elipsa*, Matematičko-fizički list, LXVIX 1 (2018-2019).
- [3] J. Frandsen: *De(t) gyldne snit*, Systime, 1999 (2 udgnve).
- [4] M. Katić Žlepalo, B. Kovačić: *O zlatnom trokutu*, HMD, math.e br. 30.
- [5] B. Kovačić, M. Katić: *O zlatnom rombu*, HMD, math.e br. 35.
- [6] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.