

Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 14
**(збирка задачи за V одделение – втор
дел)**

Скопје, 2020

Одговорен уредник
проф. д-р Алекса Малчески

Рецензенти
проф. д-р Методи Главче
проф. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 14 : (збирка задачи за V одделение - втор дел) /
Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 255 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 253-255

ISBN 978-608-4904-55-7

COBISS.MK-ID 51245317

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Пресметувања и бројни ребуси	
I.1. Пресметувања	7
I.2. Низи	11
I.3. Бројни ребуси	12
I.4. Равенки и неравенства	15
I.5. Магични фигури	17
II Деливост	18
III Текстуални задачи	
III.1. Броеви и цифри	21
III.2. Времето е важно	25
III.3. Задачи со мерни броеви	29
III.4. Купуваме и пресметуваме пари	34
III.5. Разни задачи	37
IV Геометриски фигури	
IV.1. Воведни задачи	45
IV.2. Пресметуваме периметри	47
IV.2. Пресметуваме плоштини	52
IV.3. Дополнителни задачи	58
V Логика и комбинаторика	
V.1. Елементарни логички задачи	61
V.2. Логички главоболки	64
V.3. Занимливи броења	66

V.4. Боења, покривања и расекувања	70
V.5. Дополнителни задачи	72
Решенија на задачите	
I Пресметувања и бројни ребуси	
I.1. Пресметувања	75
I.2. Низи	85
I.3. Бројни ребуси	89
I.4. Равенки и неравенства	97
I.5. Магични фигури	102
II Деливост	105
III Текстуални задачи	
III.1. Броеви и цифри	113
III.2. Времето е важно	125
III.3. Задачи со мерни броеви	135
III.4. Купуваме и пресметуваме пари	147
III.5. Разни задачи	155
IV Геометриски фигури	
IV.1. Воведни задачи	174
IV.2. Пресметуваме периметри	178
IV.2. Пресметуваме плоштини	191
IV.3. Дополнителни задачи	207
V Логика и комбинаторика	
V.1. Елементарни логички задачи	215
V.2. Логички главоболки	221
V.3. Занимливи броења	226
V.4. Боења, покривања и расекувања	239
V.5. Дополнителни задачи	247
Литература	253

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 14* е наменета за талентираните ученици по математика од петто одделение и на извесен начин е продолжение на книгата *Математички талент 2*. Меѓутоа, сметам дека таа ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 388 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски задачи и задачи од деливост, приспособени за учениците на возраст од единаесет до дванаесет години.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, текстуалните задачи се поделени во шест дела, и тоа: *Броеви и цифри*, *Времето е важно*, *Задачи со мерни броеви*,

Купуваме и пресметуваме пари и Разни задачи, а истото се однесува и на разработката на логичките и комбинаторните задачи.

Рецензентите, проф. д-р Методи Главче и проф. д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2020 г.

Авторот

I ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(23-9) \cdot 8 + 2 \cdot (6+18:3).$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $12 \cdot 9 + 23 \cdot 8 + 34 \cdot 7 + 45 \cdot 6,$

б) $200 - 160 : (20 - 16),$

в) $2018 + 201 : 3 - 113 \cdot 4.$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(20-12) \cdot 15 + 2009 : (19 - 5 \cdot 2 - 2).$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот

$$58 \cdot 284 - 58 \cdot 273 + 11 \cdot 42 - 1001.$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот $(b-c) : a + d$ ако

$$a = (2051 - 2016) : (49 : 7)$$

$$b = 2014 - 81 + 73 \cdot 4$$

$$c = 3 \cdot 2015 - 2015 \cdot 2$$

$$d = (126 \cdot 8) : 9 - 112.$$

6. Пресметај:

а) $27 \cdot 8 + 23 \cdot 7 - 26 \cdot 6 - 19 \cdot 9,$

б) $9000 - 26 \cdot (21121 - 6687 : 9 \cdot 28) + 696,$

в) $52328 - 28 : 2 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot (145 - 145).$

7. Пресметај:

$$131 \cdot 12 - 12 \cdot 71 + (14 + 6 \cdot 3) \cdot 60.$$

8. Пресметај

$$209 \cdot (8 + 2 \cdot 6) - 972 : 9 + (432 + 209 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 0) : 4 - 2163.$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$19259 + 5 \cdot 48 - (714 : 7 + 2569).$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot (56 - 7 \cdot 8).$$

11. Пресметај:

$$(118178 : 74 + 8403) : 5 + 10.$$

12. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2002 + 2002 \cdot 5 + (86 \cdot 6793 - 6793 \cdot 43 - 43 \cdot 6999) \cdot 0 + 4 \cdot 2003 \cdot 25.$$

13. Пресметај

$$(43 \cdot 315 - 43 \cdot 281 + 34 \cdot 57) : 17.$$

14. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$52328 - 28 : 2 + (145 \cdot 532 - 532 \cdot 45) + 4827 \cdot 59 \cdot (132 - 132).$$

15. Кој број е поголем: $1186 + 1186 \cdot 9$ или $25 \cdot (6146 - 5672)$ и за колку?

16. Определи ги броевите A , B и C ако

$$A = 34 \cdot 6 + 76 \cdot (2016 - 2010) - 3 \cdot 214 : 6$$

$$B = (2148 + 784 : 8) - 2016$$

а бројот C е за 500 поголем од збирот на 45 десетки и 7 единици. Кој број е најголем?

17. На петте картички прикажани на цртежот десно се запишани

0

12

1

7

52

пет броја. Нареди ги петте картички една по друга така што прво ќе го добиеш најголемиот седумцифрен можен број, а потоа најмалиот седумцифрен можен број. Определи ја разликата на добиените броеви.

18. Замени ги местата на две цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$2012 = 1719 + 275$$

19. Пресметај $B - A$ ако

$$A=100+101+102+\dots+299 \text{ и } B=300+301+302+\dots+499.$$

20. Пресметај ја вредноста на изразот $C=3A:B+B:3$, ако

$$A=26 \cdot 25 - 25 \cdot 24 + 24 \cdot 23 - 23 \cdot 22 + 22 \cdot 21 - 21 \cdot 20 + \\ + 20 \cdot 19 - 19 \cdot 18 + 18 \cdot 17 - 17 \cdot 16 + 16 \cdot 15 - 15 \cdot 14$$

и B е најмалиот природен број за кој е решение на равенката $12:B=7-B$.

21. Пресметај:

$$111111111 \cdot 111111111 + 111111111 : 111111111.$$

22. Самоил има дигитрон со кој може даден број да го помножи со 3, да го собере со 2 и од даден број да одземе 1. Во кој редослед треба Самоил да ги користи наведените операции, секоја операција само еднаш, за од бројот 3 да го добие бројот 14?

23. Со помош на картички Самоил составил пример за собирање на броеви, но Вера ги заменила местата на две картички. Како што може да се види на цртежот десно равенството се нарушило. Кои картички ги заменила Вера? Кој пример го составил Самоил?

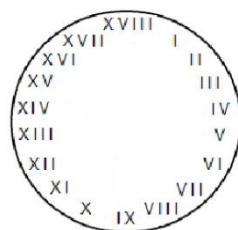
$$\begin{array}{r} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \\ + \boxed{2} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{4} \boxed{9} \\ \hline \boxed{5} \boxed{3} \boxed{9} \boxed{8} \boxed{1} \end{array}$$

24. Во изразот $5 \cdot 6 + 12 : 3 - 2$ стави загради така што вредноста на новиот израз ќе биде

а) 12, б) 28, в) 32, г) 42, д) 48.

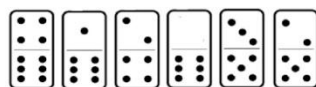
25. Во изразот $503 \cdot 32 + 75 \cdot 816 - 784 - 15 + 17 \cdot 94$ стави загради така што неговата вредност ќе биде 15488.

26. При истражувањето на античкиот град Стибера била најдена необична кружна плоча на која биле запишани римските броеви од 1 до 18 (цртеж десно). За жал плочата била скршена на 5 дела. Археологот Стале забележал дека збирот на броевите на секој од



петте дела е еднаков. Покажи како можела да биде скршена плочата.

27. Со помош на домино плочки може да се претставуваат четирицифрени броеви. На пример, со  е претставен бројот 4203. Со помош на плочките



прикажи точен пример за собирање на два четирицифрени броја.

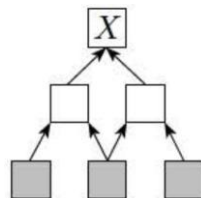
28. Определи ги вредностите на A и B :

$$A = (147 \cdot 18 + 627 \cdot 7) : 21 - 2772 : 9$$

$$(B + (2018 - 2) : 42)8 = 11.$$

При фрлање на коцка за играње може да паднат од 1 до 6 точки. Иван пет пати ја фрлил коцката и ги запишал паднатите броеви точки. Ако нивниот збир е 11, дали е можно нивниот производ да биде еднаков на A или B . Кој е најголемиот можен производ на паднатите броеви точки?

29. Во сивите квадратчиња на дијаграмот на цртежот десно се запишани различни едноцифрени броеви. Броевите запишани во соседните квадратчиња се собираат и зборовите се запишуваат во квадратчињата над нив. Определи ја најголемата можна вредност на X .



30. Операцијата $*$ е зададена со $x * y = xy + x - y$. Пресметај

$$(2 * 3) * (9 * 7).$$

31. Операцијата $*$ е определена за секои два броја a и b со

$$a * b = (a + 9b)(b - 9a).$$

Ако x е најголемиот парен трицифрен број, а y најмалиот непарен трицифрен број, пресметај $y * x$.

32. Ако $a \otimes b = 3a + b : 2$, пресметај $46 \otimes 26 + 64 \otimes 84$.

I.2. НИЗИ

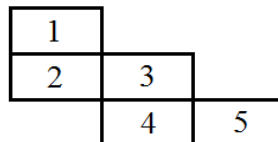
33. Горјан за запишал следнава низа знаци:

♠, ♣, ▲, ♦, ♣, ☺, ♦, ♣, ▲, ♦, ♣, ☺, ♦, ♣, ▲, ♦, ♣, ☺, ♦, ♣, ▲, ♦, ...

Кој знак го запишал Горјан на 208-то место во низата? Одговорот да се образложи!

34. Јованка во дворот нацртала пет право-

аголници како на цртежот десно. Таа застанала во полето 1, потоа поминала во полето 2, па поминала во полето 3, па во полето 4, па во полето 5, после



што се враќала наназад – од петтото во четвртото, од четвртото во третото, од третото во второто, од второто во првото поле и повторно од почеток. Од едно во друго поле Јованка преминува со еден чекор.

Во кое поле ќе биде Јованка откако ќе направи 2019 чекори?

35. Определи ги непознатите членови на низата броеви:

1, 4, 7, a , 13, 16, b .

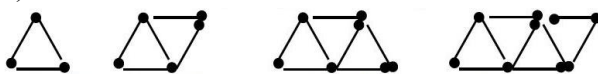
36. Определи ги броевите кои недостасуваат во низата броеви:

3, 9, 21, a , 63, 93, b .

37. Броевите од 1 до 9 запиши ги во низа така што не постојат три последователни броеви кои се во растечки или опаѓачки редослед.

38. Формираме бројна низа на следниот начин: на првото и второто место ги запишуваме цифрите 2 и 7, соодветно. Потоа на третото место ја запишуваме последната цифра на нивниот производ. На четвртото место ја запишуваме последната цифра на производот на последните две запишани цифри. Така, на секое следно место ја запишуваме последната цифра на производот на последните две запишани цифри во низата. Која е цифрата на 2019-тото место во оваа низа?

39. На таблата е запишана низа од пет броја такви што разликата меѓу секои два соседни броја е еднаква. Потоа цифрите се заменети со букви така што различните цифри се заменети со различни букви, а еднаквите цифри се заменети со еднакви цифри и е добиен записот: A, BC, DEA, CFC, FGA . Определи ги броевите во оваа низа.
40. Со помош на еднакви кибритени чкорчиња е формирана низа од 1 триаголник, 2 триаголника, 3 триаголници, 4 триаголници итн. (види цртеж).



Колку кибритени чкорчиња се потребни за да се направат 101 фигура?

1.3. БРОЈНИ РЕБУСИ

41. Дешифрирај го бројниот ребус $\overline{ABB} + \overline{BB} = \overline{BBA}$, каде различните букви претставуваат различни цифри, а еднаквите букви еднакви цифри.
42. Решај го бројниот ребус, ако на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на еднаквите букви еднакви цифри:

$$U + \overline{AAA} + \overline{AAA} = \overline{UAAA}.$$

43. Во ребусот

$$\overline{PRASE} + \overline{PRASE} = \overline{SONCE}$$

на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Определи ја најголемата можна вредност на $\overline{PRASE}$.

44. Во бројниот ребус

$$\overline{OMG} + \overline{OMG} + \overline{OMG} = 21 + \overline{VEK}$$

на различни букви соодветствуваат различни неискористени цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Определи ја најголемата можна вредност на $\overline{OMG}$.

45. Реши го бројниот ребус

$$\overline{MASTRIT} + \overline{ASTRIT} + \overline{STRIT} + \overline{TRIT} + \overline{RIT} + \overline{IT} + T = 6043856,$$

во кој на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри.

46. Во зборовите

$$\begin{array}{r} \\ \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \hline 9 \end{array}$$

на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри. Кој број соодветствува на зборот ПЕРО?

47. Во равенството прикажано на цртежот десно на секоја буква соодветствува непарна цифра, при што на различните букви соодветствуваат различни букви, а на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри. Определи го збирот

$$\begin{array}{r} \\ \\ \hline 9 \end{array}$$

$$K + O + K + O + Ш + K + A.$$

48. Реши го ребусот

$$\overline{aa} + \overline{bcb} = \overline{deed}$$

во кој на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

49. Во ребусот даден на цртежот десно на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. На буквата Л соодветствува цифрата 2. Која цифра соодветствува на цифрата О? Определи го збирот $K + H + Г + Б$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \hline 1 \end{array}$$

50. Во збирот $\overline{ШАП} + \overline{КА}$ на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Определи ја најголемата можна вредност на овој збир.

51. Во ребусот $\overline{A7} \cdot B = \overline{CA6}$ на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри. Определи го збирот $A + B + C$.

52. Замени ги ѕвездичките со цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$***5:11=**.$$

53. Замени ги буквите со цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$\overline{13abcde}:5=\overline{abcde6}.$$

54. Дешифрирај го множењето

$$\begin{array}{r} *28.** \\ \hline 36*0 \\ + **12 \\ \hline ***** \end{array}$$

55. Во ребусот прикажан на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Определи ги сите решенија на ребусот?

$$\begin{array}{r} \times \text{ДУГА} \\ \text{6} \\ \hline \text{КРУГ} \end{array}$$

56. Во долните равенства на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$A \cdot B = E, \quad B \cdot E = \overline{A\Gamma}, \quad \overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{ДБ}.$$

Определи го збирот $B + Д + E$.

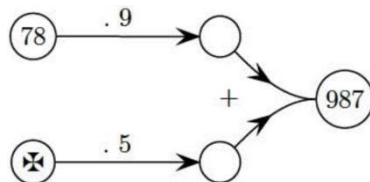
57. Во ребусот

$$T \cdot O \cdot R \cdot I \cdot N \cdot O = M \cdot A \cdot S \cdot T \cdot R \cdot I \cdot T$$

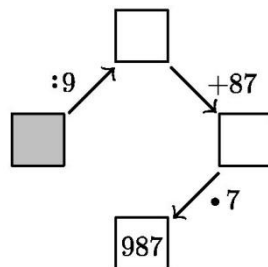
на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри, при што ниту една буква не соодветствува ниту на цифрата 0, ниту на цифрата 2. Определи го збирот $R + I + N + O$.

1.4. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

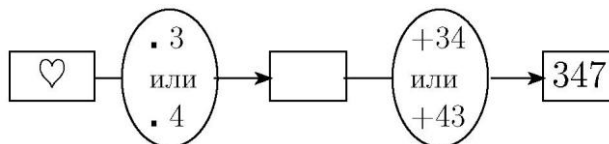
58. Ако пресметувањата во дијаграмот на цртежот десно се точни, кој број треба да стои наместо знакот $\otimes$?



59. Определи го бројот кој во дијаграмот на цртежот десно треба да е запишан во сивото квадратче.



60. Во дијаграмот прикажан на долниот цртеж сите броеви се природни. Кој број е означен со $\heartsuit$?



61. Реши ја равенката

$$292 + 84 = x - 56 \cdot 4.$$

62. Реши ја равенката:

$$(239 - 138 : x) \cdot 6 + 612 = 2010.$$

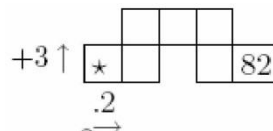
63. Пресметај

$$a = (2011 \cdot 65 + 4022 \cdot 18 - 18099 : 9) : 4$$

и за најдената вредност на a реши ја равенката

$$(a - 5x) : 25 + 25 = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17) \cdot 25.$$

64. Во квадратчето со ѕвездичката на цртежот десно е запишан број. Квадратчињата се пополнуваат последователно при што кога се оди нагоре се додава 3, кога се оди десно се множи со 2 и кога се оди надолу се одзема 3. Кој број треба да стои наместо ѕвездичката?



65. На еднаквите фигури во табелата на цртежот десно соодветствуваат еднакви броеви. Ако ги знаеш збирите на броевите во секој ред и во секоја колона, определи го бројот кој соодветствува на фигурата $\oplus$.

$\diamond$	$\diamond$	$\odot$	← 20
$\odot$	$\odot$	$\odot$	← 54
$\triangle$	$\oplus$	∇	← 39
↑	↑	↑	
41	34	38	

66. Во долните равенства наместо броеви се ставени знаци. Определи ги броевите кои соодветствуваат на знаците $\heartsuit$, $\blacksquare$ и $\clubsuit$.

$$\heartsuit + \heartsuit + \blacksquare = 30$$

$$\blacksquare + \blacksquare + \blacksquare + \clubsuit = 29$$

$$\clubsuit + \clubsuit + \clubsuit = 33.$$

67. Во долните равенства на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри.

$$D + V + A + E + S + E + T + I + D + V + A = 27$$

$$T + R + I + E + S + E + T + I + T + R + I = 47.$$

Определи го збирот

$$D + V + A + E + S + E + T + I + T + R + I.$$

68. Колку решенија има ребусот

$$\overline{AN} > \overline{NA}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

69. Броевите 1, 2, 3, и 4 запиши ги во полињата во шемата прикажана на цртежот десно, во секое поле по еден број, така што во секоја колона и во секоја редица се наоѓаат сите четири броја и се исполнети дадените неравенства.

$\square$	$\square$	$\square$	$>$	$\square$
	$\wedge$	$\wedge$		$\square$
	$\square$	$\square$		$\square$
$>$	$\square$	$\square$		$\square$
$\wedge$	$\square$	$\square$		$\square$

70. Која римска цифра треба да се постави на линијата за да се добие точно неравенство:

$$XXIX < XX_.$$

1.5. МАГИЧНИ ФИГУРИ

71. Во табелата на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков. Кој број треба да се запише во полето во кое се наоѓа прашалникот?

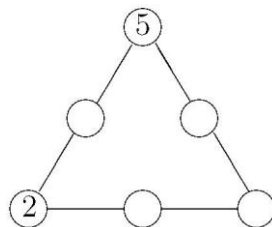
		6
?	7	
		4

72. Наместо буквите во квадратчињата во табелата запиши броеви, различни од нула, така што производот на секои три броја од секој ред, од секоја колона и на секоја дијагонала е еден ист број.

4	a	b
18	12	c
d	e	f

$$e = 2, f = 36.$$

73. Во кругчињата на фигурата дадена на цртежот десно треба да се запишат различни едноцифрени броеви така што збирот на трите броја запишани на секоја страна на триаголникот е еднаков на 10. Определи го збирот на сите запишани броеви.



74. Дали може во полињата на квадратна 5×5 табела да се запишат 5 петки, 5 четворки, 5 тројки, 5 двојки и 5 единици, во секое поле по еден број, така што во секој 2×2 квадрат збирот на запишаните броеви биде еднаков?
- б) Дали може во полињата на квадратна 6×6 табела да се запишат 6 шестки, 6 петки, 6 четворки, 6 тројки, 6 двојки и 6 единици, во секое поле по еден број, така што во секој 3×3 квадрат збирот на запишаните броеви биде еднаков?

75. Во квадратчињата на цртежот десно запиши ги броевите од 1 до 9 така што зборовите на броевите во секој ред и секоја колона бидат различни.

II ДЕЛИВОСТ

1. На еден натпревар во танцови парови секој натпреварувач има право да гласа или ЗА или ПРОТИВ натпреварувачката програма. По гласањето на сите натпреварувачи претседателот на жирито избројал 23 гласа повеќе ЗА, од гласовите против. Дали претседателот на жирито згрешил?
2. Горјан замислил четири броја a, b, c, d и ги пресметал шесте збира $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$. Тој ги добил броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 во некој редослед. Определи ги броевите кои ги замислил Горјан.
3. На колку најмногу нули може да завршува производот
$$\overline{MA} \cdot \overline{TE} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{TI} \cdot \overline{KA},$$
 каде на различни букви им соодветствуваат различни цифри, а на исти букви им соодветствуваат исти цифри?
4. Ако трицифрениот број $\overline{abc}$ е делив со 37, тогаш и бројот $n = \overline{bca} + \overline{cab}$ е делив со 37. Докажи!
5. Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 2 и со 5 и чиј збир на цифри е еднаков на 9.
6. Која цифра треба да стои на местото на буквата a така што збирот на броевите $\overline{2017a}$ и 211 да биде делив со 2, а која цифра треба да стои на местото на буквата a за овој збир да биде делив со 5.
7. Определи го бројот на двоцифрените броеви со својство: збирот на тој број и десет пати поголемиот број е трицифрен број.
8. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои даваат еднаков остаток при делење со 4 и со 5.

9. Определи го бројот на четирифрените броеви такви што двоцифрените броеви формирани од кои било две последователни соседни цифри се деливи со 23.
10. На часот по математика секое момче од V^a отделение решило по 8 задачи, а секое девојче решило по 13 задачи. Учителката пребројала дека вкупно се решени 180 задачи. Колку ученици има во одделението?
11. Од секој трицифрен број запишан со различни цифри можеме да формираме шест различни двоцифрени броеви (на пример од бројот 134 ги добиваме броевите 13, 14, 31, 41, 34 и 43). Трицифрениот број запишан со различни ненулти цифри го нарекуваме *прекрасен* ако сите шест двоцифрени добиени од него се прости. Определи ги сите *прекрасни* трицифрени броеви.
12. Определи барем еден десетцифрен број запишан со различни цифри, кој е делив со 7?
13. Горазд купил повеќе од три исти пакети чоколади. Од едниот пакет извадил седум чоколади и вкупно му останале 65 чоколади. Колку чоколади останале во отворениот пакет?
14. Секој ден во текот на седум последователни дена метеоролозите ја мереле дебелината на снежната покривка на врвот Пелистер и добиле седум броја во сантиметри. Вториот ден дебелината на покривката била 20 *cm* поголема во споредба со првиот ден, третиот ден таа била 3 пати поголема од претходниот ден, следниот ден се намалила за 58 *cm*, а петтиот ден заврнал обилен снег и дебелината на снежната покривка се зголемила 5 пати. Следниот ден времето се стоплило и половината од снежната покривка се стопила. При мерењето во седмиот ден дебелината на снежната покривка била за 65 *cm* помала, отколку во шестиот ден. Метеоролозите констатирале дека на крајот на седмиот ден дебелината на снежната покривка измерена во сантиметри е број којшто покажува дата од месец февруари. Определи го збирот на цифрите

на бројот којшто во сантиметри е дебелината на снежната покривка при првото мерење?

15. За својот нов велосипед Горјан набавил клуч кој се отвара со помош на шифра. Шифрата е четирицифрен број запишан со различни цифри. Секој природен број може да се подели без остаток со цифрата на стотките на шифрата, цифрата на илјадитите на шифрата е парна, а збирот на цифрата на илјадитите и цифрата на десетките е еднаков на 7. Цифрата на единиците на шифрата е помала од цифрата на десетките, а производот на двете цифри завршува на 5. Определи ја шифрата на клучот на Горјан.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Кој е најмалиот можен број кој може да се добие со бришење на три цифри на бројот 381438.
2. Рампо забележал дека водомерот во станот покажува 795 m^3 , број во кој сите цифри се непарни и различни. Колку кубни метри вода ќе потроши Рампо до моментот кога за првпат бројчаникот водомерот повторно ќе покажува број запишан со три различни непарни цифри?
3. Со помош на цифрите 1, 2, 3 и 4 се запишани два броја, при што секоја од цифрите е искористена точно еднаш. Определи го збирот на двата броја, ако нивниот производ е најмал можен број.
4. Градската управа решила да ги нумерира куќите на главната улица на градот. За таа цел порачала таблички со цифри. Се покажало дека табличките со цифрата 1 се за 12 повеќе од табличките со цифрата 0. Определи го најмалиот број куќи кои може да ги има главната улица.
5. На едната страна на улицата куќите се нумерирани со непарните броеви од 1 до 113, а на другата страна со парните броеви од 2 до 128. Колку цифри се употребени за нумерирање на куќите на оваа улица?
6. На една улица куќите се нумерирани со броевите 1, 3, 5, ...од едната страна и со броевите 2, 4, 6, ... од другата страна на улицата. Вкупно се искористени 38 парни и 116 непарни броеви, кои се напишани со боја.
 - а) Колку цифри се употребени за нумерирање на куќите?

- б) Сопствениците на куќите сакаат цифрите да ги заменат со метални, бидејќи натписите со боја не се убави. Во блиската продавница во доволно количество ги има само цифрите 2 и 6. Колку сопственици на куќите ќе успеат надписите да ги заменат со метални цифри?
7. Замислив еден број и од него одзедов 18. Добиената разлика ја помножив со 8, па добиениот производ го собрав со 1. Добие- ниот збир го поделив со 3 и добив 67. Кој број го замислив?
8. Цифрата на десетките на еден двоцифрен број е за 2 поголема од цифрата на единиците. Производот на цифрите на овој број е еднаков на 35. Кој е двоцифрениот број?
9. Илија тргнал од Прилеп за Крушево, а Марко тргнал од Круше- во за Прилеп. Тие се разминале кај еден знак на кој од едната страна пишувало колку километри има до Прилеп, а на другата страна пишувало колку километри има до Крушево. Илија забе- лежал дека двата броја се различни, запишани со исти цифри но во различен редослед и збирот на двата броја е најмалиот број кој може да се претстави на опишаниот начин. Определи ја должината на патот од Прилеп до Крушево?
10. Петар ги собрал сите двоцифрени броеви во чијшто запис циф- рата на единиците е за 1 помала од цифрата на десетките, а Еф- тим ги собрал сите двоцифрени броеви во чијшто запис цифрата на единиците е за 1 поголема од цифрета на десетките. За колку збирот на Петар е помал од збирот на Ефтим?
11. Секое утро на таблата во градот Бедрок се запишува бројот 25. Ако дојде Фред, тој запишаниот број го зголемува за 5. Ако дојде Барни, тој запишаниот број го намалува за 5. Ако дојде Вилма, таа запишаниот број го множи со 5. Ако дојде Бети, таа запишаниот број го дели со 5. Ако сите четворица во некој ре- дослед дојдат до таблата, каков може да биде крајниот резултат?
12. Определи го најмалиот четирицифрен број таков што збирот на неговите цифри е помал од производот на неговите цифри.

13. На двете страни на три картончиња Горјан запишал по еден

1289

3467

5555

 број и картончињата ги поставил како на цртежот десно. Збирите на двата броја запишани на секое од трите картончиња се еднакви. Најголемиот запишан број е еднаков на 6116. Определи го вториот број запишан на сивото картонче.
14. Магдалена замислила еден број. Замислениот број го намалила 44 пати и го добила количникот на броевите 2626 и 26. Кој број го замислила Магдалена?
15. Збирот на два броја е еднаков на 960, а нивниот количник е еднаков на 5. Кои се тие броеви?
16. Збирот на намаленикот, намалителот и нивната разлика е еднаков на 76. Определи ги намаленикот и намалителот ако разликата е за 6 поголема од намалителот.
17. Имаме три карти со различни цифри запишани на нив. Со овие карти се составени најголемиот можен број, а потоа вториот по големина број. Збирот на двата броја е 1233, Определи го збирот на цифрите запишани на картите.
18. Збирот на двоцифрен и трицифрен број е четирицифрен број. Секој од ови три броеви исто се чита од лево на десно и обратно. Кои се тие броеви?
19. Определи го најмалиот број $n = \overline{abcd...xyz}$ таков што
- $$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d + \dots + x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = 2008.$$
20. Ако на некој двоцифрен број го собереме со бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед ќе го добиеме бројот 154.
- а) Определи го збирот на цифрите на почетниот број.
- б) Определи ги броевите со наведеното својство.
21. Марија замислила некој број. Потоа тој број го собрала со 21 и добиениот број го помножила со 35. Кога последниот добиен број го собрала со 2834 го добила бројот 28769. Кој број го замислила Марија?

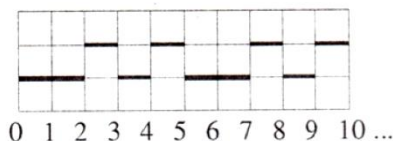
22. Збирот на три броја е 840. Збирот на првиот и вториот од тие броеви е 463, а збирот на вториот и третиот е 642. Определи ги овие три броеви.
23. Збирот на два броја е еднаков на 43210. Ако од едниот број се изостави првата цифра од лево, се добива вториот број. Кои се тие броеви?
24. Иван и Ѓорѓи живеат на иста улица од страната на непарните броеви. Иван живее во куќата број 111, која е 130-та по ред од крајот на улицата во насока од поголемите кон помалите броеви. За нумерирање на куќите меѓу куќите на Иван и Ѓорѓи (без куќите на Иван и Ѓорѓи), се искористени 288 цифри. Колку куќи има по куќата на Ѓорѓи во насока од помалите кон поголемите броеви?
25. Иван последователно ги запишал броевите од 1 до 101:
1, 2, 3, 4, ... 99, 100, 101.
Марија избришала 81 последовател број од запишаните броеви, при што најголемиот избришан број е девет пати поголем од најмалиот избришан број. Определи го збирот на броевите кои останале неизбришани.
26. Определи го најголемиот можен збир на цифрите на 880 различни трицифрени броеви.
27. Дадени се четири картончиња на секое од кои е запишана по една цифра. Со помош на картончињата се составува најголемиот можен четирицифрен број, а потоа и најмалиот можен четирицифрен број. Определи го збирот на цифрите запишани на картончињата ако збирот на двата четирицифени броја е 6446.
28. Еден генерал имал помалку од 160 војници, но бил горд дека можел да ги построи војниците во форма на квадрат, т.е. бројот на војниците во секој ред да е еднаков на бројот на редовите во квадратот и секој ред да е со најмалку четири војника. На пробата за воената парада генералот констатира дека еден од војниците е болен, но успеал да ги построи војниците во неколку

еднакви квадрати. Пред самата парада уште еден војник се разболел, но генералот пак успеал да го построи војниците во неколку еднакви квадрати. Колку војници има генералот?

29. Палчо и Цанко биле гладни и откако изеле една торта се заситиле. Се покажало дека гладниот Цанко тежи помалку од заситениот Палчо, а ситиот Цанко тежи двапати повеќе од гладниот Палчо. Кој тежи повеќе тортата или гладниот Палчо?

III.2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

30. На дијаграмот прикажан на долниот цртеж горните отсечки ги прикажуваат временските периоди изразени во секунди кога крајбрежен светилник свети, а долните отсечки периодите кога светилникот не свети.



Горјан го набљудувал светилникот неколку минути и забележал дека моделот на работа на светилникот се повторува. Колку секунди светилникот светел во текот на една минута?

Направи модел на работа на светилникот во кој тој во текот на една минута ќе свети 30 секунди.

31. Дадени се два песочни часовника кои мерат време 20 и 25 минути. Како со нивна помош ќе измериме време од 30 минути?
32. Пред 45 минути Магдалена рекла дека после 6 часа и 23 минути ќе биде пладне. Колку часот е сега?
33. Марија ги поканила Ангела и Светлана на гости. Ангела пристигнала кај Марија во 13:15, а Светлана пристигнала во 13:32. Ангела соопштила дека од дома до куќата на Марија патувала 58 минути. Светлана од дома тргнала 43 минути покасно од Марија. Колку време патувала Светлана?

34. Мартин ги пишува домашните работи по македонски јазик, англиски јазик и математика точно 3 часа и 18 минути. За пишување на домашната работа по математика му биле потребни 1 час и 29 минути, а за пишување на домашната работа по англиски јазик му биле потребни 54 минути. Определи го времето за кое Мартин ја напишал домашната работа по македонски јазик.
35. Пет деца купиле билети за ракометен натпревар кој почнувал во 16:00 часот. Првото дете влегло во салата во 15:54, а секое следно дете влегувало 5 минути покасно од претходното. Колку деца не го гледале целиот натпревар? Колку минути од натпреварот не гледало детето кое последно влегло во салата?
36. Марија од 21:54 часот на 31.12.2018 година до 11:30 на 01.01.2019 година, во еднакви временски интервали испратила 17 новогодишна порака. Определи го времето меѓу две последователни пораки кои ги испратила Марија?
37. Евгенија оди од дома до училиште за 30 минути, а нејзиниот брат Бојан за 40 минути. Денес Бојан на училиште тргнал 5 минути пред Евгенија. На кое растојание од дома до училиште Евгенија ќе го стигне Бојан?
38. Ако Горјан говори непрекинато на својот мобилен телефон, тогаш батеријата на телефонот ќе се испразни за 6 часа, а ако тој воопшто не говори на мобилниот телефон, тогаш батеријата ќе се испразни за 48 часа. Горјан патува со воз, при што половината од времето говорел на својот мобилен телефон, а половината од времето разговарал со патниците во возот. На почетокот на патувањето батеријата на неговиот мобилен телефон била полна, а на крајот од патувањето таа била празна. Колку време патува со возот Горјан?
39. Градскиот часовник во Прилеп отчукува на секој полн час онолку пати колку што е часот. Покрај тоа, на секој полн час и 15 минути отчукува еднаш, на секој полн час и 30 минути двапати и на секој полн час и 45 минути трипати. Колку пати градскиот часовник ќе отчука од 6:20 до 11:40?

40. Фросина е родена на 25 март, вторник, а Марио е роден на 3 мај истата година. Во кој ден од седмицата е роден Марио?
41. Горјан прочитал 12 книги една по друга. Првата книга ја прочитал за 2 дена, потоа втората за 3 дена итн. за читање на секоја следна книга тој одделил еден ден повеќе отколку за претходната. Ако Горјан со читањето на книгите започнал во недела, во кој ден од седмицата завршил со читањето на сите книги?
42. Горјан и Самоил истовремено тргнале од нивната планинска кука до кука на чичко Ѓорѓи. Самоил одел по двапати пократка патека и се движел двапати побрзо од Горјан. Тој кај чичко Ѓорѓи стигнал 30 минути пред Горјан. Определи го времето за кое Горјан стигнал кај чичко Ѓорѓи.
43. Мимоза и Лилјана правеле панделки. Мимоза прави 15 панделки за 1 час и 20 минути, а Лилјана прави 30 панделки за 1 час и 12 минути. За колку време двете заедно ќе направат 87 панделки?
44. Планетата Железна се врти околу својата оска за 5 железни часа, а планетата Камена се врти околу својата оска за 6 камени часа. Свемирски брод лета со постојана брзина и од планетата Железна до планетата Камена стасува за 20 железни часа, а од планетата Камена до планетата Железна стасува за 25 камени часа. Која планета се врти околу оската побрзо?
45. Марија, Елена, Ана и Мирјана решиле да свират во квартет. Тие имаат виолини (В), флејти (Ф), тапани (Т) и гитари (Г). На почетокот Марија и Елена зеле гитари, Ана зела тапани и Мирјана зела флејта. Потоа започнале да ги менуваат инструментите. Марија на секои 15 минути во редослед: Г-В-Ф-Т-Г- ..., Елена во истиот редослед, но на секои 10 минути, Ана ги менувала во следниот редослед: Ф-Г-В-Т-Ф-... на секои 20 минути и Мирјана во редослед: Т-Ф-В-Г-Т-... на секои 12 минути. Тие свиреле 2 часа. Познато е дека успеале да свират во хармонија само тогаш кога четирите свиреле на различни инструменти. Колку време девојките свиреле во хармонија?

46. Тројца пријатели Ангел, Борис и Васил посетуваат една и иста читална. Читалната не работи во сабота и недела. Ангел оди во читалната преку еден ден, Борис оди преку два дена, а Васил оди преку пет дена. Тројцата ги бројат деновите според календарот, но ако на некој му се падне во читалната да оди во сабота или во недела, тој читалната ја посетува во понеделник. На 31 јануари, во четврток тројцата пријатели беа во читалната. Најрано на кој датум и во кој ден тројцата одново заедно ќе бидат во читалната?
47. Мајката на Ласко е трипати постара од Ласко, а неговиот татко е четири години постар од неговата мајка. Сите тројца заедно имаат 99 години. Колку години има секој од нив?
48. Дарко е постар од Јован онолку години колку што Јован е постар од Борис. Колку години има Јован, ако сите тројца заедно имаат 54 години?
49. Ангела има четири чичковци: Александар, Јован, Матеј и Петар. Тие заедно имаат 158 години и се родени на еднакво временско растојание од по 5 години. Петар е помлад, а Јован е постар од Александар, додека Јован е постар, а Александар е помлад од Матеј. Колку години има секој од чичковците на Ангела?
50. Иван во 2019 година има толку години колку што е збирот на цифрите на годината во која е роден. Во која година е роден Иван?
51. Самоил отишол на гости во семејство кое имало 4 деца. Тој прашал колку години има секое од децата, на што таткото одговорил дека производот на нивните години е еднаков на 72. Самоил направил неколку пресметки но не успеал да ја реши задачата. Тогаш таткото му кажал дека збирот на годините на четирите деца е еднаков на годините на Самоил. За жал Самоил повторно не бил во состојба да ја реши задачата, па прашал дали некое од децата има 2 години. Таткото одговорил дека нема, после што Самоил ги соопштил годините на децата. На која возраст се децата и колку години има Самоил?

III.3. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

52. Марко од Прилеп до Крушево минува преку прво преку селото Славеј, а потоа преку селото Кривогаштани. Патот од Прилеп до Кривогаштани е долг 25 km . Патот од Славеј до Кривогаштани е долг 6 km . Патот од Славеј до Крушево е долг 15 km . Колку километри е долг патот од Прилеп до Крушево?
53. Кенгурите Скокалко и Скокалка од иста точка тргнале по права линија во спротивни насоки. Должината на скокот на Скокалко е еднаква на $1\text{ m } 50\text{ cm}$, а должината на скокот на Скокалка е еднаква на $1\text{ m } 20\text{ cm}$. За исто време Скокалко прави 3 скока, а Скокалка прави 2 скока. Скокалко направил 15 скока. На колкава оддалеченост се Скокалко и Скокалка еден од друг?
54. Растојанието од домот на Тимотеј до училиштето во кое учи е 770 m . Стефан требало да го чека Тимотеј на 80 m од домот на Тимотеј. Но, тој се збунил и го чекал Тимотеј на 80 m од училиштето. На кое растојание Стефан го чекал Тимотеј од договореното место за средба?
55. Илина тргнала од дома броејќи чекори. Таа одела по права линија така што прво направила 10 чекори напред, па се вратила 2 чекори назад. После тоа повторно направила 10 чекори напред, па се вратила 1 чекор назад. Оваа постапка, 10 чекори напред и 2 назад, па 10 чекори напред и 1 чекор назад, Илина ја повторувала се додека не се оддалечила од куќата 2019 чекори. Колку чекори направила притоа Илина?
56. Кенгурот Скокалко тренира скокање. Тој скока на права патека на следниов начин: прави 100 скокови нанапред, а потоа 100 скокови наназад, па повторно 100 скокови нанапред и 100 скокови наназад и продолжува на ист начин. Секој скок нанапред има должина 3 m , а секој скок наназад има должина 2 m . Скокалко тргнува од местото А и направил 1574 скокови. На кое растојание од местото А се наоѓа Скокалко?

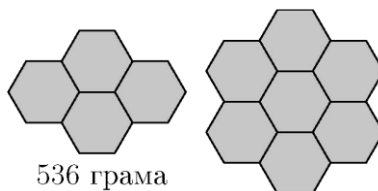
57. Автобус за три дена поминал пат со должина 2592 km . Првиот ден поминал една третина од целиот пат. Вториот ден поминал една четвртина од преостанатиот пат. Колку километри поминал третиот ден автобусот?
58. Матеј е за 5 cm повисок од Лука, кој е 20 cm понизок од Ивана. Определи ја висината на секое од децата, ако сите тројца се високи вкупно 475 cm .
59. Методиј го препешачил патот од местот А до местото В минувајќи секоја минута по 80 m . Истиот пат неговиот другар Васил со моторцикл го поминал за 8 минути. Атанас, возејќи велосипед, истиот пат го поминал двапати побавно од Васил, но петпати побрзо од Методиј.
Колкаво е растојанието од местото А до местото В? Колку време му требало на Методиј, а колку на Атанас за да го минат овој пат?
60. Воз со должина 64 m поминува за 8 секунди покрај железничар кој стои. За колку секунди ќе помине возот преку мост долг 72 m , ако се движи со истата брзина?
61. Од два града А и Б кои се наоѓаат на растојание 180 km еден од друг тргнале истовремено еден кон друг два туристички автобуси. Автобусот од А се движел 12 km/h побрзо од автобусот од Б.
а) Автобусите се разминале после 3 часа. Определи ги нивните брзини и на кое растојание од А се разминале автобусите?
б) Ако секој од автобусите се движел со брзина поголема за 15 km/h , на кое растојание од А ќе се разминат?
62. Од два града А и Б, кои се наоѓаат на растојание 720 km , истовремено тргнале еден кон друг два автомобили. Автомобилите се движеле со постојани брзини при што едниот се движел за 24 km/h побрзо од другиот.

- а) Автомобилите се сретнале после 6 часа. Определи ги брзините на автомобилите. На кое растојание од градот А се сретнале автомобилите?
- б) Ако секој автомобил се движел побрзо за 30 km/h , на кое растојание од А тие ќе се сретнат?
63. Растојанието од Прилеп до Битоал е 45 km . Во 8:00 Мирослав и Божидар тргнале од Прилеп до Битола, а Евгенија тргнала од Битола за Прилеп. Мирослав има ролшуи. Брзината на секој од нив на ролшуи е еднаква на 9 km/h , а нивните брзини кога одат пешки се различни, но се константни. Божидар и Евгенија тргнале пешки. Мирослав тргнал со ролшуи и кога ја сретнал Елена ѝ ги дал ролшуите и продолжил пешки кон Битоал. Покасно Евгенија го сретнала Божидар, му ги дала ролшуите и продолжила пешки кон Прилеп. Божидар продолжил со ролшуите за Битола. Тројцата стигнале на во Битола и Прилеп точно во 15:00. Определи ја брзината на Евгенија кога оди пешки?
64. Во 7:30 дедо Мирко со гулаб-писмоносец испратил порака до својот внук Матеј. Матеј пораката ја добил во 9:45. Гулабот летал по права линија и со постојана брзина од 2 km за 10 минути. Колкаво е растојанието меѓу дедо Мирко и Матеј?
65. На река која тече со брзина 3 km/h се наоѓаат две колиби А и Б. Чамец кој се движи со постојана брзина го минува растојанието од А до Б за 5 часа, а растојанието од Б до А за 4 часа.
- а) Определи ја брзината на чамецот кога би се движел во мирна вода и растојанието од А до Б.
- б) Дали ќе се промени времето за целото патување, ако заради врнежи брзината на течењето на реката биде 9 km/h ?
66. Од градот А за градот Б тргнал автомобил. Откако патувал три часа, тој се разминал со друг автомобил кој од градот Б за градот А тргнал во 6:35. По разминувањето вториот автомобил до градот А патувал уште 2 часа, а првиот пристигнал во градот Б

во 21:35 истиот ден. Двата автомобили се движеле со постојани, но различни брзини, а се разминале на 168 km од градот А.

- а) Определи ја брзината на секој од автомобилите.
- б) Определи во колку часот автомобилите се разминале.
- в) Во колку часот тргнал од градот А првиот автомобил? Во колку часот пристигнал во градот А вториот автомобил?
- г) Определи го растојанието меѓу градовите А и Б.

67. Двете фигури на цртежот десно се составени од еднакви дрвени елементи со шестаголна форма. Помалата фигура тежи 536 грама. Определи ја тежината на поголемата фигура.



68. Во три ладилници има еднакви количества портокали, чија вкупна маса е еднаква на вкупната маса на бананите кои се сместени во два ладилници, во секој од кои има по 36306 kg банани, Колкава е масата на портокалите кои се сметени во еден ладилник?
69. Во некој рецепт пишува дека за 5 чинии супа се потребни 30 dkg моркови. Куварот Наум подготвува супа за 60 луѓе и за секој од нив има по 2 чинии супа. Колку моркови му се потребни на Наум?
70. Анастасија има полна тегла со мед висока 20 cm . За 6 дена нивото на медот во теглата се намалил за 8 cm . За колку дена Анастасија ќе го изеде медот, ако јаде со истиот апетит секој ден?
71. Елеонора и Катерина на пазар од исто место купиле круши. Според вагата крушите на Елеонора тежат 450 g , а крушите на Катерина тежат 400 g . Кога двете заедно ги ставиле крушите на вагата, таа покажала 800 g . Знаете дека при секое мерење вагата покажува точно определен број грамови повеќе. Определи ја

вистинската тежина на крушите кои ги купиле Елеонора и Катерина.

72. Пристигнатите новогодишни пратки биле распределени за обработка меѓу вработените на една пошта. Вкупната тежина на пратките, кои што требало да ги обработи Иван, била 6 пати поголема од вкупната тежина на пратките, кои што требало да ги обработи Петар. Иван му дал две од своите најлесни пратки на Ѓорѓи и вкупната тежина на преостанатите пратки била 4 пати поголема од тежината на пратките на Петар. Колку пратки требало да обработи Иван?
73. Дамјан има во паричникот извесна сума монети од 1 евро, 50 евроценти, 20 евроценти и 10 евроценти. Една монета од 1 евро тежи 7 грама, монета од 50 евроценти – 4 грама, од 20 евроценти – 3 грама и од 10 евроценти – 2 грама. Дамјан ги почестил своите пријатели Ристо, Томе и Марко со по чаша топло чоколада од училишниот автомат. Чаша чоколадо чини 30 евроценти. За секоја од трите чаши Дамкан пуштил во автоматот по една монета и добил кусур во монети од 10 евроценти, 20 евроценти или 50 евроценти. На крајот забележал дека паричникот му тежи 20 грама повеќе и во него има двапати повеќе монети, отколку на почетокот. Колку монети имал Дамјан на почетокот?
74. Еден базен е полн со вода и се празни со цевка низ која за 12 минути истекуваат 1358 литри вода. Колку вода имало во базенот ако празнењето почнало во 8 часот и 50 минути, а завршило во 12 часот и 38 минути.
75. Во два сада има 64 литри млеко. Ако од првиот сад во вториот сад се прелеат 5 литри млеко, тогаш во првиот сад има трипати помалку млеко отколку во вториот сад. Колку литри млеко имало на почетокот во секој од садовите?

III.4. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

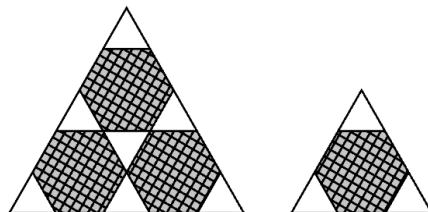
76. Во 2017, Марија секој месец одела по 21 ден на училиште, освен во јуни, јули и август. Од парите кои ги добивала за ужинка секој ден и останувале по 17 денари и овие пари Марија ги штедела. Колку денари заштедила Марија таа година? Колку пари ќе заштедела Марија ако одела на училиште секој ден во текот на целата година?
77. Парче торта чини толку, колку што чинат две топки сладолед, а три топки сладолед чинат колку што чинат две баклави. Што е поскапо, две парчиња торта или три баклави?
78. Антонио собира монети од 2 денари и од 5 денари. Собрал вкупно 39 монети и сега има 144 денари. Колку монети има од 2 денари, а колку од 5 денари.
79. Трговецот Павле измешал дваесет килограми шеќер со цена по 65 денари за килограм со триесет килограми шеќер со цена по 70 денари за килограм. Определи ја цената по која Павле треба да го продава шеќерот така што ќе добие иста сума пари.
80. За училишната библиотека се купени 35 исти книги за лектира, 20 исти книги од математика и 13 исти книги од природни науки. Сите книги се платени 26450 денари, при што за книгите за лектира се платени 13300 денари. За книгите од природни науки е платено 8750 денари помалку отколку за книгите за лектира. Колку чини една книга за лектира, од математика и од природни науки?
81. Еден елек чини колку две кошули, три кошули чинат колку четири шалчиња. За еден елек, пет кошули и седум шалчиња платив 294 евра. Колку евра чини секој вид облека?
82. Тројца браќа добиле на игра на среќа извесна сума пари. Првиот брат добил 126 денари, вториот брат 2 пати повеќе од него, а

третиот брат колку првиот и вториот заедно. По колку денари добил секој од нив? Колку денари добиле сите заедно?

83. Ана и Бојан во ист ден почнале да штедат пари. Првиот ден Ана заштедила 1 денар, а Бојан заштедил 2 денари. Вториот ден Ана заштедила 3 денари, а Бојан заштедил 4 денари итн. се до денот кога Ана заштедила 99 денари, а Бојан заштедил 100 денари. Колку пари Бојан заштедил повеќе од Ана? Колку пари заштедил Бојан, а колку пари заштедила Ана?
84. За својот роденден Калина ги поканила учениците од нејзиното одделение. Децата собрале 2340 денари за поклон, при што секое дете дало по 90 денари. Колку момчиња и колку девојчиња учат во одделението на Калина, ако се знае дека таа поканила 4 девојчињата повеќе од момчиња?
85. Илија, Марко и Марин заедно купиле фудбалска топка за која платиле 546 денари. Илија дал трипати повеќе пари од Марко, а Марин дал трипати повеќе пари од Илија. Колку пари дал секој од нив за да ја купат топката?
86. Зоран купил ракавици, шапка и шал и платил 2000 денари. Ракавиците чинат 900 денари повеќе од шапката, а шапката и ракавиците заедно чинат 1600 денари повеќе од шалот. Колку чини секое парче облека одделно?
87. Раководителот на една спортска сала набавил фудбалски и одбојкарски топки, за што потрошил 223 евра. Цената на една одбојкарска топка изнесувала 10 евра, а цената на една фудбалска топка изнесувала 17 евра. Колку топки набавил раководителот на салата?
88. Еден спортски клуб купил 144 топки. Кошаркарските топки биле двапати повеќе од одбојкарските, а фудбалските – трипати повеќе од кошаркарските. Ако една одбојкарска топка чини 18 евра, една фудбалска – 17 евра и една кошаркарска – 16 евра, колку евра платил клубот за сите топки?

89. Еден молив и две гуми чинат 97 денари, а еден молив и две острилки чинат 151 денар. Колку денари е поскапа острилката од гумата?
90. Две баклави чинат кулку три тулумби, а баклава и тулумба чинат 75 денари. Колку чинат три баклави и две тулумби?

91. Во продавница се продаваат шестаголни и триаголни плочки. Цената на една плочка зависи од видот на плочката и е цел број евра. Од плочките се составени два триаголника (цртеж десно). Цената на левиот триаголник е 29 евра. Колку чини десниот триаголник?



92. Мирјана за роденден одлучила да ги почести другарчињата од нејзиното одделение. Таа купила 12 чоколади, 8 пакетчиња бонбони и 9 лижавчиња, за што платила вкупно 864 денари. Притоа за 2 пакетчиња бонбони платила колку за 3 лижавчиња, а 4 чоколади чинеле 32 денари повеќе од 2 пакетчиња бонбони и 6 лижавчиња заедно. Колку чинело 1 чоколадо, 1 пакетче бонбони и 1 лижавче?
93. Овоштарите Матеј и Доротеј на пазар однеле јаболка кои ги продавале по 70 денари за килограм. Матеј од продадените јаболка заработил 4340 денари, а Доротеј заработил 8750 денари. Колку јаболки однесле вкупно на пазара ако Матеј не продал 102 *kg*, а Доротеј не продал 76 *kg* јаболка?
94. Пчеларот Аврам оваа година произведе 240 *kg* мед. Третина од медот го спакува во тегли од 1 *kg*, третина во тегли од 800 *g* и третина во тегли од 500 *g*. Теглите со мед од 1 *kg* ги продаде по 400 денари, теглите од 800 *g* ги продаде по 350 денари, а теглите од 500 *g* ги продаде по 300 денари. Колку пари заработи Аврам?

95. Во една продавница се продаваат бонбони во две различни кутии. Кутија со 18 бонбони чини 2 евра, а кутија од 33 бонбони чини 3 евра. Определи ја најмалата сума пари со која може да се купат најмалку 200 бонбони.
96. Во две книжарници се пуштени на распродажба 10 различни видови тетратки – пет вида во едната и пет вида во другата. Во секоја книжарница петте видови тетратки се со различни цени изразени во точен број денари. Горјан во првата книжарница купил по една тетратка од секој вид, при што за двете најевтини тетратки вкупно платил 14 денари, а за двете најскапи тетратки вкупно платил 22 денари. Потоа отишол во втората книжарница во која купил по една тетратка од секој вид. За трите најевтини тетратки вкупно платил 28 денари, а за трите јаскапи тетратки вкупно платил 37 денари. Колку денари потрошил Горјан во двете книжарници?

III.5. РАЗНИ ЗАДАЧИ

97. За потребите на спортските сали Министерството за спорт набавило 6418 топки за кошарка, кои биле 2415 повеќе од топките за одбојка и 1814 помалку од топките за фудбал. Секоја спортска сала добила по 23 топки. Колку спортски сали добиле топки?
98. Првиот ден на Фестивалот на чоколадото Марија изела едно чоколадо. Следните два дена таа јадела по 2 чоколади, следните 3 дена – по 3 чоколади и следните 4 дена – по 4 чоколади. Ако Марко во текот целиот фестивал секој ден јадел еднаков број чоколади, колку чоколади ќе јадел Марко дневно?
99. Кабините на една жичара се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ... и се распоредени на еднакво растојание. Кога кабината со број 7 тргнува од долната станица на жичарата, од горната станица тргнува кабината со број 33. Кабината со број 27 тргнува од

долната станица на жичарата. Која кабина тргнува од горната станица?

100. Костадин чекал во ред за билети за концерт. Во билетарата имало доволно билети секој човек во редот да купи по два билета. Но, првите петмина купиле по 4 билета, а секој следен купувал по 3 билета, па затоа 30 луѓе останале без билети. Колку билети биле продадени?

101. Четири мачки се качиле на поштенска вага, но не можеле да ја видат стрелката на скалата, т.е. не можеле да видат колку тежат. Најумната мачка се симнала од вагата, ја погледнала скалата на вагата рекла: “Вие трите заедно тежите 5 килограми.” и се качила на вагата. Втората мачка се симнала од вагата, ја погледнала стрелката, рекла “Вие трите заедно тежите 4 килограми.” и се качила на вагата. Третата мачка се симнала од вагата, ја погледнала стрелката, рекла “Вие трите заедно тежите 9 килограми.” и се качила на вагата. Тогаш четвртата мачка рекла: “Пријателки, некоја од вас трите згрешила”
Дали четвртата мачка е во право?

102. Ана треба да испрати покани за свадбата на нејзината сестра. Таа има 2 пакета со покани и во секој пакет има по 24 покани. Треба да покани 60 гости. Дали Ана ќе има доволно покани за сите гости? Одговорот да се образложи!

103. На роденденот на Горјан дошле триесет и осум гости и секој од нив порачал парче торта или сладолед. Гостите порачале 30 парчиња торта и 20 сладоледи. Колку гости порачале или само парче торта или само сладолед?

104. Во дворот на Ласте има кокошки и кози. Тие заедно имаат 50 глави и 140 нозе. Колку кокошки и колку кози има во дворот на Ласте?

105. Во V^1 одделение има 12 девојчиња. Секое од нив има 1, 2 или 3 прстени. Тие вкупно имаат 20 прстени. Вкупниот број девојчиња кои имаат 2 или 3 прстени е еднаков на бројот на девојчи-

њата кои имаат еден прстен. Колку девојчиња имаат еден прстен, колку имат два прстена и колку имаат три прстени?

106. На тестот по математика за точен одговор на лесна задача се добива 1 поен, а за точен одговор на тешка задача се добиваат 3 поени. Павлина точно одговорила на 18 задачи. Дали може таа да освои:

- а) 17 поени,
- б) 29 поени,
- в) 44 поени.

107. Група од 41 турист резервирала во хотелот Одмор 9 трикреветни и 2 четирикреветни соби. Колку двокреветни соби се потребни за рецепционерот да ги смести сите туристи од оваа група?

108. На еден концерт на отворено присуствувале 950 посетители, мажи и жени. Колку посетители биле мажи, а колку жени, ако на секои 9 мажи присуствувале 10 жени.

109. Во акција за пошумување учениците од V^a одделение посадиле 224 дрвја. Посадено е трипати повеќе буки од брези, 14 повеќе јавори од буки, а бројот на тополите е еднаков на половината од бројот на брезите. Колку стебла од секој вид е посадено во оваа акција?

110. Јана и Мила заедно имаат 22 бомбони. Секоја од нив изела по 2 бомбона, по што Јана имала двапати повеќе бомбони од Мила. Колку бомбони имала Јана на почетокот?

111. Горјан имал чоколади и бонбони. Ако мајкаму му даде уште 10 бонбони, тогаш тој ќе има двапати повеќе бонбони од чоколади. Горјан се замислил колку чоколади треба да му даде на Павел за да му останат двапати повеќе бонбони од чоколада? Помогни му на Горјан да го реши проблемот.

112. Бројот на децата во Република Македонија на возраст од 11 до 14 години и прикажан со пиктограмот:





каде означува 12000 луѓе. Бројот на девојчињата е за 3000 поголем од бројот на момчињата. Колку момчиња има во Република Македонија на возраст од 11 до 14 години?

113. Марија и Искра на училиште понеле две исти пакетчиња со бонбони. На секој одмор секоја од нив јадела по 2 или 3 бонбони. За четвртиот одмор на Марија и останала 1 бонбона, а Искра своите бонбони ги изела заклучно со петтиот одмор. Колку бонбони имало во секое пакетче?
114. Павел и Томе купиле по една кутија пакетчиња планински чај. Колку пакетчиња има во кутијата ако од едно пакетче може да се направат два или три чаја и Павел испил 42 чаја, а Томи испил 61 чаја? Како го правеле чајот Павел и Томи, ако ги потрошиле сите пакетчиња чај?
115. Мирко, Бојан и Горјан имаат различно количество марки. Ако Мирко му даде на Бојан 1 марка, а Бојан му даде на Горјан 3 марки, тогаш сите тројца ќе имаат еднаков број марки. Колку марки треба да му даде Мирко на Горјан за да двајцата имаат еднаков број марки?
116. Илија има 540 поштенски марки повеќе од Јован. Ако Иван му даде 100 марки на Јован, тогаш Иван ќе има двапати повеќе марки од Јован. Колку поштенски марки има Иван, а колку Јован?
117. Марио, Бојан и Златко имаат определен број сликички. Бојан има двапати повеќе сликички од Марио, а Златко има двапати повеќе сликички од Бојан. Златко и Марио заедно имаат 153 сликички повеќе од Бојан. Колку сликички има секој од нив?
118. Дијана имала колекција марки. Половината од марките и уште 20 марки ги поклонила на Лилјана, половината од преостанатите и уште една марка ги поклонила на Весна, а половината од преостанатите и уште една марка ги поклонила на Коста. На крајот на Дијана ѝ останала една марка. Определи го збирот на цифрите на бројот на марките кои на почетокот ги имала Дијана.

119. Иван и Теодор заедно имаат 32 топчиња. Прво Иван му дала на Теодор толку топчиња, колку што имал Теодор. Потоа Теодор му дал на Иван толку топчиња, колку што имал Ивана. Потоа Иван му дал на Теодор толку топчиња, колку што имал Теодор. На крајот Теодор му дал на Иван толку топчиња, колку што имал Иван, при што двајцата имале еднаков број топчиња.
- а) Колку топчиња имал секој од нив на почетокот?
 - б) Од топчињата 23 се стаклени, а останатите се пластични. По боја 17 се сини, а останатите се црвени. Точно 8 пластични топчиња се црвени. Колку стаклени топчиња се сини?
 - в) Колку најмалку топчиња треба да извлечеме без гледање за да сме сигурни дека сме извлекле најмалку 5 топчиња од ист материјал и со иста боја?
120. За три дена две верверички собрале 100 лешници. За колку дена 15 верверички ќе соберат 1000 лешници?
121. Четири крави и три кози за една година јадат повеќе од 20 стогови сено. Дали 30 стогови сено ќе бидат доволни да се прехранат една година шест крави и пет кози?
122. Тројца мајстори за 12 дена градат две дрвени колиби. За колку дена двајца мајстори ќе изградат три колиби?
123. Зоран, Никола и Бранко одгледуваат папагали. Никола одгледува четирипати повеќе папагали од Бранко, а Бранко одгледува трипати помалку папагали од Зоран. Колку папагали одгледува секој одделно?
124. Киро ги пребројал гулабите на покривот и забележал дека црните се двапати помалку од белите. Црните биле со прстен околу ногата, а само еден од белите имал прстен. Гулабите без прстен биле за еден повеќе од оние со прстен. Колку гулаби вкупно имало на покривот?
125. Горјан во аквариумот има десет жолти рипчиња повеќе од сини, а црвени трипати повеќе отколку што имал заедно жолти и сини рипчиња. На својот другар Марко му поклони по пет рипчиња

од секој вид, после што му останале 265 рипчиња. Колку Горјан имал на почетокот рипчиња од секој вид?

