РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, ОДРЖАН ВО 1963 ГОД.

Трети клас

1. Од садот, кој има волумен a литри, наполнет со шпиритус, е одлеан некој дел и е долеана исто толку вода; потоа е одлеано исто толку од мешавината и повторно е долеана вода. Потоа во садот имало b литри чист шпиритус. По колку литри течност беше одлевана?

2. Да се реши системот равенки:

$$4\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} = 11\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} - 6, \quad y=2-\lg x.$$

3. Еден столб и една кула се наоѓаат на рамно земјиште на растојание од 24 m. Од подножјето на кулата столбот се гледа под некој агол, а од подножјето на столбот кулата се гледа под двојно поголем агол. Од средината на нивните подножја кулата и столбот се гледаат под агли што се комплементни. Да се пресметаат нивните висини.

4. Во рамностран конус, со висина h, ставени се три еднакви топки, и тоа така што секоја од нив ги допира двете други, основата и обвивката на дадениот конус. Да се најде радиусот на тие топки.

Четврти клас

1. Да се докаже:

а) Ако броевите a^2, b^2 и c^2 претставуваат три последователни члена на една аритметичка низа, тогаш и броевите: $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ и $\frac{1}{a+b}$ претставуваат исто така три последователни члена на аритметичка низа.

б) Ако броевите a^2, b^2 и c^2 претставуваат едновремено и три последователни члена на една аритметичка, и три последователни члена на една геометриска низа, тогаш е $a=b=c$.

2. Во просторот се дадени n точки, од кои по три не лежат на една права, а ниту четири не лежат во иста рамнина.

а)Колку рамнини ќе се добијат ако низ секои три од овие точки се постави по една рамнина?

б)По колку различни прави ќе се сечат определените рамнини,ако ниту две од нив не се меѓу себе паралелни,и ако не се земаат предвид оние прави кои минуваат низ дадените точки?

в)Земајќи го бројот n на точките како независно променлива $(n=x)$,а бројот N на рамнините како нејзина функција$(N=y)$,да се конструира графикот на оваа функција,одредувајќи ги и нејзините екстремни точки.

3. Да се докаже дека отсечката на произволна тангента на параболата,која е ограничена со две дадени тангенти на истата парабола,се гледа од фокусот под еден сталенагол.

4. Основата на една права пирамида е рамнокрак триаголник со крак $b=5$ и агол на основата $\alpha=56^\circ 17'43''$.Бочните рабови се наведени кон основата под агол $\beta=70^\circ 26'18''$.

а)Да се најде површината на пресекот на пирамидата што минува низ темето на аголот α и висината на пирамидата.

б)Да се најде волуменот на пирамидата.

РЕШЕНИЈА

Трети клас

1. Откога е одлеано x литри шпиритус од a литри шпиритус и долеано исто толку вода,мешавината содржи $\frac{a-x}{a}$ шпиритус на литар.

По второто одлевање имаме:

$$a-x-\frac{a-x}{a}x=b$$

од каде што е

$$x=a\pm\sqrt{ab}\ .$$

На задачата одговара решението $x=a-\sqrt{ab}$.

2. Ако во првата равенка на системот се изврши замена

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}}=t, \qquad (1)$$

се добива

$$4t^2-11t+6=0,$$

од каде: $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{3}{4}$.

Од системот равенки

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{y} = 2, \quad y = 2 - \lg x;$$

се добива:

$$\frac{1}{x} = 2^{y}, \quad y = 2 - \lg x;$$

$$-\lg x = y\lg 2, \quad y = 2 - \lg x;$$

$$y = 2 + y\lg 2, \quad y(1 - \lg 2) = 2, \quad y = \frac{2}{1 - \lg 2};$$

Оттука се добива:

$$y_1 = \frac{2}{\lg 5}, \quad x_1 = -4 - \frac{1}{\lg 5}.$$

Од системот равенки

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{y} = \frac{3}{4}, \quad y = 2 - \lg x$$

аналогно се добива:

$$y_2 = \frac{2}{1 - \lg\frac{3}{4}} = \frac{2}{\lg\frac{40}{3}}, \quad x_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{y_2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{\lg\frac{40}{3}}}$$

3. Висината на кулата нека е h_1, а висината на столбот h_2 (сл.30).

