Ристо Малчески, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

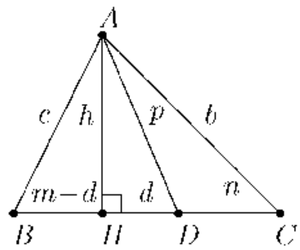
ТЕОРЕМА НА СТЈУАРТ – ВТОР ДЕЛ

Во [1] и [4] се дадени два докази на теоремата на шкотскиот математичар Стјуарт (1717-1785). Доказот во [1] е со помош на комплексни броеви, а во [4] оваа теорема е докажана со користење на косинусната теорема. Самата теорема Стјуарт не ја докажал, а првиот познат доказ е објавен од Роберт Симсон (1687-1768), пет години по публикувањето на нејзината формулација од страна на Стјуарт. Се претпоставува дека оваа теорема му била позната уште на Архимед во III век пне. Во следните разгледувања ќе презентираме уште неколку докази на оваа теорема.

Теорема (Стјуарт). Ако на страната BC на $\triangle ABC$ е избрана точка D, која лежи меѓу точките B и C, тогаш точно е равенството

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} - \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BD} = \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC}. \qquad (1)$$

Доказ. *Прв начин*. Ги воведуваме ознаките $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, \overline{AD} = p, \overline{BD} = m, \overline{CD} = n$.



При овие ознаки треба да докажеме дека

$$b^2 m + c^2 n - amn = p^2 a . \qquad (2)$$

Нека H е подножјето на висината повлечена од точката A кон страната BC и да означиме $\overline{AH} = h$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката H припаѓа на отсечката HD (цртеж десно). Да означиме $\overline{HD} = d$, т.е. $\overline{BH} = m - d$. Од Питагоровата теорема, применета на $\triangle BHA$, $\triangle CHA$ и $\triangle AHD$ соодветно добиваме

$$c^2 = h^2 + (m-d)^2 \qquad (3)$$

$$b^2 = h^2 + (n+d)^2 , \qquad (4)$$

$$h^2 + d^2 = p^2 . \qquad (5)$$

Ако равенствата (3), (4) и (5) последователно ги помножиме со n, m и a, а потоа добиени равенства ги собереме, со последователни трансформации ги добиваме следниве еквивалентни равенства:

$$mb^2 + nc^2 + a(h^2 + d^2) = n(h^2 + (m-d)^2) + m(h^2 + (n+d)^2) + ap^2,$$

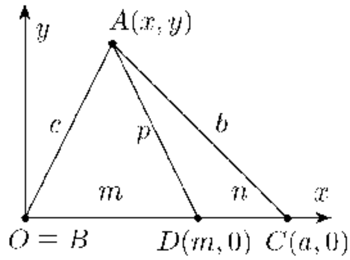
$$mb^2 + nc^2 + a(h^2 + d^2) = (m+n)h^2 + mn(m+n) + (m+n)d^2 + ap^2,$$

$$mb^2+nc^2+a(h^2+d^2)=ah^2+amn+ad^2+ap^2,$$

$$mb^2+nc^2=amn+ap^2,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Равенството (2) ќе го докажеме со аналитичка геометрија, т.е. со координатниот метод. Триаголникот ABC го сместуваме во правоаголен координатен систем, при што страната BC ја поставуваме на $x-$оската и $O\equiv B$. Тогаш координатите на точките A,B,C и D се: $A(x,y), B(0,0), C(a,0)$ и $D(m,0)$ (цртеж десно). При воведените ознаки, ако ја искористиме формулата за растојание меѓу две точки, добиваме



$$c^2=\overline{AB}^2=x^2+y^2,\ b^2=\overline{AC}^2=(x-a)^2+y^2,\ p^2=\overline{AD}^2=(x-m)^2+y^2.$$