126. На еден натпревар по математика учествувале 37 ученици. Бројот на учениците кои се пласирале после Благоја бил двапати поголем од бројот на учениците кои се пласирале пред него. Кое место го освоил Благоја?

127. На Меѓународната математичка олимпијада во 2018 година (ИМО2018) се доделени 271 медал, од кои 52 златни, а останатите се сребрени и бронзени. Бројот на сребрените медали е двапати поголем од бројот на бронзените. Колку бронзени медали се доделени на ИМО2018?

128. Вчера Елена купи кутија со бонбони. Ако денес изеде двапати повеќе бонбони отколку вчера, во кутијата ќе останат 15 бонбони. Но, ако денес Елена изеде 10 бонбони повеќе отколку вчера, во кутијата ќе останат 12 бонбони. Колку бонбони имало во кутија пред да ја отвори Елена?

129. Вера изела 3 бонбони помалку од Фросина, а Самоил изел толку бонбони колку што изеле Вера и Фросина заедно. Вера и Самоил заедно изеле 30 бонбони. Колку бонбони изел секој од нив?

130. Али Баба треба да натовари 180 камили за да го пренесе богатството од пештерата на разбојниците. Бидејќи патот е долг, тој треба да предвиди и храна за камилите. Една камила може да носи храна за 10 камили. Колку камили најмалку ќе има во караванот на Алибаба?

131. Лета јато стоножни и триглави ламји. Вкупниот број на главите во јатото е 28, а вкупниот број на нозете е 208. Секоја стоножна ламја има една глава. Колку нозе имаат триглавите ламји?

132. Крали Марко се борел со десет четириглави ламји. На некои од нив им отсекол по две глави, на други по три глави, а на останатите им ги отсекол сите глави. Три од ламјите загубиле вкупно четири пати помалку глави од останатите седум ламји. Ламјите кои останале со една глава биле повеќе на број од ламјите кои

останале со две глави. Колку глави отсекој Крали Марко и на колку ламји им ги отсекол сите глави?

- 133.Имаме непарен број бонбони. Ако бонбоните ги ставиме во кутии со по 46 бонбони, можеме да наполниме 43 кутии и ќе ни остане определен број бонбони. Ако пак бонбоните ги ставиме во кутии со по 43 бонбони, можеме да наполниме 47 кутии и неколку бонбони ќе останат. Дали може бонбоните да ги запакуваме во 17 кутии при што во секоја кутија ќе има еднаков број бонбони?
- 134.Ана, Симона, Натка и Евдокија заедно имаат 19 бонбони, при што секоја има барем една бонбона. Натка има трипати повеќе бонбони од Ана. Симона има три бонбони повеќе од Евдокија. Колку бонбони има секое од девојчињата?
- 135.Пчеларот Ангел има 26 големи и 21 мала тегла со мед. Тој има кутии во кои може да запакува или 5 големи тегли, или 9 мали тегли, или 4 големи и 3 мали тегли со мед. Определи го најмалиот број кутии потребни за Ангел да ги запакува сите тегли со мед.
- 136.На еден фудбалски турнир четири екипи играле секоја со секоја. За победа се освојуваат по 3 бода, за нерешен резултат по 1 бод и за загубен натпревар по 0 бодови. На крајот од турнирот имало екипа со 4 бода, екипа со 2 бода и екипа со 1 бод. Колку бодови освоила четвртата екипа?
- 137.Во фудбалско првенство за победа се добиваат 3 бода, за изгубен натпревар 0 бодови и за нерешен резултат секоја екипа добива по 1 бод. По 16 кола екипата Спортист имала неколку победи, неколку нерешени натпревари и неколку порази. Таа имамал повеќе победени отколку загубени натпревари и освоила 20 бодови. Колку натпревари екипата одиграла нерешено?
- 138.Марија учествувала на математички натпревар на кој биле зададени 13 прашања. На натпреварот за точно одговорено прашање се освојуваат 7 бода, за непотполно одговорено прашање се ос-

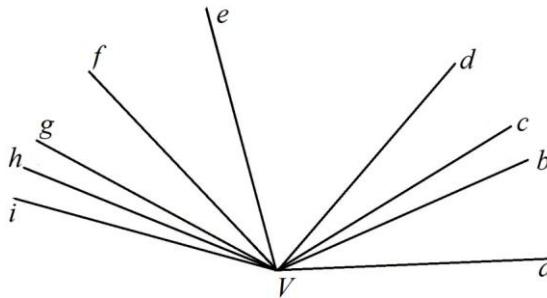
војуваат 3 бода, а за грешно одговорено прашање се освојуваат 0 бодови. Марија освоила 53 бода. На колку прашања таа грешно одговорила?

139. Подели подеднакво 7 пици на 12 деца, ако имаш право една пица да ја расечеш најмногу на 4 дела.

IV ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

IV.1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Од темето на правиот агол повлечи три полуправи кои припаѓаат на внатрешноста на аголот. Колку остри агли доби?
2. Испиши ги сите остри агли дадени на долниот цртеж.



3. Зборот МАТКА е запишан како на долниот цртеж. Колку остри, колку прави и колку тапи агли формираат линиите кои учествуваат во записот на зборот МАТКА?

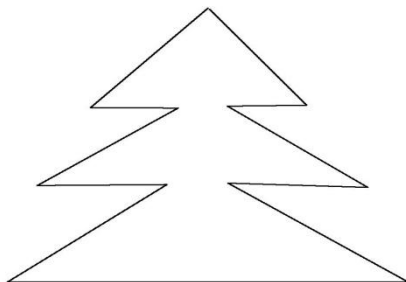


4. Во кутија се ставени 105 триаголници и петаголници, обоени во сина или црвена боја. Вкупниот број темиња на многуаголниците е еднаков на 501. Сините петаголници се двапати повеќе од црвените петаголници, а сините триаголници се за 2 повеќе од црвените триаголници. Определи го најмалиот број многуаголници кои треба без гледање да ги извадиме од кутијата за да сме сигурни дека е изваден најмалку еден син многуаголник.
5. За точките на цртежот десно важи $\overline{AB} = 22\text{ cm}$, $\overline{BC} = 30\text{ cm}$ и точ-

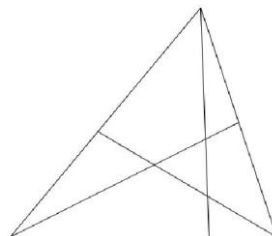


ката M е средина на отсечката AC . Определи ја должината на отсечката BM .

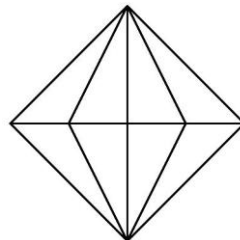
6. На цртежот десно е дадена елка. Со помош на три прави подели ја елката на 13 делови.



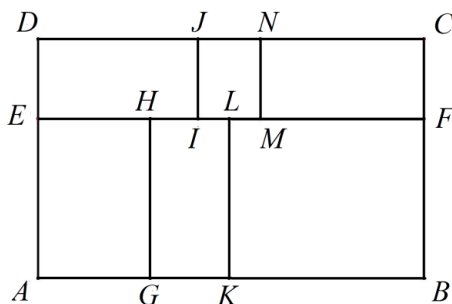
7. Определи го бројот на триаголниците кои ги содржи фигурата прикажана на цртежот десно.



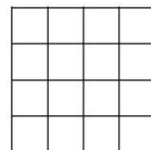
8. Определи го бројот на триаголниците содржани во фигурата прикажана на цртежот десно.



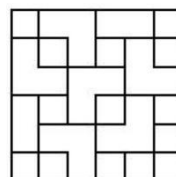
9. Колку правоаголници има на цртежот десно. Испиши ги сите правоаголници.



10. Квадратот прикажан на цртежот десно е поделен на 16 единечни квадрати. Во еден единечен квадрат е нацртана звезда. Определи го бројот на квадратите во кои има звезда.



11. Колку квадрати се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно?



IV.2. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПЕРИМЕТРИ

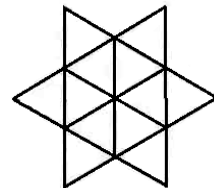
12. Збирот на периметрите на два рамнострани триаголника е еднаков на 144 dm . Периметарот на едниот триаголник е трипати поголем од периметарот на другиот триаголник. Определи ги должините на страните на овие триаголници.

13. Должините на страните на еден триаголник изразени во сантиметри се три последователни непарни броеви, а неговиот периметар е еднаков на 141 cm . Определи ги должините на страните на тој триаголник.

14. Даден е рамностран триаголник ABC . На правата AC преку темето C одбрана е точка D таква што периметарот на триаголникот ABD е 54 cm , а периметарот на триаголникот BCD е 37 cm . Определи го периметарот на триаголникот ABC .

15. Даден е рамнокрак триаголник ABC . Должината на краците AC и BC еднаква на 75 cm и должината на основата AB еднаква на 90 cm . На кракот BC избрана е точка D таква што периметарот на триаголникот ABD е еднаков на 216 cm , а периметарот на триаголникот ADC е еднаков на 168 cm . Определи ги должините на отсечките AD , BD и CD .

16. Фигурата на цртежот десно е составена од рамнострани триаголници. Периметарот на најголемиот рамностран триаголник е еднаков на 54 cm . Определи ја должината на жлицата од која може да се направи дадената фигура.

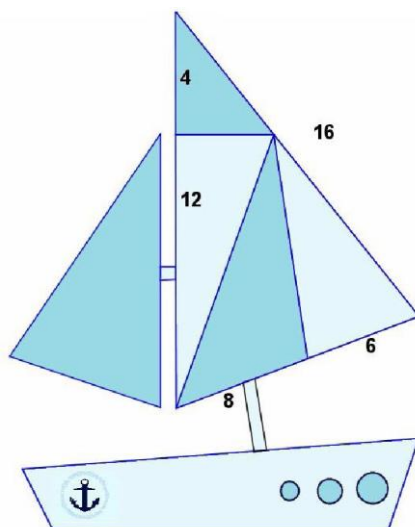


17. Едрилицата прикаана на цртежот десно има две триаголни платна, при што поголемото платно е составено од неколку различни по големина и вид триаголници. Означените должини се во метри.

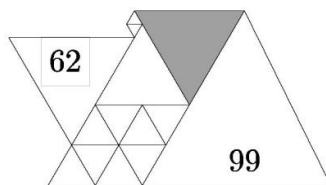
а) Определи го бројот на правоаголните триаголници.

б) Определи го периметарот на големото платно на едрилицата.

в) Определи го периметарот на малото платно ако се знае дека тоа има две еднакви страни, а третата страна е еднаква на половина од должината на основата на големото платно.



18. Фигурата на цртежот десно е составена од рамнострани триаголници, еден со должина на страна 62 cm , а друг со должина на страна 99 cm . Определи ја должината на страната на сивиот триаголник.

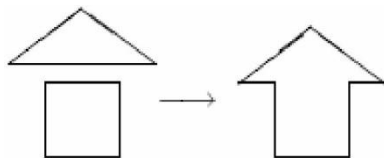


19. Определи го бројот на различните триаголници чиј периметар е еднаков на 16 cm и должините на страните му се природни броеви.
20. Периметарот на квадратот е еднаков на 664 mm . Должината на страната на квадратот е еднаква на третина од должината на кракот на рамнокрак триаголник. Определи го периметарот на рамнокракиот триаголник, ако должината на неговата основа изразена во милиметри е еднаква на најголемиот трицифрен број запишан со цифрите 0, 1 и 6.
21. Збирот на најмалите четири различни непарни броеви е еднаков на периметарот на еден квадрат изразен во сантиметри. Определи го периметарот на рамностран триаголник со должина на страна еднаква на должината на страната на квадратот.
22. Нека B е најголемиот трицифрен број,

$$A = 1203 + 714 : 7 - 378 : (70201 - 70194)$$

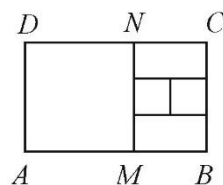
и C е еднаков на периметарот на правоаголник со должини на страни 14 cm и 2 dm , изразен во сантиметри. Определи ја вредноста на изразот $B : 3 + A - 4C$.

23. Квадрат со периметар 24 cm и триаголник со периметар 24 cm се залепени како што е прикажано на цртежот десно. Определи го периметарот на добиената фигура.



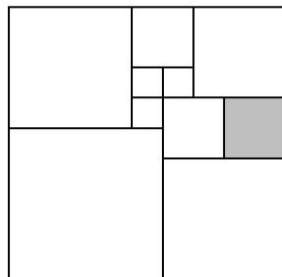
24. Ученик располага со 16 сламки со должина 1 cm , 6 сламки со должина 2 cm и 7 сламки со должина 3 cm . Дали може со сламките со кои располага ученикот да состави правоаголник така што сите сламки да бидат употребени и сламките да не се кршат.
25. Ако трипати ја намалиме должината на страната на квадрат со периметар 360 mm , ќе ја добиеме ширината на правоаголник со периметар 220 mm . Определи ја должината на правоаголникот.
26. Должините на страните на даден правоаголник се 21 cm и 7 cm . Со права тој е поделен на еден квадрат и еден правоаголник. Колкава е разликата меѓу периметрите на добиените фигури?
27. Ширината на еден правоаголник е за 16 cm помала од неговата должина и двапати поголема од страната на еден квадрат. Страната на еден рамностран триаголник е двапати поголема од должината на правоаголникот. Ако периметарот на рамностраниот триаголник е за 192 cm поголем од периметарот на квадратот, определи го периметарот на правоаголникот.

28. Правоаголникот $ABCD$ има периметар 32 cm и е разделен на квадрат $AMND$ и правоаголник $MBCN$, кој што е разделен на три еднакви помали правоаголника. Средниот од

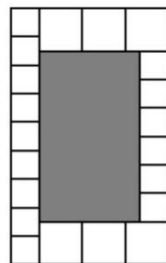


овие правоаголници е разделен на два квадрата. Определи ја должината на страната на најмалите квадрати.

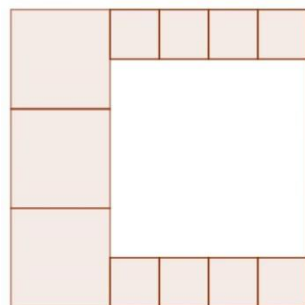
29. На квадратен лист хартија се нацртани десет квадрати (цртеж десно). Периметарот на сивиот квадрат е еднаков на 72 cm . Сивиот квадрат и горниот среден квадрат се еднакви. Определи го периметарот на фигурата која што се добива ако се исече сивиот квадрат.



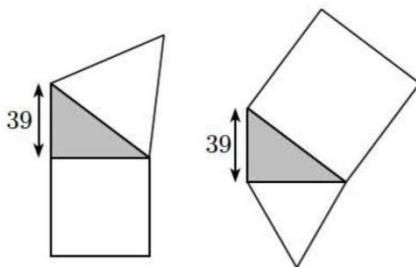
30. Големиот правоаголник на цртежот десно е составен од квадрати и мал сив правоаголник. Должината на поголемата страна на големиот правоаголник е еднаква на 54 cm . Определи го периметарот на сивиот правоаголник.



31. На цртежот десно е прикажан квадрат кој е поделен на 12 помали квадрати. Периметарот на еден од најмалите квадрати е еднаков на 12 cm . Определи го збирот на периметрите на сите квадрати.



32. Мила и Јана нацртале еден ист триаголник и го обоиле сиво. Едната страна на сивиот триаголник е долга 39 cm . Над другите страни тие нацртале рамностран триаголник и квадрат. Така добиле два



различни цртежи, Мила левиот, а Јана десниот. Петаголникот на Мила има периметар 325 cm , а петаголникот на Јана има

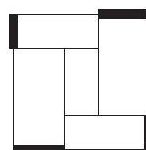
периметар 338 cm . Определи го периметарот на сивиот триаголник.

33. На цртежот десно се прикажани првите шест елементи на низа во која се повторуваат вкупно 2018 елементи: рамностран триаголник

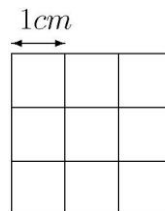


со страна 3 cm , квадрат со страна 3 cm , правоаголник со страни 6 cm и 3 cm итн., коишто се поставени последователно во овој редослед. Определи го периметарот во сантиметри на добиената фигура.

34. Квадрат со должина на страна 1 cm е поделен на правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Збирот на задебелените отсечки на цртежот е еднаков на 1 cm . Определи го периметарот на внатрешниот правоаголник.



35. Колку правоаголници со периметар 8 cm содржи фигурата прикажана на цртежот десно. Не заборавај дека квадратот е правоаголник.



36. Даден е квадрат со должина на страна 10 cm . Подели го квадратот на пет правоаголници такви што периметарот на секој од нив ќе биде еднаков на 20 cm .

37. Правоаголна градина има ширина 11 m и должина 15 m .

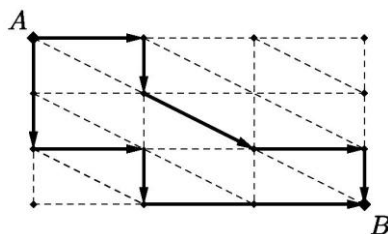
а) Покажи како може градината да се подели на правоаголници со должини на страни 3 m и 5 m .

б) Околу градината треба да се направи патека со ширина 125 cm и истата да се покрие со квадратни плочки со должина на страна 25 cm . Колку плочки се потребни за покривање на патеката?

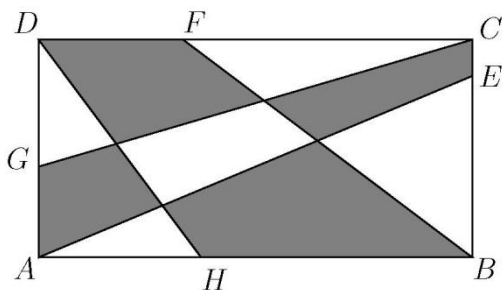
в) Горјан сака да прекопа целата градина така што ќе ја подели на 165 квадрати со должина на страна 1 m и откако ќе окопа

даден квадрат, Горјан може да продолжи да копа само во соседен квадрат. Соседни се квадрати кои имаат заедничка страна. Дали постои квадрат од кој Горјан не смее да почне со копањето?

38. Алеите на еден правоаголен парк се поделени на еднакви триаголни градини (цртеж десно). Прикажани се два пата од A до B , едниот од кои е долг 380 m , а другиот е долг 420 m . Колку метри е растојанието од A до B по права линија?

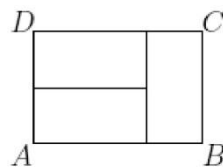


39. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на 72 cm (види цртеж). Четирите отсечки AE, BF, CG и DH го делат правоаголникот на триаголници и четириаголници. Збирот на периметрите на четирите сиви четириаголници е еднаков на 116 cm , а збирот на периметрите на белите многуаголници е еднаков на 128 cm . Определи го збирот на отсечките AE, BF, CG и DH .



IV.3. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПЛОШТИНИ

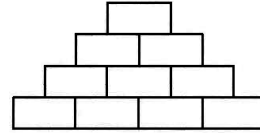
40. Правоаголникот $ABCD$ е составен од три еднакви правоаголници (цртеж десно). Ако $\overline{AD} = 12\text{ cm}$, пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголникот $ABCD$.



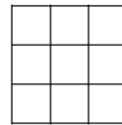
41. Паркинг за такси воозила е во форма на правоаголник со димензии 9 m и 48 m . Една третина од паркингот е слободна површи-

на на која не е дозволено паркирање, а останатиот дел е поделен на места за паркирање, секое од кое има плоштина $6 m^2$. Колку такси-возила може истовремено да престојуваат на паркингот?

42. Фигурата на цртежот десно се состои од 10 еднакви правоаголници кај кои едната страна е двапати подолга од другата. Периметарот на фигурата е еднаков на $1440 cm$. Колкава е плоштината на фигурата?



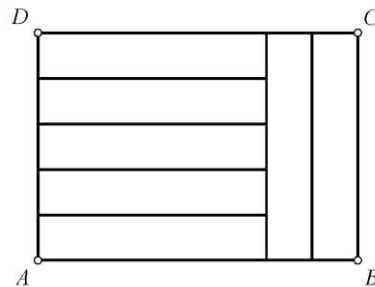
43. Квадрат со плоштина $9 cm^2$ е поделен на 9 еднакви квадрати (види цртеж).



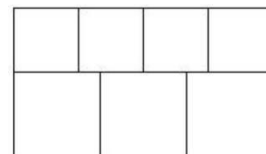
- а) Пресметај го збирот на плоштините на сите квадрати содржани во даденат фигура.
б) Пресметај го збирот на плоштините на сите правоаголници кои не се квадрати и се содржани во дадената фигура.

44. Збирот на периметрите на два квадрата е еднаков на $64 cm$. Должината на страната на едниот квадрат е за $2 cm$ поголема од должината на страната на другиот квадрат. Пресметај ги периметрите и плоштините на овие квадрати.

45. Ангела направила седум еднакви хартиени ленти и од нив го составиле правоаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно. Плоштината на правоаголникот е еднаква на $560 cm^2$. Определи ги должините на страните на хартиените ленти.

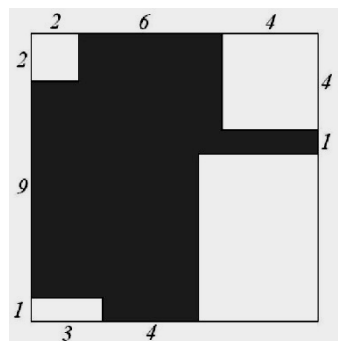


46. Правоаголникот на цртежот десно е составен од седум квадрати. Периметарот на малиот квадрат е еднаков на $132 cm$. Оп-



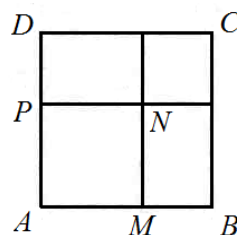
редели ја плоштината на правоаголникот.

47. Пресметај ја плоштината на црната фигура прикажана на цртежот десно. Должините се изразени во сантиметри.



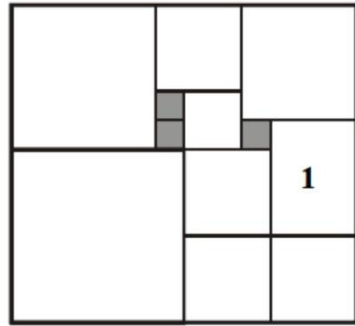
48. Од еден квадрат во средината е исечен друг квадрат., така што останала рамка со ширина 6 cm . Плоштината на рамката е еднаква на 384 cm^2 . Определи ја страната на исечениот квадрат.
49. Играјќи се со хартија во облик на правоаголник со плоштина 351 cm^2 и должина на едната страна 27 cm , Горјан отсекол два рамнострани триаголници над пократките страни на правоаголникот. Определи го периметарот на хартијата која останала после отсекувањето на триаголниците.
50. Правоаголник со периметар 24 cm има ширина 4 cm . Определи ја плоштината на овој правоаголник.

51. Дадени се два квадрати $ABCD$ и $AMNP$ (види цртеж). Разликата на должините на нивните страни е еднаква на 16 mm , а разликата на нивните плоштини е еднаква на 992 mm^2 . Пресметај го збирот на нивните периметри.

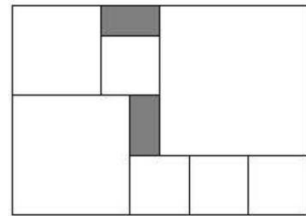


52. Горјан ги запишал броевите 5, 16, 23, 32 и 41, а потоа нацртал квадрати чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви, а периметрите изразени во сантиметри се еднакви на некои од запишаните броеви. Колку квадрати нацртал Горјан?

53. Правоаголникот даден на цртежот десно е поделен на 12 фигури. Едната од нив е правоаголник и е означен со 1, а останатите 11 се квадрати. Должината на секој од осенчените квадрати е еднаква на 1 cm . Определи ја плоштината на дадениот правоаголник.



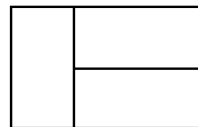
54. Правоаголникот на цртежот десно е составен од седум квадрати и два еднакви правоаголници. Должините на страните на сивите правоаголници се 1 cm и 2 cm . Определи ги периметарот и плоштината на големиот правоаголник.



55. Даден е квадрат $ABCD$. Ако за иста должина ги продолжиме страната AB преку темето B и страната AD преку темето D , добиваме соседни страни на квадрат со периметар 36 cm поголем од периметарот на квадратот $ABCD$, а плоштина за 135 cm^2 поголема од плоштината на квадратот $ABCD$. Определи ја должината на страната на квадратот $ABCD$.
56. Ако една од страните на правоаголник се зголеми трипати, а другата се намали за 12 cm , тогаш ќе се добие квадрат. Определи ги страните на правоаголникот ако:
- неговиот периметар е еднаков на 2 m ,
 - периметарот му е 80 cm помал од периметарот на квадратот.
57. Даден е правоаголник $ABCD$ со периметар 40 cm . На страната AB избрана е точка M таква што должината на отсечката AM е 5 cm помала од должината на страната BC , а должината на отсечката BM е трипати поголема од должината на отсечката AM . Пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

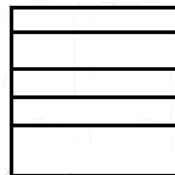
58. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се еднакви на 8 cm и 4 cm . На подолгата страна CD земена е точка M која ја дели страната на два еднакви дела. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABMD$.

59. Периметарот на една домино плочка е 186 mm . Пресметај ја плоштината на фигурата која направена од три домино плочки, прикажана на цртежот десно.



60. Квадратот $AEFG$ лежи во квадратот $ABCD$. Плоштината на квадратот $ABCD$ е за 105 cm^2 поголема од плоштината на квадратот $AEFG$, а страната на $ABCD$ е 7 cm подолга од страната на $AEFG$. Пресметај ги плоштините и периметрите на квадратите $ABCD$ и $AEFG$.

61. Квадрат со четири отсечки е поделен на пет правоаголници (види цртеж). Определи ги периметарот и плоштината на квадратот ако збирот на периметрите на петте правоаголници е еднаков на 72 cm .



62. Ако едната страна на квадратот ја зголемиме трипати, а другата ја зголемиме двапати, ќе добиеме правоаголник со плоштина 96 cm^2 . Определи ја разликата меѓу периметрите на правоаголникот и квадратот.

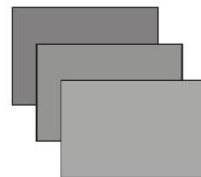
63. Радица има правоаголно парче хартија со периметар 46 cm и должините на страните изразени во сантиметри се природни броеви.

а) Определи ги должините на страните така што плоштината на хартијата е најголема.

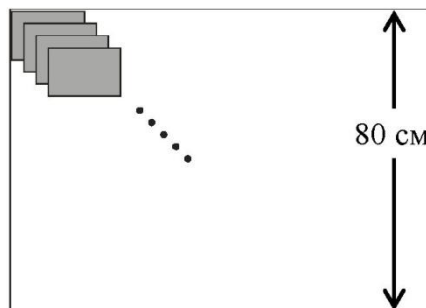
б) За најденото решение под а) определи колку најмногу правоаголници со должини на страни 3 cm и 4 cm може од правоаголникот да исече Радица. Како тоа може да го направи?

64. Иван располага со голем број еднакви картончиња во форма на правоаголник со димензии: должина 12 cm и ширина 8 cm . Тој направил две одделни подредувања:

а) Прво подредување (цртеж десно): Става на масата едно картонче. Второто картонче го става над првото при што го поместува за 3 cm надолу и 2 cm надесно. Третото картонче го става над второто при што го поместува исто така за 3 cm надолу и 2 cm надесно. Определи ја плоштината на фигурата која ја добил Иван откако наредил три картончиња.



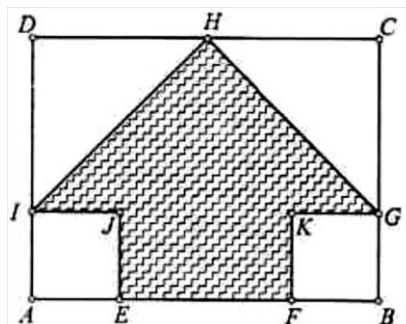
б) Второ подредување (цртеж десно): Става едно картонче во горниот лев агол на масата. Второто го става над првото првото така што го поместува за 1 cm надолу и за 1 cm надесно. Третото го става над второто така што го поместува 1 cm



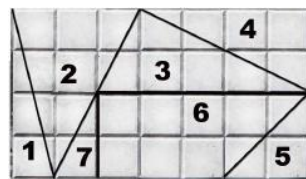
надолу и 1 cm надесно. Иван продолжува на овој начин да става картончиња додека стигне до работ на масата.

Ако масата е правоаголна, долга 110 cm и широка 80 cm , колку картончиња треба да стави Иван, додека стигне до раб на масата? Определи ја плоштината на непокриениот дел на масата.

65. Даден е правоаголник $ABCD$ со должини на страни $\overline{AB}=8\text{ cm}$ и $\overline{AD}=6\text{ cm}$ (цртеж десно). Точките E, F, G, H, I, J, K се избрани така што четириаголниците $AEIJ$ и $FBGK$ се квадрати со должини на страни 2 cm , а точката H е средина на страната CD . Пресметај ја плоштината на штрафираниот дел на цртежот.



66. Антон, Борис, Васил, Ѓорѓи и Данчо решиле да јадат чоколадо. Чоколадото им паднало и кога го распаковале виделе дека се скршило на седум парчиња (цртеж десно). Борис го изел најголемото парче, Данчо и Ѓорѓи изеле еднакво количество чоколадо, но Ѓорѓи изел три парчиња, а Данчо - само едно парче. Васил изел една седмина од целото чоколадо, а остатокот од чоколадото го изел Антон. Кој дел од чоколадото го изел Антон?



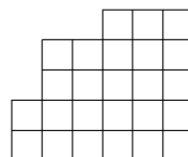
IV.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

67. Фигурата на цртежот десно се состои од шест квадратчиња со должина на страна 1 cm . Од четири такви фигури е составен правоаголник. Определи го периметарот на овој правоаголник.

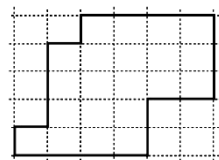


68. Даден е остроаголен триаголник. Подели го триаголникот на четири дела: еден триаголник, еден четириаголник, еден петаголник и еден шестаголник.

69. Раздели ја фигурата прикажана на цртежот десно на четири еднакви делови. Деловите може да се вртат.

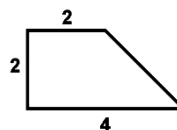


70. Фигурата прикажана во мрежата на цртежот десно подели ја на три еднакви дела. Деловите може да се вртат и превртуваат.



71. Даден квадрат со димензии 6×6 расечи го на два еднакви 24-аголника. Расекувањето може да се прави само по страните на единечните полиња.

72. Дадената фигура на цртежот десно подели ја на четири еднакви делови според облик и плоштина.

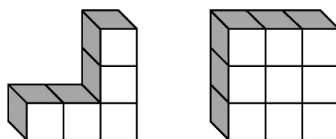


73. За новогодишните празници Цветанка запакувала два исти пакети за своите ќерки Фросина и Вера. Пакетите биле со основа квадрат и висина еднаква



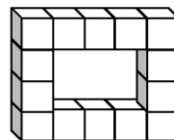
половина од должината на страната на квадратот. Пакетите ги заврзала со исти ленти, но за да ги разликува пакетите Цветанка различно ги заврзала лентите (види цртеж). Определи ја должината на страната на квадратот ако се знае дека едната лента е 45 cm подолга од другата.

74. Од еднакви коцки се формирани две тела (цртеж десно). За бојадисување на телото составено од 9 коцки се потребни 90 грама боја. Колку грама боја се потребни за бојадисување на површината на телото составено од 5 коцки?

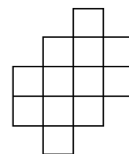


75. Фросина направила квадар со димензии $2\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, а Вера направила коцка со должина на раб 3 cm . Самоил во картон треба да направи правоаголна дупка низ која може да помине квадарот на Фросина, но не може да помине коцката на Вера. Определи ги димензиите на барем една од дупките кои може да ги направи Самоил?

76. Коцка со димензии $4\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ е расечена на мали коцки со димензии $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. Потоа од сите мали коцки е составена правоаголна рамка за фотографија со дебелина 1 cm . Се покажало дека плоштината на фотофрафијата, ставена во рамката, е еднаква на 216 cm^2 . Определи ги димензиите на фотографијата.

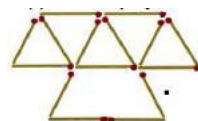


77. Подели ја фигурата дадена на цртежот десно на два дела така што секој дел ќе биде мрежа на $1 \times 1 \times 1$ коцка.



78. Дадени се осум кибритени чкорчиња. Нареди ги осумте чкорчиња така што
- а) секое од осумте чкорчиња сече точно шест од останатите чкорчиња;
 - б) секое од осумте чкорчиња сече точно пет од останатите чкорчиња;
 - в) секое од осумте чкорчиња сече точно три од останатите чкорчиња;

79. Фигурата прикажана на цртежот десно е направена од кибритени чкорчиња и таа содржи 6 триаголници. Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш фигура која содржи 9 триаголници. Не смее да има чкорче кое не учествува во формирање на барем еден триаголник.

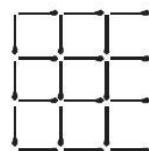


80. На цртежот десно се прикажани три рамнострани триаголници: мал, среден и голем, кои се направени со помош на 18 кибритени чкорчиња.



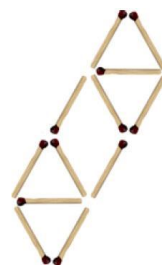
- Со помош на овие чкорчиња направи фигура која содржи точно 2 мали, 2 средни и 2 големи триаголника. Употреби ги сите чкорчиња.

81. Од 24 кибритени чкорчиња се составени 9 еднакви квадрати како што е прикажано на цртежот десно. Отстрани 4 чкорчиња така што ќе останат:



- а) 5 еднакви квадрати.
- б) 6 еднакви квадрати.

82. На цртежот десно е прикажана фигура направена од кибритени чкорчиња. Фигурата содржи 3 триаголници и 4 ромба. Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш 6 триаголници и 1 ромб. (Не смее да има неискористени чкорчиња.)

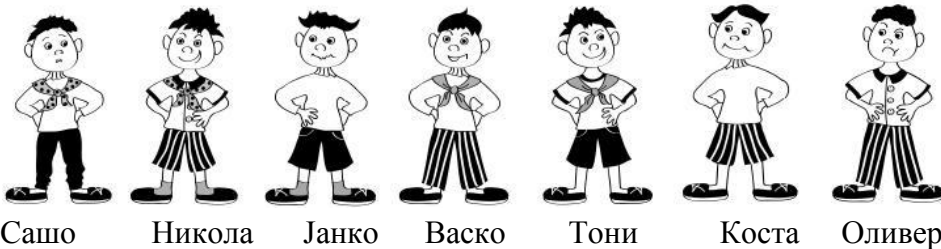


83. Во Математичкото село има 10 куќи кои се наоѓаат на 5 прави улици, по 4 куќи на секоја улица. Нацртај барем еден план на населбата.

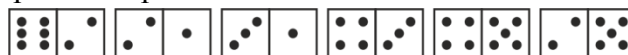
V ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

V.1. ЕЛЕМЕНТАРНИ ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Горјан има двајца пријатели кои што секогаш носат различна облека и различни обувки, т.е. се на нив е различно. Кои се пријателите на Горјан?



2. При решавањето на една задача Ана добила одговор 285, Елена добила 267 и Ивана добила 345. Учителката забележала дека секое девојче пресметало точно една цифра: едното точно ја пресметало цифрата на стотките, другото цифрата на десетките и третото цифрата на единиците. Кој е точниот одговор?
3. Еден ден Елена во права леја засадила неколку црвени лалиња. Следниот ден меѓу секои две соседни лалиња таа засадила по еден каранфил, а третиот ден меѓу секои две цвеќиња таа засадила по едно жолто лале. Во трите дена Елена засадила вкупно 97 цвеќиња. Колку црвени лалила засадила Елена?
4. Домино плочките се правилно поставени ако секои две различни плочки имаат еднаков број точки на соседните половици. На долниот цртеж се прикажани шест домино плочки.



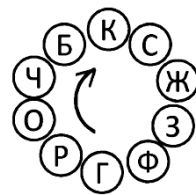
Колку плочки треба најмалку да се завртат така што сите шест ќе бидат правилно поставени?

5. Тројца другари Панче, Диме и Милан купиле 5 еднакви пакетчиња бонбони. Откако ги отвориле пакетчињата тие ги поделиле бонбоните подеднакво, т.е. секој добил еднаков број бонбони. Дали ако другарите купат 13 пакетчиња од истите бонбони, повторно ќе можат да ги поделат подеднакво?

6. Четири пријателки, Ратка, Ивана, Татјана и Николина, седеле на клупа во паркот, во некој редослед. Потоа почнале меѓусебно да ги менуваат местата на седење: прво Ратка и Татјана ги замениле местата, потоа Татјана и Николина, а потоа Ивана и Ратка ги замениле местата.

Конечниот распоред на седење на клупата одлево-надесно бил: Ратка, Ивана, Татјана и Николина. Во кој редослед, одлево-надесно седеле четирите пријателки на почетокот пред да почнат да ги менуваат местата?

7. Баба Марија решила на своите десет внуци да им подари по еден златен привезок на секој од кој е напишана првата буква на името на внукот. Децата се распоредиле во круг (цртеж десно) и бабата им ги поделила привезоците така што таа му давала привезок на секој трет внук одејќи во насока на движење на стрелките на часовникот, при што во броењето ги прескокнувала внуците кои веќе ги добиле привезоците. Внукот Жарко трет го добил својот подарок. По кој редослед биле поделени привезоците?



Забелешка. Кога ќе останат двајца, тогаш бабата брои: „*прв, втор, трет*“, а потоа му го дава привезокот на последниот внук.

8. За роденденската прослава на Михаил имало тркалезна торта која по прави линии кои тргнуваат од центарот била расечена на парчиња. На секое парче имало по една свеќичка, а на едно парче уште имало и роза. Ана и Александар во круг почнале да бројат свеќички и рози. Ана избројала 6 свеќички и 2 рози, а Александар избројал 19 свеќички и 3 рози. Колку свеќички има на тортата?

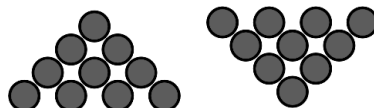


9. Сите двоцифрени броеви се запишани на 90 картончиња (по еден број на едно топче) и се ставени во кутија. Од кутијата без гледање вадиме картончиња. Определи го најмалиот број картончиња кој треба да го извадиме за да сме сигурни дека збирот на цифрите на два од запишаните броја е различен.

10. Матеј има два еднакви ластици. На секој од нив закачил по еден тег (цртеж десно), по што едниот ластик станал трипати подолг од другиот. Потоа Матеј ги измерил подолгиот ластик и растојанието меѓу средините на двата ластика. Колку пати растојанието меѓу средините е помало од должината на подолгиот ластик?



11. На цртежот десно се дадени два распореди на 10 кругчиња. Определи го најмалиот број кругчиња кои што треба да се преместат во левиот распоред така што ќе се добие десниот распоред на кругчињата?



12. Во 10 полиња на квадрат со димензии 5×5 е поставена по една мина. Во полињата во кои се запишани броеви не се поставени мини, а запишаните броеви означуваат во колку соседни полиња има мини (соседни се полињата кои имаат заедничка страна или заедничко теме). Означи ги со знак „+“ полињата во кои се поставени мини.

1		2	2	1
2				
		5		
1		4		
			4	

13. Во една кутија има сини, црвени и зелени топки. Збирот на сините и црвените е 13, збирот на црвените и зелените е 19 и збирот на зелените и сините топки е 28. Кој е најмалиот број топки што треба да го извадиме, без гледање, за да сме сигурни дека:
- најмалку две се истобојни,
 - најмалку три се истобојни,
 - најмалку две се разнобојни,
 - има топки од сите три бои.

V.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

14. Петар знае на јазикот на племето Фјури да запише пет збора, и тоа:

реми $\nabla \bullet$, бура $\otimes \oplus$, тава $X\Lambda$, шарена $\odot \nabla \times$ и сина $\Omega \times$.

Како Петар на јазикот на племето Фјури ќе ја запише реченицата:

Мими решава ребуси.

15. Мартин, Никола и Јана отишле со татковците на риболов. Секој маж уловил барем по една риба. Јана не ловела риби, туку ги исчистила 7-те риби кои ги уловиле мажите. Колку риби најмногу може да уловил таткото на Јана, ако секој од синовите уловил двапати помалку риби од својот татко?
16. Секој од учениците Алекса, Борис и Васил, или секогаш лаже или секогаш ја говори вистината. Учителката по математика ги прашала: „Кој од вас лаже?“. Алекса рекол: „Борис лаже.“. Борис рекол: „Алекса лаже.“. Васил рекол: „Алекса и Борис лажат.“. Колку од учениците лажат?
17. Прилепчаните Милица и Веско отишле на гости кај битолчаните Станка и Петко. Јаделе сладолед, торта, чоколадо и баклава. Девојчињата јаделе сладолед и баклава, прилепчаните јаделе сладолед и чоколадо. Сите јаделе и секој јадел само по еден десерт. Милица не сака баклава. Определи кој што јадел.
18. Марсовците имаат по 3, 4 или 5 уши. Тие што имаат по 4 уши секогаш лажат, а тие што имаат непарен број уши секогаш ја говорат вистината. Марсовците Арс, Барс и Варс ги дале следниве изјави:
Арс: *Тројцата заедно имаме 10 уши.*
Барс: *Тројцата заедно имаме 14 уши.*
Варс: *Тројцата заедно имаме 15 уши.*
Колку уши имаат заедно Арс, Барс и Варс?
19. Секој од четворицата пријатели Гордан, Алекса, Мартин и Ристо кажал по една реченица и тоа:

Гордан: *Јас секогаш изговорувам реченица со помалку од осум збора.*

Алекса: *Во моите реченици секогаш има помалку од десет збора.*

Мартин: *Изјавите на Гордан и Алекса се вистинити.*

Ристо: *Денес, Гордан или Алекса излага.*

Опредиeli кој лаже, а кој ја говори вистината.

20. Во земјата Недојдија момчињата секогаш ја говорат вистината, а девојчињата секогаш лажат. На островот живее семејство со три деца А, Б и В. Еден ден децата се собрале заедно и изјавиле:

А: *„Јас имам две сестри.“*

Б: *„Јас имам две сестри.“*

В: *„Јас имам двајца браќа.“*

Колку момчиња и колку девојчиња има ова семејство?

21. Принцот Давид сретнал три вили и ги прашал за својата иднина.

Арта рекла: *Принцот ќе земе мрзелива жена и ќе победи повеќе од 100 змејови.*

Бина рекла: *Не, принцот ќе победи помалку од 100 змејови и ќе земе работлива жена.*

Веда рекла: *Не, жената на принцот ќе биде мрзлива и принцот ќе победи најмалку еден змеј.*

Што треба да очекува принцот Давид, ако едната вила секогаш лаже, другата секогаш ја зборува вистината, а третата на почетокот лаже, а потоа ја зборува вистината?

22. Васил, Огнен, Лупчо и Павел живеат на еден ист спрат во соседни станови (два стана се соседни ако се означени со последователни броеви). Секој од нив одгледува по едно домашно милинечи и користи определен пијалок. Васил живее во станот 21. Огнен одгледува куче. Тој што одгледува папагал, пие спрајт, а тој што живее во станот 24 пие фанта. Лупчо живее во соседен стан во кој се одгледува хрчак, а соседи на тој што пие кока-кола се тој што живее во станот 23 и тој што пие чај. Станот на Павел во споредба со станот на Огнен е подалеку од

станот на Васил. Еден од четворицата одгледува мачка. Кој одгледува мачка?

V.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

23. Колку двоцифрени броеви запишани со помош на цифрите 1, 3 и 5 постојат?
24. Определи го бројот на броевите кои се помали од 2018 и во чиј запис цифрата 1 се содржи точно трипати. Испиши ги овие броеви.
25. Броевите, кои се запишуваат само со цифрите 1, 3, 7 и 9 се подредени по големина, т.е. 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 31, 33, 37, 39, 71 итн.
 - а) Определи го бројот на овие броеви кои се помали од 2017.
 - б) Кој број во горната низа се наоѓа на 101 место?
26. Определи го бројот на броевите од 1 до 900, кои во својот запис не ја содржат ниту цифрата 2, ниту цифрата 3.
27. Кои петцифрени броеви се повеќе – петцифрените броеви со најмала прва цифра или петцифрените броеви со најмала трета цифра?
28. Колку трифирени броеви постојат чиј збир на цифри е еднаков на 9. Испиши ги овие броеви.
29. Магдалена го заборавила пинот на својот мобилен телефон. Таа се сеќава само дека тоа е четирицифрен број, кој е запишан само со цифрите 3 и 4. Кои четирицифрени броеви може да бидат пинот на мобилниот на Магдален? Колку такви броеви има?
30. Колку четирицифрените броеви со меѓусебно различни цифри може да се запишат со помош на цифрите 1, 2, 3 и 4, така што во записот на бројот цифрата 1 се наоѓа лево од цифрата 4 (не мора да е непосредно пред неа)?

31. Благоја учествувал во лотарија во која секоја среќка е означена со некој трицифрен број. Тој ги купил сите среќки означени со броевите чиј производ на цифрата на десетките и цифрата на единиците е еднаков на 12, а збирот на тие две цифри за 1 се разликува од цифрата на стотките. Колку среќки и со кои броеви купил Благоја?
32. Определи ги сите осумцифрени броеви кои се запишани со помош на цифрите 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 и 4 и кои го имаат следново својство: меѓу две цифри 1 се наоѓа една цифра, меѓу две цифри 2 се наоѓаат две цифри, меѓу две цифри 3 се наоѓаат три цифри и меѓу две цифри 4 се наоѓаат четири цифри.
33. За еден трицифрен број ќе велиме дека е *идеален* ако производот на неговите цифри е еднаков на 252. Определи го бројот на идеалните трицифрени броеви.
34. Определи го бројот на двоцифрените броеви такви што едната цифра е непарна, а другата е поголема од 5.
35. Определи го бројот на седумцифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 70.
36. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се поголеми од 777 и во чиј запис не учествуваат цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5.
37. Определи го бројот на сите четирицифрени броеви кои може да се запишат со цифрите 1, 3, 7 и 9, при што сите цифри се различни и цифрите 3 и 9 не се една до друга. Испиши ги овие броеви.
38. За еден трицифрен број ќе велиме дека е *шаховски* ако производот на неговите цифри е еднаков на 64. Определи го бројот на *шаховските* трицифрени броеви.
39. Располагаш со доволен број монети од 1 и од 2 денари. На колку начини можеш да платиш молив којшто чини 17 денари?
40. Олгица се подготвува за санкање, па затоа сака да облече јакна, шал, капа и ракавици. На колку начини може да се облече Олгица ако таа има: црвена и плава јакна, црвен, зелен и бел шал,

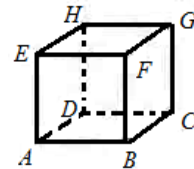
плава и жолта капа и кафеав шал? Испиши ги сите начини на кои Олгица може да биде облечена.

41. Клуч за велосипед има четири прстени со цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 со чија помош се формира четирицифрена комбинација која го отклучува велосипедот (цртеж десно). Прстените може да се вртат во двете насоки. Сега велосипедот е заклучен и го покажува бројот 2768.
- | | | | |
|---|---|---|---|
| | | 9 | 0 |
| 8 | | | 1 |
| 7 | | | 2 |
| 6 | | | 3 |
| | 5 | 4 | |
- При заклучување на велосипедот првата цифра која го отклучува велосипедот е завртена за 5, втората за 7, третата за 2 и четвртата за 3 чекори. Определи ги сите можни шифри на клучот?
42. Колку се различни природни броеви кои се запишуваат само со цифрите 1 и/или 3 и имаат збир на цифри 10?
43. На една забава има само 4 брачни парови. Во еден момент еден од мажите може да танцува со својата сопруга, а останатите мажи танцуваат со туѓи сопруги. На колку начини гостите може да танцуваат на забавата?
44. Еден фудбалски натпревар завршил со резултат 5:5, при што во текот на натпреварот ниту една екипа не успеала да поведе со повеќе од 1 гол. При постигнување на секој гол Ѓорѓи во нотезот го запишувал резултатот. Колку различни низи резултати може да има во нотезот на Ѓорѓи?
45. Патнички воз има 8 вагони. На една мала станица се качиле 3 патници. На колку начини тие може да седнат во возот така што еден патник да е во еден, а другите два патника да се во друг вагон?
46. За училишната прослава треба да се изберат 5 деца кои ќе држат по една буква од зборот УСПЕХ. Се пријавиле 5 момчиња и 4 девојчиња. На колку различни начини може да се подредат 5 од пријавените деца така што момчињата ќе ги држат согласките, а девојчињата самогласките на зборот УСПЕХ?

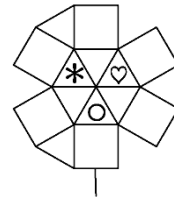
47. На цртежот десно е прикажан 3×3 квадрат во чии полиња се запишани броеви. За еден правоаголник велиме дека е *посебен* ако збирот на броевите запишани во неговите полиња е еднаков на 7. Колку *посебни* правоаголници содржи дадениот квадрат?

3	0	4
0	7	0
4	0	3

48. На цртежот е прикажана коцката $ABCDEFGH$. Определи го бројот на отсечките чии крајни точки се темињата на коцката. Испиши ги овие отсечки.



49. Во секој квадрат и секој триаголник на фигурата прикажана на цртежот десно треба да се доцрта еден од знаците *, $\circ$ или $\heartsuit$ така што во секои два многуаголника со заедничка страна се наоѓаат различни знаци. На колку начини може тоа да се направи?



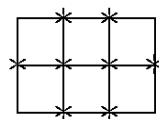
50. Марија има осум колачи:



На колку начини Марија може да ги подели колачите по две во четири еднакви чинии?

51. Шест екипи (А, Б, В, Г, Д и Е) учествуваат на еден фудбалски турнир, при што секои две екипи меѓусебно треба да одиграат по еден натпревар. Турнирот се организира во кругови, при што во секој круг шесте екипи играат во три парови. Колку натпревари ќе се одиграат на турнирот и во колку кругови? Состави распоред на натпреварите по кругови, т.е запиши во секој круг кој со кој игра.
52. За време на една екскурзија девет деца се собирале секоја вечер за играат преферанс (игра на карти во која учествуваат три играчи, деветте деца играле во три тројки). Во текот на екскурзијата никои две деца не играле заедно повеќе од една вечер. Колку вечери може најмногу да имало на екскурзијата?

53. На цртежот десно е прикажан правоаголен реон на еден град (линии се улици). Во него има 6 еднакви квартави (квадратчињата) и 8 раскрсници (точките во се сечат три или четири улици – означени со *). Определи го бројот на раскрсниците во правоаголен реон со 77 квартави.

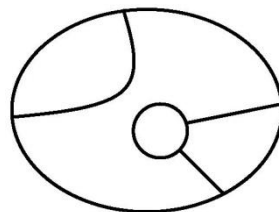


V.4. БОЕЊА, ПОКРИВАЊА И РАСЕКУВАЊА

54. Коцка е составена од 1000 еднакви бели коцки. Потоа шесте страни на големата коцка се обоени со сина боја. Колку од малите коцки ќе имаат точно:
- 3 бели страни,
 - 4 бели страни,
 - 5 бели страни,
 - 6 бели страни.

55. Горјан на кружница означил 9 сини и неколку црвени точки и почнал да ги поврзува со отсечки. Тој забележал дека како и да поврзи 64 отсечки меѓу нив ќе има барем една отсечка со еднобојни крајни точки. Определи го најголемиот можен број црвени точки кои ги означил Горјан.

56. Областите на фигурата дадена на цртежот десно треба да се обојат во боите црвена, зелена, жолта, лилјакова и сина, секоја област во по една боја и соседните области да се обоени во различни бои. Определи го бројот на различните боења на фигурата?

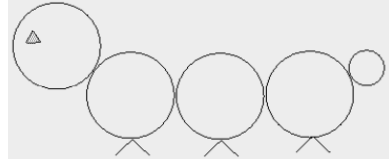


57. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од 9 области коишто треба да се обојат со 3 бои така што секои две соседни области се обоени со различни бои. На колку различни начини може да се направи боењето? (Две облас-

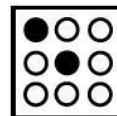
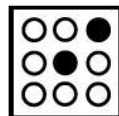
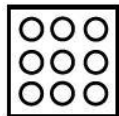


ти се соседни, ако имаат повеќе од една заедничка точка.)

58. Горјан нацртал гасеница и решил да ја обои така што два круга ќе бидат црвени, еден жолт, еден зелен и еден плав. Притоа сака црвените кругови да бидат еден до друг. На колку различни начини може да ја обои гасеницата Горјан?



59. Даден квадрат со страна 8 cm е поделен на 64 мали квадратчиња со страна 1 cm . Колку најмалку бои се потребни за боење на малите квадратчиња така што секои две соседни квадратчиња се разнобојни? (Две квадратчиња се соседни, ако имаат заедничка страна или заедничко теме.)
60. Во квадрат се сместени девет кругчиња, две од кои треба да се обојат со црна боја. Определи го бројот на различните боења, ако две боења се еднакви кога едното може да се добие од другото со вртење на квадратот (боењата прикажани да десните два квадрати на долниот цртеж се еднакви).

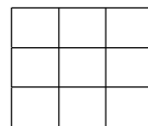


61. Михаил има чоколадо направено од бели и црни парчиња (цртеж десно). Тој сака да скрши плочка 2×2 така што во неа ќе има 2 бели и 2 црни парчиња чоколадо. На колку начини тоа може да го направи?
62. Правоаголник 2×3 е составен од единечни квадратчиња, кои се бели или сиви (цртеж десно).
- а) Определи го бројот на правоаголниците во кои сивите квадратчиња се повеќе од белите.
- б) Смени ја бојата на едно единечно квадратче така што бројот на правоаголниците во кои има еднаков број сиви и бели квадратчиња е најголемиот можен број.

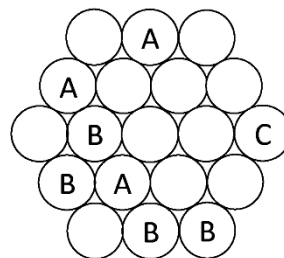


63. На улицата „Разнобојна“ сите куќи се наоѓаат од едната нејзина страна. Секоја од куќите е бојадисана во една од 5 можни бои. Се покажало дека за секои две од петте бои може да најдат соседни куќи кои се бојадисани во овие бои. Определи го најмалиот можен број куќи на оваа улица.

64. Секое од деветте полиња на квадратот даден на цртежот десно е обоено во една од неколку можни бои така што во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала нема полиња обоени во иста боја. Определи го најмалиот број бои потребен за такво боење.



65. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги буквите A , B и C така што ќе нема рамностран триаголник во чии темиња се запишани исти букви.



66. На колку различни начини може да се покрие правоаголник со димензии 2×6 со шест еднакви правоаголници со димензии 2×1 ?
67. Квадрат со димензии 3×3 треба да се расече на правоаголници со димензии 3×1 и 2×1 при што не е задолжително и двата видови правоаголници да учествуваат во расекувањето. На колку различни начини тоа може да се направи ако деветте единечни квадратчиња на 3×3 квадратот се означени.

V.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Збирот на точките кои се наоѓаат на сидовите на правилна коцка за играње е еднаков на 7.
- а) Една над друга се залепени 7 правилни коцки. Определи го најголемиот можен збир на точките кои се наоѓаат на површината на добиеното тело.

- б) Седумте коцки од задачата по а) ги лепиме така што еден до друг лепиме само сидови со еднаков број точки. Определи го збирот на точките кои се наоѓаат на површината на добиеното тело.
69. Во полињата на табела со димензии 5×5 се запишани природни броеви чиј збир е еднаков на 416. Збирот на броевите запишани во секои две соседни полиња е еднаков и е непарен број. Определи ги запишаните броеви. (Соседни се полиња кои имаат заедничка страна.)
70. Подредувањето во круг на 9 различни цифри го нарекуваме *кружно*, ако збирот на секои две соседни цифри е едноцифрен број. Најмалиот од збирите на две соседни цифри го нарекуваме *кругов збир*. Определи ги сите можни кругови зборови за различните кружни подредувања.
71. Пред Иван има три купчиња камчиња. Првото купче има 32 камчиња, второто – 20, а третото купче има 3 камчиња. Иван замисли игра со едно правило: Од само едно купче може да се префрлат толку камчиња во друго купче, колку што има камчиња во второто купче. На пример: $(32;20;3) \rightarrow (12;40;3)$ или $(32;20;3) \rightarrow (29;20;6)$, или $(32;20;3) \rightarrow (32;17;6)$ се дозволени чекори, но $(32;20;3) \rightarrow (30;19;6)$ не е дозволен чекор бидејќи од две купчиња се земено камчиња за третото. Дали може Иван почитувајќи го правилото од три купчиња $(32;20;3)$ да добие две купчиња – едното со 54 камчиња, а другото со 1 камче?
72. Двајца пријатели играат игра со 10 купчиња од по 10 камчиња. Кога е на потез, секој играч има право да направи по избор еден од следните четири чекори:
- 1) да ги земе сите камчиња од едно од постојните купчиња;
 - 2) да ги земе сите камчиња од две од постојните купчиња;
 - 3) да земе по едно камче од сите постојни купчиња;
 - 4) да земе по две камчиња од сите постојни купчиња.
- Победува играчот кој што ќе земе последен. Кој од играчите – првиот или вториот, ако игра правилно, може со сигурност да победи без разлика како ќе игра противникот?

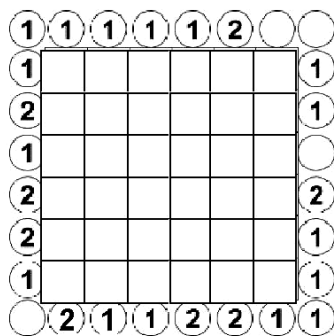
73. Дадени се две купчиња: едно со 2 камчиња и друго со $k \geq 1$ камчиња. Двајца играчи наизменично ја играат следнава игра. Играчот кој е на потег зема едно или повеќе камчиња од едното купче. Играчот кој последен зел камчиња победува. Познато е дека вториот играч победува независно од тоа како игра првиот играч. Определи го k .

74. Во некои полиња на табелата дадена на цртежот десно се запишани броеви. Во празните полиња запиши по еден од броевите од 1 до 7 така што во секој ред, во секоја колона и во секоја од малите фигури се наоѓаат сите седум броја.

		4		7	
3					7
	6		5		1
		2	1		4
5				4	
4	2				
		3		2	

75. Девете навидум исти монети се подредени во редица. Меѓу монетите има три неисправни, кои имаат иста тежина, полесни се од исправните монети и се подредени една до друга. Исправните монети имаат иста тежина. Како со две мерења на вага без тегови ќе ги определиме неисправните монети?

76. Група работи паднала во заседа во поле кое има квадратна форма и се состои од 36 квадрати и околу полето се распоредени непријателски цели (кругчињата на цртежот десно). Секој робот пука со ласер истовремено во 8 правци: кон сите 4 страни и по двете дијагонали. Роботите не стојат на линија на оган еден на друг.



Тие пукаат истовремено и сите истрели ги погодуваат целите. На шемата е прикажан бројот на погодоците во непријателските цели. Колку работи се во групата и каде истите стојат?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(23-9) \cdot 8 + 2 \cdot (6+18:3).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(23-9) \cdot 8 + 2 \cdot (6+18:3) &= 14 \cdot 8 + 2 \cdot (6+6) \\ &= 112 + 2 \cdot 12 \\ &= 112 + 24 = 136.\end{aligned}$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $12 \cdot 9 + 23 \cdot 8 + 34 \cdot 7 + 45 \cdot 6$,

б) $200 - 160 : (20 - 16)$,

в) $2018 + 201 : 3 - 113 \cdot 4$.