$h_1 = 24\,\mathrm{tg}\,2\alpha$, (1)

$h_2 = 24\,\mathrm{tg}\,\alpha$, (2)

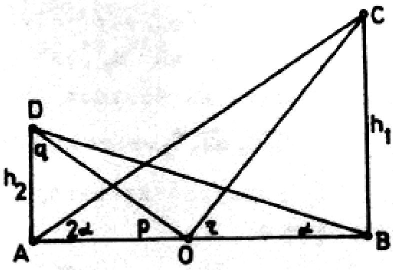
$\Delta AOD \sim \Delta OBC$,

затоа што се двата правоаголни и што е

$\sphericalangle p = \sphericalangle s$, $\sphericalangle q = \sphericalangle r$.

Од сличноста на тие триаголници следува:

$h_1 : 12 = 12 : h_2$ или $h_1 h_2 = 144$. (3)



Сл.30

Од (1),(2) и (3) добиваме:

$$24^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha = 144, \quad 4\,\mathrm{tg}\,\alpha\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = 1, \quad 8\,\mathrm{tg}^2\alpha = 1 - \mathrm{tg}^2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\pm 1}{3} .$$

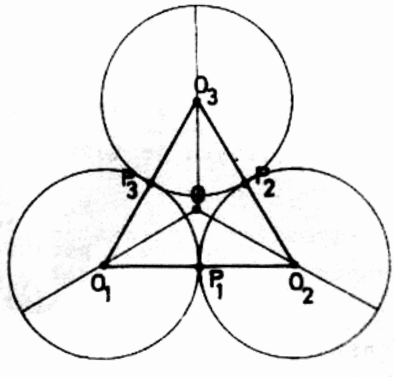
Од двете решенија доаѓа предвид само позитивното решение.

Според тое е:

$$h_1 = 18, \quad h_2 = 8.$$

4. Центрите на трите топки O_1, O_2 и O_3 лежат во една рамнина на растојание r од основата (каде што со r сме го означиле **радиусот на топките) и определуваат** рамностран триаголник со **страна 2r** (сл.31). **Тие се едновремено** и центри на трите големи **кругови на топките, што ги содржат и меѓусебните допирни точки P_1, P_2 и P_3 на топките, и, според тоа, тие се оддалечени од висината на топката за**

$$\overline{OO_1}=\overline{OO_2}=\overline{OO_3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2r\sqrt{3}}{2}=\frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$



Сл.31

Центрите O_1, O_2 и O_3 лежат, исто така, секој на по еден оскин пресек на конусот од кои секој минува низ една од допирните точки на топките со обвивката на конусот, M_1, M_2 и M_3.

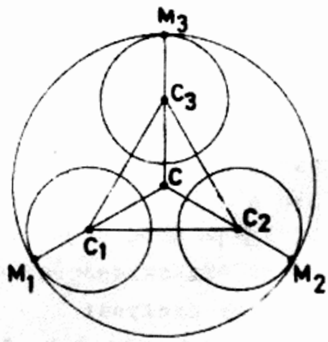
Поради тоа центрите C_1, C_2 и C_3 на трите мали кругови на топките, кои се паралелни со основата на конусот, а ги содржат точките M_1, односно M_2, односно M_3, се оддалечени од основата на конусот за

$$\overline{Q_1C_1}=\overline{Q_2C_2}=\overline{Q_3C_3}=r+r\sin 30^\circ=\frac{3r}{2}.$$

Радиусот на секој од овие кругови е

$$\rho=r\cos 30^\circ=\frac{r\sqrt{3}}{2}$$

и, поради тоа, точките M_1, M_2 и M_3 се оддалечени од оската на конусот за



Сл.32

$$\overline{M_1C}=\overline{M_2C}=\overline{M_3C}=\rho+\overline{C_1C}=\frac{r\sqrt{3}}{2}+\frac{2r\sqrt{3}}{3}=\frac{7r\sqrt{3}}{6}.$$