Од друга страна, $\overline{BD}=m, \overline{CD}=n=a-m$, па затоа

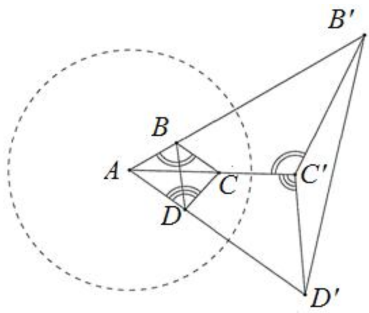
$$\begin{aligned}b^2m+c^2n-p^2a&=m((x-a)^2+y^2)+n(x^2+y^2)-a((x-m)^2+y^2)\\&=mx^2-2mxa+ma^2+my^2+nx^2+ny^2-ax^2+2axm-am^2-ay^2\\&=am(a-m)+(m+n)x^2+(m+n)y^2-ax^2-ay^2\\&=amn,\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (2). ■

Како што видовме, во првиот начин на докажување на теоремата на Стјуарт ја искористивме само Питагоровата теорема. Со други зборови, оваа класична теорема од метричката геометрија на триаголник може да ја усвојат и учениците од деветто одделение од основното образование, што ќе им овозможи да решаваат низа проблеми кои се поврзани со метричките односи во триаголникот. Вториот доказ, кој го користи координатниот метод исто така е достапен за учениците од деветто одделение од основното образование, бидејќи при добро поставување на координатниот систем истиот користи само растојание меѓу две точки. Во третиот доказ на теоремата на Стјуарт, кој овде ќе го презентираме, ќе ја користиме следнава теорема.

Теорема (Бретшнајдер). Нека $ABCD$ е произволен четириаголник (не задолжително конвексен). Тогаш

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 \cdot \overline{AD}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DA}\cos(\measuredangle BAD + \measuredangle BCD)$$



Доказ. Нека I е инверзија со центар A и произволен радиус $R > 0$. Нека $I(B) = B'$, $I(C) = C'$ и $I(D) = D'$. Од својствата на инверзијата следува

$\measuredangle ABC = \measuredangle AC'B'$ и $\measuredangle ADC = \measuredangle AC'D'$,

па затоа $\measuredangle B'C'D' = \measuredangle BAD + \measuredangle BCD$. Понатаму, $\triangle ADC \sim \triangle AC'D'$, $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$ и $\triangle ABD \sim \triangle AD'B'$, од каде добиваме

$\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AD}} = \frac{R^2}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}$, т.е. $\overline{C'D'} = \frac{R^2 \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}$.

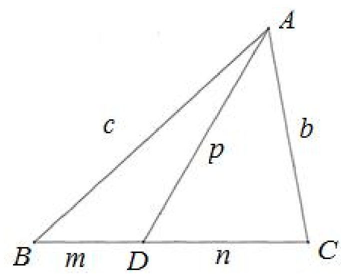
Аналогно се добива $\overline{B'C'} = \frac{R^2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}$ и $\overline{B'D'} = \frac{R^2 \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{AB}}$. Сега, ја применуваме косинусната теорема за $\triangle B'C'D'$ и добиваме

$$\overline{B'C'}^2 + \overline{D'C'}^2 - 2\overline{B'C'} \cdot \overline{D'C'}\cos(\measuredangle BAD + \measuredangle BCD) = \overline{B'D'}^2,$$

од каде, со замена од претходните три равенства, го добиваме равенството

$$\frac{R^4 \cdot \overline{BD}^2}{\overline{AD}^2 \cdot \overline{AB}^2} = \frac{R^4 \cdot \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 \cdot \overline{AB}^2} + \frac{R^4 \cdot \overline{CD}^2}{\overline{AC}^2 \cdot \overline{AD}^2} - 2\frac{R^2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} \cdot \overline{AB}} \cdot \frac{R^2 \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}\cos(\measuredangle BAD + \measuredangle BCD),$$

кое е еквивалентно со равенството кое требаше да го докажеме. ■



Трет начин на докажување на теоремата на Стјуарт:

Нека $\measuredangle BAC = \sim$. Ја применуваме теоремата на Бретшнајдер на дегенерираниот четириаголник $ABDC$ (цртеж десно) и го добиваме равенството

$$(bm)^2 + (cn)^2 - 2bcmn\cos(180^\circ + \sim) = p^2(m+n)^2$$

кое е еквивалентно со равенството

$$(bm)^2 + (cn)^2 + 2bcmn\cos\sim = p^2(m+n)^2. \qquad (6)$$

Понатаму, од косинусната теорема, применета на $\triangle ABC$, добиваме

$$2bc\cos\sim = b^2 + c^2 - a^2,$$

па со замена во (6) го добиваме равенството

$$(bm)^2 + (cn)^2 + mn(b^2 + c^2 - a^2) = p^2(m+n)^2,$$

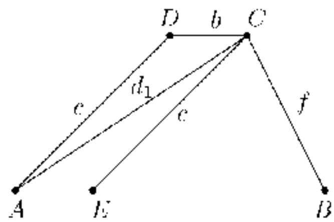
кое ако земеме предвид дека $a = m + n$ е еквивалентно со равенството (2). ■

Во [4] се презентирани поголем број задачи и теореми за чие докажување е користена теоремата на Стјуарт. На крајот од оваа статија ќе презентираме уште една задача, која е решена со помош на теоремата на Стјуарт.

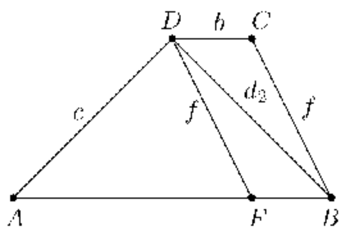
Задача. Даден е трапез $ABCD$, $AB \| CD$, $\overline{AB} > \overline{CD}$. При ознаки $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{AD} = c$, $\overline{BC} = f$, $\overline{AC} = d_1$, $\overline{BD} = d_2$, докажи дека

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + f^2 + 2ab. \qquad (7)$$

Решение. Нека точката E е таква што $E \in AB$ и $CE \| AD$ (цртеж десно). Тогаш $\overline{EC} = c$. Од теоремата на Стјуарт, применета на $\triangle ABC$ и точката E која припаѓа на страната AB, следува



$$d_1^2 \cdot \overline{EB} + f^2 \cdot \overline{AE} = c^2 a + a \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EB}. \qquad (8)$$



Нека точката F е таква што $F \in AB$ и $DF \| BC$ (цртеж лево). Тогаш $\overline{DF} = f$. Од теоремата на Стјуарт, применета на $\triangle ADB$ и точката F која припаѓа на страната AB, следува

$$d_2^2 \cdot \overline{AF} + c^2 \cdot \overline{FB} = f^2 a + a \cdot \overline{AF} \cdot \overline{FB}. \qquad (9)$$

Понатаму, ако ги собереме равенствата (8) и (9) и искористиме дека $\overline{EB} = \overline{AF} = a - b$, $\overline{FB} = \overline{CD} = \overline{AE} = b$, го добиваме равенството

$$(d_1^2 + d_2^2)(a-b) + (f^2 + c^2)b = (c^2 + f^2)a + 2ab(a-b),$$

кое, бидејќи $a - b > 0$, е еквивалентно со равенството (7). ■

Литература

1. Malcheski, R., Grozdev, S., Anevska, K.: *Geometry of complex numbers*, Arhimed, Sofia, 2015
2. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: *Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998
3. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: *555 задачи по геометрия, решения по геометрия в картинки на А. В. Акопян*, УНИМАТ СМБ, София, 2015
4. Малчески, Р., Аневска., К.: *Теорема на Стјуарт*, Сигма, СММ, Скопје
5. Маринов, М. С.: *Върху теоремата на Стюарт*, Математика 5/11, София