Решение. а) Имаме:

$$12 \cdot 9 + 23 \cdot 8 + 34 \cdot 7 + 45 \cdot 6 = 108 + 184 + 238 + 270 = 800.$$

б) Имаме

$$200 - 160 : (20 - 16) = 200 - 160 : 4 = 200 - 40 = 160.$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned}2018 + 201 : 3 - 113 \cdot 4 &= 2018 + 67 - 452 \\ &= 2085 - 452 = 1633.\end{aligned}$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(20-12) \cdot 15 + 2009 : (19-5 \cdot 2-2).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(20-12) \cdot 15 + 2009 : (19-5 \cdot 2-2) &= 8 \cdot 15 + 2009 : 7 \\ &= 120 + 287 = 407.\end{aligned}$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот

$$58 \cdot 284 - 58 \cdot 273 + 11 \cdot 42 - 1001.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
 58 \cdot 284 - 58 \cdot 273 + 11 \cdot 42 - 1001 &= 58 \cdot (284 - 273) + 11 \cdot 42 - 1001 \\
 &= 58 \cdot 11 + 11 \cdot 42 - 1001 \\
 &= 11 \cdot (58 + 42) - 1001 \\
 &= 11 \cdot 100 - 1001 \\
 &= 1100 - 1001 = 99.
 \end{aligned}$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот $(b-c):a+d$ ако

$$a = (2051 - 2016):(49:7)$$

$$b = 2014 - 81 + 73 \cdot 4$$

$$c = 3 \cdot 2015 - 2015 \cdot 2$$

$$d = (126 \cdot 8):9 - 112.$$

Решение. Имаме:

$$a = (2051 - 2016):(49:7) = 35:7 = 5$$

$$b = 2014 - 81 + 73 \cdot 4 = 1933 + 292 = 2225$$

$$c = 3 \cdot 2015 - 2015 \cdot 2 = 2015 \cdot (3 - 2) = 2015$$

$$d = (126 \cdot 8):9 - 112 = 1008:9 - 112 = 112 - 112 = 0.$$

Затоа

$$(b-c):a+d = (2225 - 2015):5 + 0 = 210:5 = 42.$$

6. Пресметај:

а) $27 \cdot 8 + 23 \cdot 7 - 26 \cdot 6 - 19 \cdot 9,$

б) $9000 - 26 \cdot (21121 - 6687:9 \cdot 28) + 696,$

в) $52328 - 28:2 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot (145 - 145).$

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}
 27 \cdot 8 + 23 \cdot 7 - 26 \cdot 6 - 19 \cdot 9 &= 216 + 161 - 156 - 171 \\
 &= 277 - 227 = 50.
 \end{aligned}$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned}
 9000 - 26 \cdot (21121 - 6687:9 \cdot 28) + 696 &= \\
 &= 9000 - 26 \cdot (21121 - 743 \cdot 28) + 696 \\
 &= 9000 - 26 \cdot (21121 - 20804) + 696 \\
 &= 9000 - 26 \cdot 317 + 696 = 9000 - 8242 + 696 \\
 &= 758 + 696 = 1454.
 \end{aligned}$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned}
& 52328 - 28 : 2 + (8 \cdot 5320 + 5320 \cdot 2) + 4827 \cdot 5 \cdot (145 - 145) = \\
& = 52328 - 14 + 5320 \cdot (8 + 2) + 4827 \cdot 5 \cdot 0 \\
& = 52314 + 5320 \cdot 10 + 0 \\
& = 52314 + 53200 = 105514.
\end{aligned}$$

7. Пресметај:

$$131 \cdot 12 - 12 \cdot 71 + (14 + 6 \cdot 3) \cdot 60.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
131 \cdot 12 - 12 \cdot 71 + (14 + 6 \cdot 3) \cdot 60 &= 12 \cdot (131 - 71) + (14 + 18) \cdot 60 \\
&= 12 \cdot 60 + 32 \cdot 60 = 60 \cdot (12 + 32) \\
&= 60 \cdot 44 = 1640.
\end{aligned}$$

8. Пресметај

$$209 \cdot (8 + 2 \cdot 6) - 972 : 9 + (432 + 209 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 0) : 4 - 2163.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
209 \cdot (8 + 2 \cdot 6) - 972 : 9 + (432 + 209 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 0) : 4 - 2161 &= \\
&= 209 \cdot (8 + 12) - 972 : 9 + (432 + 0) : 4 - 2161 \\
&= 209 \cdot 20 - 972 : 9 + 432 : 4 - 2161 \\
&= 4180 - 108 + 108 - 2161 \\
&= 4180 - 2161 = 2019.
\end{aligned}$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$19259 + 5 \cdot 48 - (714 : 7 + 2569).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
19259 + 5 \cdot 48 - (714 : 7 + 2569) &= 19259 + 240 - (102 + 2569) \\
&= 19499 - 2671 = 16828.
\end{aligned}$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot (56 - 7 \cdot 8).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
(481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot (56 - 7 \cdot 8) &= \\
&= (481 \cdot 325 - 75 \cdot 481) : 5 + (2 \cdot 43758 - 43758) \cdot 0 \\
&= 481 \cdot (325 - 75) : 5 = 481 \cdot 250 : 5 \\
&= 120250 : 5 = 21050.
\end{aligned}$$

11. Пресметај:

$$(118178:74+8403):5+10.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(118178:74+8403):5+10 &= (1597+8403):5+10 \\ &= 10000:5+10 \\ &= 2000+10 = 2010.\end{aligned}$$

12. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2002+2002\cdot5+(86\cdot6793-6793\cdot43-43\cdot6999)\cdot0+4\cdot2003\cdot25.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}2002+2002\cdot5+(86\cdot6793-6793\cdot43-43\cdot6999)\cdot0+4\cdot2003\cdot25 &= \\ &= 2002+2002\cdot5+4\cdot2003\cdot25 = \\ &= 2002+10010+4\cdot25\cdot2003 \\ &= 12012+100\cdot2003 \\ &= 12012+200300 \\ &= 212312.\end{aligned}$$

13. Пресметај

$$(43\cdot315-43\cdot281+34\cdot57):17.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(43\cdot315-43\cdot281+34\cdot57):17 &= (43\cdot(315-281)+34\cdot57):17 \\ &= (43\cdot34+34\cdot57):17 \\ &= 34\cdot(43+57):17 \\ &= 34\cdot100:17 = 200.\end{aligned}$$

14. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$52328-28:2+(145\cdot532-532\cdot45)+4827\cdot59\cdot(132-132).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}52328-28:2+(145\cdot532-532\cdot45)+4827\cdot59\cdot(132-132) &= \\ &= 52328-14+(145\cdot532-532\cdot45)+4827\cdot59\cdot0 \\ &= 52328-14+532\cdot(145-45)+0 \\ &= 52328-14+532\cdot100 \\ &= 52314+53200 = 105514.\end{aligned}$$

15. Кој број е поголем: $1186+1186\cdot 9$ или $25\cdot (6146-5672)$ и за колку?

Решение. Имаме

$$1186+1186\cdot 9=1186\cdot (1+9)=1186\cdot 10=11860$$

и

$$25\cdot (6146-5672)=25\cdot 474=11850.$$

Според тоа, првиот број е поголем и тоа за $11860-11850=10$.

16. Определи ги броевите A , B и C ако

$$A=34\cdot 6+76\cdot (2016-2010)-3\cdot 214:6$$

$$B=(2148+784:8)-2016$$

а бројот C е за 500 поголем од збирот на 45 десетки и 7 единици. Кој број е најголем?

Решение. Имаме:

$$A=34\cdot 6+76\cdot (2016-2010)-3\cdot 214:6$$

$$=204+76\cdot 6-642:6=204+456-107$$

$$=660-107=553$$

$$B=(2148+784:8)-2016=2148+98-2016$$

$$=2246-2016=230$$

и

$$C=500+45\cdot 10+7=500+457=957.$$

Јасно, најголем е бројот C .

17. На петте картички прикажани на цртежот десно се запишани пет броја. Нареди ги петте картички една по друга така што прво ќе го добиеш најголемиот седумцифрен можен број, а потоа најмалиот седумцифрен можен број. Определи ја разликата на добиените броеви.



Решение. Најголемиот број кој може да се добие е 7521210, а најмалиот број кој може да се добие е 1012527. Нивната разлика е еднаква на $7521210-1012527=6508683$.

18. Замени ги местата на две цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$2012 = 1719 + 275$$

Решение. Ако ги замениме местата на цифрите 7 и 9 добиваме
 $1717 + 295 = 2012$,

т.е. добиваме точно равенство.

19. Пресметај $B - A$ ако

$$A = 100 + 101 + 102 + \dots + 299 \text{ и } B = 300 + 301 + 302 + \dots + 499.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} B - A &= 300 + 301 + 302 + \dots + 499 - (100 + 101 + 102 + \dots + 299) \\ &= (300 - 100) + (301 - 101) + (302 - 102) + \dots + (499 - 299) \\ &= \underbrace{200 + 200 + 200 + \dots + 200}_{200 \text{ пати}} = 200 \cdot 200 = 40000. \end{aligned}$$

20. Пресметај ја вредноста на изразот $C = 3A : B + B : 3$, ако

$$\begin{aligned} A &= 26 \cdot 25 - 25 \cdot 24 + 24 \cdot 23 - 23 \cdot 22 + 22 \cdot 21 - 21 \cdot 20 + \\ &\quad + 20 \cdot 19 - 19 \cdot 18 + 18 \cdot 17 - 17 \cdot 16 + 16 \cdot 15 - 15 \cdot 14 \end{aligned}$$

и B е најмалиот природен број за кој е решение на равенката
 $12 : B = 7 - B$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A &= 26 \cdot 25 - 25 \cdot 24 + 24 \cdot 23 - 23 \cdot 22 + 22 \cdot 21 - 21 \cdot 20 + \\ &\quad + 20 \cdot 19 - 19 \cdot 18 + 18 \cdot 17 - 17 \cdot 16 + 16 \cdot 15 - 15 \cdot 14 \\ &= 25 \cdot (26 - 24) + 23 \cdot (24 - 22) + 21 \cdot (22 - 20) + \\ &\quad + 19 \cdot (20 - 18) + 17 \cdot (18 - 16) + 15 \cdot (16 - 14) \\ &= 25 \cdot 2 + 23 \cdot 2 + 21 \cdot 2 + 19 \cdot 2 + 17 \cdot 2 + 15 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot (25 + 23 + 21 + 19 + 17 + 15) = 240. \end{aligned}$$

Понатаму, од $12 : B = 7 - B$ следува $B(B - 7) = 12$. За $B = 1$ последното равенство не е точно. За $B = 2$ равенството исто така не е точно, а за $B = 3$ добиваме $3 \cdot (12 - 7) = 3 \cdot 5 = 15 \neq 12$, па затоа $B = 3$. Конечно,

$$C = 3A : B + B : 3 = 3 \cdot 240 : 3 + 3 : 3 = 240 + 1 = 241.$$

21. Пресметај:

$$11111111 \cdot 11111111 + 11111111 : 11111111.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
& 111111111 \cdot 111111111 + 111111111 : 111111111 = \\
& = 111111111 \cdot 1 + 111111111 \cdot 10 + 111111111 \cdot 100 \\
& \quad + 111111111 \cdot 1000 + 111111111 \cdot 10000 \\
& \quad + 111111111 \cdot 100000 + 111111111 \cdot 1000000 \\
& \quad + 111111111 \cdot 10000000 + 111111111 \cdot 100000000 + 1 \\
& = 12345678987654321 + 1 = 12345678987654322.
\end{aligned}$$

22. Самоил има дигитрон со кој може даден број да го помножи со 3, да го собере со 2 и од даден број да одземе 1. Во кој редослед треба Самоил да ги користи наведените операции, секоја операција само еднаш, за од бројот 3 да го добие бројот 14?

Решение. Бидејќи $3 \cdot 4 < 14 < 3 \cdot 5$, заклучуваме дека Самоил прво од бројот 3 треба да го добие бројот 4 или бројот 5. Со неговиот дигитрон може да го добие бројот $5 = 3 + 2$, потоа да го добие бројот $15 = 3 \cdot 5$ и на крајот да го добие бројот $15 - 1 = 14$. Значи, Самоил прво треба да додаде 2, потоа да множи со 3 и на крајот да одземе 1.

23. Со помош на картички Самоил составил пример за собирање на броеви, но Вера ги заменила местата на две картички. Како што може да се види на цртежот десно равенството се нарушило. Кои картички ги заменила Вера? Кој пример го составил Самоил?

$$\begin{array}{r}
\boxed{1} \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \\
+ \boxed{2} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{4} \boxed{9} \\
\hline
\boxed{5} \boxed{3} \boxed{9} \boxed{8} \boxed{1}
\end{array}$$

Решение. Ги собираме единиците и од равенството $2 + 9 = 11$ заклучуваме дека картичките 2 и 9 не ги замениле местата. Од равенството $1 + 3 + 4 = 8$ заклучуваме дека и картичките на десетките не ги замениле местата.

Да ги разгледаме стотките. Ако картичките 9 и 8 ги замениле местата, тогаш собирањето на стотките е точно, но при собирањето на илјадитите ќе имаме $5 + 9 = 14$, но бројот 14 не завршува на 3. Значи, ова не е бараната замена.

Ако е заменета цифрата 4 на стотките на првиот или вториот собиор со цифрата 5, тогаш може да се искористи цифрата на

илјадитите на првиот собирук или цифрата на десетилјадитите на збирот. Во првиот случај собирањето продолжува со $5+4=9$ и $4+8=12$. Но, бројот 12 не завршува на 3, па затоа ова не е бараната замена.

Вториот случај го дава решението на задачата. На долните цртежи се прикажани двете решенија на задачата.

	$+$	1	5	4	3	2		$+$	1	5	5	3	2			
		2	8	4	4	9			2	8	4	4	9			
		5	3	9	8	1			4	3	9	8	1			

	$+$	1	5	4	3	2		$+$	1	5	4	3	2			
		2	8	4	4	9			2	8	5	4	9			
		5	3	9	8	1			4	3	9	8	1			

24. Во изразот $5 \cdot 6 + 12 : 3 - 2$ стави загради така што вредноста на новиот израз ќе биде

а) 12, б) 28, в) 32, г) 42, д) 48.

Решение. Имаме

$$(5 \cdot 6 + 12) : 3 - 2 = 42 : 3 - 2 = 14 - 2 = 12,$$

$$5 \cdot (6 + 12) : 3 - 2 = 5 \cdot 18 : 3 - 2 = 30 - 2 = 28,$$

$$(5 \cdot 6 + 12 : 3) - 2 = (30 + 4) - 2 = 32,$$

$$5 \cdot 6 + 12 : (3 - 2) = 30 + 12 : 1 = 30 + 12 = 42,$$

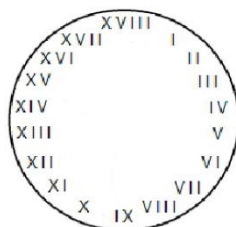
$$5 \cdot (6 + 12 : 3) - 2 = 5 \cdot 10 - 2 = 50 - 2 = 48.$$

25. Во изразот $503 \cdot 32 + 75 \cdot 816 - 784 - 15 + 17 \cdot 94$ стави загради така што неговата вредност ќе биде 15488.

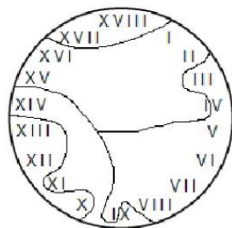
Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 503 \cdot 32 + 75 \cdot (816 - 784) - (15 + 17) \cdot 94 &= 503 \cdot 32 + 75 \cdot 32 - 32 \cdot 94 \\ &= 16096 + 2400 - 3008 \\ &= 15488. \end{aligned}$$

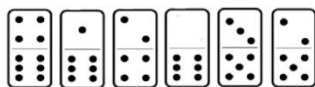
26. При истражувањето на античкиот град Стибера била најдена необична кружна плоча на која биле запишани римските броеви од 1 до 18 (цртеж десно). За жал плочата била скршена на 5 дела. Археологот Стале забележал дека збирот на броевите на секој од петте дела е еднаков. Покажи како можела да биде скршена плочата.



Решение. Збирот на броевите од 1 до 18 е еднаков на $1+2+\dots+17+18=171$. Бидејќи овој број не е делив со 5, заклучуваме дека плочата е скршена така што некои од броевите се наоѓаат на различни делови. При поделба на броевите збирот не може да се намали, а истиот се зголемува само ако се поделат некои од броевите *IV*, *IX* и *XIV*, при што при поделба на секој од овие броеви збирот може да се зголеми за 2. Бројот $171+2+2+2=175$ е делив со 5, што значи дека треба да поделиме два од споменатите три броја. На цртежот е покажано едно од можните решенија при кое се поделени броевите *IV* и *IX*, а збирот на секој од петте дела е еднаков на 35.



27. Со помош на домино плочки може да се претставуваат четирицифрени броеви. На пример, со  е претставен бројот 4203. Со помош на плочките



прикажи точен пример за собирање на два четирицифрени броја.

Решение. Со шестата и четвртата плочка може да се претстави бројот 2560, со петтата и првата плочка – бројот 3564 и со втората и третата плочка бројот 6124. Притоа имаме

$$2560 + 3564 = 6124.$$

Забелешка. Задачата има повеќе решенија. Обиди се да најдеш барем уште едно решение.

28. Определи ги вредностите на A и B :

$$A = (147 \cdot 18 + 627 \cdot 7) : 21 - 2772 : 9$$

$$(B + (2018 - 2) : 42)8 = 11.$$

При фрлање на коцка за играње може да паднат од 1 до 6 точки. Иван пет пати ја фрлил коцката и ги запишал паднатите броеви точки. Ако нивниот збир е 11, дали е можно нивниот производ да биде еднаков на A или B . Кој е најголемиот можен производ на паднатите броеви точки?

Решение. Имаме

$$A = (147 \cdot 18 + 627 \cdot 7) : 21 - 2772 : 9$$

$$= (2646 + 4389) : 21 - 308$$

$$= 335 - 308 = 27,$$

$$(B + (2018 - 2) : 42)8 = 11$$

$$B + 2016 : 42 = 88$$

$$B = 88 - 48 = 40.$$

Петте броја подредени по големина може да се:

$11 = 6 + 2 + 1 + 1 + 1$, производот е еднаков на 12,

$11 = 5 + 3 + 1 + 1 + 1$, производот е еднаков на 15,

$11 = 5 + 2 + 2 + 1 + 1$, производот е еднаков на 20,

$11 = 4 + 4 + 1 + 1 + 1$, производот е еднаков на 14,

$11 = 4 + 3 + 2 + 1 + 1$, производот е еднаков на 24,

$11 = 4 + 2 + 2 + 2 + 1$, производот е еднаков на 32,

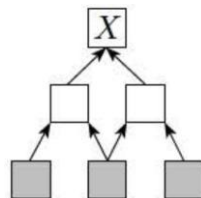
$11 = 3 + 3 + 3 + 1 + 1$, производот е еднаков на 27,

$11 = 3 + 3 + 2 + 2 + 1$, производот е еднаков на 36,

$11 = 3 + 2 + 2 + 2 + 2$, производот е еднаков на 48.

Според тоа, производот може да биде еднаков на A , но не може да е еднаков на B . Најголемиот можен производ е 48.

29. Во сивите квадратчиња на дијаграмот на цртежот десно се запишани различни едноцифрени броеви. Броевите запишани во соседните квадратчиња се собираат и зборовите се запишуваат во квадратчињата над нив. Определи ја најголемата можна вредност на X .



Решение. Бројот X е еднаков на збирот на броевите во сивите квадратчиња плус бројот кој е запишан во средното сиво квадратче. Овој збир е најголем ако во средното сиво квадратче е запишан бројот 9, а во соседните квадратчиња се запишани броевите 7 и 8. Најголемата можна вредност на X е еднаква на $7+2\cdot 9+8=33$.

30. Операцијата $*$ е зададена со $x*y = xy + x - y$. Пресметај $(2*3)*(9*7)$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(2*3)*(9*7) &= (2\cdot 3 + 2 - 3) \cdot (9\cdot 7 + 9 - 7) \\ &= (6 + 2 - 3) \cdot (63 + 9 - 7) \\ &= 5 \cdot 65 = 5 \cdot 65 + 5 - 65 \\ &= 325 + 5 - 65 = 265.\end{aligned}$$

31. Операцијата $*$ е определена за секои два броја a и b со $a*b = (a+9b)(b-9a)$.

Ако x е најголемиот парен трицифрен број, а y најмалиот непарен трицифрен број, пресметај $y*x$.

Решение. Најголемиот парен трицифрен број е 998, а најмалиот непарен трицифрен број е 101. Имаме

$$\begin{aligned}101*998 &= (101+9\cdot 998)(998-9\cdot 101) \\ &= (101+8982)(998-909) \\ &= 9083\cdot 89 = 808387.\end{aligned}$$

32. Ако $a\otimes b = 3a+b:2$, пресметај $46\otimes 26+64\otimes 84$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}46\otimes 26+64\otimes 84 &= 3\cdot 46+26:2+3\cdot 64+84:2 \\ &= 3\cdot (46+64)+(26+84):2 \\ &= 3\cdot 110+110:2 = 330+55 = 385.\end{aligned}$$

1.2. НИЗИ

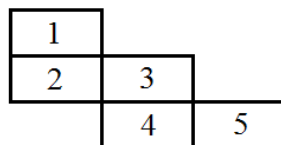
33. Горјан за запишал следнава низа знаци:

♦, ♣, ▲, ♦, ♣, ☺, ♦, ♣, ▲, ♦, ♣, ☺, ♦, ♣, ▲, ♦, ♣, ☺, ♦, ♣, ▲, ♦, ...

Кој знак го запишал Горјан на 208-то место во низата? Одговорот да се образложи!

Решение. Забележуваме дека групата знаци $\diamond, \clubsuit, \spadesuit, \diamond, \clubsuit, \odot$ последователно се повторува. Бидејќи $208 = 34 \cdot 6 + 4$, заклучуваме дека во низата на Горјан групата симболи $\diamond, \clubsuit, \spadesuit, \diamond, \clubsuit, \odot$ се содржи 34 пати. По 34 вакви групи се запишани уште 4 знаци и тоа: $\diamond, \clubsuit, \spadesuit, \diamond$. Според тоа, на 208-то место Горјан го запишал знакот $\diamond$.

34. Јованка во дворот нацртала пет правоаголници како на цртежот десно. Таа застанала во полето 1, потоа поминала во полето 2, па поминала во полето 3, па во полето 4, па во полето 5, после што се враќала наназад – од петтото во четвртото, од четвртото во третото, од третото во второто, од второто во првото поле и повторно од почеток. Од едно во друго поле Јованка преминува со еден чекор.



Во кое поле ќе биде Јованка откако ќе направи 2019 чекори?

Решение. Полињата во кои Јованка се наоѓа по направен чекор ќе ги прикажеме во следната табела:

Чекор	Старт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	итн
Поле	1	2	3	4	5	4	3	2	1	2	3	4	5	4	3	2	итн

Да забележиме дека по првите 8 чекори Јованка се вратила назад во првото поле и дека низата редни броеви на полињата во кои се наоѓа после тоа се повторува. Според тоа, Јованка после секој осми чекор ќе се најде во првото поле и ќе тргне од почеток. Последното значи дека 2019 чекори треба да се поделат на групи од 8 чекори: 1. – 8. чекор, 9. – 16. чекор, 17. – 24. чекор итн. Важи $2019 = 8 \cdot 252 + 3$, што значи дека после 2019 чекори Јованка ќе се најде во исто поле како и после третиот чекор. Според тоа, после 2019 чекори Јованка ќе биде во четвртото поле.

35. Определи ги непознатите членови на низата броеви:

$$1, 4, 7, a, 13, 16, b.$$

Решение. Забележуваме дека $4-1=7-4=16-13=3$, што значи дека правилото според кое е формирана низата е: *разликата на секои два последователни членови на низата е еднаква на 3*. Затоа важи $a-7=3$ и $b-16=3$, од каде добиваме $a=10$ и $b=19$.

36. Определи ги броевите кои недостасуваат во низата броеви:

3, 9, 21, a , 63, 93, b .

Решение. Забележуваме дека за членовите на дадената низа броеви важи:

$$9-3=6=1\cdot 6,$$

$$21-9=12=2\cdot 6,$$

$$a-21=18=3\cdot 6$$

$$63-a=24=4\cdot 6,$$

$$93-63=30=5\cdot 6,$$

$$b-93=36=6\cdot 6,$$

што значи дека

$$a=21+18=39=63-24,$$

$$b=93+36=129.$$

37. Броевите од 1 до 9 запиши ги во низа така што не постојат три последователни броеви кои се во растечки или опаѓачки редослед.

Решение. Задачата има повеќе решенија. Две од можните решенија се:

1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8 и 1, 5, 3, 4, 2, 8, 7, 9, 6.

Обиди се да најдеш и други решенија на задачата.

38. Формираме бројна низа на следниот начин: на првото и второто место ги запишуваме цифрите 2 и 7, соодветно. Потоа на третото место ја запишуваме последната цифра на нивниот производ. На четвртото место ја запишуваме последната цифра на производот на последните две запишани цифри. Така, на секое следно место ја запишуваме последната цифра на производот на последните две запишани цифри во низата. Која е цифрата на 2019-тото место во оваа низа?

Решение. Првите неколку членови на низата се

2 7 4 8 2 6 2 2 4 8 2 6 2 2 4 8 2 6 2 2 ...

Забележуваме дека после првите два члена се добива група од шест цифри 4 8 2 6 2 2 која се повторува. Бидејќи

$$2019 - 2 = 2017 = 6 \cdot 336 + 1$$

заклучуваме дека на 2019-тото место се наоѓа првата цифра од групата цифри која се повторува, а тоа е цифрата 4.

39. На таблата е запишана низа од пет броја такви што разликата меѓу секои два соседни броја е еднаква. Потоа цифрите се заменети со букви така што различните цифри се заменети со различни букви, а истите цифри се заменети со исти букви и е добиен записот: A, BC, DEA, CFC, FGA . Определи ги броевите во оваа низа.

Решение. Бидејќи првиот број е едноцифрен, а вториот е двоцифрен заклучуваме дека нивната разлика може да биде едноцифрен или двоцифрен број.

Ако земеме дека разликата е едноцифрен број, добиваме дека $B=1$ и тогаш третиот број е двоцифрен, што не е точно.

Значи, разликата е двоцифрен број. Сега, третиот број е еднаков на збир на два двоцифрени броја, па затоа $D=1$.

Четвртиот и петтиот број се еднакви на збир на трицифрен и двоцифрен број, па како нивните цифри на стотките се различни и $D=1$ добиваме дека $C=2$ и $F=3$. Така ги добивме записите $A, B2, 1EA, 232, 3GA$.

Разликата меѓу четвртиот и вториот број завршува на 0. Бидејќи оваа разлика е двапати поголема од разликата меѓу два последователни броја, а два последователни броја имаат различни цифри на единиците заклучуваме дека разликата меѓу два последователни броја има цифра на единиците еднаква на 5.

Сега од разликата меѓу третиот и вториот број заклучуваме дека $A-2$ завршува на 5, па затоа $A=7$. Така го добивме записот $7, B2, 1E7, 232, 3G7$.

Разликата меѓу првиот и четвртиот број е $232-7=225$, па затоа разликата меѓу два последователни броја е $225:3=75$.

Конечно, низата броеви е 7, 82, 157, 232, 307.

40. Со помош на еднакви кибритени чкорчиња е формирана низа од 1 триаголник, 2 триаголника, 3 триаголници, 4 триаголници итн. (види цртеж).



Колку кибритени чкорчиња се потребни за да се направат 101 фигура?

Решение. За првиот триаголник се искористени 3 чкорчиња, за вториот триаголник се искористени $5 = 3 + 2 \cdot 1$ чкорчиња, за третиот триаголник се искористени $7 = 3 + 2 \cdot 2$ чкорчиња, за четвртиот триаголник се искористени $9 = 3 + 2 \cdot 3$ чкорчиња. Забележуваме дека за секој следен триаголник се потребни 2 чкорчиња повеќе. Значи за 101-от триаголник ќе бидат потребни

$$3 + 2 \cdot 100 = 203$$

чкорчиња. Значи, за да се направат 101 фигура се потребни:

$$\begin{aligned} & 3 + 3 + 2 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 3 + 2 \cdot 99 + 3 + 2 \cdot 100 = \\ & = 101 \cdot 3 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100) \\ & = 303 + 2[(1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots + (50+51)] \\ & = 303 + 2 \cdot 50 \cdot 101 = 303 + 100 \cdot 101 \\ & = 303 + 10100 = 10403 \end{aligned}$$

чкорчиња.

I.3. БРОЈНИ РЕБУСИ

41. Дешифрирај го бројниот ребус $\overline{ABV} + \overline{BV} = \overline{BVA}$, каде различните букви претставуваат различни цифри, а еднаквите букви еднакви цифри.

Решение. Ако броевите во даденото равенство ги запишеме во развиена форма добиваме

$$\begin{aligned} 100A + 10B + B + 10B + B &= 100B + 10B + A \\ 9A &= 8B. \end{aligned}$$

Но, A и B се цифри, па затоа од последното равенство следува $A=8$ и $B=9$, т.е. $899 + 99 = 998$.

42. Реши го бројниот ребус, ако на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на еднаквите букви еднакви цифри:

$$\overline{U} + \overline{AAA} + \overline{AAA} = \overline{UAAA}.$$

Решение. Збир на два трицифрени броеви е помал од $2 \cdot 999 = 1998$, па бидејќи десната страна на даденото равенство е четирицифрен број добиваме дека $U = 1$. Со замена во даденото равенство добиваме

$$1 + \overline{AAA} + \overline{AAA} = \overline{1AAA} = 1000 + \overline{AAA},$$

од каде наоѓаме $\overline{AAA} = 999$. Значи, $1 + 999 + 999 = 1999$.

43. Во ребусот

$$\overline{PRASE} + \overline{PRASE} = \overline{SONCE}$$

на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Определи ја најголемата можна вредност на $\overline{PRASE}$.

Решение. Јасно, $E = 0$ и $P \leq 4$. Ако $P = 4$ и $S = 9$, тогаш $C = 8$. Понатаму, најголемата можна вредност за R е 7, а за A е 6. Според тоа, најголемата можна вредност на $\overline{PRASE}$ е 47690, а на $\overline{SONCE}$ е 95380.

44. Во бројниот ребус

$$\overline{OMG} + \overline{OMG} + \overline{OMG} = 21 + \overline{VEK}$$

на различни букви соодветствуваат различни неискористени цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Определи ја најголемата можна вредност на $\overline{OMG}$.

Решение. Бидејќи $21 + \overline{VEK} < 22 + 987 = 1009$, а $1009 = 3 \cdot 336 + 1$ заклучуваме дека $\overline{OMG}$ може да биде најмногу 336. Но, цифрите на $\overline{OMG}$ треба да се различни меѓу себе и различни од веќе искористените цифри 1 и 2, заклучуваме дека $\overline{OMG}$ може да биде најмногу 309. Но, $3 \cdot 309 - 21 = 906$, што значи $0 = M = E$ и $9 = G = V$, а тоа не е можно. Слично добиваме дека не е можно $\overline{OMG}$ да е 307 и 308. Ако $\overline{OMG} = 306$, тогаш

$$\overline{VEK} = 3 \cdot 306 - 21 = 897.$$

Конечно, $\overline{OMG} = 306$ и $\overline{VEK} = 897$ е решение на задачата.

45. Реши го бројниот ребус

$$\overline{MASTRIT} + \overline{ASTRIT} + \overline{STRIT} + \overline{TRIT} + \overline{RIT} + \overline{IT} + T = 6043856,$$

во кој на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Последната цифра $7 \cdot T$ завршува на 6, па затоа $T = 8$. Шестата цифра $6 \cdot I + 5$ завршува на 5, па значи $I = 5$ или $I = 0$, при што последното не е можно бидејќи е почетна цифра на двоцифрен број. Значи, $I = 5$. Петтата цифра $5 \cdot R + 3$ завршува на 8, па затоа R е непарна. Четвртата цифра $4 \cdot 8 + \text{некој пренос}$ завршува на 3, па затоа преносот е 1. Но, тоа значи дека $R = 3$. Третата цифра $3 \cdot S + 3$ завршува на 4, па затоа $S = 7$. Втората цифра $2 \cdot A + 2$ завршува на 0, па затоа $A = 4$ или $A = 9$. Ако $A = 4$, тогаш $M = 7$, но 7 е веќе искористена. Ако $A = 9$, тогаш $M = 4$. Конечно, решение на ребусот е $\overline{MASTRIT} = 4978358$.

46. Во збировите

$$\begin{array}{r} \\ \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \hline 9 \end{array}$$

на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри. Кој број соодветствува на зборот ПЕРО?

Решение. Бидејќи О и Л се различни цифри од првиот збир следува дека $O + L = 10$. Понатаму, збирот на десетките е помал од 20, па затоа $A + K = 9$, а $P = 6$.

Аналогно во вториот збир имаме $P + A = 10$, од каде добиваме дека $A = 4$, па затоа $K = 5$. Понатаму, збирот на десетките е помал од 20, па затоа $E + L = 9$ и $P = 8$. Сега имаме $E + L = 9$ и $O + L = 10$, што значи дека Е и О се последователни цифри. Но, цифрите 4, 5, 6 и 8 се зафатени, па затоа Е и О може да бидат 1 и 2 или 2 и 3. Ако $E = 1$ и $O = 2$, тогаш $L = 8$, што не е можно бидејќи цифрата 8 е зафатена. Ако $E = 2$ и $O = 3$, тогаш $L = 7$. Според тоа, на зборот ПЕРО соодветствува бројот 8263.

47. Во равенството прикажано на цртежот десно на секоја буква соодветствува непарна цифра, при што на различните букви соодветствуваат различни букви, а на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри. Определи го збирот

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \hline
 9 4 3
 \end{array}$$

$$K + O + K + O + III + K + A.$$

Решение. Јасно K не може да биде 9, бидејќи во тој случај збирот ќе биде поголем од 1000. Но, K не може да биде помал од 7, бидејќи во тој случај збирот ќе биде помал од 800. Значи $K = 7$. Тоа значи дека има пренос 2 од десетките и освен тоа се добива 4 во збирот на десетките. Последното е можно само ако $O = 9$ и има пренос 1 од единиците. Значи $A + III = 4$ и единствена можност е A и III да се 1 и 3 во некој редослед. Според тоа,

$$K + O + K + O + III + K + A = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 1 + 3 = 43.$$

48. Реши го ребусот

$$\overline{aa} + \overline{bcb} = \overline{deed}$$

во кој на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Збир на двоцифрен и трицифрен број е помал или еднаков на $99 + 999 = 1998$, па затоа $d = 1$. Понатаму, ако $b = 8$, тогаш $\overline{aa} + \overline{bcb} \leq 99 + 898 < 1000$, па затоа $b = 9$. Сега, ако замениме во даденото равенство добиваме $\overline{aa} + \overline{9c9} = \overline{1ee1}$, па затоа $a = 2$ и добиваме $22 + \overline{9c9} = \overline{1ee1}$. Последното равенство е можно само ако $c \geq 7$. За $c = 7$ добиваме $22 + 979 = 1001$, а за $c = 8$ добиваме $22 + 989 = 1011$. Конечно, решение на дадениот ребус е $22 + 979 = 1001$.

49. Во ребусот даден на цртежот десно на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. На буквата Л соодветствува цифрата 2. Која цифра соодветствува на цифрата О? Определи го збирот $K + H + Г + Б$.

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 \hline
 1 6 0
 \end{array}$$

Решение. Бидејќи L е 2, а збирот на единиците завршува на 0, заклучуваме дека збирот на $3C$ завршува на 8. Според тоа, $C=6$ и преносот од збирот на единиците е еднаков на 2. Сега $4O+2$ завршува на 0, па затоа $4O$ завршува на 8. Последното значи $O=2$ или $O=7$. Но, $L=2$, па затоа $O=7$. Конечно, имаме $K+N+Г+Б+3=16$, т.е. $K+N+Г+Б=13$.

50. Во збирот $\overline{ШАП} + \overline{КА}$ на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Определи ја најголемата можна вредност на овој збир.

Решение. Збирот прима најголема вредност ако бројот $\overline{ШАП}$ е најголемиот можен трицифрен број, а бројот $\overline{КА}$ е најголемиот можен двоцифрен број. Значи $Ш=9$, $A=8$, $K=7$ и $П=6$, при што добиваме

$$\overline{ШАП} + \overline{КА} = 986 + 78 = 1064.$$

51. Во ребусот $\overline{A7} \cdot B = \overline{CA6}$ на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри. Определи го збирот $A+B+C$.

Решение. Производот $B \cdot 7$ завршува на цифрата 6, па затоа $B=8$. Според тоа, $8A+5=10C+A$, односно $7A+5=10C$, па затоа $A=5$ и $C=4$. Конечно, $A+B+C=5+8+4=17$.

52. Замени ги ѕвездичките со цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$***5:11=**.$$

Решение. Дадениот услов ќе го запишме во вид на производ:

$$** \cdot 11 = ***5.$$

Од последното равенство следува дека цифрата на единиците на множителот $**$ е 9. Понатаму, цифрата на десетките на множителот $**$ мора да е 9, бидејќи ако е помала или еднаква на 8, тогаш производот $** \cdot 11$ нема да биде четирицифрен број. Конечно, добиваме $95 \cdot 11 = 1045$, односно $1045:11=95$.

53. Замени ги буквите со цифри така што ќе добиеш точно равенство:

$$\overline{13abcde} : 5 = \overline{abcde6}.$$

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата следува

$$\overline{abcde6} \cdot 5 = \overline{13abcde}.$$

Множејќи $\overline{abcde6} \cdot 5$ последователно ќе ги откриваме цифрите a, b, c, d, e . Имаме

$$5 \cdot 6 = 30, \text{ па затоа } e = 0.$$

$$5 \cdot 0 + 3 = 3, \text{ па затоа } d = 3.$$

$$5 \cdot 3 + 0 = 15, \text{ па затоа } c = 5.$$

$$5 \cdot 5 + 1 = 26, \text{ па затоа } b = 6.$$

$$5 \cdot 6 + 2 = 32, \text{ па затоа } a = 2.$$

Конечно, $5 \cdot 2 + 3 = 13$ и $1326530 : 5 = 265306$.

Втор начин. Од условот на задачата последователно добиваме

$$\overline{abcde6} \cdot 5 = \overline{13abcde}$$

$$(10 \cdot \overline{abcde} + 6) \cdot 5 = 1300000 + \overline{abcde}$$

$$50 \cdot \overline{abcde} + 30 = 1300000 + \overline{abcde}$$

$$49 \cdot \overline{abcde} = 1299970$$

$$\overline{abcde} = 26530.$$

Конечно,

$$1326530 : 5 = 265306.$$

54. Дешифрирај го множењето

$$\begin{array}{r} *28.** \\ \hline 36*0 \\ + **12 \\ \hline ***** \end{array}$$

Решение. Од $36*0 \cdot * = 36*0$ добиваме дека едноцифрениот множител е еднаков на 5, од $*28 \cdot * = **12$ следува дека едноцифрениот множител е еднаков на 4. Според тоа, двоцифрениот множител во производот е еднаков на 45.

Понатаму, од $*28 \cdot 5 = 36*0$ следува дека на местото на ѕвездичката во трифигрениот множител е цифрата 7, што значи дека трицифрениот множител е еднаков на 728. Конечно,

$$\begin{array}{r}
 728 \cdot 45 \\
 \hline
 3640 \\
 + 2912 \\
 \hline
 32760
 \end{array}$$

55. Во ребусот прикажан на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Определи ги сите решенија на ребусот?

$$\begin{array}{r}
 \times \text{ДУГА} \\
 6 \\
 \hline
 \text{КРУГ}
 \end{array}$$

Решение. Јасно $Д = 1$. Имаме:

$$6 \cdot 0 = 0, 6 \cdot 2 = 12, 6 \cdot 4 = 24, 6 \cdot 6 = 36, 6 \cdot 8 = 48.$$

Бидејќи цифрата на единиците на производот $6A$ не е еднаква на A , а цифрата 1 е веќе зафатена заклучуваме дека цифрата A мора да биде непарна, т.е. таа може да биде еднаква на 3, 5, 7 или 9.

Лесно се гледа дека случаите $A = 3$, $A = 7$ и $A = 9$ доведуваат до противречност.

За $A = 5$ се добива решението $1305 \cdot 6 = 7830$ и тоа е единственото решение на дадениот ребус.

56. Во долните равенства на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$A \cdot B = E, \quad B \cdot E = \overline{A\Gamma}, \quad \overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{ДБ}.$$

Определи го збирот $B + Д + E$.

Решение. Од равенството $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{ДБ}$ следува дека $\Gamma = 0$.

Од $A \cdot B = E$ следува дека $A, B \neq 1$, па затоа $E = A \cdot B \geq 6$. Понатаму, од второто равенство следува дека $B \cdot E = \overline{A0}$, па како $E \geq 6$ добиваме дека $B = 5$ и $E = 6$ или $B = 5$ и $E = 8$.

Ако $B = 5$ и $E = 6$, тогаш $A = 3$, $B = 2$, $Д = 8$, од каде следува дека $B + Д + E = 19$.

Ако $B = 5$ и $E = 8$, тогаш $A = 4$, $B = 2$, $Д = 9$, од каде следува дека $B + Д + E = 22$.

57. Во ребусот

$$T \cdot O \cdot R \cdot I \cdot N \cdot O = M \cdot A \cdot S \cdot T \cdot R \cdot I \cdot T$$

на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри, при што ниту една буква не соодветствува ниту на цифрата 0, ниту на цифрата 2. Определи го збирот $R + I + N + O$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи R и I се во двата производи, можеме да скратиме, а исто така можеме да скратиме и со едно T . Според то, важи $O \cdot N \cdot O = M \cdot A \cdot S \cdot T$. Ниту една цифра во последното равенство не може да биде 5, бидејќи тогаш едната страна ќе е делива со 5, а другата нема да биде делива со 5. Исто важи и за цифрата 7. Бидејќи во почетното равенство имаме осум цифри, а во последното шест цифри, заклучуваме дека R и I се 5 и 7 во некој редослед. Останатите цифри се 1, 3, 4, 6, 8 и 9. Ќе ги разгледаме можностите за цифрата O .

- 1) Ако $O=1$, тогаш $O \cdot N \cdot O = N \leq 9 < 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = M \cdot A \cdot S \cdot T$, па затоа $O \neq 1$.
- 2) Ако $O=3$, тогаш $O \cdot N \cdot O = 9N \leq 81 < 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = M \cdot A \cdot S \cdot T$, па затоа $O \neq 3$.
- 3) Ако $O=4$, тогаш $O \cdot N \cdot O = 16N = M \cdot A \cdot S \cdot T$. Притоа, лесно се гледа дека за $N < 9$ важи $O \cdot N \cdot O = 16N < M \cdot A \cdot S \cdot T$, а за $N=9$ добиваме $O \cdot N \cdot O = 16 \cdot 9 = 144 = 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8 = M \cdot A \cdot S \cdot T$.
- 4) Ако $O=6$, тогаш $O \cdot N \cdot O = 36N = M \cdot A \cdot S \cdot T$. Притоа, лесно се гледа дека за $N \geq 8$ важи $O \cdot N \cdot O = 36N > M \cdot A \cdot S \cdot T$, а за $N < 8$ важи $O \cdot N \cdot O = 36N < M \cdot A \cdot S \cdot T$, па затоа $O \neq 6$.
- 5) Ако $O=8$, тогаш $O \cdot N \cdot O = 64N = M \cdot A \cdot S \cdot T$. Притоа, лесно се гледа дека за $N \geq 4$ важи $O \cdot N \cdot O = 64N > M \cdot A \cdot S \cdot T$, а за $N < 4$ важи $O \cdot N \cdot O = 36N < M \cdot A \cdot S \cdot T$, па затоа $O \neq 8$.
- 6) Ако $O=9$, тогаш $O \cdot N \cdot O = 81N = M \cdot A \cdot S \cdot T$. Притоа, лесно се гледа дека за $N \geq 3$ важи $O \cdot N \cdot O = 81N > M \cdot A \cdot S \cdot T$, а за $N=1$ важи $O \cdot N \cdot O = 81N < M \cdot A \cdot S \cdot T$, па затоа $O \neq 9$.

Конечно, R и I се 5 и 7 во некој редослед, $O=4$ и $N=9$, па затоа $R + I + N + O = 4 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Втор начин. Како и при првиот начин заклучуваме дека R и I се 5 и 7 во некој редослед.

Останатите цифри се 1, 3, 4, 6, 8 и 9, при што важи

$$O \cdot N \cdot O = M \cdot A \cdot S \cdot T \text{ и } 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

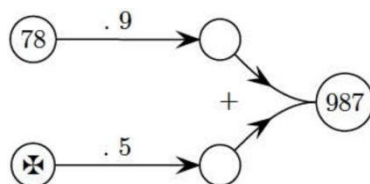
Ако $O=1$, тогаш $O \cdot N \cdot O = N \leq 9 < 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = M \cdot A \cdot S \cdot T$, па затоа $O \neq 1$. Ако во претставувањето на бројот O како производ на броевите 2 и 3 има една тројка, тогаш на едната страна во $O \cdot N \cdot O = M \cdot A \cdot S \cdot T$ има две или четири тројки, а на другата страна има три или една тројка, што не е можно. Ако во претставувањето на бројот O како производ на броевите 2 и 3 има две тројки, тогаш на едната страна во $O \cdot N \cdot O = M \cdot A \cdot S \cdot T$ има најмалку четири тројки, а на другата страна има најмногу две тројки, што повторно не е можно. Значи, во записот на бројот O нема тројки. Затоа $O=4$ или $O=8$. Ако $O=4$, тогаш како и претходно заклучуваме дека $N=9$, па затоа

$$R + I + N + O = 4 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Ако $O=8$, тогаш во записот на левата страна на равенството $O \cdot N \cdot O = M \cdot A \cdot S \cdot T$ има најмалку шест двојки, а на десната страна најмногу три двојки, што повторно не е можно.

1.4. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

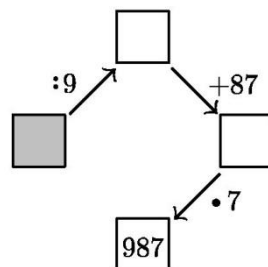
58. Ако пресметувањата во дијаграмот на цртежот десно се точни, кој број треба да стои наместо знакот $\boxtimes$?



Решение. Во горното празно кругче треба да стои бројот $78 \cdot 9 = 702$. Во долното празно кругче треба да стои бројот $987 - 702 = 285$ и на местото на знакот $\boxtimes$ треба да стои бројот $285 : 5 = 57$.

59. Определи го бројот кој во дијаграмот на цртежот десно треба да е запишан во сивото квадратче.

Решение. Одејќи одназад-нанапред, т.е. во насока обратна од насоката на движе-



њето на стрелките на часовникот последователно добиваме дека во квадратчињата треба да се запишани броевите:

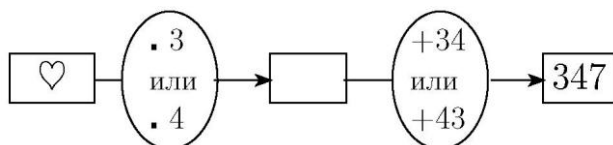
$$987 : 7 = 141,$$

$$141 - 87 = 54,$$

$$54 \cdot 9 = 486.$$

Според тоа, во сивото квадратче треба да се запише бројот 486.

60. Во дијаграмот прикажан на долниот цртеж сите броеви се природни. Кој број е означен со ♡?



Решение. Бројот $347 - 34 = 313$ не е делив ниту со 3, ниту со 4. Затоа во празниот правоаголник треба да се наоѓа бројот $347 - 43 = 304$. Бидејќи $304 = 3 \cdot 101 + 1$, а $304 = 4 \cdot 76$, заклучуваме дека со знакот ♡ е означен бројот 76.

61. Реши ја равенката:

$$292 + 84 = x - 56 \cdot 4.$$

Решение. Имаме:

$$292 + 84 = x - 56 \cdot 4$$

$$376 = x - 224$$

$$x = 376 + 224 = 600.$$

62. Реши ја равенката:

$$(239 - 138 : x) \cdot 6 + 612 = 2010.$$

Решение. Имаме:

$$(239 - 138 : x) \cdot 6 + 612 = 2010$$

$$(239 - 138 : x) \cdot 6 = 2010 - 612$$

$$(239 - 138 : x) \cdot 6 = 1398$$

$$239 - 138 : x = 1398 : 6$$

$$239 - 138 : x = 233$$

$$138 : x = 239 - 233$$

$$138 : x = 6$$

$$x = 138 : 6$$

$$x = 23.$$

63. Пресметај

$$a = (2011 \cdot 65 + 4022 \cdot 18 - 18099 : 9) : 4$$

и за најдената вредност на a реши ја равенката

$$(a - 5x) : 25 + 25 = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17) \cdot 25.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a &= (2011 \cdot 65 + 4022 \cdot 18 - 18099 : 9) : 4 \\ &= (2011 \cdot 65 + 2011 \cdot 36 - 2011) : 4 \\ &= 2011 \cdot (65 + 36 - 1) : 4 \\ &= 2011 \cdot 100 : 4 = 50275. \end{aligned}$$

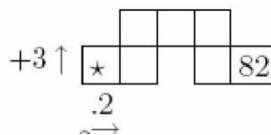
Понатаму,

$$\begin{aligned} (a - 5x) : 25 + 25 &= (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17) \cdot 25 \\ (50275 - 5x) : 25 + 25 &= 81 \cdot 25 \\ (50275 - 5x) : 25 &= 2025 - 25 \\ 50275 - 5x &= 2000 \cdot 25 \\ 5x &= 50275 - 50000 \\ 5x &= 275 \\ x &= 55. \end{aligned}$$

64. Во квадратчето со ѕвездичката на црте-

жот десно е запишан број. Квадратчињата се пополнуваат последователно при што кога се оди нагоре се додава 3, кога се

оди десно се множи со 2 и кога се оди надолу се одзема 3. Кој број треба да стои наместо ѕвездичката?



Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Последователно ги добиваме броевите:

$82 : 2 = 41$, $41 + 3 = 44$, $44 : 2 = 22$, $22 : 2 = 11$, $11 - 3 = 8$ и $8 : 2 = 4$. Според тоа, на местото на ѕвездичката треба да биде запишан бројот 4.

Втор начин. Ако на местото на ѕвездичката е запишан бројот x , тогаш

$$2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot (2x+3) - 3) = 82$$

$$2 \cdot 2 \cdot (2x+3) - 3 = 41$$

$$2 \cdot 2 \cdot (2x+3) = 44$$

$$2x+3=11$$

$$2x=8$$

$$x=4.$$

65. На еднаквите фигури во табелата на цртежот десно соодветствуваат еднакви броеви. Ако ги знаеш збирите на броевите во секој ред и во секоја колона, определи го бројот кој соодветствува на фигурата $\oplus$.

$\diamond$	$\diamond$	$\odot$	← 20
$\odot$	$\odot$	$\odot$	← 54
$\triangle$	$\oplus$	∇	← 39
↑	↑	↑	
41	34	38	

Решение. Од вториот ред следи дека $3\odot=54$, па затоа $\odot=54:3=18$. Тогаш од првиот ред наоѓаме $2\diamond+\odot=20$, од каде следува

$$\diamond=(20-\odot):2=(20-18):2=1.$$

Конечно, од втората колона добиваме

$$\oplus=34-\odot-\diamond=34-18-1=15.$$

66. Во долните равенства наместо броеви се ставени знаци. Определи ги броевите кои соодветствуваат на знаците ♥, ■ и ♣.

$$\heartsuit+\heartsuit+\blacksquare=30$$

$$\blacksquare+\blacksquare+\blacksquare+\clubsuit=29$$

$$\clubsuit+\clubsuit+\clubsuit=33.$$

Решение. Од третото равенство следува дека $\clubsuit=33:3=11$. Понатаму, од второто равенство следува

$$\blacksquare+\blacksquare+\blacksquare+11=29$$

$$\blacksquare+\blacksquare+\blacksquare=18$$

$$\blacksquare=18:3=6$$

Конечно, од првото равенство следува

$$\heartsuit+\heartsuit+6=30$$

$$\heartsuit+\heartsuit=24$$

$$\heartsuit=24:2=12.$$

67. Во долните равенства на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри.

$$D+V+A+E+S+E+T+I+D+V+A=27$$

$$T+R+I+E+S+E+T+I+T+R+I=47.$$

Опреди го збирот

$$D+V+A+E+S+E+T+I+T+R+I.$$

Решение. Двата збира ќе ги разбиеме на помали делови:

$$DVA(D+V+A), ESETI(E+S+E+T+I) \text{ и } TRI(T+R+I).$$

Значи, $DVA+ESETI+DVA=27$ и $TRI+ESETI+TRI=47$. Според тоа, збирот $TRI+TRI$ е поголем од збирот $DVA+DVA$ за $47-27=20$. Според тоа, TRI е поголем од DVA за 10. Затоа

$$DVA+ESETI+TRI=DVA+ESETI+DVA+15=27+10=37.$$

Последното е можно, на пример,

$$1+2+3+0+6+0+5+4+1+2+3=27 \text{ и}$$

$$5+7+4+0+6+0+5+4+5+7+4=57.$$

68. Колку решенија има ребусот $\overline{AN} > \overline{NA}$ во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Јасно, на ниту една од буквите A и N не соодветствува цифрата 0, бидејќи тогаш едниот број ќе биде едноцифрен. Можни се следниве случаи:

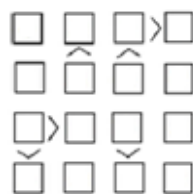
- $A=9$, $N=8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ и тоа се 8 решенија на ребусот,
- $A=8$, $N=7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ и тоа се 7 решенија на ребусот,
- $A=7$, $N=6, 5, 4, 3, 2, 1$ и тоа се 6 решенија на ребусот,
- $A=6$, $N=5, 4, 3, 2, 1$ и тоа се 5 решенија на ребусот,
- $A=5$, $N=4, 3, 2, 1$ и тоа се 4 решенија на ребусот,
- $A=4$, $N=3, 2, 1$ и тоа се 3 решенија на ребусот,
- $A=3$, $N=2, 1$ и тоа се 2 решенија на ребусот,
- $A=2$, $N=1$ и тоа е 1 решение на ребусот.

Конечно, ребусот има

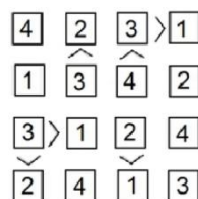
$$8+7+6+5+4+3+2+1=36$$

решенија.

69. Броевите 1, 2, 3, и 4 запиши ги во полињата во шемата прикажана на цртежот десно, во секое поле по еден број, така што во секоја колона и во секоја редица се наоѓаат сите четири броја и се исполнети дадените неравенства.



Решение. Да ги разгледаме четирите полиња во горниот десен агол. Заради неравенствата можни се три случаи и тоа: $3 > 2 > 1$, $4 > 2 > 1$ и $4 > 3 > 1$. Лесно се добива дека при пополнување на останатите полиња случаите $3 > 2 > 1$ и $4 > 2 > 1$ доведуваат до противречност, а додека кога $4 > 3 > 1$ пополнувањето на останатите полиња е еднозначно и се добива шемата прикажана на цртежот десно.



70. Која римска цифра треба да се постави на линијата за да се добие точно неравенство:

$$XXIX < XX_.$$

Решение. На левата страна на неравенството е запишан бројот 29. Значи, за да се добие точно неравенство на десната страна треба да се запише број поголем или еднаков на 30. Последното е можно само ако на местото на цртата се запише цифрата X и притоа добиваме $XXIX < XXX$, т.е. $29 < 30$, што е точно неравенство.

I.5. МАГИЧНИ ФИГУРИ

71. Во табелата на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков. Кој број треба да се запише во полето во кое се наоѓа прашалникот?

		6
?	7	
		4

Решение. Според условот на задачата збирот на броевите запишани во вториот ред и збирот на броевите запишани во третата колона треба да е еднаков. Бидејќи вториот ред и третата колона имаат заедничко поле, збиравите во соодветните други две по-

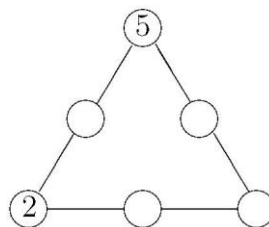
лиња мора да се еднакви. Затоа во полето во кое е запишан прашалникот треба да се запише бројот $6+4-7=3$.

72. Наместо буквите во квадратчињата во табелата запиши броеви, различни од нула, така што производот на секои три броја од секој ред, од секоја колона и на секоја дијагонала е еден ист број.

4	a	b
18	12	c
d	e	f

Решение. Заради првата колона и дијагоналата со која има заедничко поле добиваме $4 \cdot 18 = 12b$, т.е. $b = 6$. Понатаму, од $4 \cdot 12 = 6c$ добиваме $c = 8$. Според тоа, производот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на $18 \cdot 12 \cdot 8 = 1728$. Оттука лесно се добива дека $a = 72$, $d = 24$, $e = 2$, $f = 36$.

73. Во кругчињата на фигурата дадена на цртежот десно треба да се запишат различни едноцифрени броеви така што збирот на трите броја запишани на секоја страна на триаголникот е еднаков на 10. Определи го збирот на сите запишани броеви.



Решение. Во празното кругче на страната што ги содржи броевите 2 и 5 треба да се запише бројот $10 - (2 + 5) = 3$. Збирот на броевите запишани во двете празни кругчиња на страната која го содржи бројот 5 е еднаков на $10 - 5 = 5$, но броевите мора да се различни од 2, 3 и 5. Значи, во овие кругчиња треба да бидат запишани броевите 1 и 4. Ако во аголното кругче е запишан бројот 4, тогаш во последното кругче треба да е запишан бројот $10 - (2 + 4) = 4$, што е спротивно на условот на задачата. Значи во аголното кругче мора да е запишан бројот 1. Според тоа, во последното кругче е запишан бројот $10 - (1 + 2) = 7$. Конечно, збирот на сите запишани броеви е

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22.$$

74. Дали може во полињата на квадратна 5×5 табела да се запишат 5 петки, 5 четворки, 5 тројки, 5 двојки и 5 единици, во секое по-

ле по еден број, така што во секој 2×2 квадрат збирот на запишаните броеви биде еднаков?

б) Дали може во полињата на квадратна 6×6 табела да се запишат 6 шестки, 6 петки, 6 четворки, 6 тројки, 6 двојки и 6 единици, во секое поле по еден број, така што во секој 3×3 квадрат збирот на запишаните броеви биде еднаков?

Решение. а) Пополнувањето на 5×5 табела е можно. На пример,

1	5	1	5	1
5	1	5	1	5
3	3	3	3	3
4	2	4	2	4
2	4	2	4	2

б) Нека претпоставиме дека 6×6 табела може да се пополни на саканиот начин. Да ја поделиме табелата на 4 табели со димензии 3×3 . Тогаш збирот на броевите во секој дел е еднаков и нека тој збир е A . Според тоа, збирот на сите запишани броеви е еднаков на $4A$. Од друга страна, збирот на сите запишани броеви во 6×6 табелата е еднаков на

$$6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 6 = 6 \cdot 21 = 126.$$

Значи, $4A = 126$, т.е. $2A = 63$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека 6×6 табела не може да се пополни на саканиот начин.

75. Во квадратчињата на цртежот десно запиши ги броевите од 1 до 9 така што зборовите на броевите во секој ред и секоја колона бидат различни.

Решение. Постојат повеќе решенија на задачата. Едно од можните решенија дадено на долниот цртеж.

1	2	3
4	6	5
7	8	9

II ДЕЛИВОСТ

1. На еден натпревар во танцови парови секој натпреварувач има право да гласа или ЗА или ПРОТИВ натпреварувачката програма. По гласањето на сите натпреварувачи претседателот на жирито избројал 23 гласа повеќе ЗА, од гласовите против. Дали претседателот на жирито згрешил?

Решение. Нека x е бројот на натпреварувачите кои гласале ПРОТИВ. Тогаш бројот на натпреварувачите кои гласале ЗА е еднаков на $x+23$. Според тоа, имаме вкупно $2x+23$ гласови, што не е можно бидејќи $2x+23$ е непарен број, а вкупниот број натпреварувачи е парен број. Значи, претседателот на жирито направил грешка.

2. Горјан замислил четири броја a, b, c, d и ги пресметал шесте збира $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d$. Тој ги добил броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 во некој редослед. Определи ги броевите кои ги замислил Горјан.

Решение. Нека $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Тогаш најмалиот од шесте збира е $c+d=1$ и следниот најмал е $b+d=2$. Аналогно најголемиот збир е $a+b=6$ и следниот најголем е $a+c=5$. За $a+d$ имаме две можности $a+d=3$ и $a+d=4$, при што важи $b+c=4$ и $b+c=4$, соодветно. И во двата случаја важи

$$a+b+c+d=7 \text{ и}$$

$$(a+b)+(a+c)+(a+d)=2a+(a+b+c+d)=2a+7.$$

Ако $a+d=4$, тогаш $(a+b)+(a+c)+(a+d)=6+5+4=15$, па затоа $2a+7=15$, т.е. $a=4$, $b=6-a=3$, $c=5-a=1$, $d=6-a=0$. Ако $a+d=3$, тогаш $(a+b)+(a+c)+(a+d)=6+5+3=14$, па затоа $2a+7=14$. Десната страна на последното равенство е парен број, а левата страна е непарен број, што значи дека тоа не е исполнето за ниту еден цел број, па затоа случајот $a+d=3$ не е возможен. Според тоа, единствено решение на задачата е $a=4$, $b=3$, $c=1$, $d=0$.

3. На колку најмногу нули може да завршува производот

$$\overline{MA} \cdot \overline{TE} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{TI} \cdot \overline{KA},$$

каде на различни букви им соодветствуваат различни цифри, а на исти букви им соодветствуваат исти цифри?

Решение. Броевите во производот се двоцифрени. Еден двоцифрен број може да е делив со 5·5, но не и со 5·5·5. Броеви кои се деливи со 5·5 се 25, 50 и 75. Бидејќи во производот има два вида броеви кои завршуваат на цифрата А петката повеќе пати ќе се јави како множител ако $A=5$. Тоа значи дека не можеме да го искористиме бројот 50, бидејќи ниту еден од множителите на почнува на А. Двоцифрен број чија цифра на единиците не е 5 може да е делив со 5 само ако цифрата на единиците е 0. Затоа некоја од буквите Е или I треба да е 0. Така во производот бројот 5 може да се наоѓа најмногу седум пати, па затоа дадениот производ може да завршува најмногу на седум нули. На пример, таков е производот $25 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 32 \cdot 75$.

4. Ако трицифрениот број $\overline{abc}$ е делив со 37, тогаш и бројот $n = \overline{bca} + \overline{cab}$ е делив со 37. Докажи!

Решение. Имаме,

$$\begin{aligned}\overline{abc} + n &= \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} \\ &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b \\ &= 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 3 \cdot 37(a + b + c).\end{aligned}$$

Збирот $\overline{abc} + n$ е делив со 37 и едниот собиор е делив со 37, па затоа и другиот собиор е делив со 37. Тоа значи, дека бројот $n = \overline{bca} + \overline{cab}$ е делив со 37.

5. Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 2 и со 5 и чиј збир на цифри е еднаков на 9.

Решение. За да биде бројот делив со 2 и 5, тој треба да е делив со 10. Тоа значи дека крајната цифра (цифрата на единици) на трицифрениот број треба да биде 0. Останатите две цифри треба да имаат збир 9. Бараните броеви се: 180, 810, 270, 720, 360, 630, 540 и 450.

6. Која цифра треба да стои на местото на буквата a така што збирот на броевите $\overline{2017a}$ и 211 да биде делив со 2, а која цифра треба да стои на местото на буквата a за овој збир да биде делив со 5.