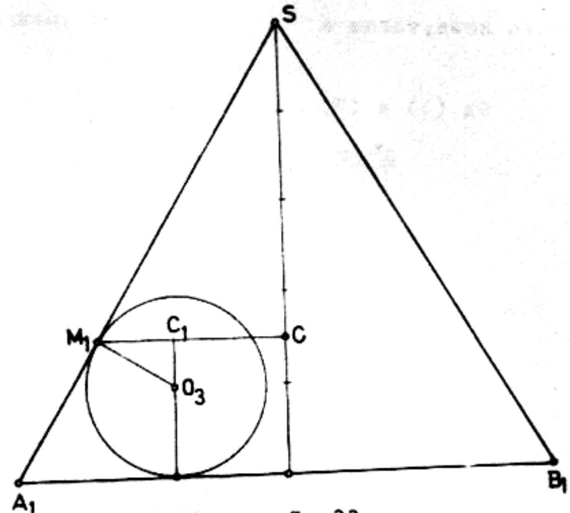
Од сличноста на триаголниците M_1CS и A_1QS се добива:

$$\frac{\overline{M_1C}}{\overline{A_1Q}}=\frac{\overline{CS}}{\overline{QS}},$$

односно

$$\frac{\frac{7r\sqrt{3}}{6}}{R}=\frac{R\sqrt{3}-\frac{3r}{2}}{R\sqrt{3}},$$

$$r=\frac{R\sqrt{3}}{5}=\frac{h}{5}.$$



Сл.33

Четврти клас

1.а)Обележувајќи ја разликата на аритметичката низа со d, имаме

$$b^2-a^2=d,\ c^2-a^2=2d,\ c^2-b^2=d,$$

$$(b+a)(b-a)=d,(c+a)(c-a)=2d,(c+b)(c-b)=d.$$

Овие равенки можат да се напишат во вид

$$\frac{1}{a+b}=\frac{b-a}{d}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a+c}=\frac{c-a}{2d}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{b+c}=\frac{c-b}{d}. \qquad (3)$$

Од (1),(2) и (3) се добива:

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}=\frac{2b-a-c}{2d},\ \frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{2b-a-c}{2d},$$

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}=\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c} \text{ или } \frac{1}{a+c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)$$

кое што требаше и да се докаже.

б)Ако броевите a^2,b^2 и c^2 се последователни членови на една аритметичка низа,тогаш е

$$b^2=\frac{a^2+c^2}{2}. \qquad (1)$$

Ако тие броеви се три последователни членови на геометриска низа, тогаш е

$$b^2 = \sqrt{a^2 \cdot c^2}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува:

$$\frac{a^2+c^2}{2} = ac, \quad a^2+c^2 = 2ac, \; a^2-2ac+c^2=0,$$
$$(a-c)^2 = 0, \; a = c.$$

Поради тоа од (1) или (2) се добива: $b=c$.

2.а) Бројот на рамнините е:

$$N = C_n^3 = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

б) Бројот на правите по кои се сечат определените рамнини, не земајќи ги предвид правите кои минуваат низ дадените точки е:

$$V=C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} - C_n^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-1\right]-\frac{1}{2}n(n-1).$$

в) За $n=x$ и $N=y$ се добива

$$y=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}.$$

Ако не се земе предвид геометриското значење на аргументот x и на функцијата y, таа е дефинирана во $(-\infty,+\infty)$.

Пресечните точки на кривата со x-оската имаат апсциси:

$$x_1=0, \; x_2=1 \; и \; x_3=2.$$

$$y'=\frac{3x^2-6x+2}{6}, \; y''=x-1.$$

Од $y'=0$ се добива

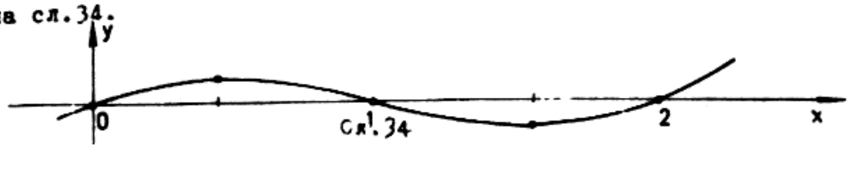
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}, \; т.е. \; x_1\approx 1,56 \quad x_2\approx 0,43.$$

$y''_{x=x_1} > 0$, и затоа точката $M_1\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{27}\right)$ претставува точка на минимум на кривата;

$y''_{x=x_2} < 0$, и затоа точката $M_2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{27}\right)$ претставува точка на максимум на кривата.

Од $y''=0$ следува $x=1$, што значи дека точката $(1,0)$ претставува превојна точка на кривата.

Поради тоа графикот на кривата ќе биде како што се гледа на сл.34.



