Зоран Мисајлески
Скопје

ФАМИЛИЈАРНО ДРВО НА ПЧЕЛИ И БРОЕВИ НА ФИБОНАЧИ

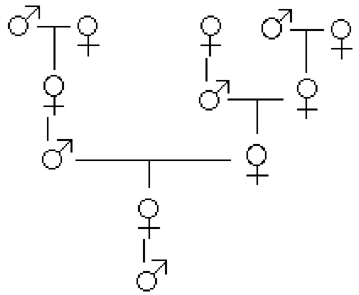
Пчелите имаат необично фамилијарно дрво. Најпрво да се запознаеме со некои карактеристики на оваа фамилија инсекти. Прво не сите пчели имаат два родители. Имено:

- Воројот пчели има една женка наречена матица.

- Воројот има неколку стотини машки пчели-трутови кои не работат. Трутовите се родени од матичните неоплодени јајца, што значи машките пчели имаат мајка, но немаат татко.

- Воројот има повеќе илјади женски пчели наречени работнички, кои за разлика од матицата не несат јајца. Сите женски пчели се зачнуваат кога матицата се пари со трутовите, што значи имаат два родители. Женските пчели најчесто стануваат работнички, но некои од нив ги хранат со специјална супстанција наречена кралско желе и израснуваат во кралици спремни да одлетаат и да формираат друго гнездо.

Прашање: Колку прапрапрабаби и прапрапрадедовци има една пчела.



Да го разгледаме фамилијарното дрво на машка трут-пчела.

1. Има еден родител женка.
2. Има две 2 баби и дедовци бидејќи мајка му има два родители.
3. Има 3 прабаби и прадедовци. Имено баба му има два родители, но дедо му има само еден родител.
4. Има 5 прапрабаби и прапрадедовци.
5. Има 8 прапрапрабаби и прапрадедовци

Аналогно спроведувајќи ја истата анализа кај женска пчела ја добиваме следнава табела:

број на	**родители**	**баби и дедовци**	**прабаби и прадедовци**	**прапрабаби и прапрадедовци**	**прапрапрабаби и прапрадедовци**
машки пчели	1	2	3	5	8
женски пчели	2	3	5	8	13

И во двата случаеви ги добиваме броевите на Фибоначи:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots$$

Тие се дефинираат на следниов начин. Првиот број е 0. Вториот број е 1. Секој нареден број е збир од претходните два. Со математичка терминологија тоа е искажано преку следнава рекурентна формула

$$F_0 = 0\,,\ F_1 = 1\,, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \in N\,.$$

ИДЕНТИТЕТИ

Прв идентитет: Секој фибоначиев број е сума од претходните два

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,.$$

Втор идентитет: Сумата на првите n фибоначиеви броеви е за 1 помала од $n+2$ -от фибоначиев број $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

Доказ: Имаме

$$\begin{aligned} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n &= \left(F_n + F_{n-1}\right) + \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) = \\ &= F_n + F_{n-1} + \left(F_{n-2} + F_{n-3}\right) + \left(F_{n-3} + F_{n-4}\right) = \ldots \\ &= \left(F_n + F_{n-1} + \ldots F_3 + F_2\right) + F_2 + F_1 \\ &= \left(F_n + F_{n-1} + \ldots F_3 + F_2\right) + F_1 + F_0 + F_1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} F_i + F_1 = \sum_{i=0}^{n} F_i + 1\,, \end{aligned}$$

од каде следува $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

Трет идентитет: а) Сумата на првите $n-1$ непарни фибоначиеви броеви е еднаква на $2n$ -тиот фибоначиев број т.е. $\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}$.

б) Сумата на првите n парни фибоначиеви броеви е еднаква на $2n+1$-тиот фибоначиев број минус 1 т.е. $\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$.

Доказ: а) Имаме

$$F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2} = F_{2n-1} + F_{2n-3} + F_{2n-4} = F_{2n-1} + F_{2n-3} + F_{2n-5} + F_{2n-6} = \ldots$$

$$= F_{2n-1} + F_{2n-3} + \ldots + F_5 + F_3 + F_2 = F_{2n-1} + F_{2n-3} + \ldots + F_3 + F_1 + F_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} + 0 = \sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} \, .$$

б) Имаме

$$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n} + F_{2n-2} + F_{2n-3} = F_{2n} + F_{2n-2} + F_{2n-4} + F_{2n-5} = \ldots$$

$$= F_{2n} + F_{2n-2} + \ldots + F_4 + F_2 + F_1 = \sum_{i=0}^{n} F_{2i} + 1$$

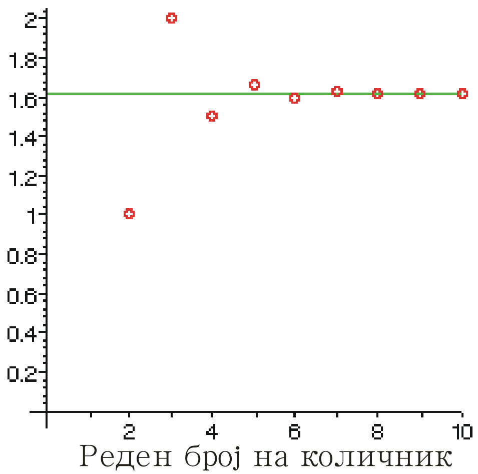
од каде . $\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$

БРОЕВИ НА ФИБОНАЧИ И ЗЛАТНА СРЕДИНА

Ако го разгледаме количникот фибоначиев број со неговиот претходник, ќе ги добиеме следниве броеви:

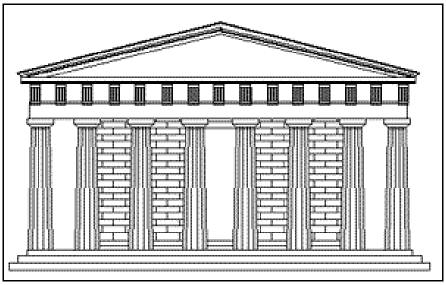
$\frac{1}{1} = 1$, $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{3}{2} = 1{,}5$, $\frac{5}{3} = 1{,}66\ldots$, $\frac{8}{5} = 1{,}6$, $8\frac{13}{1} = 1{,}625$ $\frac{21}{13} = 1{,}61538$

За подобра претстава точките ги претставуваме графички:



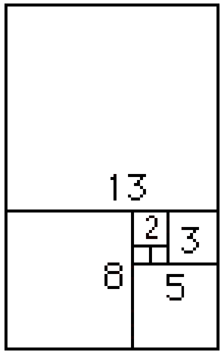
и забележуваме дека тие количници се доближуваат до еден број наречен златен број φ. Значи ако a и b се два соседни фибоначиеви броеви тогаш $\frac{b}{a} \approx \phi$ и $\frac{b}{a} \approx \frac{a+b}{b}$ од каде $\frac{b}{a} \approx \frac{a}{b} + 1$ односно $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1 = 0$ или

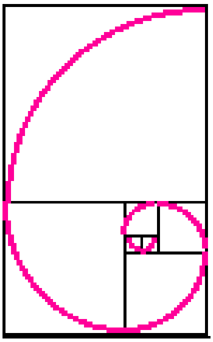
$\varphi^2-\varphi-1=0$. Со решавањето на равенката се добива $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}6$.



Нашата претстава за правоаголник се однесува на правоаголникот кај кој односот на поголемата со помалата страна е приближно 1,6; затоа што тој правоаголник изгледа најсовршено. Ова било искористено и од архитектите од античкиот период. На цртежот е претставен храмот на Партенон во Атина каде должините на страните се во дадениот соодност.

Ќе разгледаме уште една слика што ги претставува Фибоначиевите броеви. Цртаме еден до друг квадрати со страни од низата. Почнуваме со два квадрати со страна со должина 1. На горниот дел на квадратите се доцртува квадрат со страна со должина 2 што ги допира претходните два квадрата. Потоа се доцртува квадрат со страна со должина 3 што допира квадратите со страни со должини 2 и 1 како на цртежот. Понатаму доцртуваме квадрат со страна чија должина претставува збир од должините на страните што ги допира. Овие квадрати се нарекуваат Фибоначиеви квадрати.





Ако темињата на дијагоналите на квадратите ги поврземе со четврт кружници кои се надоврзуваат една на друга се добива добра апроксимација на спирала која често се среќава и во природата, кај полжавите, школките и некои цвеќиња. Точките на оваа крива се околу 1,6 пати подалеку од центарот после свртување за 90^0, и околу $1{,}6^4\approx 6{,}8$ пати после свртување за цел круг.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