Решение. За да збирот на двата броја е делив со 2, тој треба да е парен, односно да завршува на една од цифрите 2, 4, 6, 8 и 0. Но, бидејќи 211 е непарен број, заклучуваме дека бројот $\overline{2017a}$ треба да е непарен, т.е. на местото на a треба да стои непарен број. Според тоа, на местото на буквата a треба да биде запишана една од цифрите 1, 3, 5, 7 или 9.

Еден број е делив со 5, ако цифртата на единиците му е 0 или 5. Значи, за да збирот на двата броја е делив со 5, на местото на буквата a треба да е 4 или 9.

7. Определи го бројот на двоцифрените броеви со својство: збирот на тој број и десет пати поголемиот број е трицифрен број.

Решение. Нека a е број со саканото својство. Тогаш $a + 10a = 11a$ е трицифрен број, кој е делив со 11.

Најмалиот трицифрен број кој е делив со 11 е бројот 110. Оттука имаме $11a = 110$, т.е. $a = 10$ е најмалиот двоцифрен број со саканото својство.

Најголемиот трицифрен број кој е делив со 11 е бројот 990. Оттука имаме $11a = 990$, т.е. $a = 90$ е најголемиот двоцифрен број со саканото својство.

Конечно, бараните двоцифрени броеви се 10, 11, 12, ..., 90 и нив ги има $90 - 10 + 1 = 81$.

8. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои даваат еднаков остаток при делење со 4 и со 5.

Решение. Остатоците при делење со 4 се 0, 1, 2 и 3 и тие треба да бидат еднакви на остатоците при делење со 5. Нека a е број кој при делење со 4 и со 5 дава ист остаток. Ако од a го одземеме остатокот, тогаш добиениот број треба да е делив со 4 и со 5. Такви двоцифрени броеви се 20, 40, 60 и 80. За секој од овие броеви имаме по 4 броја кои при делење со 4 и со 5 даваат ист

остаток, што значи дека бараниот број броеви е еднаков на $4 \cdot 4 = 16$.

9. Определи го бројот на четирифрените броеви такви што двоцифрените броеви формирани од кои било две последователни соседни цифри се деливи со 23.

Решение. Нека $\overline{abcd}$ е број со саканото својство. Тогаш $\overline{ab} = 23k$, $\overline{bc} = 23n$ и $\overline{cd} = 23m$. Значи,

$$\overline{abcd} = 23(100k + m) = 2300k + 23m.$$

Оттука следува дека $k \leq 4$. За $k = 4$ добиваме $\overline{abcd} = \overline{92cd}$. Сега $c = 3$, но не постои цифра d таква што $\overline{3d}$ е содржател на бројот 23. За $k = 2$ добиваме $\overline{abcd} = \overline{69cd}$. Сега $c = 2$ и $d = 3$, т.е. едно решение е бројот 6923. За $k = 2$ добиваме $\overline{abcd} = \overline{46cd}$. Сега $c = 9$ и $d = 2$, што значи дека друго решение е бројот 4692. За $k = 1$ имаме $\overline{abcd} = \overline{23cd}$ и не постои цифра c такава што $\overline{3c}$ е содржател на бројот 23. Конечно, постојат два броја кои ги задоволуваат условите на задачата.

10. На часот по математика секое момче од V^a одделение решило по 8 задачи, а секое девојче решило по 13 задачи. Учителката пребројала дека вкупно се решени 180 задачи. Колку ученици има во одделението?

Решение. Ако во одделението има x момчиња и y девојчиња, тогаш од условот на задачата следува дека $8x + 13y = 180$. Според тоа, $y \leq 12$ и y е парен број (Зошто?).

За $y = 2$ добиваме $8x = 154$ и во овој случај немаме решение на задачата.

За $y = 4$ добиваме $8x = 128$, што значи $x = 16$, т.е. во одделението има $4 + 16 = 20$ ученици.

За $y = 6$ добиваме $8x = 102$ и во овој случај немаме решение на задачата.

За $y = 8$ добиваме $8x = 76$ и во овој случај задачата нема решение.

За $y=10$ добиваме $8x=50$ и во овој случај немаме решение на задачата.

За $y=12$ добиваме $8x=24$, што значи $x=3$, т.е. во одделението има $12+3=15$ ученици.

Конечно, во одделението има или 20 или 15 ученици.

11. Од секој трицифрен број запишан со различни цифри можеме да формираме шест различни двоцифрени броеви (на пример од бројот 134 ги добиваме броевите 13, 14, 31, 41, 34 и 43). Трицифрениот број запишан со различни ненулти цифри го нарекуваме *прекрасен* ако сите шест двоцифрени добиени од него се прости. Определи ги сите *прекрасни* трицифрени броеви.

Решение. *Прв начин.* Двоцифрени прости броеви се: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97. Но, прекрасен број не може да содржи парна цифра, бидејќи тогаш некои од двоцифрените броеви ќе бидат парни, т.е. сложени броеви. Слично, прекрасен број не може да ја содржи и цифрата 5, бидејќи тогаш два од двоцифрените броеви ќе завршуваат на 5, што значи дека ќе бидат сложени броеви. Затоа, од низата прости двоцифрени броеви помали од 100 ќе ги испуштиме броевите кои што во своите записи имаат парна цифра или цифрата 5, како и бројот 11 кој е запишан со две исти цифри. Така ги добиваме броевите:

13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 и 97.

Ако 9 е цифра на прекрасен број, тогаш таа треба да учествува во записот на четири двоцифрени прости броеви, што не е случај, па затоа од претходната низа отпаѓаат броевите 19, 79 и 97. Останаа шест прости броеви 13, 17, 31, 37, 71 и 73, во чии записи учествуваат цифрите 1, 3 и 7. Според тоа, прекрасните броеви се запишани со цифрите 1, 3 и 7, што значи дека тоа се броевите: 137, 173, 317, 371, 713 и 731.

Втор начин. Прекрасен број не може во својот запис да содржи парна цифра, бидејќи тогаш некои од двоцифрените броеви ќе бидат парни, т.е. сложени броеви. Слично, прекрасен број не може да ја содржи и цифрата 5, бидејќи тогаш два од двоцифре-

ните броеви ќе завршуваат на цифрата 5, што значи дека ќе бидат сложени броеви. Значи, во записот на прекрасен број може учествуваат три од цифрите 1, 3, 7 и 9. Во записот на прекрасен број учествуваат три различни цифри, па затоа мора да учествува барем една од цифрите 1 и 3. Но, тоа значи дека цифрата 9 не учествува во записот на прекрасен број, бидејќи во спротивно се ќе го добиеме бројот $91 = 7 \cdot 13$ или бројот $39 = 3 \cdot 13$, кои се сложени броеви. Според тоа, цифрите на сите прекрасни броеви се 1, 3 и 7. Навистина, тогаш се добиваат двоцифрените прости броеви 13, 17, 31, 37, 71 и 73. Конечно сите прекрасни броеви се: 137, 173, 317, 371, 713 и 731.

12. Определи барем еден десетцифрен број запишан со различни цифри, кој е делив со 7?

Решение. Последователно броеви деливи со 7 се:

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, ...

Ако ги испуштиме броевите во чиј запис има две еднакви цифри, ја добиваме низата броеви

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 84, 91, 98, 105, 126, 140, 147 ...

Сега доволно е од оваа низа да избереме пет броја во чии записи се јавуваат само по еднаш цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а потоа истите да ги запишеме во произволен редослед. Еден избор на броевите е: 7, 28, 49, 63 и 105, при што, на пример, броевите 728496310, 2874963105, 4928763105 итн. се деливи со 7.

13. Горазд купил повеќе од три исти пакети чоколади. Од едниот пакет извадил седум чоколади и вкупно му останале 65 чоколади. Колку чоколади останале во отворениот пакет?

Решение. Горазд имал $65 + 7 = 72$ чоколади. Бидејќи тој купил повеќе од три пакети чоколади, $72 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$ и од еден пакет извадил 7 чоколади можни се следниве случаи:

- 1) Горазд купил 4 пакети со по 18 чоколади, па во отворениот пакет му останале $18 - 7 = 11$ чоколади.
- 2) Горазд купил 6 пакети со по 12 чоколади, па во отворениот пакет му останале $12 - 7 = 5$ чоколади.

3) Горазд купил 8 пакети со по 9 чоколади, па во отворениот пакет му останале $9-7=2$ чоколади.

4) Горазд купил 9 пакети со по 8 чоколади, па во отворениот пакет му останало $9-8=1$ чоколадо.

14. Секој ден во текот на седум последователни дена метеоролозите ја мереле дебелината на снежната покривка на врвот Пелистер и добиле седум броја во сантиметри. Вториот ден дебелината на покривката била 20 cm поголема во споредба со првиот ден, третиот ден таа била 3 пати поголема од претходниот ден, следниот ден се намалила за 58 cm , а петтиот ден заврнал обилен снег и дебелината на снежната покривка се зголемила 5 пати. Следниот ден времето се стоплило и половината од снежната покривка се стопила. При мерењето во седмиот ден дебелината на снежната покривка била за 65 cm помала, отколку во шестиот ден. Метеоролозите констатирале дека на крајот на седмиот ден дебелината на снежната покривка измерена во сантиметри е број којшто покажува дата од месец февруари. Определи го збирот на цифрите на бројот којшто во сантиметри е дебелината на снежната покривка при првото мерење?

Решение. Нека првиот ден дебелината на снежната покривка е x . Тогаш дебелината на снежната покривка вториот ден е $x+20$, третиот ден е $3(x+20)$, четвртиот ден е $3(x+20)-58$, петтиот ден е $5(3(x+20)-58)$, шестиот ден е $5(3(x+20)-58):2$ и седмиот ден е $5(3(x+20)-58):2-65$. Од условот на задачата последователно добиваме:

$$5(3(x+20)-58):2-65=n$$

$$5(3(x+20)-58):2=n+65$$

$$5(3(x+20)-58)=2n+130$$

$$15x+300-290=2n+130$$

$$15x-120=2n$$

$$15(x-8)=2n.$$

Значи, $2n$ треба да е делив со 15 и бидејќи n е датум во месец февруари добиваме дека единствена можност е $n=15$, па од

последната равенка добиваме $15(x-8)=30$. Од последната равенка следува $x-8=2$, т.е. $x=10$. Значи, збирот на цифрите на дебелината на снежната покривка при првото мерење е еднаков на $1+0=1$.

15. За својот нов велосипед Горјан набавил клуч кој се отвара со помош на шифра. Шифрата е четирицифрен број запишан со различни цифри. Секој природен број може да се подели без остаток со цифрата на стотките на шифрата, цифрата на илјадитите на шифрата е парна, а збирот на цифрата на илјадитите и цифрата на десетките е еднаков на 7. Цифрата на единиците на шифрата е помала од цифрата на десетките, а производот на двете цифри завршува на 5. Определи ја шифрата на клучот на Горјан.

Решение. Шифрата на клучот на Горјан да ја означиме со

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Секој природен број без остаток е делив само со бројот 1, па затоа $b=1$. Бидејќи цифрата на илјадитите a е парна, а шифрата е четирицифрен број таа може да биде 2, 4, 6 или 8. Но, $a+c=7$ и како $8>7$ заклучуваме дека a не може да биде 8. Понатаму, бидејќи $6+c=7$ следува $c=1$, што не е можно бидејќи цифрите се различни, а $b=1$. Значи, $a=2$ или $a=4$. За $a=2$ добиваме $c=5$, а за $a=4$ добиваме $c=3$.

Ако $a=2$, $b=1$ и $c=5$, тогаш од $d < a$ и условот дека шифрата е запишана со различни цифри следува $d=4$ или $d=3$ или $d=0$. За $d=4$ или $d=0$ добиваме $cd=20$ или $cd=0$, соодветно и во случајов cd не завршува на 5, што значи дека во овие случаи задачата нема решение. За $d=3$ имаме $cd=15$ и во овој случај бројот 2153 ги задоволува условите на задачата.

Ако $a=4$, $b=1$ и $c=3$, тогаш од $d < a$ и условот дека шифрата е запишана со различни цифри следува $d=2$ или $d=0$ и притоа $cd=6$ или $cd=0$, што значи дека во овие случаи задачата нема решение.

III ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

III.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Кој е најмалиот можен број кој може да се добие со бришење на три цифри на бројот 381438.

Решение. Треба да останат три цифри, па најмал број ќе биде ако прво остане најмалиот можен број, а тоа е бројот 1. Значи ги бришеме цифрите 3 и 8 и останува бројот 1438. Сега треба да избришеме една цифра така што ќе остане најмал можен број. Јасно, тоа е цифрата 4 и останува бројот 138 кој е бараниот број.

2. Рампо забележал дека водомерот во станот покажува $795 m^3$, број во кој сите цифри се непарни и различни. Колку кубни метри вода ќе потроши Рампо до моментот кога за првпат бројчаникот водомерот повторно ќе покажува број запишан со три различни непарни цифри?

Решение. Од 795 до 912 нема непарен број запишан со три различни непарни цифри. Навистина, броеви помали од 800 запишани со непарни цифри се 797 и 799 и тие имаа по две исти цифри, Броевите од 800 до 910 содржат по една парна цифра, бројот 911 соржи две исти цифри, а бројот 912 содржи парна цифра. Значи, најмалиот број кој е запишан со три различни непарни цифри е бројот 913. Според тоа, за првпат бројчаникот на водомерот повторно ќе покаже број запишан со три различни цифри кога Рампо ќе потроши $913 - 795 = 118 m^3$ вода.

3. Со помош на цифрите 1, 2, 3 и 4 се запишани два броја, при што секоја од цифрите е искористена точно еднаш. Определи го збирот на двата броја, ако нивниот производ е најмал можен број.

Решение. Ако броевите се двоцифрени, тогаш производот е најмал кога цифрите на десетките се 1 и 2. Можни се два случаја 14 и 23 и тогаш производот е 322 или 13 и 24 и тогаш производот е 312. Помал производ на два броја составени од цифрите 1, 2, 3 и 4 се добива кога броевите се 1 и 234. Во овој случај производот е еднаков на 234, а збирот е еднаков на 235.

4. Градската управа решила да ги нумерира куќите на главната улица на градот. За таа цел порачала таблички со цифри. Се покажало дека табличките со цифрата 1 се за 12 повеќе од табличките со цифрата 0. Определи го најмалиот број куќи кои може да ги има главната улица.

Решение. За нумерирање на куќите со броевите од 1 до 19 цифрата 1 ќе биде употребена 12 пати, а цифрата 0 ќе биде употребена само еднаш. Понатаму, за нумерирање на куќите од 20 до 109 цифрите 0 и 1 се користат еднаков број пати, но за нумерирање на куќата 110 цифрата 1 се користи двапати, а цифрата нула се користи еднаш. Бидејќи, $12 - 1 + 2 - 1 = 12$ заклучуваме дека 110 е првиот број таков што за запишување на броевите од 1 до 110 ќе употребиме 12 цифри 1 повеќе од употребените цифри 0. Според тоа, главната улица може да има најмалку 110 куќи.

5. На едната страна на улицата куќите се нумерирани со непарните броеви од 1 до 113, а на другата страна со парните броеви од 2 до 128. Колку цифри се употребени за нумерирање на куќите на оваа улица?

Решение. За нумерирање на куќите се употребени броевите од 1 до 114 и броевите 116, 118, 120, 122, 124, 126 и 128. Значи, имаме 9 едноцифрени, 90 двоцифрени и $15 + 7 = 22$ трицифрени броеви. Според тоа, за нумерирање на куќите на целата улица се употребени $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 22 \cdot 3 = 9 + 180 + 66 = 255$ цифри.

6. На една улица куќите се нумерирани со броевите 1, 3, 5, ... од едната страна и со броевите 2, 4, 6, ... од другата страна на улицата. Вкупно се искористени 38 парни и 116 непарни броеви, кои се напишани со боја.

а) Колку цифри се употребени за нумерирање на куќите?

б) Сопствениците на куќите сакаат цифрите да ги заменат со метални, бидејќи натписите со боја не се убави. Во блиската продавница во доволно количество ги има само цифрите 2 и 6. Колку сопственици на куќите ќе успеат надписите да ги заменат со метални цифри?

Решение. а) Има 9 едноцифрени броеви, од кои 4 се парни. Значи, имаме 34 парни броеви кои имаат 68 цифри. Непарни двоцифрени броеви се 45 и тие имаат 90 цифри. Непарни трицифрени броеви се $116 - 5 - 45 = 66$ и тие имаат $3 \cdot 66 = 198$ цифри. Значи, за нумерирањето се употребени

$$9 + 68 + 90 + 198 = 365 \text{ цифри.}$$

б) Со цифрата 6 можеме да ја запишеме и цифрата 9 (завртена цифра 6). Бидејќи последниот парен број во улицата е 76, а последниот непарен број е 231 можеме да ги запишеме броевите: 2, 6, 9, 22, 26, 29, 62, 66, 68, 99 и 229. Значи, 11 куќи ќе имаат нови броеви.

7. Замислив еден број и од него одзедов 18. Добиената разлика ја помножив со 8, па добиениот производ го собрав со 1. Добиениот збир го поделив со 3 и добив 67. Кој број го замислив?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Последователно добиваме:

$$67 \cdot 3 = 201,$$

$$201 - 1 = 200,$$

$$200 : 8 = 25,$$

$$25 + 18 = 43.$$

Според тоа, замислениот број е 43.

8. Цифрата на десетките на еден двоцифрен број е за 2 поголема од цифрата на единиците. Производот на цифрите на овој број е еднаков на 35. Кој е двоцифрениот број?

Решение. Бидејќи бројот 35 како производ на два едноцифрени броеви може да се запише на единствен начин, т.е. $35 = 5 \cdot 7$ заклучуваме дека неговите цифри се 5 и 7. Понатаму, цифрата на десетките на бараниот број е за 2 поголема од цифрата на единиците и $5 + 2 = 7$, заклучуваме дека цифрата на десетките е 7, а цифрата на единиците е 5. Конечно, бараниот број е 75.

9. Илија тргнал од Прилеп за Крушево, а Марко тргнал од Крушево за Прилеп. Тие се разминале кај еден знак на кој од едната страна пишувало колку километри има до Прилеп, а на другата

страна пишувало колку километри има до Крушево. Илија забележал дека двата броја се различни, запишани со исти цифри но во различен редослед и збирот на двата броја е најмалиот број кој може да се претстави на опишаниот начин. Определи ја должината на патот од Прилеп до Крушево?

Решение. Бидејќи збирот е најмалиот број кој може да се претстави на опишаниот начин заклучуваме дека броевите се двоцифрени, т.е. не се три или повеќецифрени броеви. Значи за да ја определите должината на патот од Прилеп до Крушево, треба да собереме два двоцифрени броја со различни цифри на десетките. За да збирот биде најмал треба цифрите на десетките да се најмалите можни. Јасно, меѓу нив не е цифрата 0, па останува тоа да се цифрите 1 и 2. Според тоа, должината на патот од Прилеп до Крушево е еднаква на $12 + 21 = 33 \text{ km}$.

10. Петар ги собрал сите двоцифрени броеви во чијшто запис цифрата на единиците е за 1 помала од цифрата на десетките, а Ефтим ги собрал сите двоцифрени броеви во чијшто запис цифрата на единиците е за 1 поголема од цифрета на десетките. За колку збирот на Петар е помал од збирот на Ефтим?

Решение. Петар ги собрал броевите 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 и 89, а Ефтим ги собрал броевите 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 и 98. Секој од осумте броја на Петар е за 9 помал од соодветните последни осум броја на Ефтим, па затоа збирот на Петар е за $8 \cdot 9 + 10 = 82$ помал од збирот на Ефтим.

11. Секое утро на таблата во градот Бедрок се запишува бројот 25. Ако дојде Фред, тој запишаниот број го зголемува за 5. Ако дојде Барни, тој запишаниот број го намалува за 5. Ако дојде Вилма, таа запишаниот број го множи со 5. Ако дојде Бети, таа запишаниот број го дели со 5. Ако сите четворица во некој редослед дојдат до таблата, каков може да биде крајниот резултат?

Решение. Ако двајцата мажи дојдат еден по друг, резултатот ќе биде 25. Ако двете жени дојдат една по друга резултатот ќе биде 25. Според тоа, резултатот ќе биде различен од 25 во следниве случаи:

$$\begin{aligned}
&((25+5) \cdot 5 - 5) : 5 = 29, & ((25-5) \cdot 5 + 5) : 5 = 21, \\
&((25+5) : 5 - 5) \cdot 5 = 5, & ((25-5) : 5 + 5) \cdot 5 = 45, \\
&(25 \cdot 5 + 5) : 5 - 5 = 21, & (25 \cdot 5 - 5) : 5 + 5 = 29, \\
&(25 : 5 + 5) \cdot 5 - 5 = 45, & (25 : 5 - 5) \cdot 5 + 5 = 5.
\end{aligned}$$

Значи, крајниот резултат може да биде некој од броевите: 5, 21, 25, 29 и 45.

12. Определи го најмалиот четирицифрен број таков што збирот на неговите цифри е помал од производот на неговите цифри.

Решение. Јасно, во записот на бројот не може да е цифрата 0, а не може да има ниту повеќе од две единици. Навистина, ако цифрите се 1, 1, 1, a , тогаш

$$1+1+1+a = a+3 > a = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a.$$

Во случај на две единици, бидејќи се бара најмалиот број и останатите две цифри треба да се најмалите можни, што значи дека прво треба да провериме кога една од двете цифри е 2. Имаме

$$\begin{aligned}
1+1+2+2 &> 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2, & 1+1+2+3 &> 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3, \\
1+1+2+4 &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4, & 1+1+2+5 &< 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5.
\end{aligned}$$

Според тоа, бараниот број е 1125.

13. На двете страни на три картончиња Горјан запишал по еден

1289

3467

5555

број и картончињата ги поставил како на цртежот десно. Збирите на двата броја запишани на секое од трите картончиња се еднакви. Најголемиот запишан број е еднаков на 6116. Определи го вториот број запишан на сивото картонче.

Решение. Бидејќи трите збира се еднакви меѓу себе, заклучуваме дека најголемиот број се наоѓа на втората страна на картончето на кое е запишан најмалиот број. Значи, бројот 6116 е запишан на картончето на кое е запишан бројот 1289. Според тоа, збирот на броевите запишани на едно картонче е

$$1289 + 6116 = 7405,$$

а вториот број запишан на сивото картонче е

$$7405 - 5555 = 1850.$$

14. Магдалена замислила еден број. Замислениот број го намалила 44 пати и го добила количникот на броевите 2626 и 26. Кој број го замислила Магдалена?

Решение. Имаме $2626:26=101$ и овој број е 44 пати помал од бројот кој замислила Магдалена. Според тоа, Магдалена го замислила бројот $44 \cdot 101 = 4444$.

15. Збирот на два броја е еднаков на 960, а нивниот количник е еднаков на 5. Кои се тие броеви?

Решение. Нека помалиот од двата броја го означиме со x . Бидејќи количникот на броевите е 5, заклучуваме дека поголемиот број е $5x$. Сега од условот на задачата следува дека $x+5x=960$. Според тоа, $6x=960$, т.е. $x=960:6=160$, па затоа $5x=5 \cdot 160=800$. Конечно, бараните броеви се 160 и 800.

16. Збирот на намаленикот, намалителот и нивната разлика е еднаков на 76. Определи ги намаленикот и намалителот ако разликата е за 6 поголема од намалителот.

Решение. Бидејќи намаленикот е еднаков на збирот на намалителот и разликата, следува дека бројот 76 е двапати поголем од намаленикот. Значи. Намаленикот е еднаков на $76:2=38$. Според условот на задачата разликата е еднаква на збирот на намалителот и бројот 6, па ако на разликата и додадеме уште еден намалител, тогаш добиениот број ќе биде еднаков на збирот на двојниот намалител и бројот 6. Но, знаеме дека збирот на намалителот и разликата е еднаков на 38, па затоа двојниот намалител е еднаков на $38-6=32$. Според тоа, намалителот е еднаков на $32:2=16$.

17. Имаме три карти со различни цифри запишани на нив. Со овие карти се составени најголемиот можен број, а потоа вториот по големина број. Збирот на двата броја е 1233, Определи го збирот на цифрите запишани на картите.

Решение. Од условот на задачата следува

$$100x+10y+z+100x+10z+y=1233$$

$$200x+11(y+z)=1233.$$

Јасно, $x \leq 6$ и $x \geq y \geq z$. Ако $x \leq 5$, тогаш $y + z \leq 10$, па затоа

$$200x + 11(y + z) \leq 200 \cdot 5 + 11 \cdot 10 = 1110 < 1233.$$

Значи, $x = 6$ и тогаш $11(y + z) = 33$, т.е. $y + z = 3$. Конечно, бараниот збир е еднаков на $x + y + z = 6 + 3 = 9$.

18. Збирот на двоцифрен и трицифрен број е четирицифрен број. Секој од ови три броеви исто се чита од лево на десно и обратно. Кои се тие броеви?

Решение. Збирот на двоцифрен и трицифрен број е четирицифрен број само ако цифрата на стотките на трицифрениот број е 9, а цифрата на илјадите на четирицифрениот број е 1. Бидејќи броевите исто се читаат одлево-надесно и обратно, добиваме дека е точно равенството $\overline{aa} + \overline{9b9} = \overline{1cc1}$. Понатаму, збирот $9 + a$ треба да има цифра на единици 1, а тоа е можно само ако $a = 2$. Според тоа, точно е равенството $22 + \overline{9b9} = \overline{1cc1}$, т.е. равенството $931 + 10b = 1001 + 110c$, од каде добиваме $b = 7 + 11c$. Но, b и c се едноцифрени природни броеви, па од последното равенство следува $c = 0, b = 7$.

Конечно, бараните броеви се 22, 979 и 1001.

19. Определи го најмалиот број $n = \overline{abcd...xyz}$ таков што

$$a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d + \dots + x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = 2008.$$

Решение. За да биде бројот n најмал, треба да има најмал можен број цифри. Најмал можен број цифри ќе има ако во збирот на левата страна на равенството има најмногу собирци од видот $9 \cdot 9 = 81$. Бидејќи, $2018 = 81 \cdot 24 + 64 = 81 \cdot 24 + 8 \cdot 8$ бараниот број е запишан со 24 деветки и 1 осумка, т.е. тоа е бројот

$$n = 899999999999999999999999.$$

20. Ако на некој двоцифрен број го собереме со бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед ќе го добиеме бројот 154.

а) Определи го збирот на цифрите на почетниот број.

б) Определи ги броевите со наведеното својство.

Решение. Нека $\overline{ab} = 10a + b$ е почетниот број. Бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е $\overline{ba} = 10b + a$. Тогаш

$$10a + b + (10b + a) = 154, \text{ т.е. } 11(a + b) = 154.$$

Според тоа, $a + b = 154 : 11 = 14$, т.е. збирот на цифрите на почетниот број е 14. Бидејќи a и b се цифри и $a + b = 14$ имаме $14 = 5 + 9 = 5 + 8 = 7 + 7$, што значи дека броевите со наведеното својство се: 59, 68, 77, 86 и 95.

21. Марија замислила некој број. Потоа тој број го собрала со 21 и добиениот број го помножила со 35. Кога последниот добиен број го собрала со 2834 го добила бројот 28769. Кој број го замислила Марија?

Решение. Задачата ќе ја решиме со враќање наназад. Последниот број кој го добила Марија е 28769 и истиот го добила со собирање на непознат број со бројот 2834, па затоа непознатиот број е $28769 - 2834 = 25935$.

Понатаму, бројот 25935 го добила со множење на непознат број со бројот 35, па затоа непознатиот број е $25935 : 35 = 741$.

Конечно, за да го добиеме замислениот број треба од бројот 741 да одземеме 21. Значи, бројот што го замислила Марија е $741 - 21 = 720$.

22. Збирот на три броја е 840. Збирот на првиот и вториот од тие броеви е 463, а збирот на вториот и третиот е 642. Определи ги овие три броеви.

Решение. *Прв начин.* Нека бараните броеви се a, b и c . Тогаш условот на задачата можеме да го претставиме како на цртежот десно. Од првата и втората колона заклучуваме дека

$$c = 840 - 463 = 377.$$

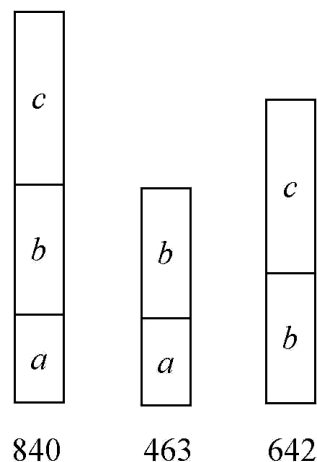
Сега од третата колона следува дека

$$b = 642 - c = 642 - 377 = 265.$$

Конечно, од втората колона добиваме

$$a = 463 - b = 463 - 265 = 198.$$

Значи, бараните броеви се 198, 265 и 377.



Втор начин. Нека бараните броеви се a, b и c . Од условот на задачата следува дека

$$a + b + c = 840$$

$$a + b = 463$$

$$b + c = 642.$$

Според тоа, $463 + c = 840$, па затоа $c = 840 - 463 = 377$. Аналогно добиваме $a + 642 = 840$, т.е. $a = 840 - 642 = 198$ и на крајот $198 + b = 463$, т.е. $b = 463 - 198 = 265$.

23. Збирот на два броја е еднаков на 43210. Ако од едниот број се изостави првата цифра од лево, се добива вториот број. Кои се тие броеви?

Решение. Бидејќи збирот на најголемиот четирицифрен број и бројот кој од него се добива со бришење на првата цифра од лево е еднаков на $9999 + 999 = 10998 < 43210$, добиваме дека поголемиот број мора да биде петцифрен, а помалиот четирицифрен. Со a да ја означиме цифрата на десетилјадите на бараниот петцифрен број, а со b да го означиме бараниот четирицифрен број. Тогаш бараниот петцифрен број е $\overline{a0000} + b$, па од условот на задачата следува

$$(\overline{a0000} + b) + b = 43210, \text{ т.е. } \overline{a0000} + 2b = 43210.$$

Јасно, цифрата a може да биде 3 или 4.

Ако $a = 3$, тогаш $30000 + 2b = 43210$, т.е. $2b = 13210$, па затоа $b = 6605$. Значи, бараните броеви се 36605 и 6605.

Ако $a = 4$, тогаш $40000 + 2b = 43210$, т.е. $2b = 3210$, па затоа $b = 1605$. Значи, бараните броеви се 41605 и 1605.

24. Иван и Ѓорѓи живеат на иста улица од страната на непарните броеви. Иван живее во куќата број 111, која е 130-та по ред од крајот на улицата во насока од поголемите кон помалите броеви. За нумерирање на куќите меѓу куќите на Иван и Ѓорѓи (без куќите на Иван и Ѓорѓи), се искористени 288 цифри. Колку куќи има по куќата на Ѓорѓи во насока од помалите кон поголемите броеви?

Решение. Од 1 до 111 има 5 едноцифрени непарни броја, 45 непарни двоцифрени броја и 6 непарни трицифрени броја. Значи, за нумерирање на куќите од почетокот на улицата до куќата на Иван се искористени $5 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 6 = 5 + 90 + 18 = 113$ цифри. Бидејќи за нумерирање на куќите меѓу куќите на Иван и Ѓорѓи се искористени 288 цифри, заклучуваме дека куќата на Ѓорѓи е по куќата на Иван. Понатаму, од $288 : 3 = 96$ следува дека меѓу куќите на Иван и Ѓорѓи има 96 куќи. Сега од $130 - 96 - 1 = 33$ следува дека куќата на Ѓорѓи е 33-та по ред од крајот на улицата во насока од поголемите кон помалите броеви. Значи, по куќата на Ѓорѓи во насока од помалите кон поголемите броеви има 32 куќи.

25. Иван последователно ги запишал броевите од 1 до 101:

1, 2, 3, 4, ... 99, 100, 101.

Марија избришала 81 последовател број од запишаните броеви, при што најголемиот избришан број е девет пати поголем од најмалиот избришан број. Определи го збирот на броевите кои останале неизбришани.

Решение. Ако најмалиот избришан број е x , тогаш најголемиот избришан број е $x + 80$. Значи, $x + 80 = 9x$, од каде наоѓаме $x = 10$. Според тоа, Марија ги избришала броевите од 10 до 90, па затоа збирот на броевите кои останале е:

$$\begin{aligned} (1 + 2 + \dots + 9) + (91 + 92 + \dots + 99 + 100 + 101) &= \\ &= (99 + 1) + (98 + 2) + \dots + (91 + 9) + 100 + 101 \\ &= 9 \cdot 100 + 201 = 1101. \end{aligned}$$

26. Определи го најголемиот можен збир на цифрите на 880 различни трицифрени броеви.

Решение. Имаме $999 - 99 = 900$ трицифрени броеви. Бидејќи секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се среќава 90 пати како цифра на единиците збирот на цифрите на единиците е еднаков на

$$90 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 90 \cdot 45 = 4050.$$

Слично, збирот на цифрите на десетките е еднаков на

$$90 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 90 \cdot 45 = 4050$$

и збирот на цифрите на стотките е еднаков на

$$100 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 100 \cdot 45 = 4500.$$

Значи, збирот на цифрите на сите трицифрени броеви е еднаков на $2 \cdot 4050 + 4500 = 12600$. За да добиеме 880 со најголем збир на цифри, треба да отстраниме 20 броеви со најмал збир на цифри. Тоа се броевите: 100, 101, 110, 200, 102, 111, 120, 201, 210, 300, 103, 112, 121, 130, 202, 211, 220, 301, 310, 400. Збирот на нивните цифри е еднаков на $1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 65$. Значи, бараниот збир е еднаков на $12600 - 65 = 12535$.

27. Дадени се четири картончиња на секое од кои е запишана по една цифра. Со помош на картончињата се составува најголемиот можен четирицифрен број, а потоа и најмалиот можен четирицифрен број. Определи го збирот на цифрите запишани на картончињата ако збирот на двата четирицифрени броја е 6446.

Решение. Нека цифрите кои се запишани на картончињата се a, b, c и d , при што важи $a \geq b \geq c \geq d$. Тогаш најмалиот четирицифрен број запишан со овие цифри е $1000d + 100c + 10b + a$, а најголемиот четирицифрен број запишан со истите цифри е $1000a + 100b + 10c + d$. Од условот на задачата следува

$$1001(a + d) + 110(b + c) = 6446.$$

Во последната равенка производот $110(b + c)$ завршува на 0, па бидејќи цифрата на единиците на десната страна е 6, добиваме дека цифрата на единиците на производот $1001(a + d)$ мора да е 6 и да важи $1001(a + d) \leq 6446$. Последното е можно само ако $a + d = 6$, па затоа

$$1001 \cdot 6 + 110(b + c) = 6446$$

$$110(b + c) = 440$$

$$b + c = 4.$$

Конечно,

$$a + b + c + d = (a + d) + (b + c) = 6 + 4 = 10,$$

т.е. збирот на цифрите запишани на картончињата е еднаков на 10.

28. Еден генерал имал помалку од 160 војници, но бил горд дека можел да ги построи војниците во форма на квадрат, т.е. бројот на војниците во секој ред да е еднаков на бројот на редовите во квадратот и секој ред да е со најмалку четири војника. На пробата за воената парада генералот констатирал дека еден од војниците е болен, но успеал да ги построи војниците во неколку еднакви квадрати. Пред самата парада уште еден војник се разболел, но генералот пак успеал да го построи војниците во неколку еднакви квадрати. Колку војници има генералот?

Решение. Имаме помалку од 160 војници, па тие можат да постројат во квадрат ако се:

$$4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.$$

Има еден болен војник, па броевите помали за 1 се:

$$3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143.$$

Во оваа низа само броевите

$$8 = 2 \cdot 4, 24 = 6 \cdot 4, 48 = 12 \cdot 4 = 3 \cdot 16, 63 = 7 \cdot 9,$$

$$80 = 20 \cdot 4 = 5 \cdot 16, 99 = 11 \cdot 9, 120 = 30 \cdot 4$$

имаат претставување како збир од неколку еднакви точни квадрата. Уште еден војник е болен, па ги намалуваме броевите за 1 и ги добиваме броевите: 7, 23, 47, 62, 79, 98, 119.

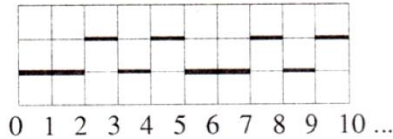
Само еден од овие броеви може да се запише како збир на неколку еднакви точни квадрати: $98 = 2 \cdot 49$. Конечно, генералот имал 100 војници.

29. Палчо и Цанко биле гладни и откако изеле една торта се заситиле. Се покажало дека гладниот Цанко тежи помалку од заситениот Палчо, а ситиот Цанко тежи двапати повеќе од гладниот Палчо. Кој тежи повеќе тортата или гладниот Палчо?

Решение. Тежините на гладниот и ситиот Цанко да ги означиме со c и C , на гладниот и ситиот Палчо со p и P , а на тортата со T . Јасно, $c + p + T = C + D$. Според условот на задачата имаме $C = 2p$, па затоа последното равенство го добива видот $c + p + T = 2p + P$, од каде добиваме $T - p = P - c$. Според условот на задачата важи $P > c$, т.е. $P - c > 0$, па затоа $T - p > 0$. Според тоа, тортата тежи повеќе од гладниот Палчо.

III.2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

30. На дијаграмот прикажан на долниот цртеж горните отсечки ги прикажуваат временските периоди изразени во секунди кога крајбрежен светилник свети, а долните отсечки периодите кога светилникот не свети.

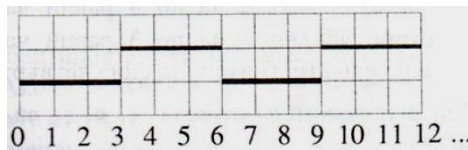


Горјан го набљудувал светилникот неколку минути и забележал дека моделот на работа на светилникот се повторува. Колку секунди светилникот светел во текот на една минута?

Направи модел на работа на светилникот во кој тој во текот на една минута ќе свети 30 секунди.

Решение. Очигледно периодите кога светилникот свети и кога не свети се повторуваат на секои 5 секунди. Притоа светилникот во текот на 5 секунди свети 2 секунди и не свети 3 секунди. Понатаму, бидејќи $60:5=12$, заклучуваме дека во текот на 1 минута светилникот ќе свети $12 \cdot 2 = 24$ секунди.

Постојат повеќе модели на работа на светилникот во кои во текот на 1 минута тој ќе свети 30 секунди. Еден таков модел е прикажан на долниот цртеж.



31. Дадени се два песочни часовника кои мерат време 20 и 25 минути. Како со нивна помош ќе измериме време од 30 минути?

Решение. Истовремено ќе ги завртиме двата часовника така што песокот ќе течи 20 минути од полните во празните делови на часовниците. Потоа ќе го завртиме часовникот кој мери 20 минути се до истекување на песокот во часовникот кој мери 25 минути. На крајот повторно ќе го завртиме часовникот кој мери 20 минути. Со тоа сме измериле $20+5+5=30$ минути.

32. Пред 45 минути Магдалена рекла дека после 6 часа и 23 минути ќе биде пладне. Колку часот е сега?

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$12\text{ h} - 6\text{ h } 23\text{ min} = 11\text{ h } 60\text{ min} - 6\text{ h } 23\text{ min} = 5\text{ h } 37\text{ min}.$$

Во 5 h 37 min Магдалена рекла дека после 6 h 23 min ќе биде пладне. Бидејќи

$$5\text{ h } 37\text{ min} + 45\text{ min} = 5\text{ h } 82\text{ min} = 6\text{ h } 22\text{ min}$$

заклучуваме дека сега е 6 h 22 min .

Втор начин. Имаме

$$12\text{ h} + 45\text{ min} = 12\text{ h } 45\text{ min}$$

$$12\text{ h } 45\text{ min} - 6\text{ h } 23\text{ min} = 6\text{ h } 22\text{ min}.$$

Според тоа, сега е 6 h 22 min .

33. Марија ги поканила Ангела и Светлана на гости. Ангела пристигнала кај Марија во 13:15, а Светлана пристигнала во 13:32. Ангела соопштила дека од дома до куќата на Марија патувала 58 минути. Светлана од дома тргнала 43 минути покасно од Марија. Колку време патувала Светлана?

Решение. Ангела кај Марија стигнала во 13:15 и бидејќи таа патувала 58 минути заклучуваме дека таа од дома тргнала во 12:17. Значи, Светлана од дома тргнала 43 минути по Марија, што значи дека таа од дома тргнала во 13:00. Но, Светлана пристигнала кај Марија во 13:32, што значи дека таа патувала 32 минути.

34. Мартин ги пишува домашните работи по македонски јазик, англиски јазик и математика точно 3 часа и 18 минути. За пишување на домашната работа по математика му биле потребни 1 час и 29 минути, а за пишување на домашната работа по англиски јазик му биле потребни 54 минути. Определи го времето за кое Мартин ја напишал домашната работа по македонски јазик.

Решение. За да ги напише домашните работи по математика и англиски јазик Мартин потришил вкупно

$$1\text{ h } 29\text{ min} + 54\text{ min} = 1\text{ h } 83\text{ min} = 2\text{ h } 23\text{ min} .$$

Трите домашни ги пишуваат 3 часа и 18 минути, што значи дека домашната работа по македонски јазик ја напишал за

$$3\text{ h }18\text{ min} - 2\text{ h }23\text{ min} = 198\text{ min} - 143\text{ min} = 55\text{ min}.$$

35. Пет деца купиле билети за ракометен натпревар кој почнувал во 16:00 часот. Првото дете влегло во салата во 15:54, а секое следно дете влегувало 5 минути покасно од претходното. Колку деца не го гледале целиот натпревар? Колку минути од натпреварот не гледало детето кое последно влегло во салата?

Решение. Првото дете влегло во салата во 15:54, второто влегло во салата во 15:59, третото влегло во салата во 16:04, четвртото влегло во салата во 16:09 и петтото влегло во салата во 16:14. Според тоа, после 16:00 во салата влегле 3 деца, што значи дека 3 деца не го гледале целиот натпревар. Детето кое последно влегло во салата не гледало $16:00 - 16:14 = 14$ минути.

36. Марија од 21:54 часот на 31.12.2018 година до 11:30 на 01.01.2019 година, во еднакви временски интервали испратила 17 новогодишна порака. Определи го времето меѓу две последователни пораки кои ги испратила Марија?

Решение. Од 21:54 до полноќ има 2 часа и 6 минути, односно 126 минути, а од полноќ до 11:30 има 690 минути. Според тоа, од испраќањето на првата до испраќањето на последната порака поминале 816 минути. Испратени се 17 пораки, што значи дека имаме 16 еднакви интервали. Според тоа, времето меѓу секои две последователни пораки е еднакво на $816:16 = 51$ минута.

37. Евгенија оди од дома до училиште за 30 минути, а нејзиниот брат Бојан за 40 минути. Денес Бојан на училиште тргнал 5 минути пред Евгенија. На кое растојание од дома до училиште Евгенија ќе го стигне Бојан?

Решение. Ако двајцата тргнат заедно, тогаш Евгенија на училиште стигнува 10 минути пред Бојан. Значи, половината пат од дома до училиште Евгенија го поминува 5 минути побрзо. Бидејќи Бојан тргнал 5 минути пред Евгенија, таа него ќе го стигне на половината пат од нивниот дом до училиштето.

38. Ако Горјан говори непрекинато на својот мобилен телефон, тогаш батеријата на телефонот ќе се испразни за 6 часа, а ако тој воопшто не говори на мобилниот телефон, тогаш батеријата ќе се испразни за 48 часа. Горјан патувал со воз, при што половината од времето говорел на својот мобилен телефон, а половината од времето разговарал со патниците во возот. На почетокот на патувањето батеријата на неговиот мобилен телефон била полна, а на крајот од патувањето таа била празна. Колку време патувал со возот Горјан?

Решение. Ако Горјан говори 48 часа, тогаш тој ќе потроши $48:6=8$ батерии, а ако не говори 48 часа ќе се потроши 1 батерија. Според тоа, за 96 часа во кои 48 часа Горјан говори и 48 часа не говори на мобилниот телефон, ќе се испразнат 9 батерии. Но, $96\text{ h}=90\text{ h }360\text{ min}$, па затоа за $10\text{ h }40\text{ min}$ ќе се потроши една батерија. Значи, Горјан патувал со возот $10\text{ h }40\text{ min}$.

39. Градскиот часовник во Прилеп отчукува на секој полн час онолку пати колку што е часот. Покрај тоа, на секој полн час и 15 минути отчукува еднаш, на секој полн час и 30 минути двапати и на секој полн час и 45 минути трипати. Колку пати градскиот часовник ќе отчука од 6:20 до 11:40?

Решение. Во полните часови часовникот ќе отчука

$$7+8+9+10+11=45 \text{ пати.}$$

Во полн час и 15 минути ќе отчука 5 пати и тоа во: 7:15, 8:15, 9:15, 10:15 и 11:15. Во полн час и 30 минути ќе отчука вкупно $6\cdot 2=12$ пати и тоа во: 6:30, 7:30, 8:30, 9:30, 10:30 и 11:30. Во полн час и 45 минути ќе отчука $5\cdot 3=15$ пати и тоа во: 6:45, 7:45, 8:45, 9:45 и 10:45.

Конечно, во периодот од 6:20 до 11:40 часовникот ќе отчука $45+5+12+15=77$ пати.

40. Фросина е родена на 25 март, вторник, а Марио е роден на 3 мај истата година. Во кој ден од седмицата е роден Марио?

Решение. Месецот март има 31 ден, месецот април има 30 дена. Значи, од датумот на раѓањето на Фросина, до датумот на раѓањето на Марио има $6+30+3=39$ дена. Од $39=5\cdot 7+4$ заклучу-

ваме дека меѓу двата родендена има 5 седмици и 4 дена. Бидејќи Фросина е родена во вторник, заклучуваме дека Марио е роден во сабота.

41. Горјан прочитал 12 книги една по друга. Првата книга ја прочитал за 2 дена, потоа втората за 3 дена итн. за читање на секоја следна книга тој одделил еден ден повеќе отколку за претходната. Ако Горјан со читањето на книгите започнал во недела, во кој ден од седмицата завршил со читањето на сите книги?

Решение. Горјан книгите ги читал

$$2+3+\dots+13=(2+13)+(3+12)+(4+11)+(5+10)+(6+9)+(7+8) \\ =15\cdot 6=90$$

дена. Бидејќи $90=12\cdot 7+6$ заклучуваме дека тој читал 7 седмици и уште 6 дена. Почнал да чита во недела, што значи дека со читањето завршил во петок.

42. Горјан и Самоил истовремено тргнале од нивната планинска кука до кука на чичко Ѓорѓи. Самоил одел по двапати пократка патека и се движел двапати побрзо од Горјан. Тој кај чичко Ѓорѓи стигнал 30 минути пред Горјан. Определи го времето за кое Горјан стигнал кај чичко Ѓорѓи.

Решение. Самоил оди двапати побрзо по двапати пократка патека, па затоа тој кај чичко Ѓорѓи стигнува четири пати побрзо од Горјан. Според тоа, ако Самоил патува x минути, тогаш Горјан патува $4x$ минути. Затоа $4x-x=30$, што значи $x=10$ минути. Конечно, Горјан до кука на чичко Ѓорѓи стигнува за $4x=40$ минути.

43. Мимоза и Лилјана правеле панделки. Мимоза прави 15 панделки за 1 час и 20 минути, а Лилјана прави 30 панделки за 1 час и 12 минути. За колку време двете заедно ќе направат 87 панделки?

Решение. Мимоза прави 15 панделки за 80 минути и $15=5\cdot 3$, па затоа таа прави 3 панделки за $80:5=16$ минути. Лилјана прави 30 панделки за 1 час и 12 минути, што значи дека таа за 2 часа и 24 минути ќе направи 60 панделки. Бидејќи во 2 часа и 24 минути има 144 минути и $144:16=9$ добиваме дека за 2 часа и

24 минути Мимоза ќе направи $9 \cdot 3 = 27$ панделки. Конечно, бидејќи $60 + 27 = 87$ заклучуваме дека двете заедно 87 панделки ќе направата за 2 часа и 24 минути.

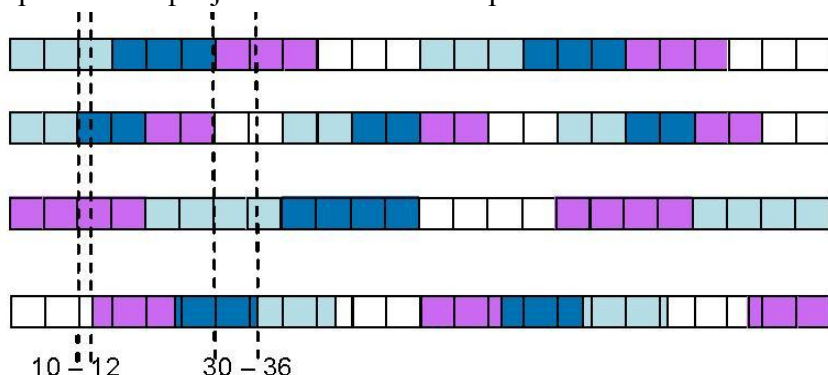
44. Планетата Железна се врти околу својата оска за 5 железни часа, а планетата Камена се врти околу својата оска за 6 камени часа. Свемирски брод лета со постојана брзина и од планетата Железна до планетата Камена стасува за 20 железни часа, а од планетата Камена до планетата Железна стасува за 25 камени часа. Која планета се врти околу оската побрзо?

Решение. Бродот во двата правци поминува еднаков пат. Тој се движи со постојана брзина, па затоа во двата правци патува еднакво време. Значи 25 камени часа се еднакви на 20 железни часа. Планетата Железна се врти околу својата оска за 5 железни часа, што значи дека таа за 20 железни часа таа околу својата оска ќе се заврти $20:5=4$ пати. За тоа време ќе изминат 25 камени часа и бидејќи $25=4 \cdot 6+1$, планетата Камена во првите 24 камени часа околу својата оска ќе се заврти 4 пати и ќе продолжи да се врти уште 1 камен час. Според тоа, околу својата оска побрзо се врти планетата Камена.

45. Марија, Елена, Ана и Мирјана решиле да свират во квартет. Тие имаат виолини (В), флејти (Ф), тапани (Т) и гитари (Г). На почетокот Марија и Елена зеле гитари, Ана зела тапани и Мирјана зела флејта. Потоа започнале да ги менуваат инструментите. Марија на секои 15 минути во редослед: Г-В-Ф-Т-Г- ..., Елена во истиот редослед, но на секои 10 минути, Ана ги менувала во следниот редослед: Ф-Г-В-Т-Ф-... на секои 20 минути и Мирјана во редослед: Т-Ф-В-Г-Т-... на секои 12 минути. Тие свиреле 2 часа. Познато е дека успеале да свират во хармонија само тогаш кога четирите свиреле на различни инструменти. Колку време девојките свиреле во хармонија?

Решение. Времето кога свиреле со определен инструмент е прикажано на следниот дијаграм, при што секое квадратче прикажува 5 минути, првиот ред ја прикажува промената на инструментите на Марија, вториот – на Елена, третиот – на Ана и чет-

вртиот – на Мирјана. Со небесно сина боја е означено свирењето со гитарата, со сина – свирењето со виолината, со виолетова – свирењето со флејтата и со бела – свирењето со тапаните.



Од дијаграмот се гледа дека на иста вертикала сите четири бои ги има во периодот од 10 – 12 минута и во периодот од 30 – 36 минута. Тоа значи дека само во овие два периода девојките свиреле во хармонија, односно само $2 + 6 = 8$ минути.

46. Тројца пријатели Ангел, Борис и Васил посетуваат една и иста читална. Читалната не работи во сабота и недела. Ангел оди во читалната преку еден ден, Борис оди преку два дена, а Васил оди преку пет дена. Тројцата ги бројат деновите според календарот, но ако на некој му се падне во читалната да оди во сабота или во недела, тој читалната ја посетува во понеделник. На 31 јануари, во четврток тројцата пријатели беа во читалната. Најрано на кој датум и во кој ден тројцата одново заедно ќе бидат во читалната?

Решение. Ќе направиме распоред на посетите на секој од тројцата пријатели.

Ангел: 31. I., четврток; 4. II., понеделник; 6. II., среда; 8. II., петок; 11. II., понеделник; 13. II., среда; 15. II., петок; 18. II., понеделник; 20. II., среда; итн. По 31 јануари Ангел ја посетува читалната секој понеделник, среда и петок.

Борис: 31. I., четврток; 4. II., понеделник; 7. II., четврток; 11. II., понеделник; 14. II., четврток; 18. II., понеделник; 21. II., четврток итн. По 31 јануари Борис ја посетува читалната секој понеделник и четврток.

Васил: 31. I., четврток; 6. II., среда; 12. II., вторник; 18. II., понеделник; 25. II., понеделник; 3. III., понеделник итн. Од 18 февруари натаму Васил ја посетува читалњата секој понеделник.

Тројцата пријатели ќе се сретнат во читалњата најрано во понеделник на 18 февруари.

47. Мајката на Ласко е трипати постара од Ласко, а неговиот татко е четири години постар од неговата мајка. Сите тројца заедно имаат 99 години. Колку години има секој од нив?

Решение. Со x да го означиме бројот на годините на Ласко. Тогаш мајката има $3x$ години, а таткото има $3x+4$ години. Затоа

$$x + 3x + 3x + 4 = 99$$

$$7x + 4 = 99$$

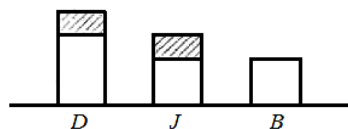
$$7x = 99 - 4$$

$$x = 95 : 7 = 13.$$

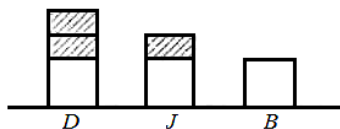
Според тоа, Ласко има 13 години, неговата мајка има $3 \cdot 13 = 39$ години, а неговиот татко има $39 + 4 = 43$ години.

48. Дарко е постар од Јован онолку години колку што Јован е постар од Борис. Колку години има Јован, ако сите тројца заедно имаат 54 години?

Решение. На цртежот десно графички се прикажани условите на задачата. Бидејќи разликата на годините на Дарко и Јован е еднак-



ва на разликата на годините на Јован и Борис, заклучуваме дека Дарко е двојно постар од Борис отколку што е Дарко постар од Јован. Последното графички можеме да го прикажеме како на долниот цртеж лево.



Збирот на годините на сите тројца е еднаков на 54, и овој збир е графички прикажан со помош на 3 штрафирани и 3 бели правоаголници. Според тоа, со

еден штрафиран и еден бел правоаголник се прикажани $54 : 3 = 18$ годни. Конечно, бидејќи годините на Јован се прика-

жани со еден штрафиран и еден бел правоаголник заклучуваме дека Јован има 18 години.

49. Ангела има четири чичковци: Александар, Јован, Матеј и Петар. Тие заедно имаат 158 години и се родени на еднакво временско растојание од по 5 години. Петар е помлад, а Јован е постар од Александар, додека Јован е постар, а Александар е помлад од Матеј. Колку години има секој од чичковците на Ангела?

Решение. Ако годините на секој од чичковците ги означиме со почетната буква на неговото име, тогаш од условот на задачата следува $P < A < J$ и $A < M < J$. Според тоа, подредени по возраст почнувајќи од најмладиот чичковците на Ангела се Петар, Александар, Матеј и Јован.

Нека Петар има x години. Тогаш од условот на задачата следува дека Александар има $x+5$ години, Матеј има $x+10$ години и Јован има $x+15$ години. Затоа $x+x+5+x+10+x+15=158$, т.е. $4x+30=158$, од каде наоѓаме $x=32$ години. Според тоа, Петар има 32 години, Александар има 37 години, Матеј има 42 години и Јован има 47 години.

50. Иван во 2019 година има толку години колку што е збирот на цифрите на годината во која е роден. Во која година е роден Иван?

Решение. Иван не може да е роден во и пред 1990 година, бидејќи $2019-1990=29$, а збирот на цифрите на броевите од видовите $\overline{19}x\overline{y}$ и $\overline{20}x\overline{y}$ е помал или еднаков на 28. Сега, решението на задачата ќе го определиме со помош на табела.

Година	Збир на цифри	Возраст на Иван
1991	20	28
1992	21	27
1993	22	26
1994	23	25
1995	24	24
1996	25	23

Година	Збир на цифри	Возраст на Иван
2005	7	14
2006	8	13
2007	9	12
2008	10	11
2009	11	10
2010	3	9

1997	26	22
1998	27	21
1999	28	20
2000	2	19
2001	3	18
2002	4	17
2003	5	16
2004	6	15

2011	4	8
2012	5	7
2013	6	6
2014	7	5
2015	8	4
2016	9	3
2017	10	2
2018	11	1

Конечно, бидејќи само во 1995 и 2013 година збирот на цифрите е еднаков на годините на Иван заклучуваме дека Иван е роден или во 1995 или во 2013 година.

51. Самоил отишол на гости во семејство кое имало 4 деца. Тој прашал колку години има секое од децата, на што таткото одговорил дека производот на нивните години е еднаков на 72. Самоил направил неколку пресметки но не успеал да ја реши задачата. Тогаш таткото му кажал дека збирот на годините на четирите деца е еднаков на годините на Самоил. За жал Самоил повторно не бил во состојба да ја реши задачата, па прашал дали некое од децата има 2 години. Таткото одговорил дека нема, после што Самоил ги соопштил годините на децата. На која возраст се децата и колку години има Самоил?

Решение. Имаме $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Претставувањата на бројот 72 како производ на четири броја се дадени во табелата:

Прво дете	Второ дете	Трето дете	Четврто дете	Збир
1	1	1	72	75
1	1	2	36	40
1	1	3	24	29
1	1	4	18	24
1	1	6	12	20
1	1	8	9	19
1	2	2	18	23
1	2	3	12	18
1	2	4	9	16
1	2	6	6	15

1	3	3	8	15
1	3	4	6	14
2	2	2	9	15
2	2	3	6	13
2	3	3	4	12

Во горната табела како збир на годините се повторува само бројот 15, па затоа ако Самоил нема 15 години, тогаш тој можел да соопшти колку години има секое од децата, што не го направил. Значи, Самоил има 15 години и бидејќи ниту едно од децата нема 2 години тие се на возраст 1, 3, 3 и 8 години.

III.3. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

52. Марко од Прилеп до Крушево минува преку прво преку селото Славеј, а потоа преку селото Кривогаштани. Патот од Прилеп до Кривогаштани е долг 25 km . Патот од Славеј до Кривогаштани е долг 6 km . Патот од Славеј до Крушево е долг 15 km . Колку километри е долг патот од Прилеп до Крушево?

Решение. Од Прилеп до Славеј има $25 - 6 = 19\text{ km}$. Значи, од Прилеп до Крушево има $19 + 15 = 34\text{ km}$.

53. Кенгурите Скокалко и Скокалка од иста точка тргнале по права линија во спротивни насоки. Должината на скокот на Скокалко е еднаква на $1\text{ m } 50\text{ cm}$, а должината на скокот на Скокалка е еднаква на $1\text{ m } 20\text{ cm}$. За исто време Скокалко прави 3 скока, а Скокалка прави 2 скока. Скокалко направил 15 скока. На колкава оддалеченост се Скокалко и Скокалка еден од друг?

Решение. Скокалко направил $15 : 3 = 5$ групи од 3 скока, што значи дека Скокалка направила $5 \cdot 2 = 10$ скока. Со два скока Скокалко поминува 3 m и бидејќи $15 = 7 \cdot 2 + 1$ заклучуваме дека тој поминал пат долг

$$7 \cdot 3\text{ m} + 1\text{ m } 50\text{ cm} = 22\text{ m } 50\text{ cm}.$$

Во исто време Скокалка поминала пат долг

$$10 \cdot (1\text{ m} + 20\text{ cm}) = 10\text{ m } 200\text{ cm} = 12\text{ m}.$$

Според тоа, Скокалко и Скокалка се наоѓаат на растојание
 $22\text{ m} + 50\text{ cm} + 12\text{ m} = 34\text{ m } 50\text{ cm}$

еден од друг.

54. Растојанието од домот на Тимотеј до училиштето во кое учи е 770 m . Стефан требало да го чека Тимотеј на 80 m од домот на Тимотеј. Но, тој се збунил и го чекал Тимотеј на 80 m од училиштето. На кое растојание Стефан го чекал Тимотеј од договореното место за средба?

Решение. Од договореното место на средбата до училиштето има $770 - 80 = 690\text{ m}$. Стефан го чекал Тимотеј на 80 m пред училиштето. Според тоа, Стефан го чекал Тимотеј на $690 - 80 = 610\text{ m}$ од договореното место за

55. Илина тргнала од дома броејќи чекори. Таа одела по права линија така што прво направила 10 чекори напред, па се вратила 2 чекори назад. После тоа повторно направила 10 чекори напред, па се вратила 1 чекор назад. Оваа постапка, 10 чекори напред и 2 назад, па 10 чекори напред и 1 чекор назад, Илина ја повторувала се додека не се оддалечила од куќата 2019 чекори. Колку чекори направила притоа Илина?

Решение. Со секое повторување на 10 чекори напред и 2 чекори назад, па 10 чекори напред и 1 чекор назад Илина од куќата се оддалечува $10 - 2 + 10 - 1 = 17$ чекори и притоа таа прави $10 + 2 + 10 + 1 = 23$ чекори. Бидејќи $2019 = 118 \cdot 17 + 13$, таа постапката треба да ја повтори 118 пати, при што од куќата ќе се оддалечи $118 \cdot 17 = 2006$ чекори, а за да се оддалечи уште 13 чекори треба да направи 10 чекори напред, 2 чекори назад и 5 чекори напред.

Конечно, за да се оддалечи 2019 чекори од куќата Илина треба да направи $118 \cdot 23 + 10 + 2 + 5 = 2731$ чекор.

56. Кенгурот Скокалко тренира скокање. Тој скока на права патека на следниов начин: прави 100 скокови нанапред, а потоа 100 скокови наназад, па повторно 100 скокови нанапред и 100 скокови наназад и продолжува на ист начин. Секој скок нанапред

има должина 3 m , а секој скок наназад има должина 2 m . Скокалко тргнува од местото А и направил 1574 скокови. На кое растојание од местото А се наоѓа Скокалко?

Решение. Кога скока нанапред 100 скокови и наназад 100 скокови Скокалко се оддалечува од местото А за

$$100 \cdot 3 - 100 \cdot 2 = 300 - 200 = 100\text{ m}.$$

Значи со секои 200 скокови, тоја се оддалечува од местото А за 100 m . Бидејќи $1574 = 200 \cdot 7 + 174$, Скокалко во првите 1400 скокови се оддалечува од местото А за $7 \cdot 100 = 700\text{ m}$, потоа во следните 100 скокови тој се оддалечува уште $100 \cdot 3 = 300\text{ m}$, за да во последните 74 скокови тој се враќа назад, т.е. се приближува кон А за $74 \cdot 2 = 148\text{ m}$.

Конечно, после 1574 скокови Скокалко од местото А се наоѓа на растојание од

$$700 + 300 - 148 = 1000 - 148 = 852\text{ m}.$$

57. Автобус за три дена поминал пат со должина 2592 km . Првиот ден поминал една третина од целиот пат. Вториот ден поминал една четвртина од преостанатиот пат. Колку километри поминал третиот ден автобусот?

Решение. Првиот ден автобусот поминал $2592 : 3 = 864\text{ km}$ и му останале уште $2592 - 864 = 1728\text{ km}$ од патот. Вториот ден автобусот поминал $1728 : 4 = 432\text{ km}$ и му останале уште $1728 - 432 = 1296\text{ km}$ од патот кои ги поминал третиот ден.

58. Матеј е за 5 cm повисок од Лука, кој е 20 cm понизок од Ивана. Определи ја висината на секое од децата, ако сите тројца се високи вкупно 475 cm .

Решение. Нека со l ја означиме висината на Лука. Матеј е за 5 cm повисок од Лука, што значи дека тој е висок $l + 5\text{ cm}$, а Ивана е за 20 cm повисока од Лука, што значи дека таа е висока $l + 20\text{ cm}$. Од условот дека збирот на нивните висини е 475 cm , следува

$$l + 5 + l + l + 20 = 475 \Leftrightarrow 3l + 25 = 475 \Leftrightarrow 3l = 475 - 25$$

$$\Leftrightarrow 3l = 450 \quad \Leftrightarrow l = 150.$$

Значи, висината на Лука е 150 cm , висината на Матеј е $150 + 5 = 155 \text{ cm}$, а на Ивана е $150 + 20 = 170 \text{ cm}$.

59. Методиј го препешачил патот од местот А до местото В минувајќи секоја минута по 80 m . Истиот пат неговиот другар Васил со моторцикл го поминал за 8 минути. Атанас, возејќи велосипед, истиот пат го поминал двапати побавно од Васил, но петпати побрзо од Методиј.

Колкаво е растојанието од местото А до местото В? Колку време му требало на Методиј, а колку на Атанас за да го минат овој пат?

Решение. Атанас е петпати побрз од Методиј, што значи дека тој за една минута минува петпати подолг пат, т.е. минува $80 \cdot 5 = 400 \text{ m}$. Меѓутоа, Атанас е двапати побавен од Васил, па затоа нему му се потребни $8 \cdot 2 = 16$ минути за да го помине патот од А до В.

Атанас патувал 16 минути и во секоја минута минувал 400 m , па вкупно минал $16 \cdot 400 = 6400 \text{ m}$ и тоа е растојанието од А до В.

За да помине 6400 m одејќи со брзина од 80 m во минута на Методиј му требале $6400 : 80 = 80$ минути.

60. Воз со должина 64 m поминува за 8 секунди покрај железничар кој стои. За колку секунди ќе помине возот преку мост долг 72 m , ако се движи со истата брзина?

Решение. Бидејќи железничарот стои пред него треба да помине целиот воз, што значи дека за една секунда возот поминува $64 : 8 = 8 \text{ m}$. Кога го поминува мостот, почетокот на возот треба да помине пат од 72 m и уште 64 m целиот воз да премине преку мостот. За тоа му се потребни

$$(72 + 64) : 8 = 72 : 8 + 64 : 8 = 9 + 8 = 17 \text{ секунди},$$

61. Од два града А и Б кои се наоѓаат на растојание 180 km еден од друг тргнале истовремено еден кон друг два туристички авто-

буси. Автобусот од А се движел 12 km/h побрзо од автобусот од Б.

а) Автобусите се разминале после 3 часа. Определи ги нивните брзини и на кое растојание од А се разминале автобусите?

б) Ако секој од автобусите се движел со брзина поголема за 15 km/h , на кое растојание од А ќе се разминат?

Решение. Нека $x\text{ km/h}$ е брзината на побавниот автобус, а $x+12\text{ km/h}$ е брзината на побрзиот автобус. Од условот на задачата следува $3x+3(x+12)=180$, па затоа $x=24\text{ km/h}$ е брзината на побавниот автобус, а $x+12=36\text{ km/h}$ е брзината на побрзиот автобус. Значи, автобусите ќе се разминат на $3\cdot 36=108\text{ km}$ од градот А.

б) Новите брзини на автобусите се 39 km/h и 51 km/h . Ако со t го означиме времето до средбата, добиваме $39t+51t=180$, па затоа $t=2\text{ h}$. Автобусите ќе се сретнат на $2\cdot 51=102\text{ km}$ од градот А.

62. Од два града А и Б, кои се наоѓаат на растојание 720 km , истовремено тргнале еден кон друг два автомобили. Автомобилите се движеле со постојани брзини при што едниот се движел за 24 km/h побрзо од другиот.

а) Автомобилите се сретнале после 6 часа. Определи ги брзините на автомобилите. На кое растојание од градот А се сретнале автомобилите?

б) Ако секој автомобил се движел побрзо за 30 km/h , на кое растојание од А тие ќе се сретнат?

Решение. а) Нека $x\text{ km/h}$ е брзината на побавниот автомобил, а $x+24\text{ km/h}$ е брзината на побрзиот автомобил. Од условот на задачата имаме $6x+6(x+24)=720$, па затоа $x=48\text{ km/h}$ е брзината на побавниот, а $x+24=72\text{ km/h}$ е брзината на побрзиот автомобил. Ако од А тргнал побавниот автомобил, тогаш средбата ќе биде на $6\cdot 48=288\text{ km}$ од А, а ако од А тргнал побрзиот автомобил, тогаш средбата ќе биде од А на

$$720 - 288 = 6 \cdot 72 = 432 \text{ km}.$$

б) Новите брзини на автомобилите се: 78 km/h и 102 km/h . Ако со t го означиме времето до средбата, добиваме $78t + 102t = 720$ и затоа $t = 4 \text{ h}$.

Ако од А тргнал побавниот автомобил, тогаш средбата ќе биде на $4 \cdot 78 = 312 \text{ km}$ од А, а ако од А тргнал побрзиот автомобил, тогаш средбата ќе биде на $720 - 312 = 408 \text{ km} = 4 \cdot 102$ од А.

63. Растојанието од Прилеп до Битоал е 45 km . Во 8:00 Мирослав и Божидар тргнале од Прилеп до Битола, а Евгенија тргнала од Битола за Прилеп. Мирослав има ролшуи. Брзината на секој од нив на ролшуи е еднаква на 9 km/h , а нивните брзини кога одат пешки се различни, но се константни. Божидар и Евгенија тргнале пешки. Мирослав тргнал со ролшуи и кога ја сретнал Елена ѝ ги дал ролшуите и продолжил пешки кон Битоал. Покасно Евгенија го сретнала Божидар, му ги дала ролшуите и продолжила пешки кон Прилеп. Божидар продолжил со ролшуите за Битола. Тројцата стигнале на во Битола и Прилеп точно во 15:00. Определи ја брзината на Евгенија кога оди пешки?

Решение. Од 8:00 до 15:00 изминале 7 часа. За овие 7 часа со ролшуите се поминати $7 \cdot 9 = 63 \text{ km}$. Ако Евгенија ги користела ролшуите x километри, тогаш Мирослав и Божидар покрај тоа што со рулшуи го поминале растојанието од Прилеп до Битола, со ролшуи ги поминале и оние x километри кои Евгенија ги возела во насока од Битола кон Прилеп. Значи, $45 + 2x = 63$, од каде наоѓаме $x = 9$. Според тоа, Евгенија 1 час возела ролшуи и 6 часа одела пешки. За овие 6 часа таа поминла $45 - 9 = 36 \text{ km}$, што значи дека се движела со брзина $36 : 6 = 6 \text{ km/h}$.

64. Во 7:30 дедо Мирко со гулаб-писмоносец испратил порака до својот внук Матеј. Матеј пораката ја добил во 9:45. Гулабот летал по права линија и со постојана брзина од 2 km за 10 минути. Колкаво е растојанието меѓу дедо Мирко и Матеј?

Решение. Гулабот летал од 7:30 до 9:45, што значи дека тој летал 135 минути. Бидејќи $135 = 13 \cdot 10 + 5$, добиваме дека гулабот прелетал 13 пати по 2 km и за последните 5 минути тој прелетал 1 km . Значи, растојанието кое го прелетал гулабот е еднакво на $13 \cdot 2 + 1 = 27 \text{ km}$ и тоа е растојанието меѓу дедо Мирко и Матеј.

65. На река која тече со брзина 3 km/h се наоѓаат две колиби А и Б. Чамец кој се движи со постојана брзина го минува растојанието од А до Б за 5 часа, а растојанието од Б до А за 4 часа.

а) Определи ја брзината на чамецот кога би се движел во мирна вода и растојанието од А до Б.

б) Дали ќе се промени времето за целото патување, ако заради врнежи брзината на течењето на реката биде 9 km/h ?

Решение. а) Нека x е брзината на чамецот во мирна вода. Кога чамецот се движи од А кон Б тј има брзина $x - 3$, а кога се движи од Б кон А има брзина $x + 3$. Затоа $5(x - 3) = 4(x + 3)$, од каде наоѓаме $x = 27 \text{ km/h}$. Значи, растојанието од А до Б е еднакво на $4 \cdot (27 + 3) = 120 \text{ km}$.

б) Новите брзини на чамецот по течението и спроти течението на реката ќе бидат 36 km/h и 18 km/h , соодветно. Времето на патување од А до Б ќе биде $120 : 18 = 20 : 3 = 6 \text{ h } 40 \text{ min}$, а од Б до А ќе биде $120 : 36 = 10 : 3 = 3 \text{ h } 20 \text{ min}$. Значи, вкупното време на патување ќе биде $6 \text{ h } 40 \text{ min} + 3 \text{ h } 20 \text{ min} = 10 \text{ h}$ и тоа ќе се зголеми за 1 h .

66. Од градот А за градот Б тргнал автомобил. Откако патувал три часа, тој се разминал со друг автомобил кој од градот Б за градот А тргнал во 6:35. По разминувањето вториот автомобил до градот А патувал уште 2 часа, а првиот пристигнал во градот Б во 21:35 истиот ден. Двата автомобиля се движеле со постојани, но различни брзини, а се разминале на 168 km од градот А.

а) Определи ја брзината на секој од автомобилите.

б) Определи во колку часот автомобилите се разминале.

в) Во колку часот тргнал од градот А првиот автомобил? Во колку часот пристигнал во градот А вториот автомобил?

г) Определи го растојанието меѓу градовите А и Б.

Решение. а) Првиот автомобил изминал 168 km за 3 часа, што значи дека се движел со брзина $168:3=56\text{ km/h}$. Вториот автомобил изминал 168 km за 2 часа, што значи дека се движел со брзина $168:2=84\text{ km/h}$.

б) Нека автомобилите се разминале во точката В. Вториот автомобил тргнал од градот Б во 6:35, а првиот пристигнал во градот Б во 21:35 истиот ден. Ако вториот автомобил патувал x часа од Б до точката на разминување В, тогаш бидејќи од поаѓањето на вториот автомобил до пристигнувањето на првиот автомобил има 15 часа, заклучуваме дека од точката на разминување В до градот Б првиот автомобил патувал $15-x$ часа. Затоа важи

$$56 \cdot (15-x) = 84x, \text{ т.е. } 3x = 2 \cdot (15-x)$$

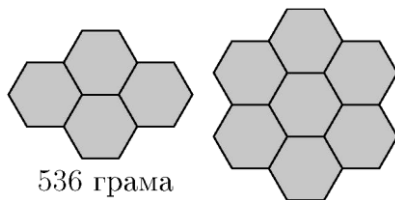
од каде наоѓаме $x=6\text{ h}$. Значи, автомобилите се сретнале во 12:35.

в) Автомобилот кој тргнал од градот А патувал $3+(15-x)=12$ часа, што значи дека тој од градот А тргнал во 9:35. Автомобилот кој тргнал од градот Б патувал $2+x=8$ часа, што значи дека тој во градот А пристигнал во 14:35.

в) Растојанието од градот А до градот Б е еднакво на

$$8 \cdot 84 = 12 \cdot 56 = 672\text{ km}.$$

67. Двете фигури на цртежот десно се составени од еднакви дрвени елементи со шестаголна форма. Помалата фигура тежи 536 грама. Определи ја тежината на поголемата фигура.



Решение. Помалата фигура е составена од 4 елементи, па затоа еден елемент тежи $536:4=134\text{ g}$. Поголемата фигура е составена од 7 елементи, па затоа таа тежи е еднаква на $7 \cdot 134=938\text{ g}$.

68. Во три ладилници има еднакви количества портокали, чија вкупна маса е еднаква на вкупната маса на бананите кои се сместени во два ладилници, во секој од кои има по 36306 kg банани, Колкава е масата на портокалите кои се сметени во еден ладилник?

Решение. Во двата ладилници има вкупно $2 \cdot 36306 = 72612\text{ kg}$ банани. Според тоа, во еден ладилник има $72612 : 3 = 24203\text{ kg}$ портокали.

69. Во некој рецепт пишува дека за 5 чинии супа се потребни 30 dkg моркови. Куварот Наум подготвува супа за 60 луѓе и за секој од нив има по 2 чинии супа. Колку моркови му се потребни на Наум?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи за 5 чинии супа се потребни 30 dkg моркови, за една чинија супа се потребни $30 : 5 = 6\text{ dkg}$ моркови. Бидејќи има 60 луѓе и за секој од нив Наум сака да подготви по 2 чинии супа, тој треба да подготви $60 \cdot 2 = 120$ чинии супа. За 120 чинии супа на Наум му се потребни $120 \cdot 6 = 720\text{ dkg}$ моркови.

Втор начин. Бидејќи има 60 луѓе и за секој од нив Наум сака да подготви по 2 чинии супа, тој треба да подготви $60 \cdot 2 = 120$ чинии супа. Бидејќи за 5 чинии супа се потребни 30 dkg моркови и $120 : 5 = 24$, заклучуваме дека на Наум му се потребни $30 \cdot 24 = 720\text{ dkg}$ моркови.

70. Анастасија има полна тегла со мед висока 20 cm . За 6 дена нивото на медот во теглата се намалил за 8 cm . За колку дена Анастасија ќе го изеде медот, ако јаде со истиот апетит секој ден?

Решение. За 6 дена нивото на медот се намалило за 8 cm , што значи дека за 3 дена тоа се намалило за 4 cm . Во теглата останатиот мед е со височина $20 - 8 = 12\text{ cm}$. Бидејќи $12 = 4 \cdot 3$, Анастасија треба да изеде 3 пати по 4 cm , што значи дека таа медот ќе го изеде за $3 \cdot 3 = 9$ дена.

71. Елеонора и Катерина на пазар од исто место купиле круши. Според вагата крушите на Елеонора тежат 450 g , а крушите на Катерина тежат 400 g . Кога двете заедно ги ставиле крушите на вагата, таа покажала 800 g . Знаете дека при секое мерење вагата покажува точно определен број грамови повеќе. Определи ја вистинската тежина на крушите кои ги купиле Елеонора и Катерина.

Решение. При одделното мерење на крушите на Елеонора и Катерина заедничката тежина на крушите е $450 + 400 = 850\text{ g}$ и во овој случај двапати се додадени грамовите кои вагата ги покажува повеќе. При заедничкото мерење тежината на крушите е 800 g и во овој случај еднаш се додадени грамовите кои вагата ги покажува повеќе. Значи, при секое мерење вагата покажува $850 - 800 = 50$ грамови повеќе. Според тоа, вистинската тежина на крушите на Елеонора е $450 - 50 = 400\text{ g}$, а на крушите на Катерина е $400 - 50 = 350\text{ g}$.

72. Пристигнатите новогодишни пратки биле распределени за обработка меѓу вработените на една пошта. Вкупната тежина на пратките, кои што требало да ги обработи Иван, била 6 пати поголема од вкупната тежина на пратките, кои што требало да ги обработи Петар. Иван му дал две од своите најлесни пратки на Ѓорѓи и вкупната тежина на преостанатите пратки била 4 пати поголема од тежината на пратките на Петар. Колку пратки требало да обработи Иван?

Решение. Нека тежината во килограми на пратките кои требало да ги обработи Петар е x . Тогаш тежината на пратките кои требало да ги обработи Иван е $6x$. Двете пратки, кои што Иван му дал на Ѓорѓи тежат $6x - 4x = 2x$. Јасно секоја од останатите пратки не тежи помалку x , бидејќи во спротивно двете најлесни пратки ќе тежат помалку од $2x$, што не е точно. Според тоа, преостанатите пратки се најмногу 4, бидејќи во спротивно ќе тежат најмалку $5x$. Според тоа, задачата има четири решенија: 6, 5, 4 или 3.

Иван треба да обработи 6 пратки: на пример 6 пратки по 1 kg .

Иван треба да обработи 5 пратки: на пример 4 пратки по 1 kg и 1 пратка со тежина 2 kg .

Иван треба да обработи 4 пратки: на пример 3 пратки по 1 kg и 1 пратка со тежина 3 kg .

Иван треба да обработи 3 пратки: на пример 2 пратки по 1 kg и 1 пратка со тежина 4 kg .

Тежината на пратките кои требало да ги обработи Иван е 6 kg , а тежината на претките кои требало да ги обработи Петар е 1 kg .

73. Дамјан има во паричникот извесна сума монети од 1 евро, 50 евроценти, 20 евроценти и 10 евроценти. Една монета од 1 евро тежи 7 грама, монета од 50 евроценти – 4 грама, од 20 евроценти – 3 грама и од 10 евроценти – 2 грама. Дамјан ги почестил своите пријатели Ристо, Томе и Марко со по чаша топло чоколадо од училишниот автомат. Чаша чоколадо чини 30 евроценти. За секоја од трите чаши Дамкан пуштил во автоматот по една монета и добил кусур во монети од 10 евроценти, 20 евроценти или 50 евроценти. На крајот забележал дека паричникот му тежи 20 грама повеќе и во него има двапати повеќе монети, отколку на почетокот. Колку монети имал Дамјан на почетокот?

Решение. Осумте можности при купување на чаша чоколадо се:

- 1) Пушта 1 евро, кусур 1×50 евроценти и 1×20 евроценти,
 $4 + 3 - 7 = 0$, масата не се менува.
- 2) Пушта 1 евро, кусур 1×50 евроценти и 2×10 евроценти,
 $4 + 2 \cdot 2 - 7 = 1$, масата се зголемува 1 грам.
- 3) Пушта 1 евро, кусур 3×20 евроценти и 1×10 евроценти,
 $3 \cdot 3 + 2 - 7 = 2$, масата се зголемува 2 грама.
- 4) Пушта 1 евро, кусур 2×20 евроценти и 3×10 евроценти,
 $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 7 = 5$, масата се зголемува 5 грама.
- 5) Пушта 1 евро, кусур 1×20 евроценти и 5×10 евроценти,
 $3 + 5 \cdot 2 - 7 = 6$, масата се зголемува 6 грама.
- 6) Пушта 1 евро, кусур 7×10 евроценти, масата се зголемува 7 грама.

7) Пушта 50 евроценти, кусур 1×20 евроценти, $4 - 3 = 1$, масата се намалува 1 грам.

8) Пушта 50 евроценти, кусур 2×10 евроценти, $2 \cdot 2 - 4 = 0$ масата не се менува.

Бидејќи од можните случаи само $7 + 7 + 6 = 29$ заклучуваме дека бројот на монетите се зголемил за $5 + 6 + 6 = 17$, па како тој се удвоил следува дека Дамјан на почетокот имал 17 монети.

74. Еден базен е полн со вода и се празни со цевка низ која за 12 минути истекуваат 1358 литри вода. Колку вода имало во базенот ако празнењето почнало во 8 часот и 50 минути, а завршило во 12 часот и 38 минути.

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата заклучуваме дека базенот се празнел 3 часа и 48 минути, односно $3 \cdot 60 + 48 = 228$ минути. Бидејќи за 12 минути истекуваат 1358 литри вода и $228 : 12 = 19$, добиваме дека во базенот имало $1358 \cdot 19 = 25802$ литри вода.

Втор начин. Од условот на задачата заклучуваме дека базенот се празнел 3 часа и 48 минути. Ако за 12 минути истекуваат 1358 литри вода, тогаш бидејќи $5 \cdot 12 = 60 \text{ min} = 1 \text{ h}$, заклучуваме дека за 1 час ќе истечат $1358 \cdot 5 = 6790$ литри вода. Значи, за 3 часа ќе истечат $3 \cdot 6790 = 20370$ литри вода. Бидејќи $48 = 4 \cdot 12$ заклучуваме дека 48 минути ќе истечат $1358 \cdot 4 = 5432$ литри вода.

Конечно, во базенот имале $20370 + 5432 = 25802$ литри вода.

75. Во два сада има 64 литри млеко. Ако од првиот сад во вториот сад се прелеат 5 литри млеко, тогаш во првиот сад има трипати помалку млеко отколку во вториот сад. Колку литри млеко имало на почетокот во секој од садовите?

Решение. После прелевањето во садовите повторно има 64 литри млеко.

Бидејќи сега во првиот сад има трипати помалку млеко отколку во вториот сад, добиваме дека во првиот сад има $64 : 4 = 16$ литри млеко.

Пред прелевањето во првиот сад имало $16+5=21$ литри млеко, а во вториот сад имало $64-21=43$ литри млеко.

III.4. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

76. Во 2017, Марија секој месец одела по 21 ден на училиште, освен во јуни, јули и август. Од парите кои ги добивала за ужинка секој ден и останувале по 17 денари и овие пари Марија ги штедела. Колку денари заштедила Марија таа година? Колку пари ќе заштедела Марија ако одела на училиште секој ден во текот на целата година?

Решение. Ако дневно штедела по 17 денари, и тоа 21 ден во текот на 9 месеци, Марија вкупно заштедила

$$21 \cdot 17 \cdot 9 = 1071 \text{ денари.}$$

Ако одела секој ден на училиште, ќе заштедела

$$365 \cdot 17 = 6205 \text{ денари.}$$

77. Парче торта чини толку, колку што чинат две топки сладолед, а три топки сладолед чинат колку што чинат две баклави. Што е поскапо, две парчиња торта или три баклави?

Решение. Четири парчиња торта чинат колку што чинат 8 топки сладолед, а шест баклави чинат колку што чинат 9 топки сладолед. Според тоа, 6 баклави се поскаши од 4 парчиња торта, па затоа 3 баклави се поскапи од 2 парчиња торта.

78. Антонио собира монети од 2 денари и од 5 денари. Собрал вкупно 39 монети и сега има 144 денари. Колку монети има од 2 денари, а колку од 5 денари.

Решение. Ако сите монети се од 2 денари, тогаш Антонио ќе има $39 \cdot 2 = 78$ денари. До 144 денари недостасуваат уште $144 - 78 = 66$ денари. Оваа сума треба да се добие со заменување на монети од 2 денари со монети од 5 денари. Бидејќи $5 - 2 = 3$ при замена на една монета сумата се зголемува за 3 денари, па затоа треба да замениме $66 : 3 = 22$ монети.

Конечно, Антонио има 22 монети од 5 денари и $39 - 22 = 17$ монети од 2 денари.

79. Трговецот Павле измешал дваесет килограми шеќер со цена по 65 денари за килограм со триесет килограми шеќер со цена по 70 денари за килограм. Определи ја цената по која Павле треба да го продава шеќерот така што ќе добие иста сума пари.

Решение. Пред да го измеша шеќерот неговата вредност е

$$20 \cdot 65 + 30 \cdot 70 = 1300 + 2100 = 3400 \text{ денари.}$$

Вкупно имаме $20 + 30 = 50 \text{ kg}$ шеќер. Значи, за да добие иста сума пари Павле треба шеќерот да го продава по $3400 : 50 = 68$ денари за килограм.

80. За училишната библиотека се купени 35 исти книги за лектира, 20 исти книги од математика и 13 исти книги од природни науки. Сите книги се платени 26450 денари, при што за книгите за лектира се платени 13300 денари. За книгите од природни науки е платено 8750 денари помалку отколку за книгите за лектира. Колку чини една книга за лектира, од математика и од природни науки?

Решение. Една книга за лектира чини $13300 : 35 = 380$ денари.

Сите книги од природни науки се платени $13300 - 8750 = 4550$ денари, па затоа цената на една книга од природни науки изнесува

$$4550 : 13 = 350 \text{ денари.}$$

За сите книги од математика се платени

$$26450 - 13300 - 4550 = 8600 \text{ денари,}$$

па затоа цената на една книга од математика изнесува

$$8600 : 20 = 430 \text{ денари.}$$

81. Еден елек чини колку две кошули, три кошули чинат колку четири шалчиња. За еден елек, пет кошули и седум шалчиња платив 294 евра. Колку евра чини секој вид облека?

Решение. Бидејќи еден елек чини колку две кошули, заклучуваме дека седум кошули и седум шалчиња чинат 294 евра, што значи дека една кошула и едно шалче чини $294 : 7 = 42$ евра. Три кошули и три шалчиња чинат $42 \cdot 3 = 126$ евра, па затоа седум шалчиња чинат 126 евра. Според тоа, едно шалче чини $126 : 7 =$

18 евра. Оттука следува дека една кошула чини 24 евра, а еден елек чини 48 евра.

82. Тројца браќа добиле на игра на среќа извесна сума пари. Првиот брат добил 126 денари, вториот брат 2 пати повеќе од него, а третиот брат колку првиот и вториот заедно. По колку денари добил секој од нив? Колку денари добиле сите заедно?

Решение. *Прв начин.* Првиот брат добил 126 денари. Вториот брат добил

$$2 \cdot 126 = 252 \text{ денари.}$$

Третиот брат добил

$$126 + 252 = 378 \text{ денари.}$$

Тројцата добиле вкупно

$$126 + 252 + 378 = 756 \text{ денари.}$$

Втор начин. Првиот брат добил еден дел, што изнесува 126 денари. Вториот брат добил два вакви дела, а третиот брат добил колку првиот и вториот заедно, значи три дела, а сите тројца шест дела. Првиот брат добил 126 денари. Вториот брат добил $2 \cdot 126 = 252$ денари. Третиот брат добил $3 \cdot 126 = 378$ денари. Тројцата добиле вкупно $6 \cdot 126 = 756$ денари.

83. Ана и Бојан во ист ден почнале да штедат пари. Првиот ден Ана заштедила 1 денар, а Бојан заштедил 2 денари. Вториот ден Ана заштедила 3 денари, а Бојан заштедил 4 денари итн. се до денот кога Ана заштедила 99 денари, а Бојан заштедил 100 денари. Колку пари Бојан заштедил повеќе од Ана? Колку пари заштедил Бојан, а колку пари заштедила Ана?

Решение. Бојан штедел: првиот ден 2 денари, вториот ден 4 денари, третиот ден 6 денари итн. педесеттиот ден 100 денари. Значи, двајцата штеделе педесет последователни денови и секој ден Бојан штедел по 1 денар повеќе од Ана. Според тоа, Бојан заштедил $50 \cdot 1 = 50$ денари повеќе од Ана.

Бојан заштедил

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100 &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49 + 50) \\ &= 2 \cdot [(1 + 49) + (2 + 48) + \dots + (24 + 26) + 25 + 50] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot (\underbrace{2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 + \dots + 2 \cdot 25}_{25 \text{ пати}} + 25) \\
 &= 2 \cdot 25 \cdot (\underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2 + 1}_{25 \text{ пати}}) \\
 &= 2 \cdot 25 \cdot (50 + 1) = 50 \cdot 51 = 2550
 \end{aligned}$$

денари, а Ана заштедила $2550 - 50 = 2500$ денари.

84. За својот роденден Калина ги поканила учениците од нејзиното одделение. Децата собрале 2340 денари за поклон, при што секое дете дало по 90 денари. Колку момчиња и колку девојчиња учат во одделението на Калина, ако се знае дека таа поканила 4 девојчињата повеќе од момчиња?

Решение. На роденден се поканети $2340 : 90 = 26$ деца. Бидејќи Калина поканила 4 девојчиња повеќе од момчиња добиваме дека таа поканила $(26 - 4) : 2 = 11$ момчиња. Значи, Калина поканила $26 - 11 = 15$ девојчиња. Според тоа, во одделението на Калина учат 11 момчиња и $15 + 1 = 16$ девојчиња.

85. Илија, Марко и Марин заедно купиле фудбалска топка за која платиле 546 денари. Илија дал трипати повеќе пари од Марко, а Марин дал трипати повеќе пари од Илија. Колку пари дал секој од нив за да ја купат топката?

Решение. Најмалку пари дал Марко. Ако Марко дал x денари, тогаш Илија дал $3x$ денари и Марин дал $3 \cdot 3x = 9x$ денари. Затоа важи $x + 3x + 9x = 546$, т.е. $13x = 546$, од каде добиваме $x = 42$. Според тоа, Марко дал 42 денари, Илија дал $3 \cdot 42 = 126$ денари и Марин $3 \cdot 126 = 378$ денари.

86. Зоран купил ракавици, шапка и шал и платил 2000 денари. Ракавиците чинат 900 денари повеќе од шапката, а шапката и ракавиците заедно чинат 1600 денари повеќе од шалот. Колку чини секое парче облека одделно?

Решение. Нека шалот чини x денари. Тогаш ракавиците и шапката заедно чинат $1600 + x$ денари. Бидејќи Зоран вкупно платил 2000 денари добиваме $1600 + x + x = 2000$, од каде наоѓаме $x = 200$ денари. Значи, шапката и ракавиците заедно чинат

$2000 - 200 = 1800$ денари. Ако шапката чини u денари, тогаш ракавиците чинат $900 + u$ денари. Значи, $900 + u + u = 1800$, па затоа $u = 450$ денари. Конечно, шапката чини 450 денари, а ракавиците чинат $900 + 450 = 1800 - 450 = 1350$ денари.

87. Раководителот на една спортска сала набавил фудбалски и одбојкарски топки, за што потрошил 223 евра. Цената на една одбојкарска топка изнесувала 10 евра, а цената на една фудбалска топка изнесувала 17 евра. Колку топки набавил раководителот на салата?

Решение. Со x да го означиме бројот на одбојкарските топки, а со y бројот на фудбалските топки. Од условот на задачата следува $10x + 17y = 223$. Првиот собирок во последната равенка завршува на 0, што значи дека производот $17y$ мора да завршува на 3. Последното е можно само ако $y = 9, 19, 29 \dots$ За $y = 9$ добиваме $10x + 17 \cdot 9 = 223$, од каде наоѓаме $10x = 70$, т.е. $x = 7$. Ако $y = 19, 29 \dots$, тогаш $17y \geq 17 \cdot 19 = 323 > 223$, па затоа во овие случаи задачата нема решение. Конечно, раководителот на салата набавил $9 + 7 = 16$ топки.

88. Еден спортски клуб купил 144 топки. Кошаркарските топки биле двапати повеќе од одбојкарските, а фудбалските – трипати повеќе од кошаркарските. Ако една одбојкарска топка чини 18 евра, една фудбалска – 17 евра и една кошаркарска – 16 евра, колку евра платил клубот за сите топки?

Решение. Ако се купени x одбојкарски топки, тогаш се купени $2x$ кошаркарски и $3 \cdot 2x = 6x$ фудбалски топки. Според тоа, $x + 2x + 6x = 144$, од каде добиваме $x = 16$. Значи, купени се 16 одбојкарски, 32 кошаркарски и 96 фудбалски топки. За набавката на сите топки се платени

$$16 \cdot 18 + 32 \cdot 16 + 96 \cdot 17 = 288 + 512 + 1632 = 2432 \text{ евра.}$$

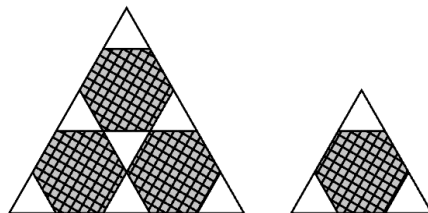
89. Еден молив и две гуми чинат 97 денари, а еден молив и две острилки чинат 151 денар. Колку денари е поскапа острилката од гумата?

Решение. Во двете суми е пресметана цената на еден молив, па затоа нивната разлика покажува колку пари се поскапи две острилки од две гуми. Значи, две острилки чинат $151 - 97 = 54$ денари повеќе од две гуми. Според тоа, една острилка чини $54 : 2 = 27$ денари повеќе од една гума.

90. Две баклави чинат кулку три тулумби, а баклава и тулумба чинат 75 денари. Колку чинат три баклави и две тулумби?

Решение. Бидејќи баклава и тулумба чинат 75 денари, добиваме дека две баклави и две тулумби чинат $2 \cdot 75 = 150$ денари. Но, две баклави чинат колку три тулумби, па затоа пет тулумби чинат 150 денари. Значи, една тулумба чини $150 : 5 = 30$ денари. Според тоа, една баклава чини $75 - 30 = 45$ денари. Конечно, три баклави и 2 тулумби чинат $3 \cdot 45 + 2 \cdot 30 = 195$ денари.

91. Во продавница се продаваат шестаголни и триаголни плочки. Цената на една плочка зависи од видот на плочката и е цел број евра. Од плочките се составени два триаголника (цртеж десно). Цената на левиот триаголник е 29 евра. Колку чини десниот триаголник?



Решение. Ако цената на триаголна плочка е x евра, а цената на шестаголна плочка е y евра, тогаш $7x + 3y = 29$. Јасно, $x \leq 4$. За $x = 4$ добиваме $3y = 1$, што не е можно. За $x = 3$ добиваме $3y = 8$ што не е можно. За $x = 2$ добиваме $3y = 15$ од каде наоѓаме $y = 5$. За $x = 1$ добиваме $3y = 22$, што не е можно. Според тоа, цената на триаголна плочка е 2 евра, а цената на шестаголна плочка е 5 евра. Значи, цената на левиот триаголник е $5 + 3 \cdot 2 = 11$ евра.

92. Мирјана за роденден одлучила да ги почести другарчињата од нејзиното одделение. Таа купила 12 чоколади, 8 пакетчиња бонбони и 9 лижавчиња, за што платила вкупно 864 денари. Притоа за 2 пакетчиња бонбони платила колку за 3 лижавчиња, а 4 чо-

колади чинеле 32 денари повеќе од 2 пакетчиња бонбони и 6 лижавчиња заедно. Колку чинело 1 чоколадо, 1 пакетче бонбони и 1 лижавче?

Решение. Нека 3 лижавчиња чинат x денари. Тогаш 2 пакетчиња бонбони исто така чинат x денари, а 4 чоколади чинат $32+x+2x=32+3x$ денари. Значи, 12 чоколади, 8 пакетчиња бонбони и 9 лижавчиња чинат $3(32+3x)+4x+3x=16x+96$ денари, па затоа $16x+96=864$, т.е. $16x=768$, од каде следува $x=48$ денари. Значи, 1 лижавче чини $48:3=16$ денари, 1 пакетче бонбони чини $48:2=24$ денари и едно чоколадо чини $(32+3\cdot 48):4=44$ денари.

93. Овоштарите Матеј и Доротеј на пазар однеле јаболка кои ги продавале по 70 денари за килограм. Матеј од продадените јаболка заработил 4340 денари, а Доротеј заработил 8750 денари. Колку јаболки однесле вкупно на пазара ако Матеј не продал 102 kg, а Доротеј не продал 76 kg јаболка?

Решение. *Прв начин.* Матеј од продадените јаболка заработил 4340 денари, што значи дека продал $4340:70=62$ kg јаболка. Доротеј од продадените јаболка заработил 8750, што значи дека продал $8750:70=125$ kg јаболка. Тие заедно продале $62+125=187$ kg јаболка. Понатаму, вкупно им останале непродадени $102+76=178$ kg јаболка. Значи, Матеј и Доротеј однеле на пазар вкупно $187+178=365$ kg јаболка.

Втор начин. Матеј и Доротеј од продадените јаболка вкупно заработиле $4340+8750=13090$ денари. Тоа значи дека тие продале вкупно $13090:70=187$ kg јаболка. Понатаму, вкупно им останале непродадени $102+76=178$ kg јаболка. Значи, Матеј и Доротеј однеле на пазар вкупно $187+178=365$ kg јаболка.

94. Пчеларот Аврам оваа година произведе 240 kg мед. Третина од медот го спакува во тегли од 1 kg, третина во тегли од 800 g и третина во тегли од 500 g. Теглите со мед од 1 kg ги продаде по 400 денари, теглите од 800 g ги продаде по 350 денари, а тег-

лите од 500 g ги продаде по 300 денари. Колку пари заработи Аврам?

Решение. Третица од медот е $240:3=80\text{ kg}=80000\text{ g}$. Аврам продал 80 тегли од 1 kg, $80000:800=100$ тегли од 800 g и $80000:500=160$ тегли од 500 g. Тој заработил

$$80\cdot 400+100\cdot 350+160\cdot 300=115000\text{ денари.}$$

95. Во една продавница се продаваат бонбони во две различни кутии. Кутија со 18 бонбони чини 2 евра, а кутија од 33 бонбони чини 3 евра. Определи ја најмалата сума пари со која може да се купат најмалку 200 бонбони.

Решение. Во првата кутија 1 евро чинат $18:2=9$ бонбони, а во втората кутија 1 евро чинат $33:3=11$ бонбони. Значи, бонбоните во втората кутија се поефтини, па затоа најголемиот број бонбони треба да се запакувани во вториот вид кутии. Понатаму, бидејќи $200=6\cdot 33+2$, ако купиме 6 кутии со по 33 бонбони, за да потрошиме помалку пари треба да купиме и 1 кутија со 18 бонбони. Значи, во овој случај ќе купиме $6\cdot 33+1\cdot 18=216$ бонбони и ќе потрошиме $6\cdot 3+1\cdot 2=20$ евра. Меѓутоа, $2\cdot 18=33+3$, па ако наместо 6 кутии со по 33 бонбони 1 кутија со 18 бонбони купиме 5 кутии со по 33 бонбони и 2 кутии со по 18 бонбони, тогаш имаме $5\cdot 33+2\cdot 18=165+36=201>200$ и ќе потрошиме $5\cdot 3+5\cdot 2=19$ евра. Според тоа, најмалата сума пари со која може да се купат најмалку 200 бонбони е 19 евра.

96. Во две книжарници се пуштени на распродажба 10 различни видови тетратки – пет вида во едната и пет вида во другата. Во секоја книжарница петте видови тетратки се со различни цени изразени во точен број денари. Горјан во првата книжарница купил по една тетратка од секој вид, при што за двете најевтини тетратки вкупно платил 14 денари, а за двете најскапи тетратки вкупно платил 22 денари. Потоа отишол во втората книжарница во која купил по една тетратка од секој вид. За трите најевтини тетратки вкупно платил 28 денари, а за трите јаскапи тетратки вкупно платил 37 денари. Колку денари потрошил Горјан во двете книжарници?

Решение. Ако третата по цена тетратка во првата книжарница чини помалку од 9 денари, тогаш двете најевтини тетратки ќе чинат најмногу $6+7=13$ денари, што е спротивно на тоа дека тие чинат 14 денари. Ако третата по цена тетратка чини повеќе од 9 денари, тогаш двете најскапи тетратки ќе чинат најмалку $11+12=23$ денари, што е спротивно на тоа дека тие чинат 22 денари. Значи, третата по цена тетратка чини 9 денари. Според тоа, во првата книжарница Горјан платил $14+9+22=45$ денари. На пример, цените на тетратките се 6, 8, 9, 10 и 12 денари.

Ако третата по цена тетратка во втората книжарница чини помалку од 11 денари, тогаш трите најевтини тетратки ќе чинат најмногу $8+9+10=27$ денари, што е спротивно на тоа дека тие чинат 28 денари. Ако третата по цена тетратка чини повеќе од 11 денари, тогаш трите најскапи тетратки ќе чинат најмалку $12+13+14=39$ денари, што е спротивно на тоа дека тие чинат 37 денари. Значи, третата по цена тетратка чини 11 денари. Според тоа, во втората книжарница Горјан платил $28+37-11=55$ денари. На пример, цените на тетратките се 7, 10, 11, 12 и 14 денари.

Конечно, Горјан во двете книжарници потрошил $45+54=99$ денари.

III.5. РАЗНИ ЗАДАЧИ

97. За потребите на спортските сали Министерството за спорт набавило 6418 топки за кошарка, кои биле 2415 повеќе од топките за одбојка и 1814 помалку од топките за фудбал. Секоја спортска сала добила по 23 топки. Колку спортски сали добиле топки?

Решение. Биле набавени $6418-2415=4003$ топки за одбојка и $6418+4003=8232$ топки за фудбал. Според тоа, вкупно биле набавени $6418+4003+8232=18653$ топки. Бидејќи секоја сала добила по 23 топки, заклучуваме дека $18653:23=811$ спортски сали добиле топки.

98. Првиот ден на Фестивалот на чоколадото Марија изела едно чоколадо. Следните два дена таа јадела по 2 чоколади, следните 3 дена – по 3 чоколади и следните 4 дена – по 4 чоколади. Ако Марко во текот целиот фестивал секој ден јадел еднаков број чоколади, колку чоколади ќе јадел Марко дневно?

Решение. Марија изела $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$ чоколади. Фестивалот траел $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ дена. Значи, Марко дневно јадел по $30 : 10 = 3$ чоколади.

99. Кабините на една жичара се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ... и се распоредени на еднакво растојание. Кога кабината со број 7 тргнува од долната станица на жичарата, од горната станица тргнува кабината со број 33. Кабината со број 27 тргнува од долната станица на жичарата. Која кабина тргнува од горната станица?

Решение. Бидејќи од горната станица тргнува кабината 33, а од долната кабината 7, меѓу двете станици има $33 - 7 = 26$ кабин. Значи, вкупниот број кабин е еднаков на $2 \cdot 26 = 52$. Ако кабината 27 е на долната станица, тогаш на горната станица ќе биде кабината $27 + 26 = 53 > 52$, што значи дека ќе биде кабината $53 - 52 = 1$.

100. Костадин чекал во ред за билети за концерт. Во билетарата имало доволно билети секој човек во редот да купи по два билета. Но, првите петмина купиле по 4 билета, а секој следен купувал по 3 билета, па затоа 30 луѓе останале без билети. Колку билети биле продадени?

Решение. За 30 луѓе немало билети, што значи дека $30 \cdot 2 = 60$ билети се распределени по 2 билета на првите петмина и по 1 билет на останатите кои купиле по 3 билети. Значи, $60 - 2 \cdot 5 = 50$ луѓе купиле по 3 билета. Вкупно биле продадени $5 \cdot 4 + 50 \cdot 3 = 170$ билети.

101. Четири мачки се качиле на поштенска вага, но не можеле да ја видат стрелката на скалата, т.е. не можеле да видат колку тежат. Најумната мачка се симнала од вагата, ја погледнала скалата на вагата рекла: „Вие трите заедно тежите 5 килограми.“ и се ка-

чила на вагата. Втората мачка се симнала од вагата, ја погледнала стрелката, рекла „Вие трите заедно тежите 4 килограми.“ и се качила на вагата. Третата мачка се симнала од вагата, ја погледнала стрелката, рекла „Вие трите заедно тежите 9 килограми.“ и се качила на вагата. Тогаш четвртата мачка рекла: „Пријателки, некоја од вас трите згрешила“

Дали четвртата мачка е во право?

Решение. Тежините на првата, втората, третата и четвртата мачка да ги означиме со a, b, c и d , соодветно. Тогаш, според изјавите на првите три мачки имаме

$$b + c + d = 5,$$

$$a + c + d = 4,$$

$$a + b + d = 7.$$

Значи,

$$9 = a + b + d < (b + c + d) + (a + c + d) = 5 + 4 = 9,$$

што не е можно, па затоа четвртата мачка е во право.

102. Ана треба да испрати покани за свадбата на нејзината сестра. Таа има 2 пакета со покани и во секој пакет има по 24 покани. Треба да покани 60 гости. Дали Ана ќе има доволно покани за сите гости? Одговорот да се образложи!

Решение. Вкупно во двата пакети, има $2 \cdot 24 = 48$ покани. Бројот 48 е помал од бројот 60. Значи, Ана има помалку покани од потребното, па затоа нема да има доволно покани за сите гости.

103. На роденденот на Горјан дошле триесет и осум гости и секој од нив порачал парче торта или сладолед. Гостите порачале 30 парчиња торта и 20 сладоледи. Колку гости порачале или само парче торта или само сладолед?

Решение. *Прв начин.* Имаме $38 - 20 = 18$ гости кои не порачале сладолед и $38 - 30 = 8$ кои не порачале парче торта. Според тоа, или само парче торта или само сладолед порачале $18 + 8 = 26$ гости.

Втор начин. Биле порачани вкупно $30 + 20 = 50$ десерти, а биле 38 гости. Значи, два десерти порачале $50 - 38 = 12$ гости. Спо-

ред, $38 - 12 = 26$ гости порачале или само сладолед или само парче торта.

104. Во дворот на Ласте има кокошки и кози. Тие заедно имаат 50 глави и 140 нозе. Колку кокошки и колку кози има во дворот на Ласте?

Решение. Ако во дворот има само кокошки, тогаш бројот на нозете би бил $50 \cdot 2 = 100$. Бројот на нозете е за $140 - 100 = 40$ поголем и бидејќи $40 : 2 = 20$, заклучуваме дека во дворот има 20 кози. Според тоа, во дворот има $50 - 20 = 30$ кокошки.

105. Во V^1 одделение има 12 девојчиња. Секое од нив има 1, 2 или 3 прстени. Тие вкупно имаат 20 прстени. Вкупниот број девојчиња кои имаат 2 или 3 прстени е еднаков на бројот на девојчињата кои имаат еден прстен. Колку девојчиња имаат еден прстен, колку имат два прстена и колку имаат три прстени?

Решение. Јасно, бројот на девојчињата кои имаат еден прстен е еднаков на $12 : 2 = 6$. Според тоа, $12 - 6 = 6$ девојчиња имаат два или три прстени и тие вкупно имаат $20 - 6 \cdot 1 = 14$ прстени. Ако секое од нив има по два прстена, тогаш тие вкупно ќе имаат $6 \cdot 2 = 12$ прстени, т.е. $14 - 12 = 2$ прстени помалку. Затоа 2 девојчиња мора да имаат по 3 прстени, што значи дека $6 - 2 = 4$ девојчиња имаат по два прстена.

Конечно, 6 девојчиња имаат по еден прстен, 4 девојчиња имаат по два прстена и 3 девојчиња имаат по три прстени.

106. На тестот по математика за точен одговор на лесна задача се добива 1 поен, а за точен одговор на тешка задача се добиваат 3 поени. Павлина точно одговорила на 18 задачи. Дали може таа да освои:

а) 17 поени, б) 29 поени, в) 44 поени.

Решение. а) Со 18 точни одговори Павлина освојува најмалку 18 поени, што значи дека таа не може да освои 17 поени.

б) Имаме 18 непарни броеви (1 или 3). Збирот на секое два непарни броеви е парен, што значи дека збирот на 9 парови непарни броеви е парен. Значи, Павлина со точно одговорени 18 за-

дачи освоила парен број поени. Но, бројот 19 е непарен, па затоа таа не може да освои 29 поени.

в) Ако сите точно одговорени задачи се тешки, тогаш Павлина освојува $3 \cdot 18 = 54$ поени, т.е. $54 - 44 = 10$ поени повеќе. Бидејќи при одговарање на лесна задача таа освојува 2 поени помалку, и $10 : 2 = 5$ заклучуваме дека Павлина точно одговорила на 5 лесни и $18 - 5 = 13$ тешки задачи. Притоа таа освоила $3 \cdot 13 + 5 \cdot 1 = 44$ поени.

107. Група од 41 турист резервирала во хотелот Одмор 9 трикреветни и 2 четирикреветни соби. Колку двокреветни соби се потребни за рецепционерот да ги смести сите туристи од оваа група?

Решение. Во трикреветните и четирикреветните соби ќе се сместат $9 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 27 + 8 = 35$ туристи. Значи, рецепционерот во двокреветните соби треба да смести $41 - 35 = 6$ гости. Конечно, за сместување на сите гости се потребни уште $6 : 2 = 3$ двокреветни соби.

108. На еден концерт на отворено присуствувале 950 посетители, мажи и жени. Колку посетители биле мажи, а колку жени, ако на секои 9 мажи присуствувале 10 жени.

Решение. Со a да го означиме бројот на групите од 9 мажи и 10 жени. Од условот на задачата следува

$$9a + 10a = 950$$

$$19a = 950$$

$$a = 50.$$

Значи, имало $9a = 9 \cdot 50 = 450$ мажи и $10a = 10 \cdot 50 = 500$ жени.

109. Во акција за пошумување учениците од V^a одделение посадиле 224 дрвја. Посадено е трипати повеќе буки од брезии, 14 повеќе јавори од буки, а бројот на тополите е еднаков на половината од бројот на брезите. Колку стебла од секој вид е посадено во оваа акција?

Решение. Нека се посадени x тополи. Тогаш од условот на задачата следува дека се посадени $2x$ брезии, $6x$ буки и $6x + 14$ јавори. Според тоа,

$$x + 2x + 6x + 6x + 14 = 224$$

$$15x = 224 - 14$$

$$x = 14.$$

Значи, посадени се 14 тополи, 28 бреси, 84 буки и 98 јавори.

110. Јана и Мила заедно имаат 22 бомбони. Секоја од нив изела по 2 бомбона, по што Јана имала двапати повеќе бомбони од Мила. Колку бомбони имала Јана на почетокот?

Решение. Кога изеле по 2 бомбона, им останале $22 - 2 \cdot 2 = 18$ бомбони. Ако Мила потоа има x бомбони, Јана има $2x$ бомбони, па затоа $x + 2x = 18$, т.е. $x = 6$. Конечно, на почетокот Јана имала $2x + 2 = 2 \cdot 6 + 2 = 14$ бомбони.

111. Горјан имал чоколади и бонбони. Ако мајкаму му даде уште 10 бонбони, тогаш тој ќе има двапати повеќе бонбони од чоколади. Горјан се замислил колку чоколади треба да му даде на Павел за да му останат двапати повеќе бонбони од чоколада? Помогни му на Горјан да го реши проблемот.

Решение. Нека Горјан има x бонбони и y чоколади. Ако после добивање на 10 бонбони тие се двапати повеќе од чоколадите, тоа значи дека бројот x е парен. Според тоа, бонбоните може да се разделат на две купчиња $5 + x : 2$. Значи, бројот на чоколадите е еднаков на бројот на бонбоните во едното купче, т.е. на $5 + x : 2$. Затоа, ако Горјан му даде на Павел 5 чоколади, ќе му останат $5 + x : 2 - 5 = x : 2$ чоколади, т.е. ќе му останат двапати повеќе бонбони од чоколади.

112. Бројот на децата во Република Македонија на возраст од 11 до 14 години и прикажан со пиктограмот:



каде  означува 12000 луѓе. Бројот на девојчињата е за 3000 поголем од бројот на момчињата. Колку момчиња има во Република Македонија на возраст од 11 до 14 години?

Решение. Вкупниот број деца на возраст од 11 до 14 години е еднаков на $8 \cdot 12000 = 96000$. Ако со x го означиме бројот на

момчињата, тогаш бројот на девојчињата е еднаков на $x+3000$. Значи, $x+x+3000=96000$, од каде наоѓаме $x=46500$. Значи, бројот на момчињата на возраст од 11 до 14 години е еднаков на 46500.

113. Марија и Искра на училиште понеле две исти пакетчиња со бонбони. На секој одмор секоја од нив јадела по 2 или 3 бонбони. За четвртиот одмор на Марија и останала 1 бонбона, а Искра своите бонбони ги изела заклучно со петтиот одмор. Колку бонбони имало во секое пакетче?

Решение. Нека во секое пакетче имало x бонбони. Марија изел најмалку $3 \cdot 2 = 6$ бонбони, а најмногу $3 \cdot 3 = 9$ бонбони. Според тоа, во нејзиното пакетче имало најмалку $6+1=7$ бонбони, а најмногу $9+1=10$ бонбони, т.е. $7 \leq x \leq 10$. Искра изела најмалку $5 \cdot 2 = 10$ бонбони, а најмногу $5 \cdot 3 = 15$ бонбони, што значи $10 \leq x \leq 15$. Конечно, од $7 \leq x \leq 10$ и $10 \leq x \leq 15$ добиваме $x=10$, т.е. во секое пакетче имало по 10 бонбони.

114. Павел и Томе купиле по една кутија пакетчиња планински чај. Колку пакетчиња има во кутијата ако од едно пакетче може да се направат два или три чаја и Павел испил 42 чаја, а Томи испил 61 чаја? Како го правеле чајот Павел и Томи, ако ги потрошиле сите пакетчиња чај?

Решение. Нека во кутијата има n пакетчиња чај. Тогаш бројот на чаевите кои може да се направат е поголем од $2n$ и е помал од $3n$. Затоа $2n \leq 42$ и $61 \leq 3n$, односно $21 \leq n \leq 21$. Значи, во кутијата има 21 пакетче чај. Бидејќи $42 = 2 \cdot 21$ сите чаеви кои ги испил Павел се направени по 2 чаја од едно пакетче, а бидејќи $61 = 19 \cdot 3 + 2 \cdot 2$, Томи 19 пати направил по 3 чаја од 1 пакетче, а двапати направил по 2 чаја од 1 пакетче.

115. Мирко, Бојан и Горјан имаат различно количество марки. Ако Мирко му даде на Бојан 1 марка, а Бојан ну даде на Горјан 3 марки, тогаш сите тројца ќе имаат еднаков број марки. Колку марки треба да му даде Мирко на Горјан за да двајцата имаат еднаков број марки?

Решение. Откако Мирко ќе даде 1 марка, а Бојан ќе даде 3 марки, Мирко ќе има една марка помалку, Бојан ќе има $3-1=2$ марки помалку и Горјан ќе има 3 марки повеќе. Бидејќи сега сите имаат еднаков број марки, на почетокот Мирко имал $3+1=4$ марки повеќе од Горјан. Затоа за да имаат еднаков број марки Мирко на Горјан треба да му даде $4:2=2$ марки.

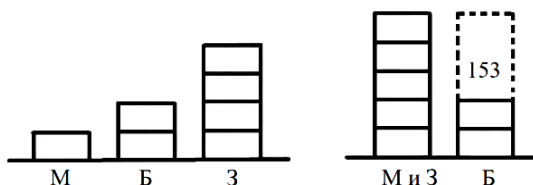
116. Илија има 540 поштенски марки повеќе од Јован. Ако Иван му даде 100 марки на Јован, тогаш Иван ќе има двапати повеќе марки од Јован. Колку поштенски марки има Иван, а колку Јован?

Решение. Ако Јован има x марки, тогаш Иван има $x+540$ марки. Кога Иван му дава 100 марки на Јован нему му остануваат $x+540-100=x+440$ марки, а Јован има $x+100$ марки. Но, тогаш Иван има двапати повеќе марки од Јован, па затоа $2(x+100)=x+440$, т.е. $2x+200=x+440$, односно $x=240$.

Значи, Јован има 240 марки, а Иван има $x+540=780$ марки.

117. Марио, Бојан и Златко имаат определен број сликички. Бојан има двапати повеќе сликички од Марио, а Златко има двапати повеќе сликички од Бојан. Златко и Марио заедно имаат 153 сликички повеќе од Бојан. Колку сликички има секој од нив?

Решение. Ако бројот на сликичките на Марио го означиме со еден правоаголник, тогаш бројот на сликичките на Бојан



е означен со 2, а на Златко со 4 правоаголници. Значи, бројот на сликичките кои заедно ги имаат Марио и Златко е означен со 5 правоаголници, па затоа на 1 правоаголник му соодветствува бројот $153:3=51$. Според тоа, Марио има 51 сликичка, Бојан има $2 \cdot 51=102$ сликички и Златко има $4 \cdot 51=204$ сликички.

118. Дијана имала колекција марки. Половината од марките и уште 20 марки ги поклонила на Лилјана, половината од преостанатите и уште една марка ги поклонила на Весна, а половината од пре-

останатите и уште една марка ги поклонила на Коста. На крајот на Дијана ѝ останала една марка. Определи го збирот на цифрите на бројот на марките кои на почетокот ги имала Дијана.

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Пред да му поклони марки на Коста, Дијана имала $2 \cdot (1+1) = 4$ марки. Понатаму, пред да и поклони марки на Весна, таа имала $2 \cdot (4+1) = 10$ марки. Конечно, пред да и поклони марки на Лилјана, Дијана имала $2 \cdot (10+20) = 60$ марки. Значи, на почетокот Дијана имала 60 марки и збирот на цифрите на овој број е $6+0=6$.

119. Иван и Теодор заедно имаат 32 топчиња. Прво Иван му дала на Теодор толку топчиња, колку што имал Теодор. Потоа Теодор му дал на Иван толку топчиња, колку што имал Ивана. Потоа Иван му дал на Теодор толку топчиња, колку што имал Теодор. На крајот Теодор му дал на Иван толку топчиња, колку што имал Иван, при што двајцата имале еднаков број топчиња.

а) Колку топчиња имал секој од нив на почетокот?

б) Од топчињата 23 се стаклени, а останатите се пластични. По боја 17 се сини, а останатите се црвени. Точно 8 пластични топчиња се црвени. Колку стаклени топчиња се сини?

в) Колку најмалку топчиња треба да извлечеме без гледање за да сме сигурни дека сме извлекле најмалку 5 топчиња од ист материјал и со иста боја?

Решение. а) На крајот секој имал по $32:2=16$ топчиња. Пред тоа Иван имал $16:2=8$ топчиња, а Теодор имал $16+8=24$ топчиња. Пред тоа Теодор имал $24:2=12$, а Иван имал $8+12=20$ топчиња. Пред тоа Иван имал $20:2=10$, а Теодор имал $12+20=22$ топчиња. Пред тоа, Теодор имал $22:2=11$, а Иван имал $20+11=21$ топче.

б) Бројот на црвените топчиња е еднаков на $32-17=15$. Точно 8 пластични топчиња се црвени, па затоа има $15-8=7$ црвени стаклени топчиња. Вкупниот број на стаклени топчиња е 23 и како 7 се црвени, добиваме дека $23-7=16$ се сини.

в) Бидејќи има само $17-16=1$ сино-пластично топче, ако извлечеме 13 топчиња, може да се случи да извлечеме 4 сини-стак-

лени топчиња, 4 црвени-стаклени топчиња и 4 црвени-пластични топчиња. Ако извлечеме 14 топчиња, тогаш ќе има најмалку 5 топчиња од ист материјал и со иста боја.

120. За три дена две верверички собрале 100 лешници. За колку дена 15 верверички ќе соберат 1000 лешници?

Решение. За 3 дена една верверичка собира $100:2=50$ лешници. Толку лешници собираат за еден ден 3 верверички. Бидејќи $15:3=5$, заклучуваме дека 15 верверички за еден ден ќе соберат $5 \cdot 50 = 250$ лешници. Значи, 15 верверички 1000 лешници ќе соберат за $1000:250=4$ дена.

121. Четири крави и три кози за една година јадат повеќе од 20 стогови сено. Дали 30 стогови сено ќе бидат доволни да се прехранат една година шест крави и пет кози?

Решение. Бидејќи четири крави и три кози за една година јадат повеќе од 20 стогови сено, заклучуваме дека 12 крави и 9 кози ќе изедат повеќе од 60 стогови сено. Значи, 12 крави и 10 кози ќе изедат повеќе од 60 стогови сено, па затоа 6 крави и 5 кози ќе изедат повеќе од 30 стогови сено за една година

122. Тројца мајстори за 12 дена градат две дрвени колиби. За колку дена двајца мајстори ќе изградат три колиби?

Решение. Еден мајстор прави 2 колиби за $3 \cdot 12 = 36$ дена. Значи, еден мајстор гради една колиба за $36:2=18$ дена. Оттука следува дека двајца мајстори ќе изградат една колиба за $18:2=9$ дена, па затоа 3 колиби ќе изградат за $3 \cdot 9 = 27$ дена.

123. Зоран, Никола и Бранко одгледуваат папагали. Никола одгледува четирипати повеќе папагали од Бранко, а Бранко одгледува трипати помалку папагали од Зоран. Колку папагали одгледува секој одделно?

Решение. Бројот на папагалите што ги одгледува Бранко да го означиме со x . Тогаш Зоран одгледува $3x$ папагали, а Никола одгледува $4x$ папагали. Тројцата заедно одгледуваат

$$x + 3x + 4x = 8x$$

папагали, што значи дека

$$8x = 32, \text{ т.е. } x = 4.$$

Според тоа, Бранко одгледува 4 папагали, Зоран одгледува 12 папагали и Никола одгледува 16 папагали.

124. Киро ги пребројал гулабите на покривот и забележал дека црните се двапати помалку од белите. Црните биле со прстен околу ногата, а само еден од белите имал прстен. Гулабите без прстен биле за еден повеќе од оние со прстен. Колку гулаби вкупно имало на покривот?

Решение. Нека бројот на црните гулаби е x . Тогаш бројот на белите гулаби е $2x$, бројот на гулабите со прстен околу ногата е $x+1$, а бројот на гулабите без прстен е $2x-1$. Од условот на задачата имаме

$$2x-1 = x+1+1,$$

од каде добиваме $x=3$. Значи, на покривот имало 3 црни и $2 \cdot 3 = 6$ бели гулаби, односно вкупно $3+6=9$ гулаби.

125. Горјан во аквариумот има десет жолти рипчиња повеќе од сини, а црвени трипати повеќе отколку што имал заедно жолти и сини рипчиња. На својот другар Марко му поклони по пет рипчиња од секој вид, после што му останале 265 рипчиња. Колку Горјан имал на почетокот рипчиња од секој вид?

Решение. *Прв начин.* Пред да му поклони на Марко по 5 рипчиња од секој вид Горјан имал $265+3 \cdot 5 = 280$ рипчиња. Нека со x го означиме бројот на сините рипчиња. Тогаш бројот на жолтите рипчиња е $x+10$, а бројот на црвените рипчиња е $3(x+10)$.

Според тоа,

$$x + x + 10 + 3 \cdot (x + x + 10) = 280$$

$$2x + 10 + 3 \cdot (2x + 10) = 280$$

$$2x + 10 + 6x + 30 = 280$$

$$8x = 240$$

$$x = 30.$$

Според тоа, на почетокот во аквариумот имало 30 сини, $30+10=40$ жолти и $3 \cdot (30+40) = 210$ црвени рипчиња.

Втор начин. Пред да му пок-
лони на Марко по 5 рипчиња
од секој вид Горјан имал
 $265 + 3 \cdot 5 = 280$ рипчиња. На
цртежот десно се прикажани
броевите на сините, жолтите
и црвените рипчиња.

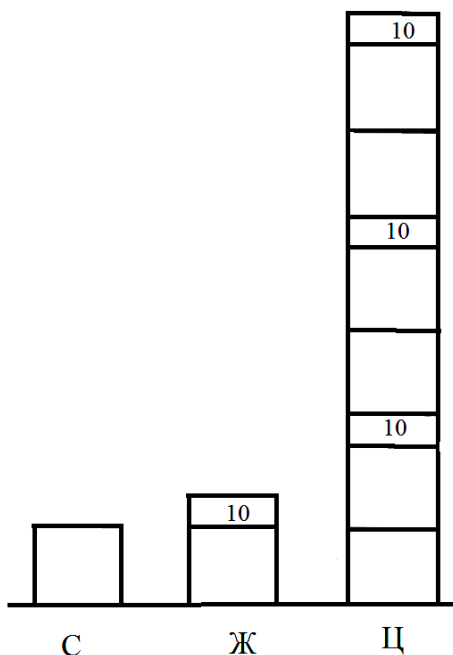
Значи, на 8 бели полиња се-
кое од кои соодветствува на
бројот на сините рипчиња
им соодветствува бројот

$$280 - 40 = 240.$$

Затоа сини рипчиња биле

$$240 : 8 = 30.$$

Понатаму, жолти рипчиња
биле $30 + 10 = 40$ и конечно
бројот на црвените рипчиња
е $3 \cdot (30 + 40) = 210$.



126. На еден натпревар по математика учествувале 37 ученици. Бројот на учениците кои се пласирале после Благоја бил двапати поголем од бројот на учениците кои се пласирале пред него. Кое место го освоил Благоја?

Решение. Со x да го означиме бројот на учениците кои се пласирале пред Благоја. Тогаш $2x$ ученици се пласирале после Благоја. Значи, на натпреварот учествувале Благоја и $x + 2x = 3x$ ученици. Затоа $3x = 37 - 1$ од каде добиваме $x = 12$. Според тоа, пред Благоја се пласирале 12 ученици, што значи дека тој бил тринаесетти.

127. На Меѓународната математичка олимпијада во 2018 година (ИМО2018) се доделени 271 медал, од кои 52 златни, а останатите се сребрени и бронзени. Бројот на сребрените медали е двапати поголем од бројот на бронзените. Колку бронзени медали се доделени на ИМО2018?

Решение. Вкупно се доделени $271 - 52 = 219$ сребрени и бронзени медали. Ако со x го означиме бројот на доделените сребрени медали, тогаш бројот на бронзените медали е $2x$. Затоа $x + 2x = 219$, од каде добиваме $x = 73$. Според тоа, на ИМО2018 се доделени 73 сребрени и $2 \cdot 73 = 146$ бронзени медали.

128. Вчера Елена купи кутија со бонбони. Ако денес изеде двапати повеќе бонбони отколку вчера, во кутијата ќе останат 15 бонбони. Но, ако денес Елена изеде 10 бонбони повеќе отколку вчера, во кутијата ќе останат 12 бонбони. Колку бонбони имало во кутија пред да ја отвори Елена?

Решение. Нека вчера Елена изела x бонбони. Во првиот случај таа денес изела $2x$ бонбони и останале 15 бонбони, а во вториот случај таа денес изела $x + 10$ бонбони и останале 12 бонбони. Значи, $x + 10 - 2x = 3$, од каде добиваме $x = 7$. Конечно, пред Елена да ја отвори кутија во неа имало

$$x + x + 10 + 12 = 7 + 7 + 10 + 12 = 36 \text{ бонбони.}$$

129. Вера изела 3 бонбони помалку од Фросина, а Самоил изел толку бонбони колку што изеле Вера и Фросина заедно. Вера и Самоил заедно изеле 30 бонбони. Колку бонбони изел секој од нив?

Решение. Ако Вера изела x бонбони, тогаш Фросина изела $x + 3$ бонбони, а Самоил изел $x + x + 3 = 2x + 3$ бонбони. Бидејќи Вера и Самоил изеле 30 бонбони, добивам дека $x + 2x + 3 = 30$, т.е. $3x = 30 - 3$, од каде наоѓаме $x = 27 : 3 = 9$. Значи, Вера изела 9 бонбони, Фросина изела $x + 3 = 9 + 3 = 12$ бонбони и Самоил изел $2x + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$ бонбона.

130. Али Баба треба да натовари 180 камили за да го пренесе богатството од пештерата на разбојниците. Бидејќи патот е долг, тој треба да предвиди и храна за камилите. Една камила може да носи храна за 10 камили. Колку камили најмалку ќе има во караванот на Алибаба?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи една камила може да носи храна за 10 камили, добиваме дека секоја од камилите натоварени со храна носи храна за себе и за уште $10 - 1 = 9$ камили натоварени

со богатството. Според тоа, во караванот на Али Баба ќе има $180:9=20$ камили натоварени со храна. Конечно, во караванот на Али Баба ќе има најмалку $180+20=200$ камили.

Втор начин. На Али Баба му се потребни 180 камили за да го пренесе богатството. За носење на храната за овие 180 камили се потребни $180:10=18$ камили. За носење на храната за овие 18 камили се потребни 2 камили. Според тоа, во караванот на Али Баба мора да има барем $180+18+2=200$ камили, од кои $200-180=20$ ќе носат храна и ако $20\cdot 10=200$ во караванот ќе има храна за сите камили, што значи дека најмалиот број камили е 200.

131. Лета јато стоножни и триглави ламји. Вкупниот број на главите во јатото е 28, а вкупниот број на нозете е 208. Секоја стоножна ламја има една глава. Колку нозе имаат триглавите ламји?

Решение. Имаме вкупно 208 нозе, па затоа стоножните ламји се една или две. Ако има две стоножни ламји, тогаш бројот на главите на триглавите ламји е еднаков на $28-2=26$, што не е можно бидејќи бројот 26 не е делив со 3. Значи, имаме една стоножна ламја. Според тоа, бројот на главите на триглавите ламји е еднаков на $28-1=27$, што значи дека триглави ламји се $27:3=9$ и тие имаат $208-100=108$ нозе. Конечно триглавите ламји имаат по $108:9=12$ нозе.

132. Крали Марко се борел со десет четириглави ламји. На некои од нив им отсекол по две глави, на други по три глави, а на останатите им ги отсекол сите глави. Три од ламјите загубиле вкупно четири пати помалку глави од останатите седум ламји. Ламјите кои останале со една глава биле повеќе на број од ламјите кои останале со две глави. Колку глави отсекој Крали Марко и на колку ламји им ги отсекол сите глави?

Решение. Нека трите ламји, кои загубиле вкупно четирипати помалку глави од останатите седум ламји, загубиле вкупно x глави. Тогаш останатите седум ламји загубиле $4x$ глави и Крали Марко отсекол вкупно $5x$ глави.

Бидејќи ламјите имаат 40 глави и Крали Марко не ги отсекол сите глави, бројот на отсечените глави може да биде 35, 30, 25, 20, 15, 10 и 5.

Било кои три ламји загубиле најмалку 6 глави, па затоа $x \geq 6$, т.е. $5x \geq 30$. Значи, бројот на отсечените глави е 30 или 35.

Нека се отсечени 35 глави. Тогаш $x=7$, што е можно само ако две ламји загубиле по 2 глави, а една ламја загубила 3 глави. Значи, најмалку 2 ламји загубиле по 2 глави и најмалку 3 ламји загубиле по 3 глави. Според тоа, ламјите кои ги загубиле сите глави се најмногу 5 и Крали Марко отсекол најмногу $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 33 < 35$ глави, што не е можно.

Нека се отсечени 30 глави. Тогаш $x=6$, што значи дека секоја од трите ламји, кои загубиле вкупно четирипати помалку глави од останатите седум ламји, загубила точно по 2 глави. Значи, бројот на ламјите кои загубиле 2 глави е најмалку 3, бројот на ламјите кои загубиле по 3 глави е најмалку 4. Во следната табела се разгледани сите можности:

Ламји кои загубиле по 2 глави	Ламји кои загубиле по 3 глави	Ламји кои загубиле по 4 глави	Вкупен број отсечени глави
3	4	3	30
3	5	2	29
3	6	1	28
4	5	1	27

Конечно, само првата можност ги исполнува условите на задачата. Значи, Крали Марко отсекол 30 глави и 3 ламји ги загубиле сите глави.

- 133.Имаме непарен број бонбони. Ако бонбоните ги ставиме во кутии со по 46 бонбони, можеме да наполниме 43 кутии и ќе ни остане определен број бонбони. Ако пак бонбоните ги ставиме во кутии со по 43 бонбони, можеме да наполниме 47 кутии и неколку бонбони ќе останат. Дали може бонбоните да ги запакуваме во 17 кутии при што во секоја кутија ќе има еднаков број бонбони?

Решение. Кога во кутиите ставаме по 46 бонбони, не можеме да наполниме 44 кутии, што значи дека бројот на бонбоните е помал од $44 \cdot 46 = 2024$. Понатаму, кога во кутиите ставаме по 43 бонбони, тогаш се наполнети 47 кутии и останува определен број бонбони. Според тоа бројот на бонбоните е поголем од $43 \cdot 47 = 2021$. Значи, имаме непарен број бонбони поголем од 2021 и помал од 2024. Единствен непарен број поголем од 2021 и помал од 2024 е бројот 2023. Бидејќи $2023:17=119$ заклучуваме дека бонбоните можеме да ги запакуваме во 17 кутии при што во секоја кутија ќе има по 119 бонбони.

134. Ана, Симона, Натка и Евдокија заедно имаат 19 бомбони, при што секоја има барем една бомбона. Натка има трипати повеќе бомбони од Ана. Симона има три бомбони повеќе од Евдокија. Колку бомбони има секое од девојчињата?

Решение. *Прв начин.* Ако Ана има x бомбони, тогаш Натка има $3x$ бомбони. Ако Евдокија има y бомбони, тогаш Симона има $y+3$ бомбони. Според тоа,

$$x + 3x + y + y + 3 = 19$$

$$4x + 2y = 16$$

$$2x + y = 8.$$

Така ја имаме следнава табела во која се дадени сите решенија:

Ана x	Евдокија y	Натка $3x$	Симона $y+3$
1	6	3	9
2	4	6	7
3	2	9	5

Ако $x \geq 4$, тогаш не постои $y > 0$ таков што $2x + y = 8$, па затоа во табелата се дадени сите решенија на задачата.

Втор начин. Ако Ана има 1 бомбона, тогаш Натка има 3 бомбони и остануваат $19 - 4 = 15$ бомбони. Затоа Евдокија има $(15 - 3):2 = 6$ бомбони, а Симона има $6 + 3 = 9$ бомбони.

Ако Ана има 2 бомбона, тогаш Натка има 6 бомбони и остануваат $19 - 8 = 11$ бомбони. Затоа Евдокија има $(11 - 3):2 = 4$ бомбони, а Симона има $4 + 3 = 7$ бомбони.

Ако Ана има 3 бомбона, тогаш Натка има 9 бомбони и остануваат $19-12=7$ бомбони. Затоа Евдокија има $(7-3):2=2$ бомбони, а Симона има $2+3=5$ бомбони.

Ако Ана има 4 бомбона, тогаш Натка има 12 бомбони и остануваат $19-16=3$ бомбони. Затоа Евдокија има $(3-3):2=0$ бомбони, што не е можно.

135. Пчеларот Ангел има 26 големи и 21 мала тегла со мед. Тој има кутии во кои може да запакува или 5 големи тегли, или 9 мали тегли, или 4 големи и 3 мали тегли со мед. Определи го најмалиот број кутии потребни за Ангел да ги запакува сите тегли со мед.

Решение. Нека Ангел во a кутии запакувал само големи тегли, во b кутии запакувал само мали тегли и во c кутии запакувал и големи и мали тегли со мед. Од условот на задачата следува дека $9b+3c=21$. Можни се два случаја и тоа $b=2, c=1$ или $b=1, c=4$.

Ако $b=2$ и $c=1$, тогаш бидејќи $26-4\cdot 1=22$ и $22=4\cdot 5+2$, за да се запакуваат сите големи тегли со мед се потребни уште $4+1=5$ кутии. Притоа во 4 кутии ќе имаме по 5 големи тегли, а во една кутија ќе имаме само 2 големи тегли со мед. Според тоа, во овој случај Ангел ќе употреби $5+2+1=8$ кутии.

Ако $b=1, c=4$, тогаш бидејќи $26-4\cdot 4=10$ и $10=2\cdot 5$, за да се запакуваат сите големи тегли со мед се потребни 2 кутии. Според тоа, во овој случај Ангел ќе употреби $2+1+4=7$ кутии.

Од претходно изнесеното следува дека најмалиот број кутии потребни за Ангел да ги запакува сите тегли со мед е еднаков на 7.

136. На еден фудбалски турнир четири екипи играле секоја со секоја. За победа се освојуваат по 3 бода, за нерешен резултат по 1 бод и за загубен натпревар по 0 бодови. На крајот од турнирот имало екипа со 4 бода, екипа со 2 бода и екипа со 1 бод. Колку бодови освоила четвртата екипа?

Решение. Во три натпревари 4 бода можат да се освојат на еден начин и тоа $3+1+0$, 2 бода може да се освојат на еден начин $1+1+0$ и 1 бод може да се освои на еден начин $1+0+0$. Тогаш овие три екипи вкупно имаат 1 победа и 4 порази, па затоа четвртата екипа имала 3 победи. Значи, четвртата освоила $3 \cdot 3 = 9$ бода.

137. Во фудбалско првенство за победа се добиваат 3 бода, за изгубен натпревар 0 бодови и за нерешен резултат секоја екипа добива по 1 бод. По 16 кола екипата Спортист имала неколку победи, неколку нерешени натпревари и неколку порази. Таа имала повеќе победени отколку загубени натпревари и освоила 20 бодови. Колку натпревари екипата одиграла нерешено?

Решение. Бидејќи $7 \cdot 3 = 21 > 20$ заклучуваме дека екипата победила во најмногу 6 натпревари. Понатаму, од $1 \cdot 3 + 15 \cdot 1 = 18 < 20$ следува дека екипата победила во повеќе од еден натпревар.

Ако имаме 6 победи, тогаш бројот на нерешените натпревари е еднаков на $20 - 6 \cdot 3 = 2$, што значи дека загубените натпревари се $16 - 6 - 2 = 8$, што е спротивно на условот на задачата. При 5 победи, нерешените натпревари се $20 - 5 \cdot 3 = 5$, па загубените натпревари се $16 - 5 - 5 = 6$, што е спротивно на условот на задачата. При 4 победи, нерешените натпревари се $20 - 4 \cdot 3 = 8$, па загубените натпревари се $16 - 4 - 8 = 4$, што е спротивно на условот на задачата. При 3 победи, нерешените натпревари се $20 - 3 \cdot 3 = 11$, па загубените натпревари се $16 - 3 - 11 = 2$. При 2 победи, нерешените натпревари се $20 - 2 \cdot 3 = 14$, па загубените натпревари се $16 - 2 - 14 = 0$, што е спротивно на условот на задачата.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека екипата Спортист имала 3 победи, 11 нерешени натпревари и 2 загубени натпревари.

138. Марија учествувала на математички натпревар на кој биле зададени 13 прашања. На натпреварот за точно одговорено прашање се освојуваат 7 бода, за непотполно одговорено прашање се освојуваат 3 бода, а за грешно одговорено прашање се освојуваат

0 бодови. Марија освоила 53 бода. На колку прашања таа грешно одговорила?

Решение. Бидејќи $7 \cdot 8 = 56 > 53$ заклучуваме дека Марија точно одговорила на најмногу 7 прашања.

Ако Марија точно одговорила на 7 прашања, тогаш бројот на освоените бодови од делумно одговорените прашања е $53 - 7 \cdot 7 = 4$, што не е можно бидејќи 4 не е делив со 3.

Ако Марија точно одговорила на 6 прашања, тогаш бројот на освоените бодови од делумно одговорените прашања е $53 - 7 \cdot 6 = 11$, што не е можно бидејќи 11 не е делив со 3.

Ако Марија точно одговорила на 5 прашања, тогаш бројот на освоените бодови од делумно одговорените прашања е $53 - 7 \cdot 5 = 18$, што значи дека таа делумно одговорила на $18 : 3 = 6$ прашања и неточно одговорила на $13 - 5 - 6 = 2$ прашања.

Ако Марија точно одговорила на 4 прашања, тогаш бројот на освоените бодови од делумно одговорените прашања е $53 - 7 \cdot 4 = 25$, што не е можно бидејќи 25 не е делив со 3.

Ако Марија точно одговорила на 3 прашања, тогаш бројот на освоените бодови од делумно одговорените прашања е $53 - 7 \cdot 3 = 32$, што не е можно бидејќи 32 не е делив со 3.

Ако Марија точно одговорила на 2 прашања, тогаш бројот на освоените бодови од делумно одговорените прашања е $53 - 7 \cdot 2 = 39$, па затоа е потребно таа точно да одговорила на $39 : 3 = 13$ прашања, што не е можно бидејќи тогаш имаме $2 + 13 = 15 > 13$ прашања.

Конечно, Марија точно одговорила на 5, делумно на 6 и грешно на 2 прашања.

139. Подели подеднакво 7 пици на 12 деца, ако имаш право една пица да ја расечеш најмногу на 4 дела.

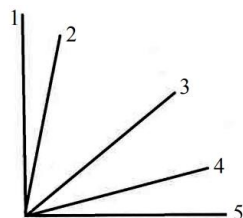
Решение. Ако три пици поделиме секоја на по 4 еднакви делови, ќе добиеме 12 еднакви делови, т.е. 12 пати по четвртина пица. Ако четири пици поделиме секоја на по 3 еднакви делови, ќе добиеме 12 еднакви делови, т.е. 12 пати по третина пица. Сега секое дете треба да добие по една четвртина и по една третина пица.

IV ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

IV.1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

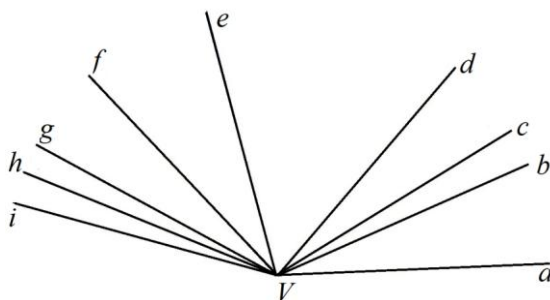
1. Од темето на правиот агол повлечи три полуправи кои припаѓаат на внатрешноста на аголот. Колку остри агли доби?

Решение. На цртежот десно краците на правиот агол се означени со броевите 1 и 5, а повлечените полуправи со броевите 2, 3 и 4. Притоа се добиени острите агли меѓу полуправите: 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 3 и 4, 3 и 5, 4 и 5.



Според тоа, на цртежот имаме 9 остри агли.

2. Испиши ги сите остри агли дадени на долниот цртеж.



Решение. На дадениот цртеж острите агли се:

$\angle aVb$, $\angle aVc$, $\angle aVd$, $\angle bVc$, $\angle bVd$, $\angle bVe$, $\angle cVd$, $\angle cVe$, $\angle dVe$, $\angle dVf$, $\angle eVf$, $\angle eVg$, $\angle eVh$, $\angle eVi$, $\angle fVg$, $\angle fVh$, $\angle fVi$, $\angle gVh$, $\angle gVi$ и $\angle hVi$.

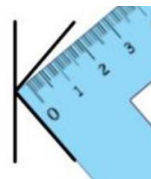
3. Зборот МАТКА е запишан како на долниот цртеж. Колку остри, колку прави и колку тапи агли формираат линиите кои учествуваат во записот на зборот МАТКА?



Решение. Со буквата М се определени 3 остри агли. Со една буква А се определени 3 остри и 2 тапи агли, што значи со две

букви А се определени 6 остри и 4 тапи агли. Со буквата Т се определени 2 прави агли. Со буквата К се определени 2 остри и 1 тап агол. Според тоа, во зборот МАТКА вкупно се определени 11 остри, 2 прави и 5 тапи агли.

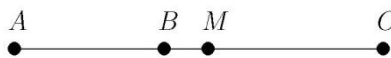
Забелешка. Проверката на видовите на аглие определени со буквата К може да се направи како што е прикажано на цртежот десно.



4. Во кутија се ставени 105 триаголници и петаголници, обоени во сина или црвена боја. Вкупниот број темиња на многуаголниците е еднаков на 501. Сините петаголници се двапати повеќе од црвените петаголници, а сините триаголници се за 2 повеќе од црвените триаголници. Определи го најмалиот број многуаголници кои треба без гледање да ги извадиме од кутијата за да сме сигурни дека е изваден најмалку еден син многуаголник.

Решение. Ако сите многуаголници се петаголници, тогаш бројот на темињата ќе биде $5 \cdot 105 = 525$, што значи $525 - 501 = 24$ темиња повеќе. Бидејќи секој триаголник има 2 темиња помалку во кутијата има $24 : 2 = 12$ триаголници и $105 - 12 = 93$ петаголници. Црвени петаголници се $93 : 3 = 31$, а сини се $93 - 31 = 62$. Црвени триаголници се $(12 - 2) : 2 = 5$, а сини триаголници се $12 - 5 = 7$. Во кутијата вкупно има $31 + 5 = 36$ црвени многуаголници, па за да сме сигурни дека сме извадиле најмалку еден син многуаголник треба да извадиме 37 многуаголници.

5. За точките на цртежот десно важи $\overline{AB} = 22 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 30 \text{ cm}$ и точката M е средина на отсечката AC . Определи ја должината на отсечката BM .



Решение. Имаме

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 22 + 30 = 52 \text{ cm}.$$

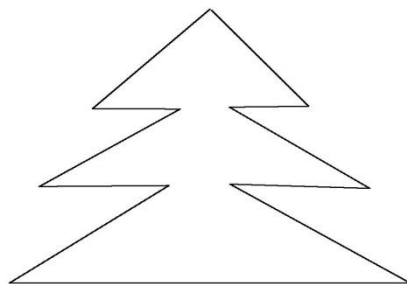
Бидејќи M е средина на отсечката AC добиваме

$$\overline{AM} = \overline{AC} : 2 = 52 : 2 = 26 \text{ cm}.$$

Конечно,

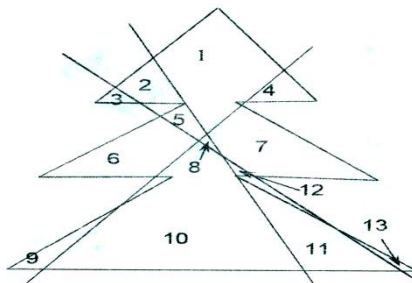
$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = 26 - 22 = 4 \text{ cm}.$$

6. На цртежот десно е дадена елка. Со помош на три прави подели ја елката на 13 делови.



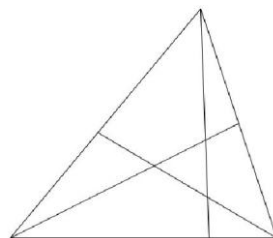
Решение. Задачата има повеќе решенија. Едно од можните решенија е прикажано на цртежот десно.

Обиди се да најдеш и други решенија на задачата.



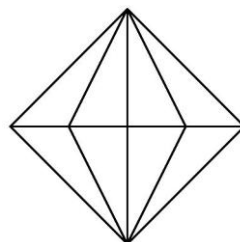
7. Определи го бројот на триаголниците кои ги содржи фигурата прикажана на цртежот десно.

Решение. Дадената фигура содржи 4 мали триаголници, 6 триаголници составени од еден мал триаголник и еден четириаголник, 3 триаголници составени од два мали триаголници и еден четириаголник, 3 триаголници составени од два мали триаголници и два четириаголници и целата фигура е триаголник. Според тоа, дадената фигура содржи $4+6+3+3+1=17$ триаголници.



8. Определи го бројот на триаголниците содржани во фигурата прикажана на цртежот десно.

Решение. На хоризонталната линија на фигурата има 5 точки кои може да се крајни точки на отсечка. Според тоа, таа содржи $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ отсечки. Секоја од овие отсечки со секоја од двете точки кои не лежат на хоризонталната линија формира триаголник. Досега имаме $2 \cdot 10 = 20$ триаголници.

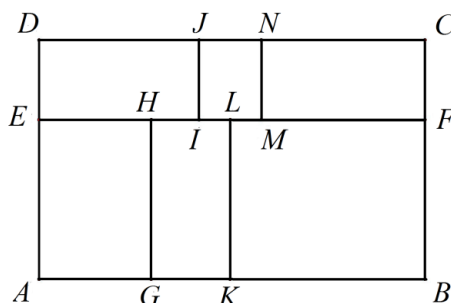


ци. Двете точки кои не лежат на хоризонталната линија се крајни точки на отсечка. Оваа отсечка со секоја од останатите четири точки кои ја делат хоризонталната линија формира по еден триаголник. Тоа се 4 нови триаголници. Според тоа, дадената фигура содржи $20 + 4 = 24$ триаголници.

9. Колку правоаголници има на цртежот десно. Испиши ги сите правоаголници.

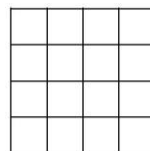
Решение. На дадениот цртеж се следниве правоаголници:

$ABCD$, $ABFE$, $AGHE$,
 $AKLE$, $BFLK$, $BFHG$,
 $GKLH$, $EIJL$, $EMND$,
 $EFCD$, $IMNJ$, $IFCJ$,
 $MFCN$.



Значи, на цртежот има 13 правоаголници.

10. Квадратот прикажан на цртежот десно е поделен на 16 единечни квадрати. Во еден единечен квадрат е нацртана ѕвезда. Определи го бројот на квадратите во кои има ѕвезда.

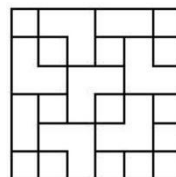


Решение. Ако ѕвездата е во аголен единечен квадрат, тогаш таа се наоѓа во 4 квадрати (по 1 од секоја димензија).

Ако ѕвездата се наоѓа во квадрат кој е соседен на аголен квадрат, тогаш таа се наоѓа во 6 квадрати (1 со димензија еден, 2 со димензија два, 2 со димензија три и 1 со димензија четири). Ако ѕвездата не е во рабен квадрат, тогаш таа се наоѓа во 10 квадрати (1 со димензија еден, 4 со димензија два, 4 со димензија три и 1 со димензија 4).

11. Колку квадрати се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно?

Решение. Дадената фигура содржи 14 мали квадрати, 6 квадрати кои може да се состават од



четири мали квадрати, 1 квадрат кој може да се состави од 9 мали квадрати и целата фигура е квадрат. Според тоа, дадената фигура содржи $14+6+1+1=22$ квадрати.

IV.2. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПЕРИМЕТРИ

12. Збирот на периметрите на два рамнострани триаголника е еднаков на 144 dm . Периметарот на едниот триаголник е трипати поголем од периметарот на другиот триаголник. Определи ги должините на страните на овие триаголници.

Решение. Ако со O го означиме помалиот периметар, тогаш поголемиот периметар е еднаков на $3O$, па затоа $O+3O=144$, т.е. $O=36\text{ dm}$. Според тоа, должината на страната на едниот триаголник е еднаква на $36:3=12\text{ dm}$, а должината на страната на другиот триаголник е еднаква на $3\cdot 12=36\text{ dm}$.

13. Должините на страните на еден триаголник изразени во сантиметри се три последователни непарни броеви, а неговиот периметар е еднаков на 141 cm . Определи ги должините на страните на тој триаголник.

Решение. *Прв начин.* Нека a е должината на најкратката страна. Тогаш должините на другите две страни се $a+2$ и $a+4$. Имаме

$$a+a+2+a+4=141$$

$$3a+6=141$$

$$a=45\text{ cm}.$$

Останатите страни на триаголникот имаат должини

$$a+2=47\text{ cm} \text{ и } a+4=49\text{ cm}.$$

Втор начин. Нека a е должината на страната која не е ниту најкратка ниту најдолга. Тогаш должините на другите две страни се $a-2$ и $a+2$. Имаме

$$a-2+a+a+2=141$$

$$3a=141$$

$$a=47\text{ cm}.$$

Должините на другите две страни се

$$a - 2 = 45 \text{ cm и } a + 2 = 49 \text{ cm}.$$

14. Даден е рамностран триаголник ABC . На правата AC преку темето C одбрана е точка D таква што периметарот на триаголникот ABD е 54 cm , а периметарот на триаголникот BCD е 37 cm . Определи го периметарот на триаголникот ABC .

Решение. На цртежот десно се прикажани рамностраниот триаголник ABC и избраната точка D . Според условот на задачата имаме

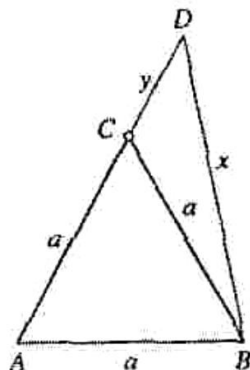
$$2a + x + y = 54$$

$$a + x + y = 37.$$

Затоа,

$$a = 54 - (a + x + y) = 54 - 37 = 17 \text{ cm}.$$

Според тоа, периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $3a = 3 \cdot 17 = 51 \text{ cm}$.



15. Даден е рамнокрак триаголник ABC . Должината на краците AC и BC еднаква на 75 cm и должината на основата AB еднаква на 90 cm . На кракот BC избрана е точка D таква што периметарот на триаголникот ABD е еднаков на 216 cm , а периметарот на триаголникот ADC е еднаков на 168 cm . Определи ги должините на отсечките AD , BD и CD .

Решение. За периметарот на триаголникот ABC имаме

$$L_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 90 + 2 \cdot 75 = 240.$$

Понатаму, важи

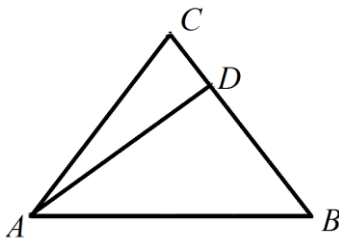
$$L_{ABD} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD}$$

и

$$L_{ADC} = \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC}.$$

Исто така важи $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD}$, па затоа

$$\begin{aligned} L_{ABD} + L_{ADC} &= \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} + \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC} \\ &= \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{CD} + \overline{AC} + 2\overline{AD} \end{aligned}$$



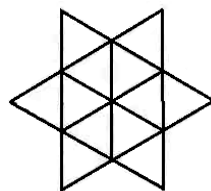
$$\begin{aligned}
 &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + 2\overline{AD} \\
 &= L_{ABC} + 2\overline{AD}.
 \end{aligned}$$

Според тоа, $216 + 168 = 240 + 2\overline{AD}$, т.е. $384 = 240 + 2\overline{AD}$, од каде наоѓаме $2\overline{AD} = 144$, што значи дека $\overline{AD} = 144 : 2 = 72 \text{ cm}$.

Сега, од $L_{ABD} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD}$ добиваме $216 = 90 + \overline{BD} + 72$, т.е. $\overline{BD} = 216 - 162 = 54 \text{ cm}$.

Конечно, од $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD}$ следува $\overline{CD} = 75 - 54 = 21 \text{ cm}$.

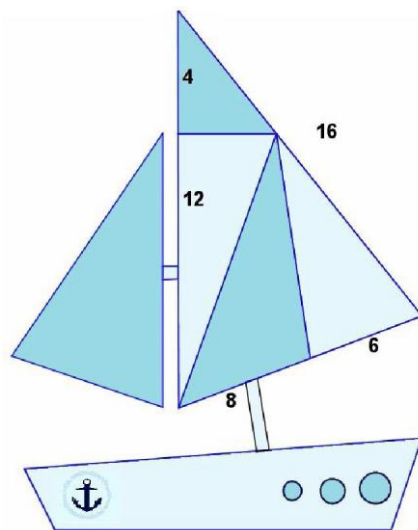
16. Фигурата на цртежот десно е составена од рамнострани триаголници. Периметарот на најголемиот рамностран триаголник е еднаков на 54 cm . Определи ја должината на жицата од која може да се направи дадената фигура.



Решение. Должината на страната на најголемиот рамностран триаголник е еднаква на $54 : 3 = 18 \text{ cm}$. Должината на страната на најмалиот рамностран триаголник е еднаква на $18 : 3 = 6 \text{ cm}$. Фигурата е составена од $6 \cdot 2 + 6 + 6 = 24$ отсечки со должина 6 cm , па затоа должината на жицата од која може да се состави фигурата е еднаква на $24 \cdot 6 = 144 \text{ cm}$.

17. Едрилицата прикаана на цртежот десно има две триаголни платна, при што поголемото платно е составено од неколку различни по големина и вид триаголници. Означените должини се во метри.

- Определи го бројот на правоаголните триаголници.
- Определи го периметарот на големото платно на едрилицата.
- Определи го периметарот



на малото платно ако се знае дека тоа има две еднакви страни, а третата страна е еднаква на половина од должината на основата на големото платно.

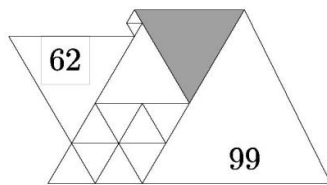
Решение. а) Очигледно правоаголни се само двата триаголници ко се наоѓаат на левата страна на големото платно.

б) Должините на страните на големото платно се еднакви на 16 m , $12+4=16\text{ m}$ и $8+6=14\text{ m}$, што значи дека тој е рамнокрак со основа 14 m и крак 16 m . Значи, неговиот периметар е еднаков на $2 \cdot 16 + 14 = 32 + 14 = 46\text{ m}$

в) Од цртежот е јасно дека должината на кракот на малото платно е еднаква на 12 m , а од условот на задачата следува дека должината на неговата основата е еднаква на $14:2=7\text{ m}$. Според тоа, периметарот на малото платно е еднаков на

$$2 \cdot 12 + 7 = 24 + 7 = 31\text{ m}.$$

18. Фигурата на цртежот десно е составена од рамнострани триаголници, еден со должина на страна 62 cm , а друг со должина на страна 99 cm . Определи ја должината на страната на сивиот триаголник.



Решение. Со a да ја означиме должината на страната на најмалиот бел триаголник, а со b должината на страната на вториот по големина бел триаголник. Тогаш должината на страната на третиот по големина бел триаголник е еднаква на $2b$, а должината на страната на сивиот триаголник е еднаква на $2b+a$. Затоа $3b-a=62$ и $4b+a=99$. Од првата равенка следува $a=3b-62$ и ако замениме во втората равенка добиваме

$$4b+3b-62=88, \text{ т.е. } b=23\text{ cm}.$$

Значи, $a=3 \cdot 23-62=7\text{ cm}$, па затоа должината на страната на сивиот триаголник е еднаква на $2b+a=2 \cdot 23+7=53\text{ cm}$.

19. Определи го бројот на различните триаголници чиј периметар е еднаков на 16 cm и должините на страните му се природни броеви.

Решение. Нека за должините на страните a, b, c важи $a \geq b \geq c$. Ако $a \leq 5$, тогаш $a + b + c \leq 15$, што не е можно. Ако $a \geq 8$, тогаш $b + c = 16 - a \leq 8$, што повторно не е можно. Значи, $5 < a < 8$, па затоа $a = 6$ или $a = 7$. Имаме пет можности:

$$(a, b, c) \in \{(6, 6, 4), (6, 5, 5), (7, 7, 2), (7, 6, 3), (7, 5, 4)\},$$

што значи дека постојат 5 триаголници со саканите својства.

20. Периметарот на квадратот е еднаков на 664 mm . Должината на страната на квадратот е еднаква на третина од должината на кракот на рамнокрак триаголник. Определи го периметарот на рамнокракиот триаголник, ако должината на неговата основа изразена во милиметри е еднаква на најголемиот трицифрен број запишан со цифрите 0, 1 и 6.

Решение. Должината на страната на квадратот е еднаква на $664 : 4 = 166 \text{ mm}$. Значи, должината на кракот на рамнокракиот триаголник е еднаква на $3 \cdot 166 = 498 \text{ mm}$. Најголемиот трицифрен број запишан со цифрите 0, 1 и 6 е 610, што значи дека должината на основата на триаголникот е 610 mm . Конечно, периметарот на триаголникот е еднаков на $2 \cdot 498 + 610 = 1606 \text{ mm}$.

21. Збирот на најмалите четири различни непарни броеви е еднаков на периметарот на еден квадрат изразен во сантиметри. Определи го периметарот на рамностран триаголник со должина на страна еднаква на должината на страната на квадратот.

Решение. Четирите најмали непарни природни броеви се 1, 3, 5 и 7. Според тоа, периметарот на квадратот е еднаков на $1 + 3 + 5 + 7 = 16 \text{ cm}$. Значи, должината на неговата страна е еднаква на $16 : 4 = 4 \text{ cm}$. Конечно, периметарот на рамностраниот триаголник е еднаков на $3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}$.

22. Нека B е најголемиот трицифрен број,

$$A = 1203 + 714 : 7 - 378 : (70201 - 70194)$$

и C е еднаков на периметарот на правоаголник со должини на страни 14 cm и 2 dm , изразен во сантиметри. Определи ја вредноста на изразот $B : 3 + A - 4C$.

Решение. Јасно, $B = 999$. Понатаму,

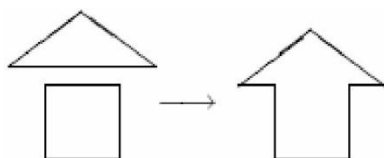
$$A = 1203 + 714 : 7 - 378 : (70201 - 70194)$$

$$= 1203 + 102 - 378 : 7 = 1305 - 54 = 1251$$

и $C = 2 \cdot (14 + 20) = 68 \text{ cm}$. Затоа

$$B : 3 + A - 4C = 999 : 3 + 1251 - 4 \cdot 68 = 333 + 1251 - 272 = 1312.$$

23. Квадрат со периметар 24 cm и триаголник со периметар 24 cm се залепени како што е прикажано на цртежот десно. Определи го периметарот на добиената фигура.



Решение. Должината на страната на квадратот е еднаква на $24 : 4 = 6 \text{ cm}$. При слепувањето на квадратот и триаголникот периметарот на добиената фигура нема да содржи една страна на квадратот и дел од едната страна на триаголникот чија должина е еднаква на должината на страната на квадратот. Според тоа, периметарот на добиената фигура е еднаков на

$$2 \cdot 24 - 2 \cdot 6 = 48 - 12 = 36 \text{ cm}.$$

24. Ученик располага со 16 сламки со должина 1 cm , 6 сламки со должина 2 cm и 7 сламки со должина 3 cm . Дали може со сламките со кои располага ученикот да состави правоаголник така што сите сламки да бидат употребени и сламките да не се кршат.

Решение. Ако ги употребиме сите сламки за периметарот на правоаголникот ќе добиеме

$$16 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 16 + 12 + 21 = 49.$$

Бидејќи $L = 2(a + b)$ добиваме дека $a + b = 24,5$ што не е можно бидејќи сламките не смеат да се кршат.

25. Ако трипати ја намалиме должината на страната на квадрат со периметар 360 mm , ќе ја добиеме ширината на правоаголник со периметар 220 mm . Определи ја должината на правоаголникот.

Решение. Должината на страната на квадратот е еднаква на $360 : 4 = 90 \text{ mm}$. Значи, ширината на правоаголникот е еднаква

на $90:3=30\text{ mm}$. Според тоа, должината на правоаголникот е еднаква на

$$(220-2\cdot 30):2=(220-60):2=160:2=80\text{ mm}=8\text{ cm}.$$

26. Должините на страните на даден правоаголник се 21 cm и 7 cm . Со права тој е поделен на еден квадрат и еден правоаголник. Колкава е разликата меѓу периметрите на добиените фигури?

Решение. Ако правоаголникот го поделиме на квадрат и правоаголник, тоа значи дека сме добиле квадрат со должина на страна 7 cm и правоаголник со должини на страни 7 cm и 14 cm (направи цртеж). Периметарот на квадратот е $L_1=4\cdot 7=16\text{ cm}$, а периметарот на правоаголникот е $L_2=2(7+14)=2\cdot 21=42\text{ cm}$. Нивната разлика е

$$L_2-L_1=42-16=26\text{ cm}.$$

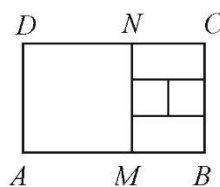
27. Ширината на еден правоаголник е за 16 cm помала од неговата должина и двапати поголема од страната на еден квадрат. Страната на еден рамнострани триаголник е двапати поголема од должината на правоаголникот. Ако периметарот на рамностраниот триаголник е за 192 cm поголем од периметарот на квадратот, определи го периметарот на правоаголникот.

Решение. Нека должината на страната на квадратот е x . Тогаш ширината на правоаголникот е еднаква на $2x$, неговата должина е еднаква на $2x+16$, а страната на рамностраниот триаголник е еднаква на $2(2x+16)$. Периметарот на рамностраниот триаголник е еднаков на $3\cdot 2(2x+16)$, а периметарот на квадратот е еднаков на $4x$. Затоа,

$$3\cdot 2(2x+16)=4x+192,$$

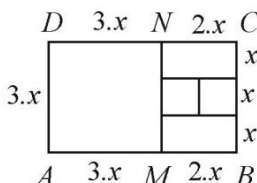
од каде наоѓаме $12x+96=4x+192$, односно $x=12\text{ cm}$. Значи, ширината на правоаголникот е еднаква на $2\cdot 12=24\text{ cm}$, а неговата должина е еднаква на $24+16=40\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2(24+40)=128\text{ cm}$.

28. Правоаголникот $ABCD$ има периметар 32 cm и е разделен на квадрат $AMND$ и правоаголник $MBCN$, кој што е разделен на три еднакви помали правоаголника. Средниот од овие правоаголници е разделен на два квадрата.



Опреди ја должината на страната на најмалите квадрати.

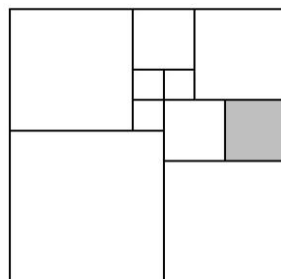
Решение. Со x да ја означиме страната на едно од малите квадрати. Тогаш за периметарот на правоаголникот $ABCD$ важи (види цртеж):



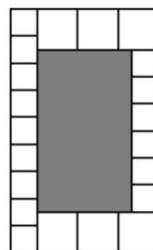
$$3x + 2x + 3x + 2x + 3x + 2x - 16x = 32.$$

Оттука наоѓаме $x = 2\text{ cm}$.

29. На квадратен лист хартија се нацртани десет квадрати (цртеж десно). Периметарот на сивиот квадрат е еднаков на 72 cm . Сивиот квадрат и горниот среден квадрат се еднакви. Опреди го периметарот на фигурата која што се добива ако се исече сивиот квадрат.



Решение. Должината на страната на сивиот квадрат е еднаква на $72:4 = 18\text{ cm}$. Ако со x ја означиме должината на страната на најмалиот квадрат, тогаш должината на страната на сивиот квадрат е $2x$, па затоа $2x = 18$, т.е. $x = 9\text{ cm}$. Сега, должината на страната на горниот десен квадрат е еднаква на $3x = 27\text{ cm}$, а должината на страната на долниот десен квадрат е еднаква на $2 \cdot 18 = 36\text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $27 + 18 + 36 = 81\text{ cm}$. Конечно, периметарот на фигурата добиена по сечењето на сивиот квадрат е еднаков на $4 \cdot 81 + 2 \cdot 18 = 360\text{ cm}$.

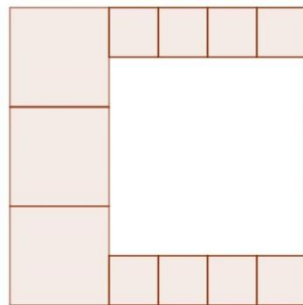


30. Големиот правоаголник на цртежот десно е составен од квадрати и мал сив правоаголник. Должината на поголемата страна на големиот право-

аголник е еднаква на 54 cm . Определи го периметарот на сивиот правоаголник.

Решение. На едната поголема страна на големиот правоаголник се поставени 9 мали квадрати, па затоа должината на страната на малиот квадрат е еднаква на $54:9=6\text{ cm}$. На другата поголема страна на големиот правоаголник се поставени 6 мали и 2 големи квадрати, па затоа должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $(54-6\cdot 6):2=9\text{ cm}$. Според тоа, должините на страните на сивиот правоаголник се еднакви на $6\cdot 6=36\text{ cm}$ и $3\cdot 9-6=21\text{ cm}$. Значи, периметарот на сивиот правоаголник е еднаков на $2\cdot (36+21)=114\text{ cm}$.

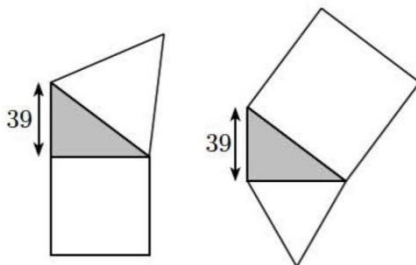
31. На цртежот десно е прикажан квадрат кој е поделен на 12 помали квадрати. Периметарот на еден од најмалите квадрати е еднаков на 12 cm . Определи го збирот на периметрите на сите квадрати.



Решение. Должината на страната на секој од најмалите квадрати е еднаква на $12:4=3\text{ cm}$. Понатаму, должината на страната на вторите по големина квадрати е двапати поголема од должината најмалите квадрати (зошто?). Значи, должината на страната на вторите по големина квадрати е еднаква на $2\cdot 3=6\text{ cm}$. Должината на страната на белиот квадрат е еднаква на $4\cdot 3=12\text{ cm}$, а должината на страната на почетниот квадрат е еднаква на $3\cdot 3=9\text{ cm}$.

Според тоа, збирот на периметрите на сите квадрати е еднаков на $8\cdot 4\cdot 3+3\cdot 4\cdot 6+4\cdot 12+4\cdot 18=96+72+48+72=288\text{ cm}$

32. Мила и Јана нацртале еден ист триаголник и го обоиле сиво. Едната страна на сивиот триаголник е долга 39 cm . Над другите страни тие нацр-



тале рамнострани триаголник и квадрат. Така добиле два различни цртежи, Мила левиот, а Јана десниот. Петаголникот на Мила има периметар 325 cm , а петаголникот на Јана има периметар 338 cm . Определи го периметарот на сивиот триаголник.

Решение. Нека должините на другите две страни на сивиот триаголник се x и y . Збирот на периметрите на двата добиени петаголници е еднаков на $2x + 3y + 3x + 2y + 2 \cdot 39$, па затоа

$$5(x + y) + 3 \cdot 39 = 325 + 338$$

$$x + y = (325 + 338 - 2 \cdot 39) : 5$$

$$x + y = 117.$$

Значи, периметарот на сивиот триаголник е еднаков на

$$x + y + 39 = 117 + 39 = 156\text{ cm}.$$

33. На цртежот десно се прикажани

првите шест елементи на низа во која се повторуваат вкупно 2018 елементи: рамнострани триаголник

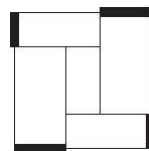


со страна 3 cm , квадрат со страна 3 cm , правоаголник со страни 6 cm и 3 cm итн., коишто се поставени последователно во овој редослед. Определи го периметарот во сантиметри на добиената фигура.

Решение. Бидејќи $2018 = 3 \cdot 672 + 2$ во дадената фигура 672 пати се повторува низата триаголник, квадрат и правоаголник и има уште по еден триаголник и еден квадрат. Периметарот на низата триаголник, квадрат и правоаголник е еднаков на $9 \cdot 3 + 6 = 33\text{ cm}$ и периметарот на целата фигура е еднаков на

$$672 \cdot 33 + 9 + 12 = 22197\text{ cm}.$$

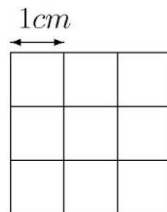
34. Квадрат со должина на страна 1 cm е поделен на правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Збирот на задебелените отсечки на цртежот е еднаков на 1 cm . Определи го периметарот на внатрешниот правоаголник.



Решение. Нека должините на задебелените хоризонтални отсечки се a и b , а должините на задебелените вертикални отсечки се c и d . Тогаш должината на хоризонталната страна на внатрешниот квадрат е еднаква на $1-a-b$, а должината на вертикалната страна е еднаква на $1-c-d$. Според тоа, периметарот на внатрешниот правоаголник е еднаков на

$$2 \cdot (1-a-b+1-c-d) = 2 \cdot (2-(a+b+c+d)) = 2 \cdot (2-1) = 2 \text{ cm}.$$

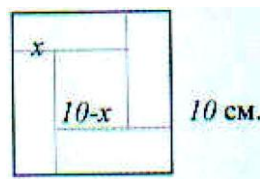
35. Колку правоаголници со периметар 8 cm содржи фигурата прикажана на цртежот десно. Не заборавај дека квадратот е правоаголник.



Решение. Имаме $8:2 = 4 \text{ cm}$. Затоа збирот на должините на страните на правоаголник со периметар 8 cm е еднаков на 4 cm . Но, $4 = 2+2 = 1+3$, од каде следува дека правоаголници со периметар 8 cm се четирите квадрати со должини на страни 2 cm и шесте правоаголници со должини на страни 1 cm и 3 cm . Значи, има $4+6=10$ правоаголници со саканото својство.

36. Даден е квадрат со должина на страна 10 cm . Подели го квадратот на пет правоаголници такви што периметарот на секој од нив ќе биде еднаков на 20 cm .

Решение. Бараната поделба е прикажана на цртежот десно. Останува да ја определиме должината на страната на внатрешниот правоаголник, кој во случајов е квадрат. Навистина при оваа поделба секој од останатите четири правоаголници е $x+10-x+x+10-x = 20 \text{ cm}$.



Страната на квадратот е еднаква на $10-2x$, па затоа

$$4(10-2x) = 20$$

$$10-2x = 5$$

$$2x = 5$$

$$x = 2 \text{ cm } 5 \text{ mm}.$$

37. Правоаголна градина има ширина 11 m и должина 15 m .

а) Покажи како може градината да се подели на правоаголни леи со должини на страни 3 m и 5 m .

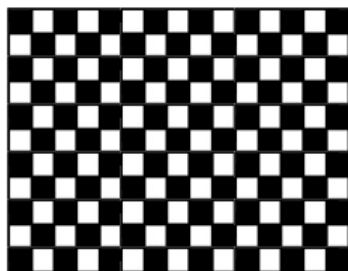
б) Околу градината треба да се направи патека со ширина 125 cm и истата да се покрие со квадратни плочки со должина на страна 25 cm . Колку плочки се потребни за покривање на патеката?

в) Горјан сака да прекопа целата градина така што ќе ја подели на 165 квадрати со должина на страна 1 m и откако ќе окопа даден квадрат, Горјан може да продолжи да копа само во соседен квадрат. Соседни се квадрати кои имаат заедничка страна. Дали постои квадрат од кој Горјан не смее да почне со копањето?

Решение. а) Прво градината ќе ја поделиме на три правоаголници со должини 15 m , а ширината на двата да биде 5 m и на едниот да биде 3 m . Потоа, правоаголниците со димензии 15×5 ги делиме на по пет правоаголници со димензии 3×5 , а правоаголникот со димензии 15×3 го делиме на три правоаголници со димензии 3×5 .

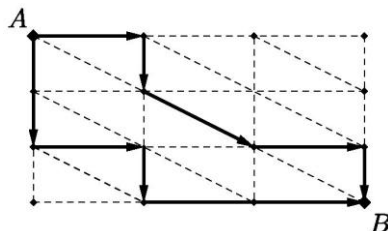
б) Површината која треба да ја поплочиме се состои од четири аголни квадрати со должина на страна 125 cm и четири правоаголници со вкупна должина $(11+15) \cdot 2 = 52\text{ m} = 5200\text{ cm}$ и со ширина 125 cm . Бидејќи $125:5=5$ и $5200:25=208$, за секој квадрат се потребни $5 \cdot 5 = 25$ плочки, а за правоаголниците се потребни $5 \cdot 208 = 1040$ плочк. Според тоа, вкупниот број плочки кој е потребен за да се поплочи патеката е еднаков на $4 \cdot 25 + 1040 = 1140$.

в) Квадратите на кои е поделена градината да ги обоиме како шаховската табла, но така што аголните квадрати да се црни (види цртеж). Тогаш имаме $6 \cdot 8 + 5 \cdot 7 = 83$ црни и $6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 82$ бели квадрати. При



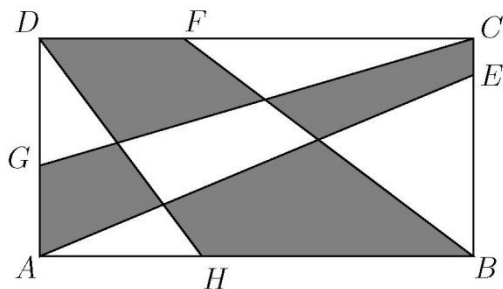
преминот од окопан на неокопан квадрат се менува бојата на квадратот. Според тоа, ако Горјан почне да копа од бел квадрат, тогаш колку што окопал бели квадрати може да окопа најмногу еднаков број црни квадрати. Но, бројот на црните квадрати е за 1 поголем од бројот на белите квадрати, па затоа Горјан не смее да почне да копа од бел квадрат.

38. Алеите на еден правоаголен парк се поделени на еднакви триаголни градини (цртеж десно). Прикажани се два пата од A до B , едниот од кои е долг 380 m , а другиот е долг 420 m . Колку метри е растојанието од A до B по права линија?



Решение. Подолгиот пат се состои од 3 хоризонтални дела со еднаква должина и 3 вертикални дела со еднаква должина. Според тоа, збирот на должините на 1 хоризонтален и 1 вертикален дел е еднаков на $420:3=140\text{ m}$. Пократкиот пат се состои од 2 вертикални, 2 хоризонтални и 1 кос дел. Збирот на должините на вертикалните и хоризонталните делови е еднаков на $2 \cdot 140 = 280\text{ m}$. Значи, должината на еден кос дел е еднаква на $380 - 280 = 100\text{ m}$. Конечно, патот од A до B по права линија се состои од 3 коси дела, па затоа неговата должина е еднаква на $3 \cdot 100 = 300\text{ m}$.

39. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на 72 cm (види цртеж). Четирите отсечки AE , BF , CG и DH го делат правоаголникот на триаголници и четириаголници.



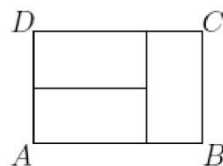
Збирот на периметрите на четирите сиви четириаголници е еднаков на 116 cm , а збирот на периметрите на белите

многоаголници е еднаков на 128 cm . Определи го збирот на отсечките AE, BF, CG и DH .

Решение. Збирот на периметрите на сивите четириаголници е еднаков на збирот на должините на отсечките AE, BF, CG и DH и на отсечките AG, BH, CE и DF . Збирот на периметрите на белите многоаголници е еднаков на збирот на отсечките AE, BF, CG и DH и на отсечките AH, BE, CF и DG . Според тоа, збирот на периметрите на белите и сивите многоаголници е еднаков на двапати збирот на отсечките AE, BF, CG и DH и периметарот на правоаголникот. Затоа збирот на отсечките AE, BF, CG и DH е еднаков на $(116+128-72):2=86\text{ cm}$.

IV.3. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПЛОШТИНИ

40. Правоаголникот $ABCD$ е составен од три еднакви правоаголници (цртеж десно). Ако $\overline{AD}=12\text{ cm}$, пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Од цртежот е јасно дека

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{AD}:2 = 12 + 12:2 = 18\text{ cm}.$$

Според тоа, плоштината на правоаголникот $ABCD$ е еднаква на

$$12 \cdot 18 = 216\text{ cm}^2,$$

а неговиот периметар е еднаков на

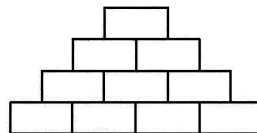
$$2 \cdot (12 + 18) = 60\text{ cm}.$$

41. Паркинг за такси возила е во форма на правоаголник со димензии 9 m и 48 m . Една третина од паркингот е слободна површина на која не е дозволено паркирање, а останатиот дел е поделен на места за паркирање, секое од кое има плоштина 6 m^2 . Колку такси-возила може истовремено да престојуваат на паркингот?

Решение. Плоштината на паркингот изнесува $9 \cdot 48 = 432\text{ m}^2$. Слободната површина на која не е дозволено паркирање е тре-

тина од паркингот, што значи дека нејзината плоштина е еднаква на $432:3=144\text{ m}^2$. Значи, површината која е поделена на паркинг места има плоштина $432-144=288\text{ m}^2$ и како секое паркинг место е со плоштина 6 m^2 , заклучуваме дека на паркингот истовремено може да престојуваат $288:6=48$ такси-возила.

42. Фигурата на цртежот десно се состои од 10 еднакви правоаголници кај кои едната страна е двапати подолга од другата. Периметарот на фигурата е еднаков на 1440 cm . Колкава е плоштината на фигурата?



Решение. Нека должината на помалата страна на еден од десетте правоаголници е еднаква на a . Тогаш должината на поголемата страна е еднаква на $2a$. Периметарот на фигурата се состои од 8 вертикално поставени пократки страни и 8 хоризонтално поставени подолги страни. Затоа важи

$$8a + 8 \cdot 2a = 1440$$

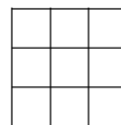
$$24a = 1440$$

$$a = 60\text{ cm}.$$

Според тоа, плоштината на еден мал правоаголник е еднаква на $60 \cdot 120 = 7200\text{ cm}^2$, па затоа плоштината на целата фигура е еднаква на

$$10 \cdot 7200 = 72000\text{ cm}^2.$$

43. Квадрат со плоштина 9 cm^2 е поделен на 9 еднакви квадрати (види цртеж).



а) Пресметај го збирот на плоштините на сите квадрати содржани во даденат фигура.

б) Пресметај го збирот на плоштините на сите правоаголници кои не се квадрати и се содржани во дадената фигура.

Решение. Бидејќи $3 \cdot 3 = 9$ должината на страната на квадратот е еднаква на 3 cm . Значи, должината на страната на малите квадратчиња е еднаква на 1 cm .

а) Дадената фигура содржи 9 квадрати со должина на страна 1 cm , 4 квадрати со должина на страна 2 cm и 1 квадрат со должина на страна 3 cm . Збирот на плоштините на сите квадрати е еднаков на

$$9 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3 = 34\text{ cm}^2.$$

б) Дадената фигура содржи 12 правоаголници со димензии $1\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, 6 правоаголници со димензии $1\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ и 4 правоаголници со димензии $2\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Според тоа, збирот на плоштините на сите правоаголници кои не се квадрати е еднаков на

$$12 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 66\text{ cm}^2.$$

44. Збирот на периметрите на два квадрата е еднаков на 64 cm . Должината на страната на едниот квадрат е за 2 cm поголема од должината на страната на другиот квадрат. Пресметај ги периметрите и плоштините на овие квадрати.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи должината на страната на првиот квадрат е за 2 cm поголема од должината на страната на вториот квадрат, добиваме дека периметарот на првиот квадрат е $4 \cdot 2 = 8\text{ cm}$ поголем од периметарот на вториот квадрат.

Според тоа, ако со L го означиме периметарот на вториот квадрат, тогаш $L + L + 8 = 64$, т.е. $L = 28\text{ cm}$. Значи, периметарот на првиот квадрат е еднаков на $L + 8 = 36\text{ cm}$.

Должината на страната на првиот квадрат е еднаква на $36 : 4 = 9\text{ cm}$, што значи дека неговата плоштина е еднаква на $9 \cdot 9 = 81\text{ cm}^2$.

Должината на страната на вториот квадрат е еднаква на $28 : 4 = 7\text{ cm}$, што значи дека неговата плоштина е еднаква на $7 \cdot 7 = 49\text{ cm}^2$.

Втор начин. Со a да ја означиме должината на страната на малиот квадрат (види цртеж). Тогаш од условот на задачата последователно добиваме

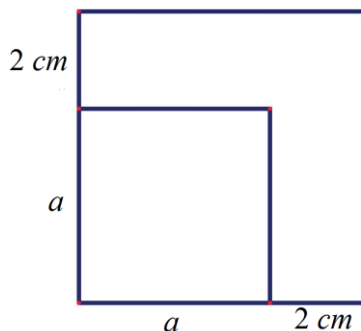
$$4a + 4(a + 2) = 64$$

$$a + a + 2 = 16$$

$$2a + 2 = 16$$

$$2a = 14$$

$$a = 14 : 2 = 7 \text{ cm.}$$



Значи, должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $a + 2 = 9 \text{ cm}$.

Периметарот на малиот квадрат е еднаков на $4 \cdot 7 = 28 \text{ cm}$, а неговата плоштина е еднаква на $7 \cdot 7 = 49 \text{ cm}^2$.

Периметарот на големиот квадрат е еднаков на $4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}$, а неговата плоштина е еднаква на $9 \cdot 9 = 81 \text{ cm}^2$.

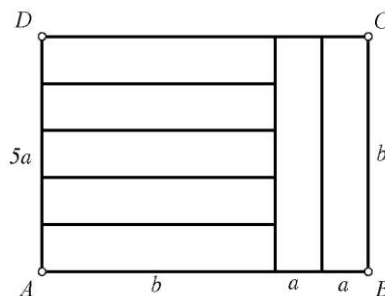
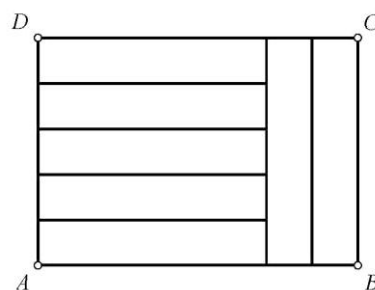
45. Ангела направила седум еднакви хартиени ленти и од нив го составиле правоаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно.

Плоштината на правоаголникот е еднаква на 560 cm^2 . Определи ги должините на страните на хартиените ленти.

Решение. Големиот правоаголник е составен од седум еднакви мали правоаголници. Затоа плоштината на еден мал правоаголник е еднаква на

$$560 : 7 = 80 \text{ cm}^2.$$

Нека со a и b ги означиме должините на помалата и поголема-



та страна на малиот правоаголник, соодветно (види цртеж). Од цртежот следува дека $b = 5a$. Затоа

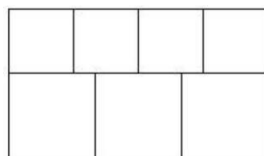
$$a \cdot 5a = 80$$

$$a \cdot a = 16$$

$$a = 4 \text{ cm.}$$

Според тоа, должината на помалите страни на хартиени ленти е $a = 4 \text{ cm}$, а должината на поголемите страни е $b = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$.

46. Правоаголникот на цртежот десно е составен од седум квадрати. Периметарот на малиот квадрат е еднаков на 132 cm . Определи ја плоштината на правоаголникот.



Решение. Должината на правоаголникот е еднаква на периметарот на малиот квадрат, т.е. на 132 cm . Должината на страната на малиот квадрат е еднаква на $132 : 4 = 33 \text{ cm}$, а должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $132 : 3 = 44 \text{ cm}$. Ширината на правоаголникот е еднаква на $33 + 44 = 77 \text{ cm}$. Плоштината на правоаголникот е еднаква на $132 \cdot 77 = 10164 \text{ cm}^2$

47. Пресметај ја плоштината на црната фигура прикажана на цртежот десно. Должините се изразени во сантиметри.

Решение. Црната фигура е добиена кога од квадрат со должина на страна

$$2 + 4 + 6 = 1 + 2 + 9 = 12 \text{ cm}$$

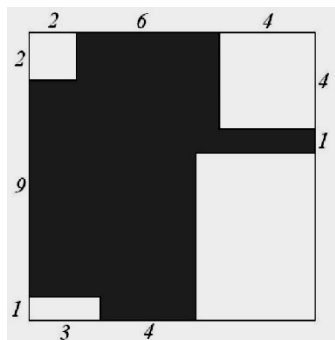
се отсечени: квадрат со должина на страна 2 cm , квадрат со должина на

страна 4 cm , правоаголник со должини на страни 1 cm и 3 cm , правоаголник со должини на страни

$$12 - 3 - 4 = 5 \text{ cm} \text{ и } 12 - 1 - 4 = 7 \text{ cm}.$$

Според тоа, плоштината на сивата фигура е еднаква на

$$12 \cdot 12 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 1 \cdot 3 - 5 \cdot 7 = 144 - 4 - 16 - 3 - 35 = 82 \text{ cm}^2.$$



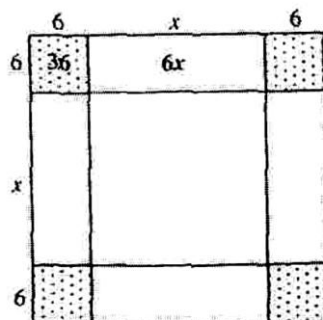
48. Од еден квадрат во средината е исечен друг квадрат., така што останала рамка со ширина 6 cm . Плоштината на рамката е еднаква на 384 cm^2 . Определи ја страната на исечениот квадрат.

Решение. Нека x е должината на страната на исечениот квадрат (цртеж десно). Тогаш плоштината на рамката е еднаква на $4 \cdot 6x + 4 \cdot 6 \cdot 6 = 24x + 144$, па затоа

$$24x + 144 = 384$$

$$24x = 240$$

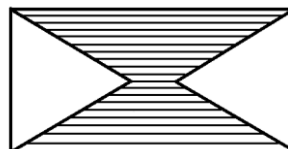
$$x = 10\text{ cm}.$$



Значи, должината на страната на исечениот квадрат е 10 cm .

49. Играјќи се со хартија во облик на правоаголник со плоштина 351 cm^2 и должина на едната страна 27 cm , Горјан отсекол два рамнострани триаголници над пократките страни на правоаголникот. Определи го периметарот на хартијата која останала после отсекувањето на триаголниците.

Решение. Плоштината на правоаголникот е еднаква на 351 cm^2 , а должината на едната страна е 27 cm , па затоа должината на другата страна е $351 : 27 = 13\text{ cm}$.



Преостанатото парче хартија изгледа како штарфираната фигура на цртежот десно. Периметарот на оваа фигура е

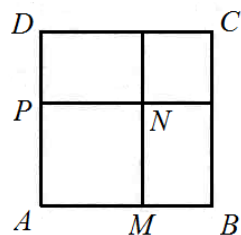
$$L = 4 \cdot 13 + 2 \cdot 27 = 52 + 54 = 106\text{ cm}.$$

50. Правоаголник со периметар 24 cm има ширина 4 cm . Определи ја плоштината на овој правоаголник.

Решение. Збирот на страните на правоаголникот е еднаков на $24 : 2 = 12\text{ cm}$. Значи, неговата должина е еднаква на $12 - 4 = 8\text{ cm}$

Конечно, плоштината на правоаголникот е $4 \cdot 8 = 32\text{ cm}^2$.

51. Дадени се два квадрати $ABCD$ и $AMNP$ (види цртеж). Разликата на должините на нивните страни е еднаква на 16 mm , а разликата на нивните плоштини е еднаква на 992 mm^2 . Пресметај го збирот на нивните периметри.



Решение. Со a да ја означиме должината на страната на квадратот $AMNP$. Тогаш плоштината на поголемиот квадрат е поголема за $16a + 16a + 256$ од плоштината на малиот квадрат, што значи дека

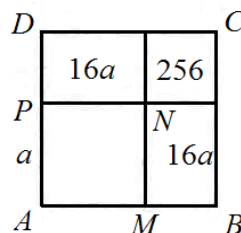
$$16a + 16a + 256 = 992$$

$$32a + 256 = 992$$

$$32a = 736$$

$$a = 736 : 32$$

$$a = 23\text{ mm}.$$



Значи, должината на страната на квадратот $AMNP$ е 23 mm , а неговиот периметар е еднаков на $L = 4 \cdot 23 = 92\text{ mm}$. Должината на страната на квадратот $ABCD$ изнесува $23 + 16 = 39\text{ mm}$, па затоа неговиот периметар изнесува $L_1 = 4 \cdot 39 = 156\text{ mm}$.

Конечно, збирот на периметрите на квадратите $ABCD$ и $AMNP$ изнесува $L + L_1 = 92 + 156 = 248\text{ mm}$.

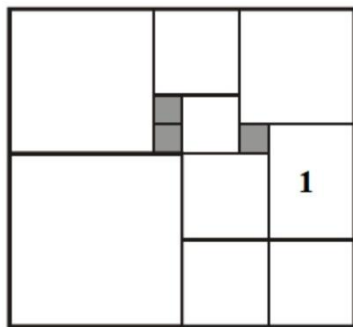
52. Горјан ги запишал броевите 5, 16, 23, 32 и 41, а потоа нацртал квадрати чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви, а периметрите изразени во сантиметри се еднакви на некои од запишаните броеви. Колку квадрати нацртал Горјан?

Решение. Имаме:

$$5 = 4 \cdot 1 + 1, \quad 16 = 4 \cdot 4, \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3, \quad 32 = 4 \cdot 8, \quad 41 = 4 \cdot 10 + 1,$$

што значи дека само броевите 16 и 32 може да бидат еднакви на периметри на квадрати. Значи, Горјан нацртал 2 квадрата.

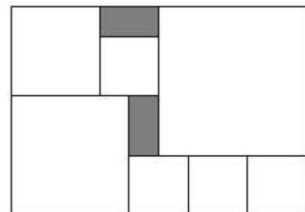
53. Правоаголникот даден на цртежот десно е поделен на 12 фигури. Едната од нив е правоаголник и е означен со 1, а останатите 11 се квадрати. Должината на секој од осенчените квадрати е еднаква на 1 cm . Определи ја плоштината на дадениот правоаголник.



Решение. Должината на страната на квадратот меѓу осенчените квадрати е еднаква на 2 cm , а должината на страната на квадратот над него е 3 cm . Должината на страната на квадратот во горниот десен агол е еднаква на 4 cm , а должината на страната на квадратот во горниот лев агол е еднаква на 5 cm . Понатаму, должината на страната на квадратот во долниот лев агол е еднаква на 6 cm .

Според тоа, дадениот правоаголник има должини на страни еднакви на $5+4+3=12\text{ cm}$ и $5+6=11\text{ cm}$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $11 \cdot 12 = 132\text{ cm}^2$.

54. Правоаголникот на цртежот десно е составен од седум квадрати и два еднакви правоаголници. Должините на страните на сивите правоаголници се 1 cm и 2 cm . Определи ги периметарот и плоштината на големиот правоаголник.

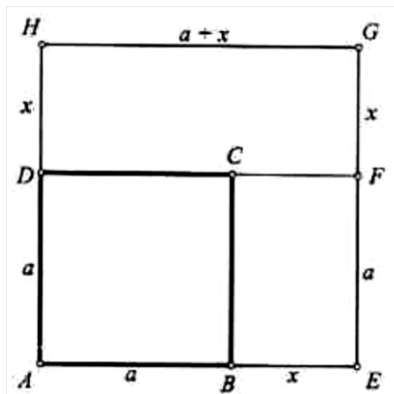


Решение. Должината на страната на горниот мал квадрат е еднаква на 2 cm . Понатаму, должината на страната на квадратот во десниот горен агол е еднаква на $1+2+2=5\text{ cm}$. Значи, должината на страната на трите мали најдолни квадрати е еднаква на $(5+1):3=2\text{ cm}$. Понатаму, должината на страната на долниот лев квадрат е еднаква на $2+2=4\text{ cm}$, па затоа должините на страните на големиот правоаголник се еднакви на $5+2=7\text{ cm}$ и

$4+3\cdot 2=10\text{ cm}$. Конечно периметарот на големиот правоаголник е еднаков на $2\cdot(7+10)=34\text{ cm}$, а неговата плоштина е еднаква на $7\cdot 10=70\text{ cm}^2$.

55. Даден е квадрат $ABCD$. Ако за иста должина ги продолжиме страната AB преку темето B и страната AD преку темето D , добиваме соседни страни на квадрат со периметар 36 cm поголем од периметарот на квадратот $ABCD$, а плоштина за 135 cm^2 поголема од плоштината на квадратот $ABCD$. Определи ја должината на страната на квадратот $ABCD$.

Решение. Со a да ја означиме должината настраната на квадратот $ABCD$, а со x должината за која се продолжени страните AB и AD . Новиот квадрат да го означиме со $AEGH$ (цртеж десно). Должината на страната на овој квадрат е $a+x$, па затоа неговиот периметар е за $4x$ поголем од периметарот на квадратот $ABCD$.



Значи, $4x=36$, т.е. $x=9\text{ cm}$. Понатаму, плоштината на $AEGH$ е поголема од плоштината на квадратот $ABCD$ за

$$ax+(a+x)x=9a+9(a+9)=18a+81,$$

па затоа $18a+81=135$, од каде наоѓаме $18a=54$, односно $a=3\text{ cm}$. Значи, должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на 3 cm .

56. Ако една од страните на правоаголник се зголеми трипати, а другата се намали за 12 cm , тогаш ќе се добие квадрат. Определи ги страните на правоаголникот ако:
- неговиот периметар е еднаков на 2 m ,
 - периметарот му е 80 cm помал од периметарот на квадратот.

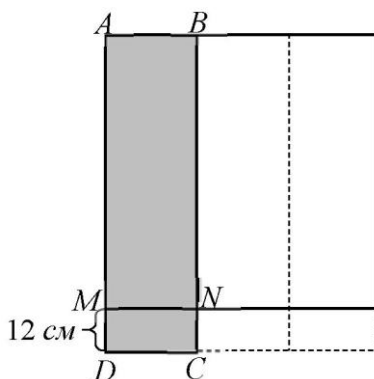
Решение. а) Ако ја намалиме едната страна на правоаголникот $ABCD$ за 12 cm , добиваме правоаголник $ABNM$ чиј што периметар е за $2 \cdot 12 = 24\text{ cm}$ помал, т.е. е еднаков на

$$200 - 24 = 176\text{ cm}.$$

Понатаму, ако ја зголемиме трипати другата страна на правоаголникот $ABNM$, добиваме квадрат, т.е. страната AB се нанесува точно трипати на AM . Значи, периметарот на правоаголникот $ABNM$ е еднаков на осум пати по должината на страната AB . Значи, $176 : 8 = 22\text{ cm}$ е должината на AB , а $3 \cdot 22 = 66\text{ cm}$ е должината на AM .

Според тоа, страните на почетниот правоаголник се со должини 22 cm и $66 + 12 = 78\text{ cm}$.

б) По намалувањето на едната страна на правоаголникот за 12 cm , периметарот се намалува за 24 cm и е за $80 + 24 = 104\text{ cm}$ помал од периметарот на квадратот. Од друга страна периметарот на квадратот е поголем од периметарот на правоаголникот $ABNM$ за четири пати должината на страната AB . Значи, должината на страната AB е еднаква на $104 : 4 = 26\text{ cm}$. Страните на почетниот правоаголник се 26 cm и $3 \cdot 26 + 12 = 90\text{ cm}$.

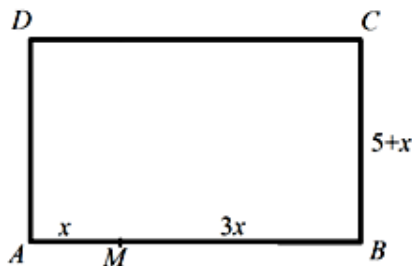


57. Даден е правоаголник $ABCD$ со периметар 40 cm . На страната AB избрана е точка M таква што должината на отсечката AM е 5 cm помала од должината на страната BC , а должината на отсечката BM е трипати поголема од должината на отсечката AM . Пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Со x да ја означиме должината на отсечката AM (цртеж десно). Тогаш

$$\overline{BM} = 3x \text{ и } \overline{BC} = x + 5.$$

Затоа $\overline{AB} = 4x$ и периметарот



на правоаголникот $ABCD$ изнесува

$$L = 2(4x + x + 5) = 10x + 10.$$

Но, $L = 40 \text{ cm}$, што значи $10x + 10 = 40$, т.е. $x = 3 \text{ cm}$.

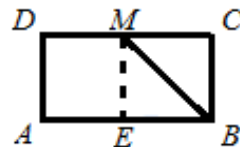
Според тоа, $\overline{AB} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}$ и $\overline{BC} = 3 + 5 = 8 \text{ cm}$, па затоа за плоштината на правоаголникот $ABCD$ добиваме

$$P = 12 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2.$$

58. Должините на страните на правоаголникот $ABCD$ се еднакви на 8 cm и 4 cm . На подолгата страна CD земена е точка M која ја дели страната на два еднакви дела. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABMD$.

Решение. Имаме

$$\overline{DM} = \overline{MC} = \overline{MC} : 2 = 8 : 2 = 4 \text{ cm}.$$



Ако E е средина на страната AB добиваме дека четириаголникот $ABMD$ е составен од квадратот $AEMD$ и триаголникот EBM . Според тоа, плоштината на четириаголникот $ABMD$ е еднаква на збирот на плоштините на квадратот $AEMD$ и триаголникот EBM . Плоштината на квадратот $AEMD$ е еднаква на $4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$, а плоштината на триаголникот EBM е еднаква на половина од плоштината на квадратот $EBCM$, т.е. на $(4 \cdot 4) : 2 = 8 \text{ cm}^2$. Според тоа, плоштината на четириаголникот $ABMD$ е еднаква на $16 + 8 = 24 \text{ cm}^2$.

59. Периметарот на една домино плочка е 186 mm .

Пресметај ја плоштината на фигурата која направена од три домино плочки, прикажана на цртежот десно.



Решение. Ако со a ја означиме должината на помалата страна на домино плочката, тогаш должината на поголемата страна изнесува $2a$. Според тоа периметарот на една домино плочка е еднаков на $2a + 2 \cdot 2a = 6a$, па затоа $6a = 186$, од каде наоѓаме $a = 31 \text{ mm}$.

Значи, страните на домино плочката се со должини 31 mm и 62 mm , па затоа плоштината на една домино плочка е

$$P = 31 \cdot 62 = 1922\text{ mm}^2.$$

Конечно, плоштината на дадениот лик изнесува

$$3 \cdot 1922 = 5766\text{ mm}^2.$$

60. Квадратот $AEFG$ лежи во квадратот $ABCD$. Плоштината на квадратот $ABCD$ е за 105 cm^2 поголема од плоштината на квадратот $AEFG$, а страната на $ABCD$ е 7 cm подолга од страната на $AEFG$. Пресметај ги плоштините и периметрите на квадратите $ABCD$ и $AEFG$.

Решение. Нека x е должината на страната на квадратот $AEFG$ (цртеж десно). Тогаш

$$P_1 = x \cdot x$$

$$P_2 = P_4 = 7x$$

$$P_3 = 7 \cdot 7 = 49$$

$$P_2 + P_3 + P_4 = 105$$

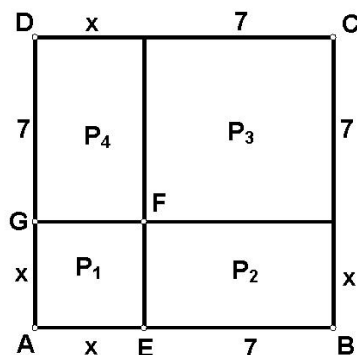
па затоа $7x + 49 + 7x = 105$, т.е.

$x = 4\text{ cm}$. Според тоа

$$P_{AEFG} = P_1 = 4 \cdot 4 = 16\text{ cm}^2 \text{ и } L_{AEFG} = 4x = 16\text{ cm}.$$

Должината на страната на квадратот $ABCD$ е $x + 7 = 11\text{ cm}$, па затоа

$$L_{ABCD} = 4 \cdot 11 = 44\text{ cm} \text{ и } P_{ABCD} = 11 \cdot 11 = 16 + 105 = 121\text{ cm}^2.$$



61. Квадрат со четири отсечки е поделен на пет правоаголници (види цртеж). Определи ги периметарот и плоштината на квадратот ако збирот на периметрите на петте правоаголници е еднаков на 72 cm .



Решение. Со a да ја означиме должината на страната на квадратот, а со b, c, d, e, f да ги означиме должините на пократките страни на петте правоаголници (види цртеж). Тогаш

$$(2a+2b)+(2a+2c)+(2a+2d)+ \\ +(2a+2e)+(2a+2f)=72$$

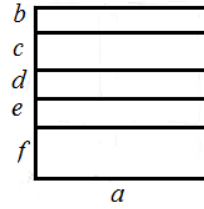
т.е.

$$10a+2(b+c+d+e+f)=72.$$

Од друга страна имаме

$$b+c+d+e+f=a,$$

па затоа $10a+2a=72$, од каде наоѓаме $a=6\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на квадратот е $L=4a=24\text{ cm}$, а неговата плоштина е $P=6\cdot 6=36\text{ cm}^2$.



62. Ако едната страна на квадратот ја зголемиме трипати, а другата ја зголемиме двапати, ќе добиеме правоаголник со плоштина 96 cm^2 . Определи ја разликата меѓу периметрите на правоаголникот и квадратот.

Решение. Со a да ја означиме страната на квадратот. Тогаш страните на правоаголникот се еднакви на $3a$ и $2a$ (види цртеж).

Значи плоштината на правоаголникот е $P=2a\cdot 3a=6a\cdot a$.

Од друга страна $P=96\text{ cm}^2$, па затоа

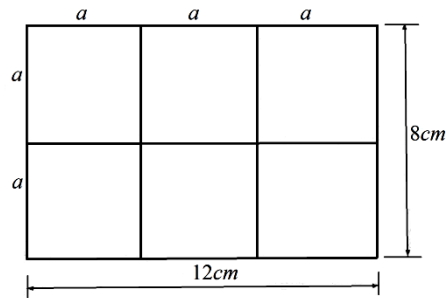
$$6a\cdot a=96, \text{ т.е. } a\cdot a=16=4\cdot 4.$$

Според тоа, страната на квадратот е $a=4\text{ cm}$. Значи, периметарот на квадратот е $L=4a=4\cdot 4=16\text{ cm}$, а периметарот на правоаголникот е

$$L_1=2(3a+2a)=10a=10\cdot 4=40\text{ cm}.$$

Конечно, разликата меѓу периметрите е еднаква на

$$L_1-L=40-16=24\text{ cm}.$$



63. Радица има правоаголно парче хартија со периметар 46 cm и должините на страните изразени во сантиметри се природни броеви.

а) Определи ги должините на страните така што плоштината на хартијата е најголема.

б) За најденото решение под а) определи колку најмногу правоаголници со должини на страни 3 cm и 4 cm може од правоаголникот да исече Радица. Како тоа може да го направи?

Решение. а) Збирот на должините на страните е еднаков на $46:2 = 23\text{ cm}$. Од табелата

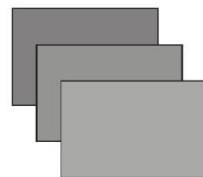
Шири.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Долж.	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
Плош.	22	42	60	76	90	102	112	120	126	130	132

е јасно дека правоаголникот има најголема плоштина кога должините на страните се еднакви на 11 cm и 12 cm .

б) Плоштината $11 \cdot 12 = 132\text{ cm}^2$ на правоаголникот е еднаква на плоштините на $132:12 = 11$ правоаголници со димензии 3 cm и 4 cm . Расекувањето можеме да го направиме на следниов начин: прво отсекуваме два правоаголници со димензии 12×4 и еден правоаголник со димензии 12×3 . Потоа секој правоаголник со димензии 12×4 го расекуваме на 4 правоаголници со димензии 4×3 , а правоаголникот со димензии 12×3 го делиме на три правоаголници со димензии 4×3 .

64. Иван располага со голем број еднакви картончиња во форма на правоаголник со димензии: должина 12 cm и ширина 8 cm . Тој направил две одделни подредувања:

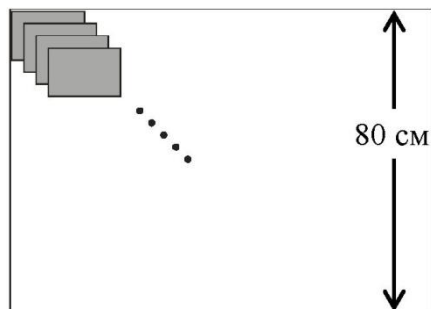
а) Прво подредување (цртеж десно): Става на масата едно картонче. Второто картонче го става над првото при што го поместува за 3 cm надолу и 2 cm надесно. Третото картонче го става над второто при што го поместува исто така за 3 cm надолу и 2 cm надесно. Определи ја плоштината на фигурата која ја добил Иван откако наредил три картончиња.



б) Второ подредување (цртеж десно): Става едно картонче во горниот лев агол на масата. Второто го става над првото првото така што го поместува за 1 cm надолу и за 1 cm надесно. Третото

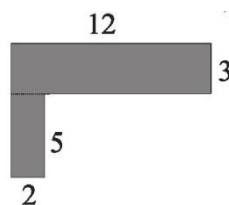
го става над второто така што го поместува 1 cm надолу и 1 cm надесно. Иван продолжува на овој начин да става картончиња додека стигне до работ на масата.

Ако масата е правоаголна, долга 110 cm и широка 80 cm ,



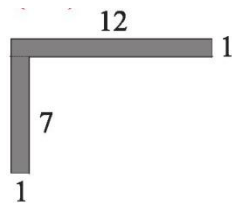
колку картончиња треба да стави Иван, додека стигне до раб на масата? Определи ја плоштината на непокриениот дел на масата.

Решение. а) Добиената фигура е составена од еден правоаголник со димензии 12 cm и 8 cm и две фигури како на цртежот десно. Плоштината на секоја од овие фигури е еднаква на $12 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 46\text{ cm}^2$. Плоштина на правоагол-



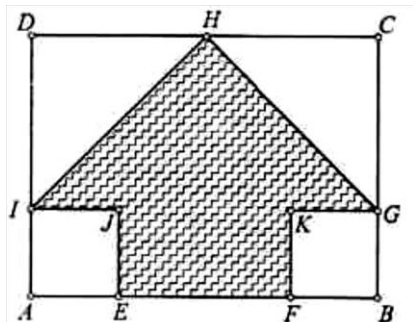
никот е еднаква на $12 \cdot 8 = 96\text{ cm}^2$. Конечно, плоштината на добиената фигура е еднаква на $2 \cdot 46 + 96 = 188\text{ cm}^2$.

б) Масата има димензии 110 cm по должина и 80 cm по ширина. За да стигне до десниот раб Иван треба да стави $1 + (110 - 12) : 1 = 99$ картончиња, а за да стигне до долниот раб тој треба да стави $1 + (80 - 8) : 1 = 73$ картончиња.



Според тоа, Иван прво ќе стигне до долниот раб на масата. Фигурата оформена од картончињата е составена од еден правоаголник со димензии 12 cm и 8 cm и 72 фигури како на горниот цртеж, секоја од кои има плоштина $12 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 19\text{ cm}^2$. Значи, плоштината на покриениот дел од масата е еднаква на $72 \cdot 19 + 12 \cdot 8 = 1464\text{ cm}^2$. Конечно, плоштината на непокриениот дел од масата е еднаква на $80 \cdot 110 - 1464 = 7336\text{ cm}^2$.

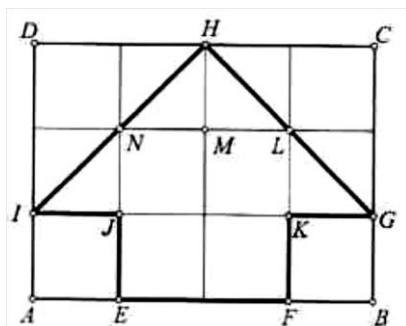
65. Даден е правоаголник $ABCD$ со должини на страни $\overline{AB}=8\text{ cm}$ и $\overline{AD}=6\text{ cm}$ (цртеж десно). Точките E, F, G, H, I, J, K се избрани така што четириаголниците $AEIJ$ и $FBGK$ се квадрати со должини на страни 2 cm , а точката H е средина на страната CD . Пресметај ја плоштината на штрафираниот дел на цртежот.



Решение. Нека правоаголникот $ABCD$ го поделиме на квадрати со должина на страна 2 cm (види цртеж). Плоштината на секој делбен квадрат е

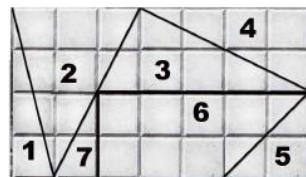
$$P_1 = 2 \cdot 2 = 4\text{ cm}^2.$$

Понатаму, триаголниците IJN , KGL , NMH и MLH се половин-



ки на квадрат со должина на страна 2 cm , па затоа плоштината на секој од нив е $P_2 = 4 : 2 = 2\text{ cm}^2$. Конечно, плоштината на штрафираната фигура е $P = 4P_1 + 4P_2 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 24\text{ cm}^2$.

66. Антон, Борис, Васил, Ѓорѓи и Данчо решиле да јадат чоколадо. Чоколадото им паднало и кога го распаковале виделе дека се скршило на седум парчиња (цртеж десно). Борис го изел најголемото парче, Данчо и Ѓорѓи изеле еднакво количество чоколадо, но Ѓорѓи изел три парчиња, а Данчо - само едно парче. Васил изел една седмина од целото чоколадо, а остатокот од чоколадото го изел Антон. Кој дел од чоколадото го изел Антон?



Решение. Плоштината на парчето означено со бројот 1 е еднаква на половина од плоштината на правоаголник со димензии 1×4 , т.е. таа е еднаква на плоштината на 2 клетки. Аналогно,

плоштините на парчињата означени со броевите 4, 5 и 7 се еднакви на плоштините на 4, 2 и 1 клетка, соодветно. Парчето означено со бројот 2 се состои од половина правоаголник со димензии 1×4 и половина правоаголник со димензии 2×4 , па затоа неговата плоштина е еднаква на плоштината на 6 клетки. Аналогно, плоштината на парчето означено со бројот 3 е еднаква на плоштината на 5 клетки, а бидејќи парчето означено со бројот 7 се добива ако од правоаголник со димензии 2×5 се одземе парчето означено со бројот 5, добиваме дека неговата плоштина е еднаква на плоштината на 8 клетки.

Значи, Борис го изел парчето 6. Понатаму, целото чоколадо е со димензии 4×7 , т.е. има 28 клетки, па како Васил изел една седмина од целото чоколадо, заклучуваме дека тој изел 4 клетки, односно го изел парчето 4. Останаа парчињата 1, 2, 3, 5 и 7, чии плоштини се еднакви на 2, 6, 5, 2 и 1 клетка, соодветно. Но, $5 = 2 + 2 + 1$, па заклучуваме дека Данчо го изел парчето 3, а Ѓорѓи ги изел парчињата 1, 5 и 7. Конечно, останува дека Антон го изел парчето 2.

IV.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

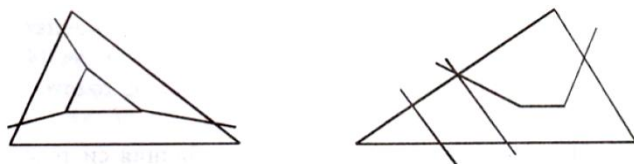
67. Фигурата на цртежот десно се состои од шест квадратчиња со должина на страна 1 cm . Од четири такви фигури е составен правоаголник. Определи го периметарот на овој правоаголник.



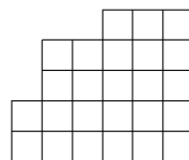
Решение. Правоаголникот составен од четири вакви фигури има плоштина $4 \cdot 6 = 24\text{ cm}^2$. Лесно се гледа дека овој правоаголник не може да има страни со должина 1, 2 или 3 cm , а може да се состави правоаголник со должини на страни 4 cm и 6 cm . Според тоа, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2 \cdot (4 + 6) = 20\text{ cm}$.

68. Даден е остроаголен триаголник. Подели го триаголникот на четири дела: еден триаголник, еден четириаголник, еден петаголник и еден шестаголник.

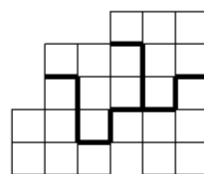
Решение. На долните два цртежи се дадени две поделби на остроаголен триаголник при што имаме еден триаголник, еден четириаголник, еден петаголник и еден шестаголник.



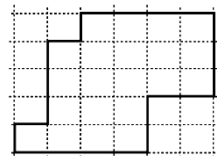
69. Раздели ја фигурата прикажана на цртежот десно на четири еднакви делови. Деловите може да се вртат.



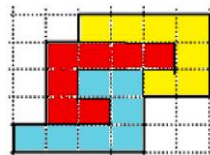
Решение. Дадената фигура е составена од 24 единечни квадратчиња. Значи секој од четирите делови треба да содржи 6 единечни квадратчиња. Една поделба е дадена на цртежот десно.



70. Фигурата прикажана во мрежата на цртежот десно подели ја на три еднакви дела. Деловите може да се вртат и превртуваат.

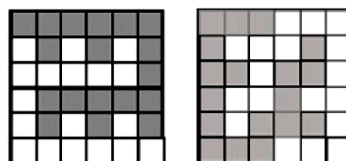


Решение. Дадената фигура е составена од 21 квадратче. Затоа секој од трите дела е составен 7 квадратчиња. Понатаму, еден од деловите мора да го содржи првиот ред на фигурата, а друг дел мора да го содржи петтиот ред на фигурата (Зошто?). Сега, лесно се добива поделбата прикажана на горниот цртеж.

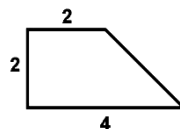


71. Даден квадрат со димензии 6×6 расечи го на два еднакви 24-аголника. Расекувањето може да се прави само по страните на единечните полиња.

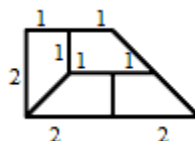
Решение. Задача има повеќе решенија. Две од нив се дадени на цртежите десно.



72. Дадената фигура на цртежот десно подели ја на четири еднакви делови според облик и плоштина.



Решение. Дадената фигура има два прави, еден остар и еден тап агол. Според тоа, една од четирите помали фигури мора да го има истиот тап агол како и дадената фигура, а друга од четирите помали фигури мора да го има истиот остар агол како и дадената фигура. Сега веќе лесно можеме да ја добиеме поделбата прикажана на цртежот десно.



73. За новогодишните празници Цветанка запакувала два исти пакети за своите ќерки Фросина и Вера. Пакетите биле со основа квадрат и висина еднаква



половина од должината на страната на квадратот. Пакетите ги заврзала со исти ленти, но за да ги разликува пакетите Цветанка различно ги заврзала лентите (види цртеж). Определи ја должината на страната на квадратот ако се знае дека едната лента е 45 cm подолга од другата.

Решение. Нека страната на основата на пакетот е $2x$. Тогаш висината на пакетот x . Ако должината на панделката е еднаква на b , тогаш должината на лентата употребена за левиот пакет е еднаква на

$$(2x + x + 2x + x) + (2x + x + 2x + x) + b = 12x + b,$$

а должината на лентата употребена за десниот пакет е

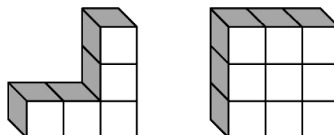
$$(2x + x + 2x + x) + (2x + 2x + 2x + 2x) + b = 14x + b.$$

Разликата во должините на двете ленти е еднаква на

$$14x + b - (12x + b) = 2x,$$

т.е. на должината на страната на основата на пакетот. Според условот таа разлика е еднаква на 45 cm , што значи дека должината на основата на пакетот е 45 cm .

74. Од еднакви коцки се формирани две тела (цртеж десно). За бојадисување



на телото составено од 9 коцки се потребни 90 грама боја. Колку грама боја се потребни за бојадисување на површината на телото составено од 5 коцки?

Решение. Површината на телото составено од 9 коцки се состои од $2 \cdot 9 + 4 \cdot 3 = 30$ еднакви квадрати. Значи, за бојадисување на еден квадрат се потребни $90 : 30 = 3$ грама боја. Површината на телото составено од 5 коцки се состои од

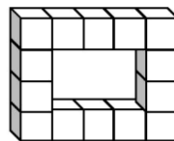
$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 22$$

еднакви квадрати. Затоа за бојадисување на неговата површина се потребни $22 \cdot 3 = 66$ грама боја.

75. Фросина направила квадар со димензии $2\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$, а Вера направила коцка со должина на раб 3 cm . Самоил во картон треба да направи правоаголна дупка низ која може да помине квадарот на Фросина, но не може да помине коцката на Вера. Определи ги димензиите на барем една од дупките кои може да ги направи Самоил?

Решение. Задачата има повеќе решенија. На пример, дупката може да има димензии $2\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ или $2\text{ cm} \times 5\text{ cm}$. Јасно, секоја дупка кај која едната димензија е меѓу 2 cm и 3 cm , а другата димензија е поголема од 4 cm го задоволува условот на задачата.

76. Коцка со димензии $4\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ е расечена на мали коцки со димензии $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. Потоа од сите мали коцки е составена правоаголна рамка за фотографија со дебелина 1 cm . Се пока-



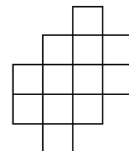
жало дека плоштината на фотоаграфијата, ставена во рамката, е еднаква на 216 cm^2 . Определи ги димензиите на фотоаграфијата.

Решение. Со расекнувањето на големата коцка се добиени $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ мали коцки. Бидејќи четирите мали коцки кои се поставени во темињата на рамката не учествуваат во формирањето на периметарот на фотоаграфијата заклучуваме дека периметарот на фотоаграфијата е еднаков на $64 - 4 = 60\text{ cm}$. Според

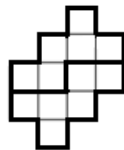
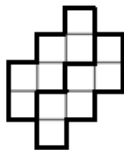
тоа, збирот на должините на страните на фотографијата е еднаков на $60:2=30$, а нивниот производ е еднаков на 216. Бидејќи производот е парен број, мора еден множител да е парен број. Но, збирот е парен број и еден собиок е парен број, па затоа мора и другиот собиок да е парен број. Сега, производот е делив со 3, па затоа едниот множител мора да е делив со 3.

Од претходните разгледувања следува дека меѓу паровите броеви чиј збир е еднаков на 30 доволно е да ги разгледаме само паровите (6,24) и (12,18). Имаме, $6 \cdot 24 = 144$ и $12 \cdot 18 = 216$, што значи дека димензиите на фотографијата се 12 cm и 18 cm.

77. Подели ја фигурата дадена на цртежот десно на два дела така што секој дел ќе биде мрежа на 1×1 коцка.



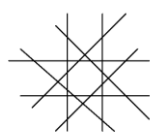
Решение. На долните цртежи се дадени две можни поделби на дадената фигура кои го задоволуваат условот на задачата.



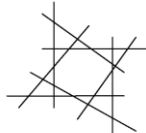
78. Дадени се осум кибритени чкорчиња. Нареди ги осумте чкорчиња така што

- секое од осумте чкорчиња сече точно шест од останатите чкорчиња;
- секое од осумте чкорчиња сече точно пет од останатите чкорчиња;
- секое од осумте чкорчиња сече точно три од останатите чкорчиња;

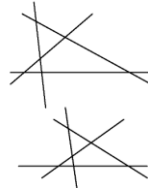
Решение. Решението на задачата е дадено на долните цртежи.



а)

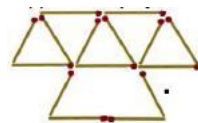


б)

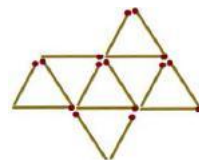


в)

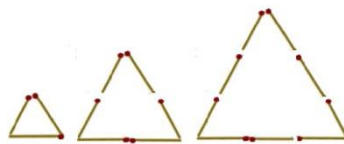
79. Фигурата прикажана на цртежот десно е направена од кибритени чкорчиња и таа содржи 6 триаголници. Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш фигура која содржи 9 триаголници. Не смее да има чкорче кое не учествува во формирање на барем еден триаголник.



Решение. Во горниот ред на дадена фигура има 5 триаголници, а четирите чкорчиња во долниот ред учествуваат во формирање на само еден триаголник. Затоа, логично е да се обидеме со преместување на токму овие 4 чкорчиња, да формираме уште 4 нови триаголници. Задачата има повеќе решенија, од кои едно е дадено на цртежот десно.

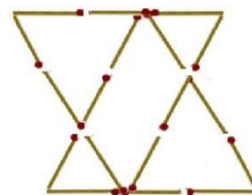


80. На цртежот десно се прикажани три рамнострани триаголници: мал, среден и голем, кои се направени со помош на 18 кибритени чкорчиња.

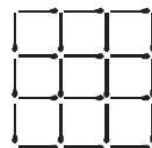


Со помош на овие чкорчиња направи фигура која содржи точно 2 мали, 2 средни и 2 големи триаголника. Употреби ги сите чкорчиња.

Решение. За правење на големиот триаголник ни се потребни 9 чкорчиња. Бидејќи фигурата треба да содржи 2 големи триаголника, доволно е одделно да направиме два големи триаголника, а потоа истите да ги поставиме така што ќе добиеме точно 2 мали и 2 средни триаголника. Едно од можните решенија е прикажано на цртежот десно.

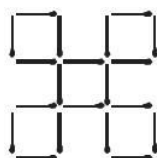


81. Од 24 кибритени чкорчиња се составени 9 еднакви квадрати како што е прикажано на цртежот десно. Отстрани 4 чкорчиња така што ќе останат:

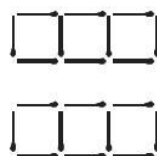


- 5 еднакви квадрати.
- 6 еднакви квадрати.

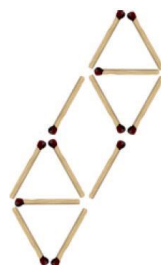
Решение. а) Ако од една од страните на големиот квадрат отстраниме средно чкорче, тогаш бројот на малите квадраи се намалува за 1. Според тоа, со отстранување на четирите средни чкорчиња, добиваме фигура која има точно 5 квадрати (цртеж десно).



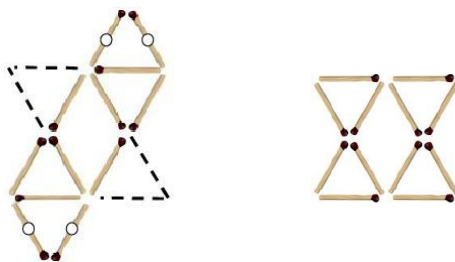
б) Секој ред на дадената фигура содржи по 3 квадрати. Притоа, ако се направени квадратите во првиот и третиот ред, тогаш средните три квадрати се добиени со додавање на 4 чкорчиња. Значи, со отстранување на овие четири чкорчиња остануваат точно 6 квадрати.



82. На цртежот десно е прикажана фигура направена од кибритени чкорчиња. Фигурата содржи 3 триаголници и 4 ромба. Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш 6 триаголници и 1 ромб. (Не смеа да има неискористени чкорчиња.)



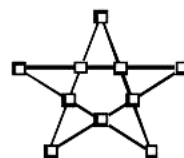
Решение. Решението на задача е прикажано на долните цртежи. На левиот цртеж чкорчињата кои ги преместуваме се означени со кругчиња, местата на кои ги преместуваме се означени со испрекинати линии, а фигурата која ја добиваме е прикажана на десниот цртеж. Имаме, 4 мали и 2 големи триаголници и 1 ромб.



83. Во Математичкото село има 10 куќи кои се наоѓаат на 5 прави улици, по 4 куќи на секоја улица. Нацртај барем еден план на населбата.

Решение. Имаме 5 улици и на секоја улица по 4 куќи, што значи дека ако ги избереме куќите на секоја улица, а потоа ги собереме

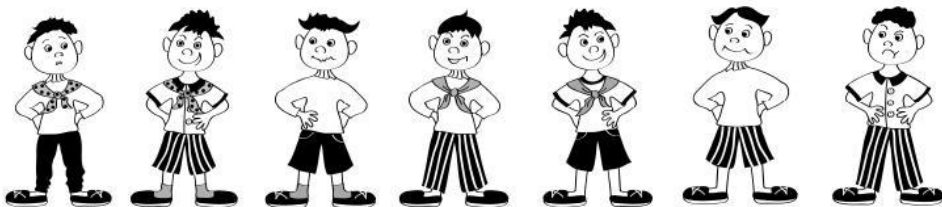
добиените броеви ќе имаме 20 куќи. Но, имаме 10 куќи, што значи дека сме избројале двапати повеќе куќи. Пример на план со 5 улици во кој секоја од 10 куќи се наоѓа на две улици е даден на цртежот десно.



V ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

V.1. ЕЛЕМЕНТАРНИ ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Горјан има двајца пријатели кои што секогаш носат различна облека и различни обувки, т.е. се на нив е различно. Кои се пријателите на Горјан?



Сашо Никола Јанко Васко Тони Коста Оливер

Решение. Сашо, Јанко, Тони, Коста и Оливер имаат исти обувки, а исто така и Никола и Васко имаат исти обувки, но различни од другите петмина. Значи еден од другарите на Горјан е Никола или Васко. Но, Васко, Јанко, Сашо и Коста имаат исти блузи. Затоа, ако едниот другар на Горјан е Васко, тогаш вториот мора да е Тони или Оливер. Но, Васко и Тони имаат исти марами, а Васко и Оливер имаат исти пантолони. Затоа едниот другар на Горјан е Никола. Понатаму, Никола и Сашо имаат исти марами, Никола и Јанко имаат исти чорапи, Никола и Коста имаат исти пантолони, Никола и Оливер имаат исти маици, а само Никола и Тони се потполно различно облечени. Конечно, другарите на Горјан се Никола и Тони.

2. При решавањето на една задача Ана добила одговор 285, Елена добила 267 и Ивана добила 345. Учителката забележала дека секое девојче пресметало точно една цифра: едното точно ја пресметало цифрата на стотките, другото цифрата на десетките и третото цифрата на единиците. Кој е точниот одговор?

Решение. Едно девојче точно ја пресметало цифрата на стотките, а другите две згрешиле, па затоа тоа не се Ана и Елена кај кои цифрата на стотките е 2. Значи, цифрата на стотките е 3 и оваа цифра ја нашла Ивана. Слично, цифрата на единиците е 7 и

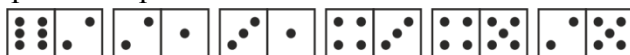
неа ја нашла Елена. Според тоа, цифрата на десетките ја нашла Ана, па затоа таа е 8. Конечно, точниот одговор на задачата е 387.

3. Еден ден Елена во права леја засадила неколку црвени лалиња. Следниот ден меѓу секои две соседни лалиња таа засадила по еден каранфил, а третиот ден меѓу секои две цвеќиња таа засадила по едно жолто лале. Во трите дена Елена засадила вкупно 97 цвеќиња. Колку црвени лалила засадила Елена?

Решение. *Прв начин.* Ако цвеќињата ги означиме со броевите од 1 до 97, тогаш првиот и вториот ден Елена ги засадила цвеќињата кои се означени со непарните броеви. Од 1 до 97 има 49 непарни броеви, што значи дека првиот и вториот ден Елена засадила 49 цвеќиња. Сега, ако цвеќињата кои Елена ги засадила првиот и вториот ден ги означиме со броевите од 1 до 49, добиваме дека првиот ден Елена ги засадила цвеќињата кои се означени со непарните броеви, што значи дека таа првиот ден засадила 25 црвени лалиња.

Втор начин. По секое црвено лале, освен последниот, следните два дена се засадени по 1 треднафил и 2 жолти лалиња, што значи по 3 нови цвеќиња. Според тоа имаме црвено лале и група од 3 нови цвеќиња, што значи еднакви групи од по 4 цвеќиња и на крајот 1 црвено лале. Бидејќи $97 = 4 \cdot 24 + 1$, добиваме дека Елена првиот ден засадила $24 + 1 = 25$ црвени лалиња.

4. Домино плочките се правилно поставени ако секои две различни плочки имаат еднаков број точки на соседните половици. На долниот цртеж се прикажани шест домино плочки.



Колку плочки треба најмалку да се завртат така што сите шест ќе бидат правилно поставени?

Решение. Прво треба да го завртиме третото домино од лево, потоа четвртото домино од лево и на крајот треба да го завртиме шестото домино од лево. Значи, за да сите шест плочки бидат правилно поставени треба да завртиме три плочки.

5. Тројца другари Панче, Диме и Милан купиле 5 еднакви пакетчиња бонбони. Откако ги отвориле пакетчињата тие ги поделиле бонбоните подеднакво, т.е. секој добил еднаков број бонбони. Дали ако другарите купат 13 пакетчиња од истите бонбони, повторно ќе можат да ги поделат подеднакво?

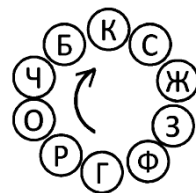
Решение. Бидејќи можат да поделат 5 пакетчиња, можат да поделат и 10 пакетчиња, при што секој ќе добие двојно повеќе бонбони. Останатите три пакетчиња ќе се поделат по едно пакетче секое дете.

6. Четири пријателки, Ратка, Ивана, Татјана и Николина, седеле на клупа во паркот, во некој редослед. Потоа почнале меѓусебно да ги менуваат местата на седење: прво Ратка и Татјана ги замениле местата, потоа Татјана и Николина, а потоа Ивана и Ратка ги замениле местата.

Конечниот распоред на седење на клупата одлево-надесно бил: Ратка, Ивана, Татјана и Николина. Во кој редослед, одлево-надесно седеле четирите пријателки на почетокот пред да почнат да ги менуваат местата?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназада-нанапред. За означување на девојчињата ќе ги користиме првите букви од нивните имиња. Конечниот распоред на клупата одлево-надесно бил РИТН. Пред тоа местата ги замениле Ивана и Ратка, па затоа распоредот бил ИРТН. Пред тоа местата ги замениле Татјана и Николина, па затоа распоредот бил ИРНТ. Првата замена ја направиле Ратка и Татјана, па затоа распоредот на почетокот бил ИТНР, односно Ивана, Татјана, Николина и Ратка.

7. Баба Марија решила на своите десет внуци да им подари по еден златен привезок на секој од кој е напишана првата буква на името на внукот. Децата се распоредиле во круг (цртеж десно) и бабата им ги поделила привезоците така што таа му давала привезок на секој трет внук

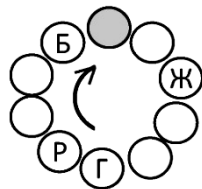


одејќи во насока на движење на стрелките на часовникот, при што во броењето ги прескокнувала внуците кои веќе ги добиле

привезоците. Внукот Жарко трет го добил својот подарок. По кој редослед биле поделени привезоците?

Забелешка. Кога ќе останат двајца, тогаш бабата брои: „*прв, втор, трет*“, а потоа му го дава привезокот на последниот внук.

Решение. Почнувајќи од внукот Жарко ќе тргнеме одназад-напред. Пред него, т.е. втор привезокот го добил внукот чие име почнува со Б, а пред него, т.е. прв привезокот го добил внукот чие име почнува со Р (цртеж десно). Сега почнувајќи од Р и одејќи во насока на движењето на стрелките на часовникот добиваме дека четврт го добил привезокот чие име почнува со Г. Продолжувајќи ја постапката наоѓаме дека привезоците биле распределени по следниот редослед: РБЖГКФСЧЗО



8. За роденденската прослава на Михаил имало тркалезна торта која по прави линии кои тргнуваат од центарот била расечена на парчиња. На секое парче имало по една свеќичка, на едно парче уште имало и роза. Ана и Александар во круг почнале да бројат свеќички и рози. Ана избројала 6 свеќички и 2 рози, а Александар



избројал 19 свеќички и 3 рози. Колку свеќички има на тортата?

Решение. Бидејќи Ана избројала 2 рози, на тортата најмногу свеќички може да има ако таа почнала да брои од парчето на кое има и свеќичка и роза. Според тоа, најголемиот број свеќички може да биде еднаков на 5. Ако на тортата има 4 или помалку свеќички, тогаш за да изброи 19 свеќички Александар мора да направи најмалку 4 цели кругови, што значи ќе изброи најмалку 4 рози. Но, Александар избројал 3 рози, од каде заклучуваме дека на тортата има повеќе од 4 свеќички, т.е. има точно 5 свеќички. Притоа Александар почнал да брои од парчето кое се наоѓа после парчето на кое има свеќичка и роза, па така избројал 5 свеќички и 1 роза; 5 свеќички и 1 роза; 5 свеќички и 1 роза; и 4 свеќички, т.е. вкупно 19 свеќички и 3 рози, а Ана почнала да брои од парчето на кое има свеќичка и роза и избројала 5

свеќички и 1 роза; и 1 роза и 1 свеќичка, т.е. вкупно 6 свеќички и 2 рози.

9. Сите двоцифрени броеви се запишани на 90 картончиња (по еден број на едно топче) и се ставени во кутија. Од кутијата без гледање вадиме картончиња. Определи го најмалиот број картончиња кој треба да го извадиме за да сме сигурни дека збирот на цифрите на два од запишаните броја е различен.

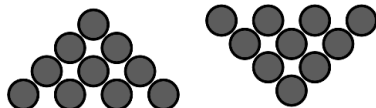
Решение. Ако извадиме 9 картончиња, тогаш тоа може да се броевите 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 и 90, кои имаат збир на цифри еднаков на 9. Ако избереме 10 броја, тогаш два од нив ќе имаат иста цифра на десетките, а различна цифра на единиците, па затоа збирот на нивните цифри ќе биде различен. Значи, потребно е да избереме најмалку 10 броја.

10. Матеј има два еднакви ластиси. На секој од нив закачил по еден тег (цртеж десно), по што едниот ластик станал трипати подолг од другиот. Потоа Матеј ги измерил подолгиот ластик и растојанието меѓу средините на двата ластика. Колку пати растојанието меѓу средините е помало од должината на подолгиот ластик?



Решение. Должината на подолгиот ластик ја делиме на три дела (полните линии на цртежот лево), а потоа ги определуваме средините на ластичите (испрекинатите линии на цртежот лево). Јасно, растојанието меѓу испрекинатите линии е еднакво на должината на пократкиот ластик, кој е трипати пократок од подолгиот ластик. Според тоа, растојанието меѓу средините е трипати помало од должината на подолгиот ластик.

11. На цртежот десно се дадени два распореди на 10 кругчиња. Определи го најмалиот број кругчиња кои што треба да се преместат во левиот распоред така што ќе се добие десниот распоред на кругчињата?



Решение. За да го определиме најмалиот број кругчиња кои треба да се преместат, доволно е да провериме при кое поставување на долниот ред на левиот распоред врз некој од редовите на десниот распоред ќе се преклопат најмногу кругчиња. Лесно се проверува дека тоа е случајот кога долниот ред на левиот распоред ќе се постави врз вториот ред броејќи оддолу на десниот распоред и притоа ќе имаме преклопување на 7 кругчиња. Значи, треба да ги преместиме три кругчиња кои не се преклопуваат и тоа се крајните две кругчиња од долниот ред и кругчето во горниот ред на левиот распоред.

12. Во 10 полиња на квадрат со димензии 5×5 е поставена по една мина. Во полињата во кои се запишани броеви не се поставени мини, а запишаните броеви означуваат во колку соседни полиња има мини (соседни се полињата кои имаат заедничка страна или заедничко теме). Означи ги со знак „+“ полињата во кои се поставени мини.

1		2	2	1
2				
		5		
1		4		
			4	

Решение. Полето во најдолниот ред во кое е запишан бројот 4 има точно 4 соседни полиња, па затоа во секое од нив е поставена мина. Понатаму, ако во празното поле од првиот ред е поставена мина, тогаш во полето под него не смее да е поставена мина,

1		2	2	1
2	+	+		+
	+	5	+	+
1		4	+	+
		+	4	+

па за да првото поле во вториот ред има две соседни полиња со мини, треба во првите две полиња на третиот ред да има мини, што не е можно бидејќи тие се соседни на првото поле од четвртиот ред во кое е запишан бројот 1. Значи, во второто поле на првиот ред нема мина, па затоа во второто и третото поле на втората колона има мини, а додека во четвртото и петтото поле нема мини. Сега, за да четвртото поле од третата колона има 4 полиња со мини, тие треба да се во третото и четвртото поле на четвртата колона. Досега откривме 7 мини. Останува да поставиме три мини во третото, четвртото и петтото поле на вториот

ред и во третото поле на петтата колона. Лесно се гледа дека празно треба да остане четвртото поле на вториот ред.

13. Во една кутија има сини, црвени и зелени топки. Збирот на сините и црвените е 13, збирот на црвените и зелените е 19 и збирот на зелените и сините топки е 28. Кој е најмалиот број топки што треба да го извадиме, без гледање, за да сме сигурни дека:

- а) најмалку две се истобојни,
- б) најмалку три се истобојни,
- в) најмалку две се разнобојни,
- г) има топки од сите три бои.

Решение. Збирот $13+19+28=60$ е двапати поголем од вкупниот број топки. Според тоа, во кутијата има $30-13=17$ зелени топки, $30-19=11$ сини топки и $30-28=2$ црвени топки.

- а) Ако извадиме 3 топки, може да се случи сите да се со различна боја. Во случај на 4 топки најмалку една боја ќе се повтори.
- б) Ако извадиме 6 или помалку топки, може да се случи од секоја боја да имаме по 2 или помалку топки. Во случај на 7 топки најмалку една боја ќе биде застапена трипати.
- в) Ако извадиме 17 или помалку топки може да се случи сите да се зелени. Во случај на 18 топки, сигурно ќе има најмалку две топки со различна боја.
- г) Ако извадиме 28 или помалку топки, може да се случи да нема црвена топка. Во случај на 29 топки од секоја боја ќе има најмалку по една топка.

V.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

14. Петар знае на јазикот на племето Фјури да запише пет збора, и тоа:

реми $\nabla \bullet$, бура $\otimes \oplus$, тава $X\Lambda$, шарена $\odot \nabla \times$ и сина $\Omega \times$.

Како Петар на јазикот на племето Фјури ќе ја запише реченицата:

Мими решава ребуси.

Решение. Забележуваме дека во секој петте збора кои што Петар знае да ги запише на секој слог соодветствува по еден симбол и тоа:

ре ∇ , ми $\bullet$, бу $\otimes$, ра $\oplus$, та X , ва Λ ,
ша $\odot$, ре ∇ , на $\times$, си Ω , на $\times$.

Според тоа, на јазикот на племето Фјури Петар ќе ја запише реченицата

Мими решава ребуси.

на следниот начин:

$\bullet\bullet \nabla\odot\Lambda \nabla\otimes\Omega$.

15. Мартин, Никола и Јана отишле со татковците на риболов. Секој маж уловил барем по една риба. Јана не ловела риби, туку ги исчистила 7-те риби кои ги уловиле мажите. Колку риби најмногу може да уловил таткото на Јана, ако секој од синовите уловил двапати помалку риби од својот татко?

Решение. Вкупно се уловени 7 риби, што значи дека татко и син заедно може да уловат или $1+2=3$ риби или $2+4=6$ риби. Ќе разгледаме неколку случаи.

- 1) Мартин и Никола не се роднини, што значи дека тие имаат различни татковци. Во случајов четворицата заедно уловиле $3+3=6$ риби, па затоа таткото на Јана уловил 1 риба.
- 2) Мартин и Никола се браќа. Во случајов тие заедно со нивниот татко уловиле $1+1+2=4$ риби, што значи дека таткото на Јана уловил 3 риби.
- 3) Мартин е татко на Никола. Значи, Никола, Мартин и таткото на Мартин заедно уловиле $1+2+4=7$ риби. Последното значи дека еден од тројцата е татко на Јана, т.е. таткото на Јана уловил 1, 2 или 4 риби. Случајот кога Никола е татко на Мартин доведува до ист резултат.

Од претходните разгледувања заклучуваме дека таткото на Јана може да улови најмногу 4 риби и тоа е случај кога, на пример, Јана и Мартин се брат и сестра, а Никола е син на Мартин. Така, Никола уловил 1 риба, татко му Мартин уловил 2 риби, а дедо му уловил 4 риби.

16. Секој од учениците Алекса, Борис и Васил, или секогаш лаже или секогаш ја говори вистината. Учителката по математика ги прашала: „Кој од вас лаже?“. Алекса рекол: „Борис лаже.“. Борис рекол: „Алекса лаже.“. Васил рекол: „Алекса и Борис лажат.“. Колку од учениците лажат?

Решение. Ако Алекса не лаже, тогаш Борис и Васил лажат (тие тврдат дека Алекса лаже). Ако пак Алекса лаже, тогаш Борис не лаже, а Васил лаже. Според тоа, и во двата случај двајца лажат.

17. Прилепчаните Милица и Веско отишле на гости кај битолчаните Станка и Петко. Јаделе сладолед, торта, чоколадо и баклава. Девојчињата јаделе сладолед и баклава, прилепчаните јаделе сладолед и чоколадо. Сите јаделе и секој јадел само по еден десерт. Милица не сака баклава. Определи кој што јадел.

Решение. Девојчињата јаделе сладолед и баклава, па бидејќи Милица не сака баклава заклучуваме дека таа јадела сладолед, а Станка јадела баклава. Понатаму, прилепчаните јаделе сладолед и чоколадо и Милица јадела сладолед, што значи дека Веско јадел чоколадо. Конечно, Милица јадела сладолед, Веско – чоколадо, Станка – баклава и останува дека Петко јадел торта.

18. Марсовците имаат по 3, 4 или 5 уши. Тие што имаат по 4 уши секогаш лажат, а тие што имаат непарен број уши секогаш ја говорат вистината. Марсовците Арс, Барс и Варс ги дале следниве изјави:

Арс: *Тројцата заедно имаме 10 уши.*

Барс: *Тројцата заедно имаме 14 уши.*

Варс: *Тројцата заедно имаме 15 уши.*

Колку уши имаат заедно Арс, Барс и Варс?

Решение. Бидејќи изјавите на секои двајца од нив се противречни, меѓу нив најмногу еден ја говори вистината. Ако има еден кој ја говори вистината, тогаш тројцата заедно имаат или $4+4+3=11$ или $4+4+5=13$ уши. Но, ниту еден не кажал дека тројцата заедно имаат 11 или 13 уши, што значи дека сите тројца лажат. Според тоа, Арс, Барс и Варс заедно имаат $4+4+4=12$ уши.

19. Секој од четворицата пријатели Гордан, Алекса, Мартин и Ристо кажал по една реченица и тоа:

Гордан: *Јас секогаш изговорувам реченица со помалку од осум збора.*

Алекса: *Во моите реченици секогаш има помалку од десет збора.*

Мартин: *Изјавите на Гордан и Алекса се вистинити.*

Ристо: *Денес, Гордан или Алекса излага.*

Опреди кој лаже, а кој ја говори вистината.

Решение. Реченицата на Гордан содржи 9 збора, што значи тој лаже. Понатаму, Мартин рекол дека изјавата на Гордан е вистинита, што значи дека и тој лаже. Ристо кажал дека Гордан или Алекса излагал, па како Алекса излагал, заклучуваме дека изјавата на Ристо е вистинита. Во изјавата на Алекса има 9 збора, т.е. помалку од 10 збора, што значи дека изјавата на Алекса е вистинита.