сл. 34

3. Нека дадената парабола има равенка $y^2=2px$. Равенката на произволната тангента на параболата во точката $M_1(x_1,y_1)$ нека е: $yy_1=p(x+x_1)$, $yy_1=px+\frac{y_1^2}{2}$ а равенките на двете дадени тангенти, повлечени во точките $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ се:

$$yy_2=px+\frac{y_2^2}{2} \quad и \quad yy_3=px+\frac{y_3^2}{2}.$$

Пресечните точки на дадените тангенти со произволната тангента се:

$$A\left(\frac{y_1y_2}{2p}, \frac{y_1+y_2}{2}\right);\ B\left(\frac{y_1y_3}{2p}, \frac{y_1+y_3}{2}\right).$$

Фокусот на параболата е во точката

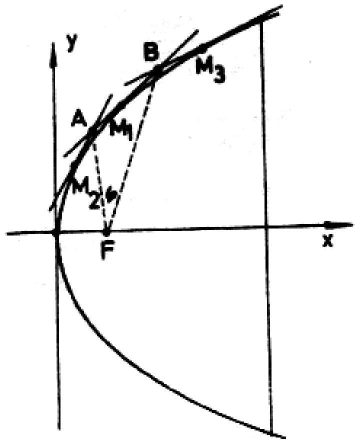
$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

Коефициентот на правецот на (FA) е:

$$k_1=\frac{p(y_1+y_2)}{y_1y_2-p^2}.$$

Коефициентот на правецот на (FB) е:

$$k_2=\frac{p(y_1+y_3)}{y_1y_3-p^2}.$$



Сл.35

Според тоа е:

$$tg\phi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{p(y_2-y_3)}{y_2y_3+p^2}$$

За одредување на аголот под кого се гледа отсечката на произволната тангента на параболата, која е ограничена од две дадени тангенти, добиваме израз во кого фигурираат координатите на допирните точки на дадените тангенти, а не фигурираат и координатите на произволната точка. Од тоа следува дека овој агол е постојан.

4.а) Бочните рабови, како наклонети кон рамнината на основата под еден ист агол, се еднакви, а од тоа следува дека се еднакви и нивните проекции т.е. $OA=OB=OC=R$, каде што R е радиусот на кругот опишан околу триаголникот ABC .

Од ΔABC, по синусната теорема, имаме $R=\frac{b}{2\sin\alpha}$.

Плоштината на триаголникот NSB (сл.36) е

$$S=\frac{1}{2}\overline{NB}\cdot\overline{OS}.$$

56

Од ΔOSB наоѓаме:

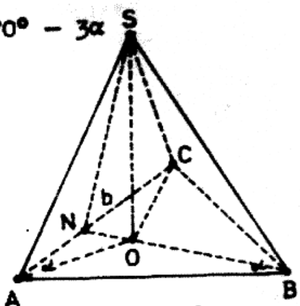
$$OS = R\,tg\beta = \frac{b}{2\sin\alpha}\,tg\beta\ .$$

ΔCBO е рамнокрак и затоа е:

$$\sphericalangle CBO = \sphericalangle BCO = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BOC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha\ ;$$

$$\sphericalangle CNB = 180^\circ - (\sphericalangle NCB + \sphericalangle CBN) = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (90^\circ - \alpha) =$$

$$= 3\alpha - 90^\circ;\quad \sphericalangle ANB = 180^\circ - (3\alpha - 90^\circ) = 270^\circ - 3\alpha$$



Сл.36

Од синусната теорема, од ΔABN имаме:

$$\frac{\overline{NB}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin(270^\circ - 3\alpha)}\ ,$$

$$\overline{NB} = \frac{\overline{AB}\sin\alpha}{-\cos 3\alpha} = -\frac{2b\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 3\alpha}\ ,$$

бидејќи е $\overline{AB} = 2b\cos\alpha$.

Плоштината на триаголникот ΔNSB е

$$S = -\frac{b^2\cos\alpha\,tg\beta}{2\cos 3\alpha}\ ,\ (\cos 3\alpha < 0)\ \text{или}\ S \approx 10{,}68.$$

б)

$$V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\overline{AB} \cdot b\sin\alpha \cdot R\,tg\beta}{6} = \frac{b^3\cos\alpha\,tg\beta}{6} \approx 17{,}47.$$

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески