Задачите се скенирани од книгата:
Републички натпревари по математика во СР Македонија 1968-1977
Подготвена од
Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XVI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1973

1.(I,73). Ако $1+x+y=0$, да се покаже дека

$$1+x^3+y^3=3xy.$$

Решение. Од $1+x+y=0$ добиваме:

$$1+x=-y,\quad 1+y=-x,\quad x+y=-1,\quad (1+x+y)^3=0.$$

Користејќи ги овие равенства имаме:

$$\begin{aligned}0=(1+x+y)^3 &= (1+x)^3+3(1+x)^2y+3(1+x)y^2+y^3=\\ &= 1+3x+3x^2+x^3+3y+6xy+3x^2y+3y^2+3xy^2+y^3=\\ &= 1+x^3+y^3+6xy+3x(1+x)+3y(1+y)+3xy(x+y)=\\ &= 1+x^3+y^3+6xy-3xy-3xy-3xy=\\ &= 1+x^3+y^3-3xy,\end{aligned}$$

од каде што добиваме $1+x^3+y^3=3xy$.

2.(I,73). Еден морнар посетил еден свој пријател во селото S. Сакајќи да се врати на пристаништето P и немајќи превозно средство, морнарот тргнал пешки. Откако поминал 4 км. во првиот час, тој пресметал дека ќе задоцни половина час за тргнувањето на бродот ако продолжи со таа брзина. Затоа, останатиот дел од патот тој го минувал со брзина од 6 км/час и пристигнал 40 минути пред тргнувањето на бродот.

Колкаво е растојанието од селото до пристаништето?

Решение. Нека $\overline{SP} = x$. Кога морнарот би одел со брзина од 4 км/час, би му биле потребни $\frac{x}{4}$ часови да стигне од S до P. Бидејќи по изминатите 4 км, во првиот час, одел со брзина од 6 км/час, времето потребно да стигне од S до P е $1 + \frac{x-4}{6}$.

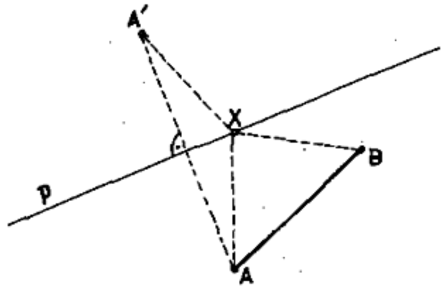
Ако целиот пат го поминал со 4 км/час, би закаснил $\frac{1}{2}$ час, но како што одел, тој стигнал 40 минути порано (т.е. $\frac{2}{3}$ од час). Според тоа, времето потребно да стигне точно за тргнувањето на бродот е $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$, т.е. $1 + \frac{x-4}{6} + \frac{2}{3}$ часови. Значи:

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{x-4}{6} + \frac{2}{3},$$

од каде што добиваме $x = 18$, т.е. растојанието од селото до пристаништето е 18 км.

3.(I,73). Дадена е правата p и две точки A, B што не лежат на неа. Од множеството триаголници ABX, каде што X е точка од правата p, да се конструира оној триаголник што има најмал периметар.

Решение. Ако точките A и B се од различни страни на правата p, тогаш бараниот триаголник ABX се сведува на отсечка, т.е. $X = AB \cap p$. Затоа, ќе претпоставиме дека A и B се од иста страна на правата p (црт.1.73). Бидејќи точките A и B се фиксни, тогаш и страната AB е фиксна, па за периметарот на триаголникот ABX да е најмал, потребно и доволно е збирот $\overline{AX} + \overline{BX}$ да е најмал.



Црт.1.73

Да ја разгледаме осната симетрија σ_p, во однос на правата p. Нека $\sigma_p(A) = A'$; тогаш имаме $\overline{AX} = \overline{A'X}$, што значи дека $\overline{AX} + \overline{BX}$ е најмал ако и само ако $\overline{A'X} + \overline{XB}$ е најмал, т.е. ако и само ако точките A', X и B се колинеарни. Значи, $X = A'B \cap p$.

4.(I,73). Даден е рамнокрак триаголник ABC со својство да постои права p што го разделува на два рамнокраки триаголника. Да се најдат аглите на триаголникот ABC.

Решение. Правата p што го разделува рамнокракиот триаголник ABC, со основа AB, на два рамнокраки триаголника мора да минува низ едно од темињата. Постојат две можности:

а) правата p минува низ врвот C;

б) правата p минува низ едно од темињата на основата.

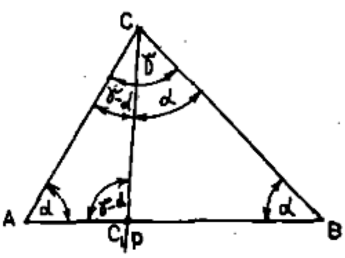
а) Нека правата p минува низ врвот C и нека $C_1 = p \cap AB$. Можни се два случаја, a_1) и a_2).

a_1) Триаголниците ACC_1, со основа CC_1, и BCC_1 со основа BC, се рамнокраки (црт.2.73). Имаме:

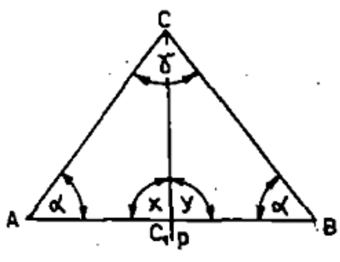
$$2\alpha + \gamma = \pi \quad (\text{од } \triangle ABC),$$

$$\alpha + 2(\gamma - \alpha) = \pi \quad (\text{од } \triangle ACC_1),$$

од каде што добиваме $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $\gamma = \frac{3\pi}{5}$. Значи, аглите на триаголникот се: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$.



Црт.2.73



Црт.3.73

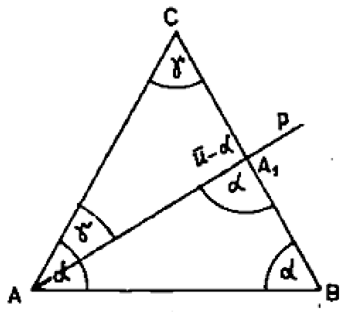
a_2) Триаголниците ACC_1, со основа AC, и BCC_1, со основа BC, се рамнокраки (црт.3.73). Бидејќи триаголниците AC_1C и BC_1C се складни, заклучуваме дека аглите x и y се еднакви, па, бидејќи $x+y=\pi$, добиваме $x=\frac{\pi}{2}$. Освен тоа, имаме $2\alpha+x=\pi$ (од $\triangle AC_1C$) и $2\alpha+\gamma=\pi$ (од $\triangle ABC$), т.е. $\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Значи, аглите на $\triangle ABC$ се: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

б) Нека правата p минува низ темето A и нека $A_1=p\cap BC$. Можни се три случаи: $б_1$), $б_2$), $б_3$).

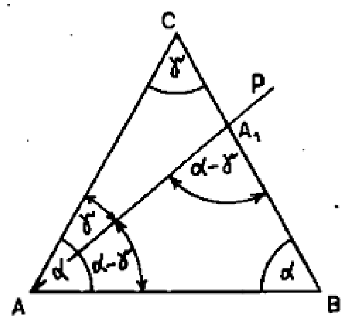
$б_1$) Триаголниците ACA_1, со основа AC, и ABA_1, со основа A_1B, се рамнокраки (црт.4.73). Имаме:

$$2\alpha+\gamma=\pi \quad (\text{од } \triangle ABC),$$
$$2\gamma+(\pi-\alpha)=\pi \quad (\text{од } \triangle ACA_1),$$

т.е. $\alpha=\frac{2\pi}{5}$, $\gamma=\frac{\pi}{5}$. Значи, аглите на $\triangle ABC$ се: $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$.



Црт.4.73



Црт.5.73

$б_2$) Триаголниците ACA_1, со основа AA_1, и ABA_1, со основа AA_1, се рамнокраки (црт.5.73). Поради:

$$\alpha+2(\alpha-\gamma)=\pi \quad (\text{од } \triangle ABA_1),$$
$$2\alpha+\gamma=\pi \quad (\text{од } \triangle ABC),$$

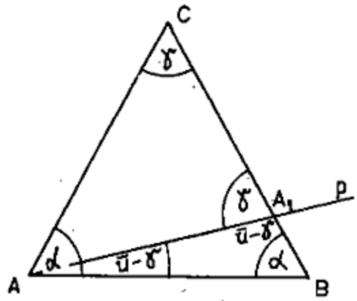
добиваме дека аглите на $\triangle ABC$ се: $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$.

$б_3$) Триаголниците ACA_1, со основа CA_1, и ABA_1, со основа AA_1, се рамнокраки (црт.6.73). Поради $2\alpha+\gamma=\pi$ (од $\triangle ABC$) и

$\alpha + 2(\pi - \gamma) = \pi$ (од $\triangle ABA_1$), добиваме $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $\gamma = \frac{3\pi}{5}$. Меѓутоа:

$$\alpha = \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} = \pi - \gamma$$

што противречи на условот $\alpha > \pi - \gamma$ на црт.6.73.



Црт.6.73

Значи, правата p со својството споменато во б$_3$) не постои, па во овој случај решението отпаѓа.

Од сето тоа следува дека задачата има четири решенија, т.е. аглите на триаголникот ABC се:

а$_1$) $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$; а$_2$) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$;

б$_1$) $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$. $\frac{\pi}{5}$; б$_2$) $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$.

<u>1.(II,73)</u>. Двајца пријатели разговараат:

Јас имам сега двапати повеќе години отколку што имаше ти кога јас имав толку години колку што имаш ти сега; кога ти ќе имаш толку години колку јас сега, тогаш збирот на нашите години ќе биде 63.

Колку години има секој од нив?

<u>Решение</u>. Нека x е бројот на годините на едниот од пријателите, а y - на другиот во моментот кога разговараат. Со овие оз-

наки, условите на задачата можеме да ги напишеме на следниов начин:

$$x = 2(y-(x-y)),$$
$$x+(x+(x-y)) = 63,$$

од каде што добиваме $x=28$, $y=21$.

Значи, во моментот кога разговараат, едниот од пријателите има 28 години, а другиот – 21 година.

2.(II,73). Дадена е квадратната равенка

$$a^4x^2+6a^2cx+5c^2 = 0, \quad a,c \neq 0. \qquad (1)$$

а) Да се покаже дека равенката (1) има реални решенија за кои било $a,c \neq 0$.

б) Ако решенијата x_1 и x_2 на равенката (1) го задоволуваат условот

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2) = \frac{1}{5}x_1x_2+1, \qquad (2)$$

да се покаже дека тие не зависат од а и с.

Решение. а) Бидејќи

$$D = 36a^4c^2-20a^4c^2 = 16a^4c^2 > 0,$$

следува дека решенијата на равенката (1) се реални и различни за кои било $a,c \neq 0$.

б) Според Виетовите правила, имаме:

$$x_1+x_2 = -\frac{6c}{a^2}, \quad x_1x_2 = \frac{5c^2}{a^4}.$$

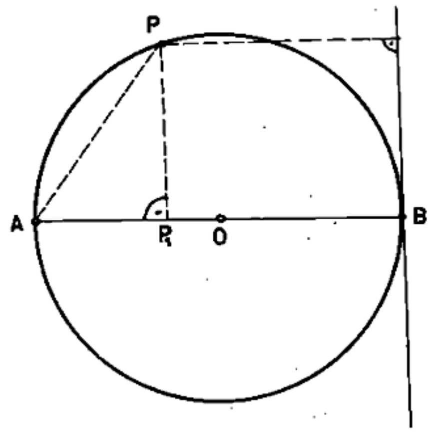
Заменувајќи во условот (2), добиваме $c=-a^2$; тогаш равенката (1) се сведува на равенката

$$x^2-6x+5 = 0,$$

што значи решенијата на (1), при условот (2), не зависат од а и с.

3.(II,73). Во точката B од кружницата, со дијаметар $\overline{AB} = 2r$ повлечена е тангента. На кружницата да се најде точка P што е еднакво оддалечена од точката A и од тангентата.

Решение. Нека P_1 е ортогоналната проекција од P на дијаметарот AB (црт.7.73). Од тоа што P е еднакво оддалечена од A и од



Црт.7.73

тангентата, добиваме $\overline{AP} = \overline{P_1B} = x$. Според Евклидовата теорема, имаме:

$$\overline{AP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP_1},$$

т.е.

$$x^2 = 2r(2r - \overline{P_1B}) = 2r(2r - x),$$

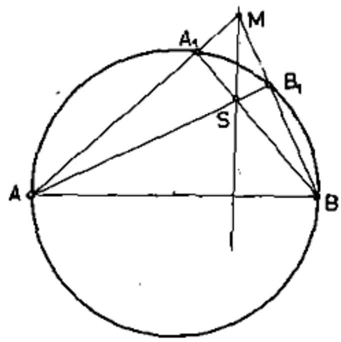
$$x^2 + 2rx - 4r^2 = 0.$$

Решенијата на оваа равенка се:

$$x_{1,2} = r(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Бидејќи $0 \leqslant x \leqslant 2r$, решението $x_2 = r(-1 - \sqrt{5})$ отпаѓа, па, значи, точката P е определена со $x = r(\sqrt{5} - 1)$. Јасно е дека со тоа се определени две точки од кружницата.

4.(II,73). Нека AB е дијаметар на една кружница к, а M произволна точка што не лежи ни на кружницата ни на правата AB. Потоа нека $A_1 = к \cap AM$, $A_1 \neq A$, $B_1 = к \cap BM$, $B_1 \neq B$, $S = AB_1 \cap BA_1$. Да се докаже дека правата MS е нормална на правата AB.



Црт.8.73

Решение. Од теоремата на Талес, следува дека аглите AA_1B и AB_1B се прави (црт.8.73). Значи, AB_1 и BA_1 се висини во триаголникот AMB, т.е. S е ортоцентарот на тој триаголник. Според тоа, висината на триаголникот AMB, спуштена од темето M, лежи на правата MS, т.е. правата MS е нормална на правата AB.

1.(III,73). *Да се реши системот равенки*

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ xy &= z^2, \end{aligned}$$

каде што a е даден реален број.

Какви услови треба да задоволува параметарот a за решенијата на системот да се позитивни и меѓусебно различни?

Решение. Бидејќи:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2z(x + y),$$

добиваме

$$x^2+y^2+z^2 = a^2-2z^2-2z(x+y) =$$
$$= a^2-2az,$$

т.е. $a^2-2az=1$, од каде што, при $a\neq 0$, добиваме

$$z=\frac{a^2-1}{2a}. \qquad (1)$$

Заменувајќи ја вредноста на z од (1) во првата и третата равенка од системот добиваме:

$$x+y=\frac{a^2+1}{2a}, \qquad xy=\frac{(a^2-1)^2}{4a^2},$$

т.е.

$$4a^2x^2-2a(a^2+1)x+(a^2-1)^2=0, \qquad (2)$$

од каде што, пак, добиваме

$$x_{1,2}=\frac{1}{4a}(a^2+1\pm\sqrt{10a^2-3a^4-3})=y_{2,1}. \qquad (3)$$

Тројките (x_1,y_2,z) и (x_2,y_1,z), определени со (1) и (2), се решенија на дадениот систем.

За да бидат корените x и y позитивни, треба

$$x+y=\frac{a^2+1}{2a}>0,$$

од каде што добиваме

$$a>0, \qquad (4)$$

а за да бидат реални и различни, потребно е дискриминантата на равенката (2) да биде позитивна, т.е.

$$D=10a^2-3a^4-3=(a^2-3)(a^2-\tfrac{1}{3})>0,$$

од каде што, имајќи го предвид (4), добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<a<\sqrt{3}. \qquad (5)$$

Бидејќи $D=(a^2+1)^2-4(a^2-1)^2<(a^2+1)^2$, x и y се позитивни секогаш кога е исполнет условот (5). Од (1) следува дека, при $a>0$,

z ќе биде позитивен кога $a^2 > 1$, т.е. кога

$$a > 1. \qquad (6)$$

Од (5) и (6) следува дека

$$1 < a < \sqrt{3},$$

а тоа е бараниот услов.

<u>2.(III,73)</u>. Дали постои цел број x, којшто има најмногу 100 цифри, за кој изразот

$$(\lg(\lg(\lg x)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \qquad (1)$$

има смисла?

<u>Решение</u>. Пред сè, за (1) да има смисла, треба:

$$\lg(\lg(\lg x)^{1/2})^{1/2} \geqslant 0,$$

$$(\lg(\lg x)^{1/2})^{1/2} \geqslant 1,$$

$$\lg(\lg x)^{1/2} \geqslant 1,$$

$$(\lg x)^{1/2} \geqslant 10,$$

$$\lg x \geqslant 100,$$

од што следува дека x треба да има најмалку 101 цифра.

Значи, не постои цел број x, со најмалку 100 цифри, за кој изразот (1) би имал смисла.

<u>3.(III,73)</u>. Да се докаже дека равенството

$$\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha + \sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

е исполнето ако и само ако α и β се острите агли од правоаголен триаголник.

<u>Решение</u>. Нека е исполнето равенството (1); ќе покажеме дека аглите α и β се острите агли на некој правоаголен триаголник. Бидејќи $\cos\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$, $\sin\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \beta)$, добиваме

$$\sin\alpha + \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2},$$

па (1) *се сведува на следново равенство:*

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2} = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

од каде што добиваме

$$\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2} = \alpha,$$

т.е. $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Значи, α и β се острите агли на некој правоаголен триаголник.

Обратно, нека α и β се острите агли на правоаголен триаголник, т.е. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$; тогаш:

$$\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin\alpha,$$

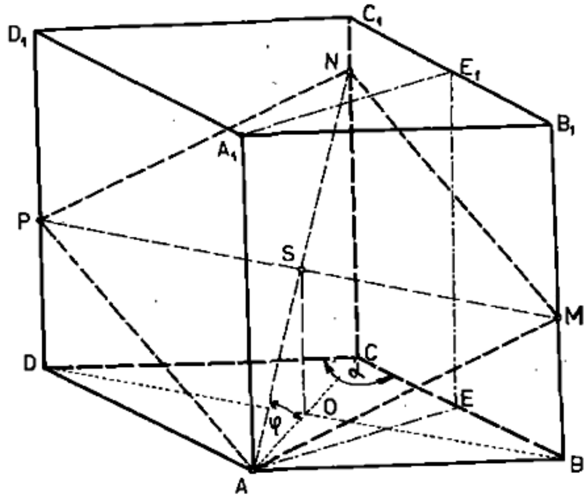
$$\cos\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\cos\alpha,$$

$$\frac{\sin\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\beta} = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

што значи дека важи равенството (1).

4.(III.73). Основата на една права призма е ромб ABCD со еден агол $\sphericalangle DAB = \alpha$. Во кој случај постои рамнина низ темето A којашто ја сече призмата во квадрат? Колкав е аголот што го зафаќа рамнината со основата на призмата?

Решение. Ќе претпоставиме, прво, дека таква рамнина постои. Разгледувањата ќе ги вршиме на приложениот црт.9.73. Бараниот агол ќе го означиме со ϕ, должината на страната на ромбот - со a, а со α - поголемиот од двата агли на ромбот.



Црт.9.73

Четириаголникот AMNP е паралелограм, зашто $AM \parallel PN$ и $AP \parallel MN$, како отсечки што лежат на по два паралелни ѕида од призмата. Од складноста на триаголниците ABM и ADP имаме $\overline{MB} = \overline{PD}$, што значи дека $MP \parallel BD$, па $\overline{SO} = \overline{MB}$. Според тоа,

$$\overline{CN} = 2\overline{OS} = 2\overline{BM}. \qquad (1)$$

Од правоаголниот триаголник ACN имаме $\overline{CN} = \overline{AC}\,\mathrm{tg}\,\phi$, а бидејќи (во правоаголниот триаголник AOB) $\overline{AC} = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$, добиваме:

$$\overline{CN} = 2a\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\phi. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува:

$$\overline{BM} = a\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\phi. \qquad (3)$$

Од правоаголниот триаголник ABM имаме:

$$\overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AB}^2, \qquad (4)$$

а од квадратот AMNP:

$$\overline{AM}=\frac{\overline{AN}}{\sqrt{2}}=\frac{\overline{AC}}{\sqrt{2}\cos\phi}=\frac{2a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\cos\phi}.$$

Имајќи предвид дека $\overline{AB}=a$ и заменувајќи во (4), добиваме:

$$\overline{BM}^2=\frac{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\phi}-a^2. \qquad (5)$$

Сега, од (3) и (5) следува:

$$a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\,tg^2\phi=\frac{a^2}{\cos^2\phi}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\phi\right),$$

$$(1-\cos^2\phi)\cos^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\phi,$$

$$\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\phi=\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos^2\phi=ctg^2\frac{\alpha}{2},$$

што значи,

$$\cos\phi=ctg\frac{\alpha}{2}. \qquad (6)$$

(Притоа: $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\pi$ па $0<ctg\frac{\alpha}{2}\leqslant 1$.)

Сега можеме лесно да одговориме на првото прашање: Во кој случај постои таква рамнина?

Од горното е јасно дека таква рамнина постои ако $H\geqslant\overline{CN}$, каде што H е висината на призмата. Значи треба да биде исполнет условот:

$$H\geqslant\overline{CN}=2a\cos\frac{\alpha}{2}tg\phi=2a\cos\frac{\alpha}{2}\frac{\sqrt{1-\cos^2\phi}}{\cos\phi}=$$

$$=2a\cos\frac{\alpha}{2}\frac{\sqrt{1-ctg^2\frac{\alpha}{2}}}{ctg\frac{\alpha}{2}}=2a\sqrt{-\cos\alpha},$$

т.е.

$$H\geqslant 2a\sqrt{-\cos\alpha}. \qquad (7)$$

(Условот (7) има смисла, зашто α е меѓу 90° и 180°, па $\cos\alpha \leqslant 0$.)

Забелешка. 1) Ако $\alpha = 90^\circ$, тогаш, според (6), $\phi = 0$ и рамнината ја "сече" призмата по основата ABCD.

2) Ако под " ... рамнина низ темето A, којашто ја сече призмата ..." подразбираме и рамнина што минува низ работ AA_1, па призмата ја "сече" во правоаголникот AEE_1A_1, тогаш рамнината со бараното својство постои ако $H = \overline{AE}$. Во тој случај аголот е 90°.

<u>1.(IV,73)</u>. Задача 1.(III,73).

<u>2.(IV,73)</u>. Дадена е равенката

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_3 \neq 0. \tag{1}$$

Ако x_1, x_2, x_3 се корените на таа равенка, да се покаже дека

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}. \tag{2}$$

<u>Решение</u>. Бидејќи x_1 е корен на равенката (1), имаме:

$$a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0. \tag{3}$$

Ако од (1) ја одземеме (3) добиваме:

$$a_3(x^3 - x_1^3) + a_2(x^2 - x_1^2) + a_1(x - x_1) = 0,$$

т.е.

$$(x - x_1)(a_3x^2 + (a_3x_1 + a_2)x + a_3x_1^2 + a_2x_1 + a_1) = 0.$$

Корените x_2 и x_3 се корени на равенката

$$a_3x^2 + (a_3x_1 + a_2)x + a_3x_1^2 + a_2x_1 + a_1 = 0,$$

па, според Виетовите правила за квадратна равенка, имаме:

$$x_2 + x_3 = -\frac{a_3x_1 + a_2}{a_3},$$

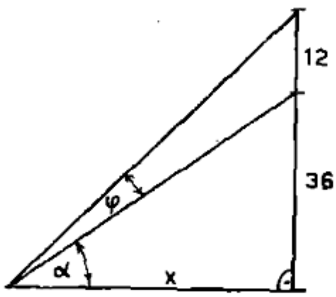
од каде што го добиваме (2).

3.(IV,73). Во некој парк од некој град била изградена кула чиј врв завршува со статуа. Еден љубопитен турист сакал да ја разгледа статуата што подобро. Во проспектот прочитал дека статуата е висока 12 метри, а кулата, без статуата, е висока 36 метри.

На кое растојание од подножјето на кулата треба да застане туристот за да може да ја види статуата под најголем можен виден агол ϕ?

Решение. Да го означиме со x растојанието од туристот до подножјето на кулата (црт.10.73). Имаме:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{36}{x}, \quad \operatorname{tg}(\alpha+\phi) = \frac{36+12}{x} = \frac{48}{x}.$$



Црт.10.73

Бидејќи

$$\operatorname{tg}(\alpha+\phi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\phi}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\phi},$$

добиваме:

$$\frac{48}{x} = \frac{\frac{36}{x} + \operatorname{tg}\phi}{1-\frac{36}{x}\operatorname{tg}\phi}, \text{ т.е. } \operatorname{tg}\phi = \frac{12x}{x^2+1728}.$$

Да ставиме $\operatorname{tg}\phi = y$ и да ја разгледаме функцијата

$$y = \frac{12x}{x^2+1728}. \qquad (1)$$

Бидејќи $y = tg\,\phi$ расте за $0 \leqslant \phi \leqslant 90^\circ$, за аголот ϕ да биде најголем, потребно е да го најдеме максимумот на функцијата (1). Имаме:

$$y' = \frac{20736 - 12x^2}{(x^2 + 1728)^2}.$$

Од $y' = 0$, т.е. $20736 - 12x^2 = 0$, добиваме:

$$x_{1,2} = \pm 24\sqrt{3}.$$

Бидејќи x е позитивен, решението $x_1 = -24\sqrt{3}$ отпаѓа, а за $x_2 = 24\sqrt{3}$ функцијата (1) има максимум.

Значи, туристот треба да застане на оддалеченост $x = 24\sqrt{3}$ метри од подножјето на кулата за да ја види статуата под најголем можен виден агол.

4.(IV,73). Ако k е непарен природен број, да се докаже дека производот од k последователни непарни природни броеви е делив со k.

Решение. На оваа задача ќе дадеме две решенија.

I) Нека последователните k непарни природни броеви се:

$$2n-1,\ 2n+1,\ 2n+3,\ \ldots,\ 2n+2k-3.$$

Треба да покажеме дека бројот

$$f(n) = (2n-1)(2n+1)\cdots(2n+2k-3)$$

е делив со k.

За $n = 1$ имаме $f(1) = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2k-1)$, па, бидејќи k е непарен и $1 \leqslant k \leqslant 2k-1$, следува дека $f(1)$ е делив со k. Понатаму имаме:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k-3)(2n+2k-1) = \\ &= (2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k-3)(2n-1) + \\ &\quad +2k(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k-3) = \\ &= f(n) + 2k(2n+1)(2n+3)\cdots(2n+2k-3). \end{aligned}$$

Ако претпоставиме дека $f(n)$ е делив со к, тогаш од

$$f(n+1) = f(n) + 2\kappa m$$

добиваме дека и $f(n+1)$ е делив со к, па, според принципот на математичката индукција, следува дека $f(n)$ е делив со к за кој било природен број n.

II) Нека $p = a_1 a_2 \cdots a_к$, каде што a_j се последователни непарни природни броеви, $a_1 < a_2 < \dots < a_к$. Можеме да претпоставиме дека $a_1 > к$, *зашто во спротивно к ќе биде некој од броевите* a_j.

Значи, нека $a_1 > к$; тогаш

$$a_1 = (2n-1)к + 2r,$$

каде што n е некој природен број и $r \in \{0, 1, \dots, \frac{к-1}{2}\}$. Бидејќи $a_2, a_3, \dots, a_к$ се последователни непарни броеви по a_1, имаме:

$$a_2 = (2n-1)к + 2r + 2\cdot 1,$$
$$a_3 = (2n-1)к + 2r + 2\cdot 2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_к = (2n-1)к + 2r + 2(к-1).$$

Ќе покажеме дека a_j е делив со к барем за еден индекс $j = 1, 2, \dots, к$. Имено, за:

$r = 0$, $\quad a_1 = (2n-1)к$ е делив со к;

$r = 1$, $\quad a_к = (2n-1)к + 2 + 2к - 2 =$

$\qquad = (2n-1)к + 2к$ е делив со к;

$r = 2$, $\quad a_{к-1} = (2n-1)к + 2\cdot 2 + 2(к-2) =$

$\qquad = (2n-1)к + 2к$ е делив со к;

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$r = \frac{к-1}{2}$, $\quad a_{\frac{к+1}{2}} = (2n-1)к + 2\left(\frac{к-1}{2} + \frac{к+1}{2}\right) =$

$\qquad = (2n-1)к + 2к$ е делив со к.