20. Во земјата Недојдија момчињата секогаш ја говорат вистината, а девојчињата секогаш лажат. На островот живее семејство со три деца А, Б и В. Еден ден децата се собрале заедно и изјавиле:

А: *„Јас имам две сестри.“*

Б: *„Јас имам две сестри.“*

В: *„Јас имам двајца браќа.“*

Колку момчиња и колку девојчиња има ова семејство?

Решение. Бидејќи тврдењата се противречни, тие не можат сите да се вистинити. Значи семејството има барем едно девојче. Ако семејството има едно девојче, тогаш момчињата треба да кажат: *„Јас имам 1 сестра и 1 брат.“* Но, ова не е кажано, па значи семејството има повеќе од едно девојче. Семејството не може да има 3 девојчиња, бидејќи тогаш една од изјавите *„Јас имам две сестри.“* ќе биде вистинита, а според условот девојчињата секогаш лажат. Останува семејството да има 2 девојчиња и 1 момче. На пример, ова е можно ако момче е А, а девојчиња се Б и В, односно ако момче е Б, а девојчиња се А и В.

21. Принцот Давид сретнал три вили и ги прашал за својата иднина.

Арта рекла: *Принцот ќе земе мрзлива жена и ќе победи повеќе од 100 змејови.*

Бина рекла: *Не, принцот ќе победи помалку од 100 змејови и ќе земе работлива жена.*

Веда рекла: *Не, жената на принцот ќе биде мрзлива и принцот ќе победи најмалку еден змеј.*

Што треба да очекува принцот Давид, ако едната вила секогаш лаже, другата секогаш ја зборува вистината, а третата на почетокот ја зборува вистината, а потоа лаже?

Решение. Нека Арта секогаш ја зборува вистината. Тогаш двете тврдења на Бина не се точни и двете тврдења на Веда не се точни, што не е можно бидејќи според условот првото тврдење кај една од нив треба да е точно.

Нека Бина ја зборува вистината. Тогаш двете тврдења на Арта не се точни и второто тврдење на Веда е точно, што не е можно бидејќи според условот на задачата првото тврдење на Веда треба да е точно.

Нека Веда ја зборува вистината. Тогаш првото тврдење на Арта е точно, па затоа второто тврдење мора да не е точно. Кај Бина двете тврдења не се точни. Значи не е точно дека принцот ќе победи повеќе од 100 змејови и помалку од 100 змејови. Според тоа, принцот ќе победи точно 100 змејови.

Конечно, принцот Давид ќе земе мрзлива жена и ќе победи точно 100 змејови.

22. Васил, Огнен, Лупчо и Павел живеат на еден ист спрат во соседни станови (два стана се соседни ако се означени со последователни броеви). Секој од нив одгледува по едно домашно милинечи и користи определен пијалок. Васил живее во станот 21. Огнен одгледува куче. Тој што одгледува папагал, пие спрајт, а тој што живее во станот 24 пие фанта. Лупчо живее во соседен стан во кој се одгледува хрчак, а соседи на тој што пие кока-кола се тој што живее во станот 23 и тој што пие чај. Станот на Павел во споредба со станот на Огнен е подалеку од станот на Васил. Еден од четворицата одгледува мачка. Кој одгледува мачка?

Решение. Дадените податоци ќе ги внесиме во табела.

Васил			
21	22	23	24
чај	кока-кола		фанта

Значи, останува спрајт дека спрајт пие тој што седи во станот 23 и одгледува папагал. Така ја имаме следната табела:

Васил			
21	22	23	24
чај	кока-кола	спрајт	фанта
		папагал	

Понатаму, Огнен одгледува куче, па затоа живее во станот 22 или во станот 24. Но, Станот на Павел во споредба со станот на Огнен е подалеку од станот на Васил, па затоа Огнен живее во станот 22 и во овој стан се одгледува куче. Сега Лупчо живее во стан соседен на станот во кој се одгледува хрчак, па затоа тој не живее во станот 24 (соседен е само 23 и таму се одгледува папагал). Значи, Лупчо живее во станот 23, а Павел живее во станот 24. Во едниот соседен стан на Лупчо се одгледува куче, па затоа хрчакот мора да е во станот 24. Конечно, останува дека мачката ја одгледува Васил. Подолу е дадена пополнетата табела.

Васил	Огнен	Лупчо	Павел
21	22	23	24
чај	кока-кола	спрајт	фанта
мачка	куче	папагал	хрчак

V.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

23. Колку двоцифрени броеви запишани со помош на цифрите 1, 3 и 5 постојат?

Решение. Со помош на цифрите 1, 3 и 5 можат да се запишат следниве двоцифрени броеви: 11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53 и 55. Според тоа, со помош на цифрите 1, 3 и 5 може да се запишат 9 двоцифрени броеви.

24. Определи го бројот на броевите кои се помали од 2018 и во чиј запис цифрата 1 се содржи точно трипати. Испиши ги овие броеви.

Решение. Единствен трицифрен број во кој цифрата 1 се содржи трипати е бројот 111. Четирицифрени броеви во кои цифрата 1 се содржи трипати се броевите: 1011, 1110, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1121, 1131, 1141, 1151, 1161, 1171, 1181, 1191, 1211, 1311, 1411, 1511, 1611, 1711, 1811, 1911 и 2111. Според тоа, има 28 броеви кои се помали од 2018 и во чиј запис цифрата 1 се содржи точно трипати.

25. Броевите, кои се запишуваат само со цифрите 1, 3, 7 и 9 се подредени по големина, т.е. 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 31, 33, 37, 39, 71 итн.

а) Определи го бројот на овие броеви кои се помали од 2017.

б) Кој број во горната низа се наоѓа на 101 место?

Решение: а) Во низата има 4 едноцифрени броеви, 16 двоцифрени и 64 трицифрени. Според тоа, во разгледуваната низа има 84 броеви помали од 1000. Со цифра на илјадите еднаква на 1 во низата има толку колку што се трицифрените броеви од разгледуваниот вид, т.е. 64. Во низата нема броеви чија цифра на илјадите е 2. Според тоа, бараниот број броеви е еднаков на $84 + 64 = 148$.

б) Бидејќи $101 > 84$ заклучуваме дека бараниот број е четирицифрен број со цифра на илјадите 1. Од 1111 до 1199 имаме 16 броја од низата и бараниот број е 1311.

26. Определи го бројот на броевите од 1 до 900, кои во својот запис не ја содржат ниту цифрата 2, ниту цифрата 3.

Решение. Меѓу броевите од 1 до 100 има 36 броја во чиј запис учествува цифрата 2 или цифрата 3 (по 2 меѓу секои десет со цифра на десетките различна од 2 или 3 и уште 20 со цифра на десетките 2 или 3. Од 200 до 299 и од 300 до 399 сите броеви во својот запис ја содржат цифрата 2 или цифрата 3. Такви се 200 броја. Во останатите стотки со цифра на стотките 1, 4, 5, 6, 7 и 8 повторно имаме по 36 такви броеви, т.е. вкупно 216 броја.

Значи, има $36+200+216=452$ броја кои во својот запис ја содржат цифрата 2 или цифрата 3. Конечно, бараниот број броеви е еднаков на $900-452=448$.

27. Кои петцифрени броеви се повеќе – петцифрените броеви со најмала прва цифра или петцифрените броеви со најмала трета цифра?

Решение. Ако земеме произволен петцифрен број со најмала прва цифра, тогаш со преместување на првата цифра на третото место можеме да направиме петцифрен број со најмала трета цифра (Втората цифра не е нула, бидејќи првата цифра е најмала.) Од секој петцифрен број со најмала трета цифра не можеме да направиме петцифрен број со најмала прва цифра. На пример, тоа не може да се направи од бројот 12021.

Значи, петцифрените броеви со најмала трета цифра се повеќе.

28. Колку трицифрени броеви постојат чиј збир на цифри е еднаков на 9. Испиши ги овие броеви.

Решение. Трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 9 се:

900,
801, 810,
702, 711, 720,
603, 612, 621, 630,
504, 513, 522, 531, 540,
405, 414, 423, 432, 441, 450,
306, 315, 324, 333, 342, 351, 360,
207, 216, 225, 234, 243, 252, 261, 270,
108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180.

Според тоа, постојат $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 9.

29. Магдалена го заборавила пинот на својот мобилен телефон. Таа се сеќава само дека тоа е четирицифрен број, кој е запишан само со цифрите 3 и 4. Кои четирицифрени броеви може да бидат пинот на мобилниот на Магдален? Колку такви броеви има?

Решение. Бидејќи во записот на пинот се јавуваат двете цифри,

заклучуваме дека во записот на пинот може да има:

- една цифра 4 и три цифри 3
- две цифри 4 и две цифри 3,
- три цифри 4 и една цифра 3.

Тоа значи дека бараните броеви се: 4333, 3433, 3343, 3334, 4433, 4343, 4334, 3434, 3443, 3344, 4443, 4434, 4344 и 3444. Има вкупно 14 такви броеви.

30. Колку четирицифрени броеви со меѓусебно различни цифри може да се запишат со помош на цифрите 1, 2, 3 и 4, така што во записот на бројот цифрата 1 се наоѓа лево од цифрата 4 (не мора да е непосредно пред неа)?

Решение. Цифрата 1 може да биде цифра на илјадитите, т.е. броевите да се од видот $1_ _ _$. Тогаш цифрата 4 може да биде на местото на стотките, на местото на десетките или на местото на единиците, т.е. имаме броеви од видовите $14_ _$, $1_4_$ и $1_ _4$. Сега за секој од овие случаи цифрите 2 и 3 можеме да ги распоредиме на два начина, па така ги добиваме броевите: 1423, 1432, 1243, 1342, 1234 и 1324, што значи дека во случајов имаме 6 броеви со саканото својство.

Цифрата 1 може да биде цифра на стотките, т.е. броевите да се од видот $_1_ _$. Тогаш цифрата 4 може да биде на местото на десетките или на местото на единиците, т.е. имаме броеви од видот $_14_$ или $_1_4$. Сега за секој од овие случаи цифрите 2 и 3 можеме да ги распоредиме на два начина, па така ги добиваме броевите: 2143, 3142, 2134 и 3124, што значи дека во случајов имаме 4 броеви.

Цифрата 1 може да биде на местото на десетките, т.е. броевите се од видот $_ _1_$. Значи, цифрата 4 може да биде само на местото на единиците, т.е. броевите се од видот $_ _14$. Сега за цифрите 2 и 3 имаме две можности, па така ги добиваме броевите: 2314 и 3214, т.е. во случајов имаме 2 број.

Конечно, имаме $6+4+2=12$ броеви со саканото својство.

31. Благоја учествувал во лотарија во која секоја среќка е означена со некој трицифрен број. Тој ги купил сите среќки означени со броевите чиј производ на цифрата на десетките и цифрата на единиците е еднаков на 12, а збирот на тие две цифри за 1 се разликува од цифрата на стотките. Колку среќки и со кои броеви купил Благоја?

Решение. Нека со D ја означиме цифрата на десетките и со E цифрата на единиците. Според условот на задачата производот на цифрата на десетките и цифрата на единиците е еднаков на 12, па затоа можни парови (D, E) се: $(6, 2), (2, 6), (3, 4), (4, 3)$.

Збирот $D+E$ на првите два пара е 8, па затоа во овој случај цифрата на стотките може да биде 7 или 9. Според тоа, Благоја ги купил среќките со броевите 726, 762, 926 и 962.

Збирот $D+E$ на вторите два пара е 7, па затоа во овој случај цифрата на стотките може да биде 6 или 8. Според тоа, Благоја ги купил среќките со броевите 634, 643, 834 и 843.

Бидејќи ги купил сите среќки означени со броеви со дадените својства, Благоја вкупно купил 8 среќки.

32. Определи ги сите осумцифрени броеви кои се запишани со помош на цифрите 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 и 4 и кои го имаат следново својство: меѓу две цифри 1 се наоѓа една цифра, меѓу две цифри 2 се наоѓаат две цифри, меѓу две цифри 3 се наоѓаат три цифри и меѓу две цифри 4 се наоѓаат четири цифри.

Решение. Според условот на задачата цифрата 4 може да биде на прво и шесто, второ и седмо, трето и осмо место.

- 1) Ако цифрата 4 е на првото и шестото место, тогаш цифрата 3 може да биде на третото и седмото место или на четвртото и осмото место. Во првиот случај имаме $4^*3^{**}43^*$, па сега лесно се гледа дека цифрата 2 не може да биде на второто и четвртото место, што значи дека еден од бараните броеви е 41312432. Во вториот случај имаме $4^{**}3^*4^*3$, па затоа цифрата 2 мора да биде на второто и петтото место, и тогаш цифрата 1 треба да биде на третото и седмото место, што е спротивно на условот на задачата.

2) Ако цифрата 4 е на второто и седмото место, тогаш цифрата 3 може да биде на првото и петтото место или на четвртото и осмото место. Во првиот случај имаме $34^{**}3^{*}4^{*}$, па затоа цифрата 2 мора да биде на третото и шестото место, и тогаш цифрата 1 треба да биде на четвртото и осмото место, што е спротивно на условот на задачата. Аналогно се добива дека случајот $^{*}4^{*}3^{**}43$ доведува до противречност, што значи дека во овој случај немаме решение на задачата.

3) Ако цифрата 4 е на третото и осмото место, тогаш аналогно како во 1) се добива дека единствено бројот 23421314 е решение на задачата.

Конечно, единствено броевите 41312432 и 23421314 се решенија на задачата.

33. За еден трицифрен број ќе велиме дека е *идеален* ако производот на неговите цифри е еднаков на 252. Определи го бројот на идеалните трицифрени броеви.

Решение. Имаме $252 = 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, па затоа една од цифрите на идеалниот број мора да е 7. Останатите две цифри треба да даваат производ $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Бидејќи производот на било кои три множители во последниот израз е поголем од 9, заклучуваме дека за да ги добиеме идеалните броеви треба да ги најдеме можните производи од по два броја. Можни се два случаја и тоа:

- 1) $2 \cdot 2 = 4$ и $3 \cdot 3 = 9$, па во овој случај идеални броеви се: 479, 497, 749, 794, 947 и 974.
- 2) $2 \cdot 3 = 6$ и $2 \cdot 3 = 6$, па во овој случај идеални броеви се: 667, 676 и 766.

Според тоа, постојат $6 + 3 = 9$ идеални броеви.

34. Определи го бројот на двоцифрените броеви такви што едната цифра е непарна, а другата е поголема од 5.

Решение. Првата цифра е непарна, што значи дека таа може да биде 1, 3, 5, 7 или 9, т.е. има 5 можности. Втората цифра е поголема од 5, па за неа има 4 можности (6, 7, 8 или 9). Значи, во случајов имаме $5 \cdot 4 = 20$ такви броеви. Обратно, ако првата

цифра е поголема од 5, а втората е непарна, тогаш имаме уште 20 такви броеви. Значи, бараниот број броеви е еднаков на $20 + 20 = 40$.

35. Определи го бројот на седумцифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 70.

Решение. Бидејќи $70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$ цифрите на седумцифрените броеви треба да бидат 7, 5, 2, 1, 1, 1 и 1, во некој редослед. За цифрата 7 имаме 7 можности, па откако неа ќе ја поставиме, тогај за цифрата 5 имаме 6 можности. Откако ќе ги поставиме цифрите 7 и 5, тогаш за цифрата 2 имаме 5 можности, а потоа на останатите четири места ја запишуваме цифрата 1. Според тоа, бројот на седумцифрените броеви чиј производ на цифрите е еднаков на 70 изнесува $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

36. Определи го бројот на трицифрените броеви кои се поголеми од 777 и во чиј запис не учествуваат цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5.

Решение. Ако првата цифра е 8 или 9, тогаш имаме $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ броја кои го задоволуваат условот на задачата. Ако првата цифра е 7, а втората 8 или 9, тогаш имаме $2 \cdot 4 = 8$ броја кои го задоволуваат условот на задачата. Ако првата и втората цифра се 7, тогаш имаме 2 броја кои го задоволуваат условот на задачата. Значи, вкупно има $32 + 8 + 2 = 42$ броја кои го задоволуваат условот на задачата.

37. Определи го бројот на сите четирицифрени броеви кои може да се запишат со цифрите 1, 3, 7 и 9, при што сите цифри се различни и цифрите 3 и 9 не се една до друга. Испиши ги овие броеви.

Решение. Гледајќи од лево кон десно цифрите 3 и 9 може да бидат: на прво и трето место; на прво и четврто место; и на второ и четврто место. За секој од овие три случаи имаме по два распореди на цифрите 3 и 9, т.е. вкупно $3 \cdot 2 = 6$ распореди на цифрите 3 и 9. За секој распоред на цифрите 3 и 9, на преостанатите две места цифрите 1 и 7 можеме да ги распоредиме на два начина. Според тоа, постојат $6 \cdot 2 = 12$ броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

Бараните броеви се: 3197, 3791, 9137, 9731, 3179, 3719, 9173, 9713, 1379, 7319, 1973 и 7913.

38. За еден трицифрен број ќе велиме дека е *шаховски* ако производот на неговите цифри е еднаков на 64. Определи го бројот на *шаховските* трицифрени броеви.

Решение. Како производ на едноцифрени броеви бројот 64 може да се запише на следниве начини:

$$64 = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 1 \cdot 8 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \cdot 4.$$

Ако $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$, тогаш имаме еден шаховски број и тоа: 444.

Ако $64 = 1 \cdot 8 \cdot 8$, тогаш имаме три шаховски броја и тоа: 188, 818 и 881.

Ако $64 = 2 \cdot 4 \cdot 8$, тогаш имаме шест шаховски броја и тоа: 248, 284, 428, 482, 824 и 842.

Според тоа, бројот на шаховските броеви е еднаков на $1 + 3 + 6 = 10$.

39. Располагаш со доволен број монети од 1 и од 2 денари. На колку начини можеш да платиш молив којшто чини 17 денари?

Решение. При плаќањето може да не се употребат монети од 2 денари и да се употребат монети од 2 денари. Јасно, бидејќи $9 \cdot 2 = 18 > 17 > 16 = 8 \cdot 2$ не можеме да употребиме повеќе од 8 монети од 2 денари. Така ја имаме следнава табела.

1 денар	17	15	13	11	9	7	5	3	1
2 денари	-	1	2	3	4	5	6	7	8

Според тоа, плаќањето можеме да го извршиме на 9 начини.

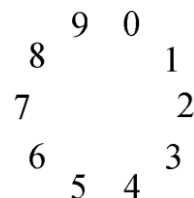
40. Олгица се подготвува за санкање, па затоа сака да облече јакна, шал, капа и ракавици. На колку начини може да се облече Олгица ако таа има: црвена и плава јакна, црвен, зелен и бел шал, плава и жолта капа и кафеав шал? Испиши ги сите начини на кои Олгица може да биде облечена.

Решение. Сите начини на кои Олгица може да биде облечена ќе ги запишеме во табела. Имаме

Кафени ракавици	Црвена јакна	Плава јакна	Плава капа	Жолта капа	Црвен шал	Зелен шал	Бел шал
+	+		+		+		
+	+		+			+	
+	+		+				+
+	+			+	+		
+	+			+		+	
+	+			+			+
		+	+		+		
		+	+			+	
		+	+				+
		+		+	+		
		+		+		+	
		+		+			+

Според тоа, Олгица може да се облече на 12 различни начини.

41. Клуч за велосипед има четири прстени со цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 со чија помош се формира четирицифрена комбинација која го отклучува велосипедот (цртеж десно). Прстените може да се вртат во двете насоки. Сега велосипедот е заклучен и го покажува бројот 2768.



При заклучување на велосипедот првата цифра која го отклучува велосипедот е завртена за 5, втората за 7, третата за 2 и четвртата за 3 чекори. Определи ги сите можни шифри на клучот?

Решение. Цифрите се поставени кружно и може да се вртат во двете насоки, па затоа за секоја цифра имаме две можности. Ако првата цифра е завртена за 5, тогаш во двете насоки на вртење се доаѓа до цифрата 7. Ако втората цифра е завртена за 7, тогаш едната почетна цифра е 4, а другата е 0. Ако третата цифра е завртена за 2, тогаш можните почетни цифри се 8 или 4. Ако четвртата цифра е завртена за 3, тогаш можните почетни цифри се 1 или 5. Значи, можните шифри за отклучување на велосипедот се: 7481, 7485, 7441, 7445, 7081, 7085, 7041, 7045.

42. Колку се различни природни броеви кои се запишуваат само со цифрите 1 и/или 3 и имаат збир на цифри 10?

Решение. За да се добие таков број чиј збир на цифри е еднаков на $n+1$ треба од десно на бројот со збир на цифри да додадеме 1 или на бројот со збир на цифри $n-2$ да додадеме 3. Значи, бројот на броевите со збир на цифри $n+1$ е еднаков на збирот од броевите со збир на цифри n и $n-2$.

Има 1 таков број со збир на цифри еден, 1 таков број со збир на цифри два и 2 такви броеви со збир на цифри три. Сега од претходно изнесеното ја добиваме низата: 1, 1, 2, $1+2=3$, $1+3=4$, $2+4=6$, $3+6=9$, $4+9=13$, $6+13=19$, $9+19=28$, $13+28=41$, ... Десеттиот член во оваа низа е бројот 28, што значи дека бараниот број броеви е 28.

43. На една забава има само 4 брачни парови. Во еден момент еден од мажите може да танцува со својата сопруга, а останатите мажи танцуваат со туѓи сопруги. На колку начини гостите може да танцуваат на забавата?

Решение. Нека брачните парови се

$$(m1, ж1); (m2, ж2), (m3, ж3), (m4, ж4).$$

Ако заедно танцува парот $(m1, ж1)$, тогаш според условот на задачата останатите може да танцуваат

$$(m2, ж3), (m3, ж4), (m4, ж2) \text{ или } (m2, ж4), (m3, ж2), (m4, ж3),$$

што значи дека има 2 можности. Имаме 4 пара кои може да танцуваат заедно, па затоа вкупниот број можности е еднаков на $4 \cdot 2 = 8$.

44. Еден фудбалски натпревар завршил со резултат 5:5, при што во текот на натпреварот ниту една екипа не успеала да поведе со повеќе од 1 гол. При постигнување на секој гол Ѓорѓи во нотезот го запишувал резултатот. Колку различни низи резултати може да има во нотезот на Ѓорѓи?

Решение. Според условот на задачата после секој парен гол резултатот треба да биде нерешен. Според тоа, бројот на низите резултати зависи од тоа кој ги постигнува непарните голови. Непарни голови се: 1, 3, 5, 7 и 9, т.е. нивниот број е еднаков на 5

и за секој гол имаме по 2 можности. Според тоа, вкупниот број низи различни резултати е еднаков на $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

45. Патнички воз има 8 вагони. На една мала станица се качиле 3 патници. На колку начини тие може да седнат во возот така што еден патник да е во еден, а другите два патника да се во друг вагон?

Решение. Патниците да ги означиме со A, B и C . Нека самиот патник е C . Тогаш за негово сместување имаме 8 можности, а откако тој ќе се смести во еден вагон за сместување на патниците A, B има 7 можности, што значи дека за сместување а сите патници имаме $8 \cdot 7 = 56$ можности. Бидејќи секој од тројцата патници може да се смести сам, вкупниот број можности за распоредување на патниците е $3 \cdot 56 = 168$.

46. За училишната прослава треба да се изберат 5 деца кои ќе држат по една буква од зборот УСПЕХ. Се пријавиле 5 момчиња и 4 девојчиња. На колку различни начини може да се подредат 5 од пријавените деца така што момчињата ќе ги држат согласките, а девојчињата самогласките на зборот УСПЕХ?

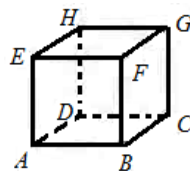
Решение. Самогласки се U и E . Девојчиња има 4, па затоа за буквата U имаме 4, а потоа за секој избор имаме 3 можности. Според тоа, за самогласките имаме $4 \cdot 3 = 12$ избори. Слично, бидејќи момчиња има 5, а согласки се C, P и X , изборот можеме да го направиме на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начини. Значи, вкупниот број избори е еднаков на $12 \cdot 60 = 720$.

47. На цртежот десно е прикажан 3×3 квадрат во чии полиња се запишани броеви. За еден правоаголник велиме дека е *посебен* ако збирот на броевите запишани во неговите полиња е еднаков на 7. Колку *посебни* правоаголници содржи дадениот квадрат?

3	0	4
0	7	0
4	0	3

Решение. Дадениот квадрат содржи еден правоаголник со бројот 7, четири со збир на броевите $7+0$, два со збир на броевите $0+7+0$ и четири со збир на броевите $3+0+4$. Значи, дадениот квадрат содржи $1+4+2+4=11$ посебни правоаголници.

48. На цртежот е прикажана коцката $ABCDEFGH$.
Опреди го бројот на отсечките чији крајни
точки се темињата на коцката. Испиши ги овие
отсечки.

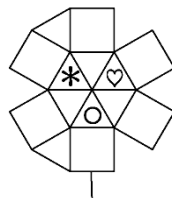


Решение. Коцката има 8 темиња. Секое теме можеме да го поврзиме со останатите 7 темиња со што добиваме 7 отсечки. Според тоа, на овој начин се добиваат $8 \cdot 7 = 56$ отсечки. Но, притоа секоја отсечка е броена двапати, на пример AB и BA , па затоа вкупниот број отсечки е еднаков на $56 : 2 = 28$.

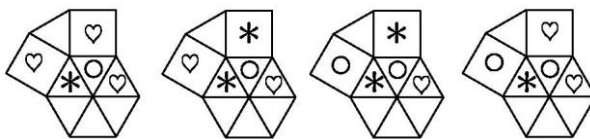
Тоа се следниве отсечки:

$AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, BC, BD, BE, BF, BG, BH, CD,$
 $CE, CF, CG, CH, DE, DF, DG, DH, EF, EG, EH, FG, FH, GH.$

49. Во секој квадрат и секој триаголник на фигурата
прикажана на цртежот десно треба да се доцрта
еден од знаците *, $\circ$ или $\heartsuit$ така што во секои два
многоаголника со заедничка страна се наоѓаат
различни знаци. На колку начини може тоа да се
направи?



Решение. Знаците кои треба да се нацртаат во внатрешните триаголници на дадената фигура се еднозначно определени. За секој квадрат имаме по две можности. Да ги разгледаме четирите можности за два квадрата меѓу кои се наоѓа триаголник. Имаме:



Во првиот случај во триаголникот може да се запишат знаците * и $\circ$, во вториот случај знакот $\circ$, во третиот случај – знакот $\heartsuit$ и во четвртиот случај – знакот *. Според тоа, имаме вкупно 5 можности за група од два квадрата меѓу кои се наоѓа триаголник. Но, такви групи се 3, па затоа вкупниот број можности е еднаков на $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

50. Марија има осум колачи:



На колку начини Марија може да ги подели колачите по две во четири еднакви чинии?

Решение. Вкупниот број на поделби е еднаков на 6. Начините како Марија може да подели по 2 колачи во 4 еднакви чинии се прикажани на цртежот десно.

○○	♡◇	♡◇	♡◇
○♡	○◇	♡◇	♡◇
♡♡	○◇	○◇	♡◇
○○	♡♡	♡◇	◇◇
○♡	○♡	♡◇	◇◇
○♡	♡♡	○◇	◇◇

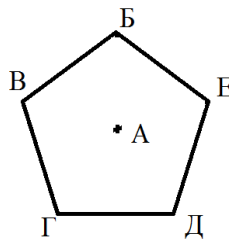
51. Шест екипи (А, Б, В, Г, Д и Е) учествуваат на еден фудбалски турнир, при што секои две екипи меѓусебно треба да одиграат по еден натпревар. Турнирот се организира во кругови, при што во секој круг шесте екипи играат во три парови. Колку натпревари ќе се одиграат на турнирот и во колку кругови? Состави распоред на натпреварите по кругови, т.е запиши во секој круг кој со кој игра.

Решение. Секој екипа треба да игра со 5 други екипи, па затоа треба да има 5 кругови. Во секој круг се играат по 3 натпревари, што значи дека вкупно ќе се одиграат $3 \cdot 5 = 15$ натпревари.

Еден начин да се направи распоредот на натпреварите по кругови и следниот:

- 1) Цртаме петаголник и во средината ја сместуваме екипата А, а во темињата екипите Б, В, Г, Д и Е (види цртеж).

- 2) Во првиот круг екипата А игра со екипата Б, а меѓусебно играат екипите кои се поблиску до Б и кои се подалеку од Б. Во вториот круг А игра со В, а останатите четири екипи ги распоредуваме на ист начин како погоре.



Така го добиваме следниот распоред:

Прв круг: (А,Б), (В,Е), (Г,Д)
 Втор круг: (А,В), (Б,Г), (Д,Е)
 Трет круг: (А,Г), (Д,В), (Е,Б)
 Четврт круг: (А,Д), (Е,Г), (Б,В)
 Петти круг: (А,Е), (Б,Д), (В,Г).

52. За време на една екскурзија девет деца се собирале секоја вечер за играат преферанс (игра на карти во која учествуваат три играчи, деветте деца играле во три тројки). Во текот на екскурзијата никои две деца не играле заедно повеќе од една вечер. Колку вечери може најмногу да имало на екскурзијата?

Решение. Секое дете игра со нови двајца секоја вечер. Бидејќи има 8 партнери, бројот на вечерите не може да биде поголем од $8:2=4$.

Дека се можни четири вечери ќе докажеме разгледувајќи ја шемата во која децата се разместени во квадрат со димензии 3×3 .

1	2	3
4	5	6
7	8	9

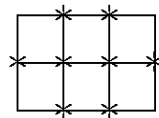
Прва вечер: (1, 2, 3); (4, 5, 6), (7, 8, 9)

Втора вечер: (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9)

Трета вечер: (1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8)

Четврта вечер: (3, 5, 7), (2, 4, 9), (1, 6, 8).

53. На цртежот десно е прикажан правоаголен реон на еден град (линии се улици). Во него има 6 еднакви квартави (квадратчињата) и 8 раскрсници (точките во се сечат три или четири улици – означени со *). Определи го бројот на раскрсниците во правоаголен реон со 77 квартави.



Решение. Имаме $77=1 \cdot 77=7 \cdot 11$. Во првиот случај имаме, на пример, 2 хоризонтални и 78 вертикални улици, па затоа бројот на раскрсниците е еднаков на $78 \cdot 2 - 4 = 152$. Во вториот случај имаме, на приме, 8 вертикални и 12 хоризонтални улици, па затоа бројот на раскрсниците е еднаков на $8 \cdot 12 - 4 = 92$.

V.4. БОЕЊА, ПОКРИВАЊА И РАСЕКУВАЊА

54. Коцка е составена од 1000 еднакви бели коцки. Потоа шесте страни на големата коцка се обоени со сина боја. Колку од малиите коцки ќе имаат точно:
- 3 бели страни,
 - 4 бели страни,

- в) 5 бели страни,
- г) 6 бели страни.

Решение. Големата коцка е со димензии $10 \times 10 \times 10$.

а) Мали коцки со 3 бели страни се само коцките во темињата на големата коцка, што значи дека такви коцки се 8.

б) Малите коцки со 4 бели страни се наоѓаат само на рабовите на големата коцка, на секој раб по 8, па затоа нивниот број е еднаков на $8 \cdot 12 = 96$.

в) Коцките со 5 бели страни се наоѓаат само на сидовите на големата коцка, и тоа на секој сид по $8 \cdot 8 = 64$ коцки. Значи, нивниот број е еднаков на $6 \cdot 64 = 384$.

г) Коцки со 6 бели страни се наоѓаат само во внатрешноста на големата коцка и нивниот број е еднаков на $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$. Бројот на коцките со 6 бели страни може да се пресмета и како

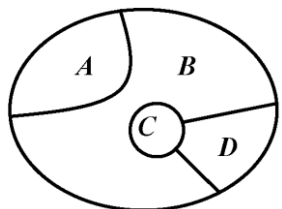
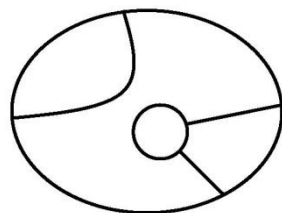
$$1000 - 8 - 96 - 384 = 512.$$

55. Горјан на кружница означил 9 сини и неколку црвени точки и почнал да ги поврзува со отсечки. Тој забележал дека како и да поврзи 64 отсечки меѓу нив ќе има барем една отсечка со еднобојни крајни точки. Определи го најголемиот можен број црвени точки кои ги означил Горјан.

Решение. Од условот на задачата следува дека има најмногу 63 отсечки со разнобојни крајни точки. Од секоја црвена точка излегуваат по 9 отсечки кон сините точки, што значи дека има најмногу $63 : 9 = 7$ црвени точки.

56. Областите на фигурата дадена на цртежот десно треба да се обојат во боите црвена, зелена, жолта, лилјакова и сина, секоја област во по една боја и соседните области да се обоени во различни бои. Определи го бројот на различните боења на фигурата?

Решение. Нека областа A е обоена во една од петте бои. Тогаш областа B може да биде обоена во една од останатите

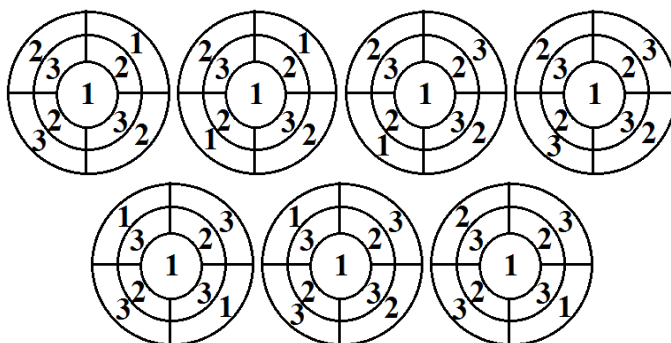
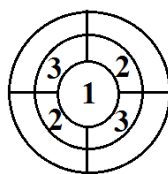


4 бои. За областа C повторно имаме 4 можни бои (без бојата избрана за B), а за областа D имаме 3 можни бои (без боите избрани за B и C). Бидејќи за областа A има 5 различни можности, заклучуваме дека бројот на различните боења е еднаков на $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$.

57. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од 9 области коишто треба да се обојат со 3 бои така што секои две соседни области се обоени со различни бои. На колку различни начини може да се направи боењето? (Две области се соседни, ако имаат повеќе од една заедничка точка.)

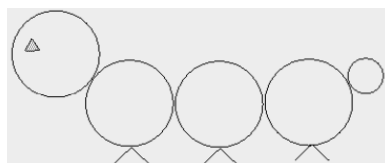


Решение. Боите да ги означиме со 1, 2 и 3. Во централното поле можеме да ставиме која било боја, т.е. имаме три можности. Да ја ставиме бојата 1. Тогаш за боење на соседното лево горно поле имаме две можности. Во ова поле да ја ставиме бојата 2. Тогаш распоредот на боите во првиот прстен е еднозначен. Значи, ако во централното поле ја ставиме бојата 1 тогаш за боење на соседните полиња имаме две можности. Сега, за секоја од овие две можности четирите полиња на вториот прстен може да се обојат на седум начини кои се прикажани на долните цртежи.



Конечно, од претходно изнесеното следува дека боењето може да се направи на $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ начина.

58. Горјан нацртал гасеница и решил да ја обои така што два круга ќе



бидат црвени, еден жолт, еден зелен и еден син. Притоа сака црвените кругови да бидат еден до друг. На колку различни начини може да ја обои гасеницата Горјан?

Решение. Нека со Ц, З, С и Ж ги означиме боите. Тогаш гасеницата може да биде обоена на еден од следниве начини:

ЦЦЗЖС, ЦЦЗСЖ, ЦЦЖСЗ, ЦЦЖЗС, ЦЦСЖЗ, ЦЦСЗЖ,
ЗЦЦЖС, ЗЦЦСЖ, ЖЦЦСЗ, ЖЦЦЗС, СЦЦЖЗ, СЦЦЗЖ,
ЗЖЦЦС, ЗСЦЦЖ, ЖСЦЦЗ, ЖЗЦЦС, СЖЦЦЗ, СЗЦЦЖ,
ЗЖСЦЦ, ЗСЖЦЦ, ЖСЗЦЦ, ЖЗСЦЦ, СЖЗЦЦ, СЗЖЦЦ.

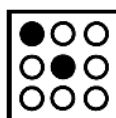
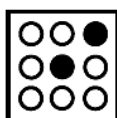
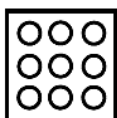
Според тоа, вкупниот број на различни боења е еднаков на 24.

59. Даден квадрат со страна 8 cm е поделен на 64 мали квадратчиња со страна 1 cm . Колку најмалку бои се потребни за боење на малите квадратчиња така што секои две соседни квадратчиња се разнобојни? (Две квадратчиња се соседни, ако имаат заедничка страна или заедничко теме.)

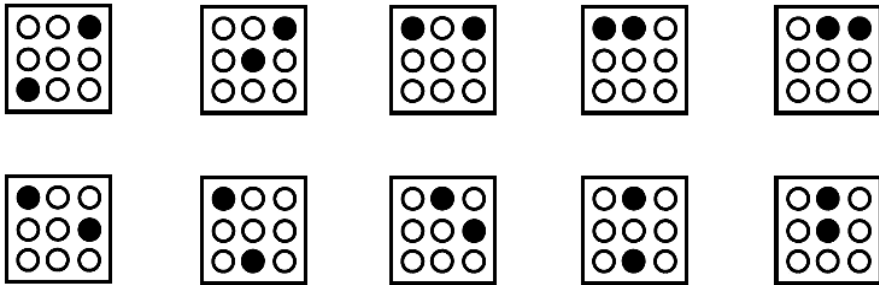
Решение. Да разгледаме дел од квадратот, кој е квадрат составен од 4 мали квадратчиња. Секои две негови квадратчиња имаат заедничка точка, па од условот на задачата следува дека се потребни најмалку 4 бои. Нека имаме четири бои 1, 2, 3 и 4. Овие бои се доволни за боење на целиот квадрат при што ќе бидат исполнети условите на задачата. Една можна реализација е дадена на цртежот десно.

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

60. Во квадрат се сместени девет кругчиња, две од кои треба да се обојат со црна боја. Определи го бројот на различните боења, ако две боења се еднакви кога едното може да се добие од другото со вртење на квадратот (боењата прикажани на десните два квадрати на долниот цртеж се еднакви).



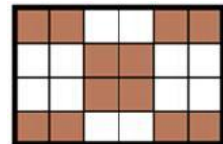
Решение. Ако двете кругчиња се на дијагоналата на квадратот, тогаш се можни 2 различни бојења. Ако двете кругчиња се во еден ред на квадратот, тогаш се можни 3 различни бојења. Ако двете кругчиња се во два соседни реда на квадратот, тогаш се можни нови 3 различни бојења. Ако двете кругчиња се во првиот и третиот ред на квадратот, тогаш се можни нови 2 различни бојења. Според тоа, вкупниот број различни бојења е еднаков на $2+3+3+2=10$ (види цртеж).



61. Михаил има чоколадо направено од бели и црни парчиња (цртеж десно). Тој сака да скрши плочка 2×2 така што во неа ќе има 2 бели и 2 црни парчиња чоколадо. На колку начини тоа може да го направи?

Решение. Чоколадото има два вида квадрати во кои се содржат 2 бели и 2 црни парчиња и тоа:

- истобојните парчиња се едно до друго и такви квадрати има осум,
- истобојните парчиња се дијагонално поставени и такви квадрати има четири.



Значи, Михаил може на $8+4=12$ начини да скрши плочка 2×2 така што во неа ќе има 2 бели и 2 црни парчиња чоколадо.

62. Правоаголник 2×3 е составен од единечни квадратчиња, кои се бели или сиви (цртеж десно).



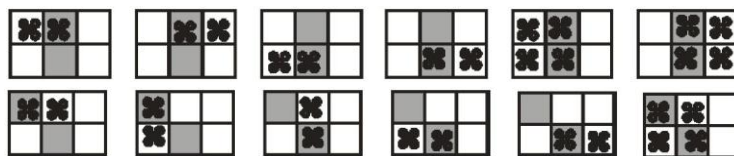
а) Определи го бројот на правоаголниците во кои сивите квадратчиња се повеќе од белите.

б) Смени ја бојата на едно единечно квадратче така што бројот на правоаголниците во кои има еднаков број сиви и бели квадратчиња е најголемиот можен број.

Решение. а) Правоаголниците во кои бројот на сивите квадратчиња е поголем од бројот на белите квадратчиња се прикажани на долните цртежи. Според тоа, има $3+2+1+1=7$ правоаголници со саканото својство.



б) Ако некој правоаголник содржи еднаков број бели и сиви квадратчиња, тогаш тој е составен од парен број квадратчиња. Затоа доволно е да ги набљудуваме само правоаголниците со парен број квадратчиња, т.е. седумте правоаголници 2×1 и двата квадрати 2×2 (правоаголникот 2×3 исто така содржи парен број квадратчиња, но при произволна промена на бојата на едно квадратче нема да го задоволува саканиот услов). Во почетното боење има 5 правоаголници кои го имаат саканото својство (4 од првиот вид и 1 од вториот вид). Промената на бојата на било кое бело квадратче го намалува за 2 бројот на правоаголниците од првиот вид и не го зголемува бројот на правоаголниците од вториот вид. Значи треба да ја промениме бојата на некое сиво квадратче. Во два од трите можни случаи добиваме по шест правоаголници со саканото својство. Во првиот случај ја менуваме бојата на горното лево квадратче, а во вториот случај ја менуваме бојата на горното средно квадратче. На долните цртежи се прикажани двата случај.



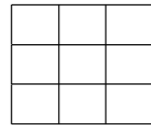
63. На улицата „Разнобојна“ сите куќи се наоѓаат од едната нејзина страна. Секоја од куќите е бојадисана во една од 5 можни бои. Се покажало дека за секои две од петте бои може да најдат соседни куќи кои се бојадисани во овие бои. Определи го најмалиот можен број куќи на оваа улица.

Решение. Имаме 5 бои, што значи дека бројот на можните парови бои е еднаков на $(5 \cdot 4) : 2 = 10$. Меѓу секој пар куќи ставаме

црта која го означува парот бои во кои куќите се бојадисани. Бројот на поставените црти е еднаков на бројот на празнините меѓу куќите. Бидејќи имаме 10 различни пара бои, според условот на задачата мора да имаме најмалку 10 црти, што значи најмалку 11 куќи.

Ако боите ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4 и 5, тогаш пример на бојадисување на точно 11 куќи кои го задоволуваат условот на задачата е: 12345135241.

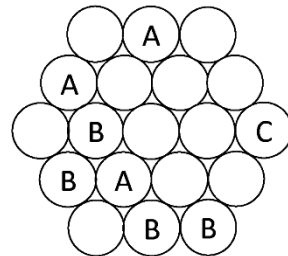
64. Секое од деветте полиња на квадратот даден на цртежот десно е обоено во една од неколку можни бои така што во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала нема полиња обоени во иста боја. Определи го најмалиот број бои потребен за такво боење.



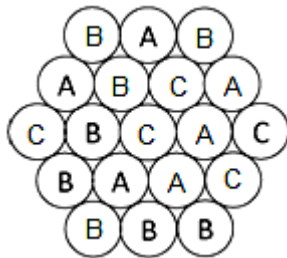
Решение. Секое две аголни полиња се или во ист ред, или во иста колона или на иста дијагонала, а секое аголно поле со централното поле е на иста дијагонала. Затоа централното и аголните полиња мора да се обоени во различни бои. Значи, потребни се најмалку 5 различни бои. Овие 5 бои се и доволни, што може да се види од боењето дадено на цртежот десно.

1	2	3
4	5	1
2	3	4

65. Во кругчињата на цртежот десно запиши ги буквите *A*, *B* и *C* така што ќе нема рамностран триаголник во чии темиња се запишани исти букви.



Решение. Решението на задачата е прикажано на долниот цртеж.



66. На колку различни начини може да се покрие правоаголник со димензии 2×6 со шест еднакви правоаголници со димензии 2×1 ?

Решение. Почнувајќи од лево кон десно во правоаголникот со димензии $2 \times (n+1)$ малите правоаголници може да се постават само на два начини: или вертикално еден правоаголник или хоризонтално два правоаголника. Во првиот случај треба уште да покриеме правоаголник со димензии $2 \times n$, а во вториот случај треба уште да покриеме правоаголник со димензии $2 \times (n-1)$. Според тоа, бројот на покривањата на $2 \times n$ правоаголникот е еднаков на збирот на броевите на покривањата на правоаголниците $2 \times n$ и $2 \times (n-1)$.

Правоаголник со димензии 2×1 може да се покрие на 1 начин, а правоаголник со димензии 2×2 може да се покрие на 2 начина (зошто?). Од претходно изнесеното добиваме дека правоаголник со димензии 2×3 може да се покрие на $1+2=3$ начини, правоаголник со димензии 2×4 може да се покрие на $2+3=5$ начини, правоаголник со димензии 2×5 може да се покрие на $3+5=8$ начини и правоаголник со димензии 2×6 може да се покрие на $5+8=13$ начини.

67. Квадрат со димензии 3×3 треба да се расече на правоаголници со димензии 3×1 и 2×1 при што не е задолжително и двата видови правоаголници да учествуваат во расекувањето. На колку различни начини тоа може да се направи ако деветте единечни квадратчиња на 3×3 квадратот се означени.

Решение. Бидејќи единечните квадрати се означени, расекувањата кои се добиваат со расекувањата кои се совпаѓаат со вртење на квадратот се различни. Две расекувања се добиваат ако 3×3 квадратот го расечеме на прво на хоризонтални, а потоа на вертикални 3×1 правоаголници.

Не е можно да имаме расекување во кое учествуваат точно 2 правоаголници со димензии 3×1 , бидејќи остануваат три единечни квадрати кои не може да се расечат на 2×1 правоаголници.

Ако имаме расекување со еден 3×1 правоаголник, тогаш тој може да биде или во краен ред или во крајна колона. Доволно е да ги преброиме расекувањата во еден од овие четири случаи. Нека 3×1 квадратот е во првиот ред. Тогаш останатите два реда може да се расечат со три вертикално поставени 2×1 или со еден вертикално поставен 2×1 правоаголник во првата и третата колона и уште два хоризонтално поставени 2×1 правоаголници. Значи, во случајов имаме вкупно 3 расекувања. Конечно, вкупниот број расекувања кои ги задоволуваат условите на задачата е $2 + 4 \cdot 3 = 14$.

V.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Збирот на точките кои се наоѓаат на сидовите на правилна коцка за играње е еднаков на 7.

а) Една над друга се залепени 7 правилни коцки. Определи го најголемиот можен збир на точките кои се наоѓаат на површината на добиеното тело.

б) Седумте коцки од задачата по а) ги лепиме така што еден до друг лепиме само сидови со еднаков број точки. Определи го збирот на точките кои се наоѓаат на површината на добиеното тело.

Решение. а) Површината е формирана од по два спротивни сида на седумте коцки и по еден сид на две коцки. Бидејќи збирот на точките на спротивните сидови е еднаков на 7, најголем можен збир на точки ќе се добие ако на преостанатите два сида се по 6 точки. Во тој случај збирот ќе биде $7 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = 110$.

б) Бидејќи смееме да лепиме само сидови со ист број точки, долниот и горниот сид ќе бидат спротивни сидови на една коцка, па затоа збирот на точките ќе биде еднаков на $7 \cdot 2 \cdot 7 + 7 = 105$.

69. Во полињата на табела со димензии 5×5 се запишани природни броеви чиј збир е еднаков на 416. Збирот на броевите запишани во секои две соседни полиња е еднаков и е непарен број. Опре-

дели ги запишаните броеви. (Соседни се полиња кои имаат заедничка страна.)

Решение. Ако во првите две полиња на првиот ред последователно се запишани броеви a и b , тогаш во третото поле мора да е запишан бројот a во четвртото поле број b и на крајот бројот a . Сега во првото поле на втората колона мора да биде запишан бројот b , па продолжувајќи на ист начин добиваме дека табелата е пополнета на начин како што е прикажано на цртежот десно. Значи,

a	b	a	b	a
b	a	b	a	b
a	b	a	b	a
b	a	b	a	b
a	b	a	b	a

$$13a + 12b = 416, \text{ т.е. } 12(a + b) = 416 - a.$$

Бидејќи бројот $416 - a = 408 + 8 - a = 12 \cdot 34 + 8 - a$ мора да е делив со 12, бројот a мора да биде еднаков на $8 + 12c$ каде c е број поголем или еднаков на 0. Значи,

$$13 \cdot (8 + 12c) + 12b = 416$$

$$104 + 13 \cdot 12c + 12b = 416$$

$$12 \cdot (13c + b) = 312$$

$$13c + b = 26.$$

Од последното равенство следува $c \leq 2$ (Зошто?).

Ако $c = 0$, тогаш $a = 8, b = 26$, но $a + b = 34$ е парен број.

Ако $c = 1$, тогаш $a = 20, b = 13$ и $a + b = 33$.

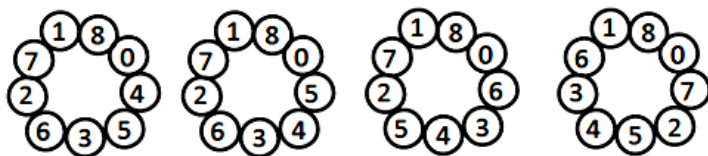
Ако $c = 2$, тогаш $a = 32, b = 0$, но $a + b = 34$ е парен број.

Конечно, во полињата на табелата се запишани броевите 20 и 13.

70. Подредувањето во круг на 9 различни цифри го нарекуваме *кружно*, ако збирот на секои две соседни цифри е едноцифрен број. Најмалиот од зборовите на две соседни цифри го нарекуваме *кругов збир*. Определи ги сите можни кругови зборови за различните кругни подредувања.

Решение. Цифрата 9 не учествува во подредувањето, бидејќи нејзините можни најмали соседи се 0 и 1, а збирот $9 + 1 = 10$ не е едноцифрен број. Сите останати цифри учествуваат во подредувањето. Јасно, соседи на 8 се 0 и 1. Според тоа, 0 и 1 не може да бидат соседи, па затоа 1 не може да е кругов збир. Цифрата 8

исто така не може да е кругов збир, бидејќи која и да е другата цифра до 0 нејзиниот збир со 0 е помал од 8. Цифрата 7 мора да е до 0 или 1 и притоа нејзиниот втор сосед мора да е 2. Затоа 2 не може да биде кругов збир, бидејќи во спротивно 2 треба да е до 0 и тогаш не е можно 7 да се наоѓа истовремено до 1 и до 2. Ако претпоставиме дека 3 е кругов збир, тогаш 3 треба да е до 0 и сега 2 и 3 се оддалечени и не може да бидат соседи на 6, т.е. во тој случај барем еден од соседите на 6 е поголем од 3, па збирот на тој сосед со 6 нема да е едноцифрен број. Значи, 3 не може да биде кругов збир. Од досега изнесеното следува дека можни кругови зборови се 4, 5, 6 и 7. Дека овие броеви се кругови зборови може да се види од примерите прикажани на долните цртежи.



71. Пред Иван има три купчиња камчиња. Првото купче има 32 камчиња, второто – 20, а третото купче има 3 камчиња. Иван замислил игра со едно правило: Од само едно купче може да се префрлат толку камчиња во друго купче, колку што има камчиња во второто купче. На пример:

$$(32;20;3) \rightarrow (12;40;3), \text{ или}$$

$$(32;20;3) \rightarrow (29;20;6), \text{ или}$$

$$(32;20;3) \rightarrow (32;17;6)$$

се дозволени чекори, но $(32;20;3) \rightarrow (30;19;6)$ не е дозволен чекор бидејќи од две купчиња се земени камчиња за третото. Дали може Иван почитувајќи го правилото од три купчиња $(32;20;3)$ да добие две купчиња – едното со 54 камчиња, а другото со 1 камче?

Решение. Од дадените купчиња Иван може да добие две купчиња – едното со 54 камчиња, а другото со 1 камче со следнава постапка:

$$\begin{aligned} (32;20;3) &\rightarrow (12;40;3) \rightarrow (24;28;3) \rightarrow (24;25;6) \rightarrow (24;19;12) \\ &\rightarrow (24;7;24) \rightarrow (48;7;0) \rightarrow (41;14;0) \rightarrow (27;28;0) \rightarrow (54;1;0). \end{aligned}$$

72. Двајца пријатели играат игра со 10 купчиња од по 10 камчиња. Кога е на потез, секој играч има право да направи по избор еден од следните четири чекори:

- 1) да ги земе сите камчиња од едно од постојните купчиња;
- 2) да ги земе сите камчиња од две од постојните купчиња;
- 3) да земе по едно камче од сите постојни купчиња;
- 4) да земе по две камчиња од сите постојни купчиња.

Победува играчот кој што ќе земе последен. Кој од играчите – првиот или вториот, ако игра правилно, може со сигурност да победи без разлика како ќе игра противникот?

Решение. Од условот е јасно, дека после секој чекор во сите преостанати купчиња има еднаков број камчиња. По секој чекор состојбата може да биде опишана со броеви m и n , каде m е бројот на купчињата, а n е бројот на камчињата во секое купче. По секој чекор состојбата ќе ја запишуваме со $(m; n)$. На почетокот таа се опишува со $(10; 10)$. По првиот чекор можни се следниве состојби $(9; 10)$, $(8; 10)$, $(10; 9)$ или $(10; 8)$. Во секоја од овие состојби вториот играч може да направи чекор со кој што ќе го изедначи бројот на купчињата и камчињата во нив, т.е. да направи состојба $(m; m)$. Првиот играч одново ќе го наруши равенството на двата броја, а вториот може повторно да ги зиедначи двата броја. Така се продолжува додека се стигне до состојба во која или бројот на купчињата или бројот на камчињата ќе биде помал од 3. Во таа состојба вториот играч може да ги земе сите камчиња.

Значи, добитна стратегија има вториот играч кој секогаш треба да го изедначува бројот на купчињата со бројот на камчињата во нив.

73. Дадени се две купчиња: едно со 2 камчиња и друго со $k \geq 1$ камчиња. Двајца играчи наизменично ја играат следнава игра. Играчот кој е на потег зема едно или повеќе камчиња од едното купче. Играчот кој последен зел камчиња победува. Познато е дека вториот играч победува независно од тоа како игра првиот играч. Определи го k .

Решение. Состојбата кога во едното купче има m камчиња, а во другото n камчиња ќе ја означуваме со (m, n) .

Ако $k=1$, тогаш првиот играч ќе земе 1 камче од првото купче, по што ќе имаме состојба $(1, 1)$. Сега вториот играч мора да земе 1 камче од едно од купчињата, по што првиот играч го зема камчето од другото купче и тој победува. Значи, $k > 1$.

Ако $k=2$, тогаш по потегот на првиот играч можни се состојбите $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ и $(2, 0)$. Во првиот и четвртиот случај вториот играч ги зема преостанатите камчиња и победува, а во вториот и третиот случај зема 1 камче од купчето со 2 камчиња, по што се добива состојбата $(1, 1)$ и потоа вториот играч победува.

Нека $k > 2$. Видовме дека при состојба $(2, 2)$ играта ја губи играчот кој е на потег. Според тоа, ако од второто купче првиот играч земе $k-2$ камчиња, тогаш на вториот играч му остава состојба $(2, 2)$ и вториот играч ја губи играта.

Конечно, од претходните разгледувања следува $k=2$.

74. Во некои полиња на табелата дадена на цртежот десно се запишани броеви. Во празните полиња запиши по еден од броевите од 1 до 7 така што во секој ред, во секоја колона и во секоја од малите фигури се наоѓаат сите седум броја.

		4			7	
3						7
		6		5		1
			2	1		4
5						4
4		2				
			3		2	

Решение. Имајќи го предвид условот на задачата во долните табели е прикажан еден редослед на последователното запишување на броевите во празните полиња на дадената табела.

		4		3	7	
3				2		7
		6	4	5		1
			2	1		4
5			6		4	
4		2	7		1	3
			3		2	

		4		3	7	
3				2		7
		6	4	5		1
			2	1		4
5			6	7	4	
4	5	2	7	6	1	3
7	6		3	4	2	5

		4		3	7	6
3				2		7
2		6	4	5		1
6	3	7	2	1	5	4
5	1	3	6	7	4	2
4	5	2	7	6	1	3
7	6	1	3	4	2	5

1	2	4	5	3	7	6
3	4	5	1	2	6	7
2	7	6	4	5	3	1
6	3	7	2	1	5	4
5	1	3	6	7	4	2
4	5	2	7	6	1	3
7	6	1	3	4	2	5

75. Девет навидум исти монети се подредени во редица. Меѓу монетите има три неисправни, кои имаат иста тежина, полесни се од

исправните монети и се подредени една до друга. Исправните монети имаат иста тежина. Како со две мерења на вага без тегови ќе ги определиме неисправните монети?

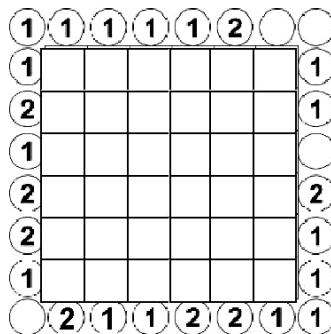
Решение. Монетите да ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. На вагата ги ставаме 3 и 7.

Ако вагата е во рамнотежа, тогаш бидејќи меѓу нив има три монети заклучуваме дека тие се исправни, па неисправните монети се 4, 5 и 6.

Ако е потешка монетата 3, тогаш неисправна е монетата 7. Значи, неисправните монети се или 7, 8, 9 или 6, 7, 8 или 5, 6, 7. На вагата ги ставаме монетите 5 и 9. Ако тие се во рамнотежа, тогаш неисправните монети се 6, 7 и 8. Ако е полесна монетата 5, тогаш неисправните монети се 5, 6 и 7, а ако е полесна монетата 9, тогаш неисправните монети се 7, 8 и 9.

На потполно ист начин постапуваме кога е потешка монетата 7.

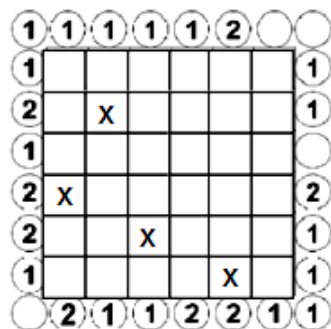
76. Група работи паднала во заседа во поле кое има квадратна форма и се состои од 36 квадрати и околу полето се распоредени непријателски цели (кругчињата на цртежот десно). Секој робот пука со ласер истовремено во 8 правци: кон сите 4 страни и по двете дијагонали. Роботите не стојат на линија на оган еден на друг.



Тие пукаат истовремено и сите истрели ги погодуваат целите. На шемата е прикажан бројот на погодоците во непријателските цели. Колку работи се во групата и каде истите стојат?

Решение. Ако ги собереме погодоците во целите добиваме дека роботите 32 пати ги погодиле целите. Секој робот пукал 8 пати и секој пат ја погодил целта, што значи дека во групата биле $32:8=4$ работи.

На цртежот десно е даден распоредот на четирите работи.



ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Ilić, N. V.: Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
4. Stojanović, V.: Vodič za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd, 1999
5. Андрић, В.: Математика X (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 1996
6. Аневска, К., Гоговска, В. Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје, 2015
7. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 1, Математилка искра 1, Скопје, 2020
8. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 2, Математилка искра 2, Скопје, 2020
9. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 3, Математилка искра 3, Скопје, 2020
10. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 4, Математилка искра 4, Скопје, 2020
11. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 5, Математилка искра 5, Скопје, 2020
12. Главче, М., Малчески, Р.: Движење по патеки и лавиринти, Нумерус, Скопје, 2015
13. Главче, М.: Забавни кибритчиња, Нумерус, Скопје, 2014
14. Главче, М.: Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје, 2016
15. Главче, М.: Пополнуваме тоа што недостасува, Нумерус, Скопје, 2014

16. Главче, М.: Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје, 2016
17. Главче, М.: Споредуваме и пресметуваме, Математичка искра, Скопје, 2020
18. Главче, М.: Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје, 2018
19. Главче, М.: Движење во лавиринти, Математичка искра, Скопје, 2020
20. Главче, М.: Прошетки по лавиринти, Математичка искра, Скопје, 2020
21. Златилов, В.; Тонова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000
22. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 4 клас, Модул, София, 1993
23. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
24. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
25. Малчески, Р., Главче, М.: Занимливи броења, Нумерус, Скопје, 2019
26. Малчески, Р., Главче, М.: Решаваме бројни ребуси, Нумерус, Скопје, 2017
27. Малчески, Р.: Да размислуваме со „здрав разум“, Математичка искра 2, Скопје, 2020
28. Малчески, Р.: Нестандардни мерки за должина, Математичка искра 3, Скопје, 2020
29. Малчески, Р.: Право, лево и десно, Математичка искра 2, Скопје, 2020
30. Малчески, Р.: Редослед на случување на настани, Математичка искра, Скопје, 2020
31. Малчески, Р.: Решаваме задачи со броење коцки, Нумерус, Скопје, 2016
32. Малчески, Р.: Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје, 2003
33. Малчески, Р.: Редици од броеви, Математичка искра, Скопје, 2020

34. Малчески, Р.: Црвенкапа и загатките на волкот, Математичка искра, Скопје, 2020
35. Малчески, Р.: Малчку поинакви пресметувања, Математичка искра, Скопје, 2020
36. Малчески, С.: Броиме коцки, Математичка искра, Скопје, 2020
37. Малчески, С.: Дополнуваме тоа што недостасува, Математичка искра, Скопје, 2020
38. Малчески, С.: Математика во правоаголна мрежа, Математилка искра, Скопје, 2020
39. Малчески, С., Главче, М.: Броиме патишта, Математичка искра, Скопје, 2020
40. Малчески, С.: Времето е важно, Математичка искра, Скопје, 2020
41. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
42. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София, 1995
43. Тюфекчиев, И.; Лесов, Х.: Задачи за извънкласна работа по математика в VI и V клас, СМБ, София, 1985
44. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998