Ристо Малчески

ИСПИТУВАЊЕ НА ТЕКОТ И СКИЦИРАЊЕ НА ГРАФИКОТ НА ФУНКЦИЈАТА $y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\ a_0\neq 0$

Функцијата од облик

(1) $$y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\ \ a_0\neq 0$$

ја нарекуваме кубна функција. Предмет на нашите разгледувања ќе биде испитувањето на текот и скицирањето на графикот на функцијата (1). За таа цел, најпрво ќе се осврнеме на некои неопходни општо познати поими, како што се поимите монотоност, парност, конвекснот, конкавност, превојна точка и локален екстрем.

Нека е дадена функцијата $y=f(x),\ f:D_f\to R,\ D_f\subseteq R$.

Дефиниција 1. За дефиниционата област D_f, на функцијата $y=f(x)$, велиме дека е **симетрично множество** ако од $x\in D_f$, следува $-x\in D_f$.

Дефиниција 2. За функцијата $y=f(x)$, со дефинициона област D_f, велиме дека е **непарна** ако D_f е симетрично множество и $f(-x)=-f(x)$, за секој $x\in D_f$.

За функцијата $y=f(x)$, со дефинициона област D_f, велиме дека е **парна** ако D_f е симетрично множество и $f(-x)=f(x)$, за секој $x\in D_f$.

На пример, ако D_f е симетрично множество, тогаш функцијата $y=x^2$ е парна, а функцијата $y=x$ е непарна. Притоа графикот на функцијата $y=x^2$ е симетричен во однос на оската Оy, а графикот на функцијата $y=x$ е симетричен во однос на координатниот почеток.

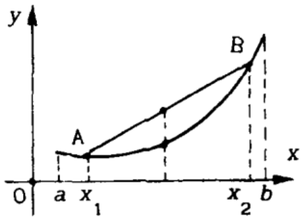
Во општ случај, кога f е парна функција, тогаш точките $A(x,f(x))$ и $B(-x,f(x))$ припаѓаат на графикот на функцијата, односно истиот е семетричен во однос на оската Оy. Од друга страна, графикот на непарната функција е симетричнен во однос на координатниот почеток, бидејќи точките $A(x,f(x))$ и $B(-x,-f(x))$ припаѓаат на истиот.

Дефиниција 3. За функцијата $y=f(x)$ велиме дека е **монотоно растечка** на множеството $A\subseteq D_f$ ако од $x_1,x_2\in A$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)\leq f(x_2)$, а **строго монотоно растечка** ако од $x_1<x_2$ следува $f(x_1)<f(x_2)$.

За функцијата $y = f(x)$ велиме дека е **монотоно опаѓачка** на множеството $A \subseteq D_f$ ако од $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) \geq f(x_2)$, а **строго монотоно опаѓачка** ако од $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) > f(x_2)$.

На пример, при $k > 0$ функцијата $y = kx$ е строго монотоно растечка, а при $k < 0$ е строго монотоно опаѓачка на целата реална права. Навистина, при $k > 0$ и $x_1 < x_2$ следува $kx_1 < kx_2$, т.е. $y(x_1) < y(x_2)$, а при $k < 0$ и $x_1 < x_2$ следува $kx_1 > kx_2$, т.е. $y(x_1) > y(x_2)$.

Функцијата $y = x^2$ строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 0)$ и строго монотоно расте на интервалот $(0, +\infty)$. Навистина, ако $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ и $x_1 < x_2$, тогаш $x_1^2 > x_2^3$, т.е. функцијата строго монотоно опаѓа, а ако $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ и $x_1 < x_2$, тогаш $x_1^2 < x_2^3$, т.е. функцијата строго монотоно расте. Да забележиме дека, на интервал $[a, b]$, $a < 0 < b$, разгледуваната функција ниту монотоно расте ниту монотоно опаѓа (докажи!).



Црт. 1

Дефиниција 4. За функцијата $y = f(x)$, дефинирана на интервалот $[a, b]$, велиме дека е **конвексна функција,** на овој интервал, ако за секои $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, такви што $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, важи неравенството

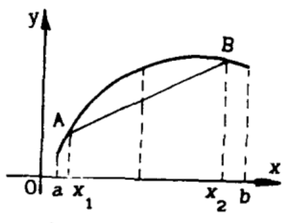
(2) $$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Неравенството (2) геометриски значи дека графикот на функцијата $y = f(x)$ е под или на тетивата што ги поврзува точките $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, (црт. 1).

Ако место неравенството (2) важи неравенството

(3) $$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

ако за секои $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, такви што $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, тогаш за функцијата $y = f(x)$ велиме дека е **конкавна** на интервалот $[a, b]$.



Црт. 2

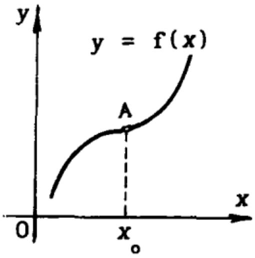
Неравенството (3) геометриски значи дека графикот на функцијата $y = f(x)$ е над или на тетивата (црт. 2) што ги поврзува точките
$$A(x_1, f(x_1)) \text{ и } B(x_2, f(x_2)).$$

На пример, функцијата $f(x) = x^2$ е конвексна функција на $(-\infty, \infty)$. Навистина, нека $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. тогаш, ставајќи $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 1 - \lambda$, добиваме

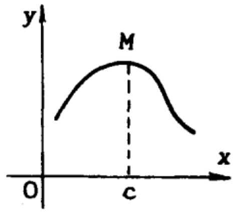
$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda) x_2^2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)^2 =$$
$$= \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0,$$

што значи дека $f(x)=x^2$ е конвексна на интервалот $(-\infty,\infty)$.

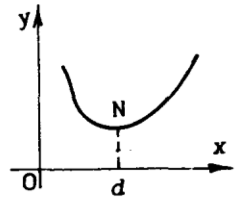
Дефиниција 5. За точката $A(x_0,f(x_0))$ велиме дека е **превојна точка** за функцијата $y=f(x)$, ако постојат $x_1,x_2 \in D_f$ такви што $x_1<x_0<x_2$ и $y=f(x)$ е конвексна (конкавна) на $[x_1,x_0]$ и конкавна (конвексна) на $[x_0,x_2]$, (црт. 3).



Црт. 3



Црт. 4

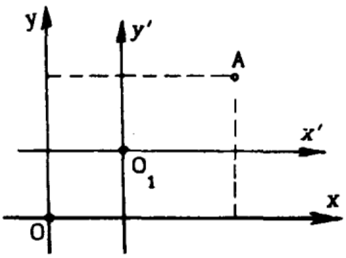


Црт. 5

На крајот од овој дел ќе ги дадеме поимите за локален максимум и локален минимум.

Дефиниција 6. Точката $M(c,f(c))$ ја нарекуваме точка на **локален максимум** за функцијата $y=f(x)$ ако постои реален број $\varepsilon>0$ таков што $f(x)<f(c)$, за секој $x\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$, $x\neq c$ (црт. 4).

Дефиниција 7. Точката $M(d,f(d))$ ја нарекуваме точка на локален минимум за функцијата $y=f(x)$ ако постои реален број $\varepsilon>0$ таков што $f(x)>f(d)$, за секој $x\in(d-\varepsilon,d+\varepsilon)$, $x\neq d$ (црт. 5).



Црт. 6

1. Паралелен пренос на кординатен систем

Нека е даден координатен систем xOy. Во рамнината избираме нов координатен систем $x'O_1y'$ чиј координатен почеток се наоѓа во точката $O_1(x_0,y_0)$, оската O_1x' е паралелна со оската xO, а оската O_1y' е паралелна со оската Oy.

Да ги одредиме координатоте на произволна точка A во кординатниот систем $x'O_1y'$. Од црт. 6 може да се се види дека

(4) $$x'=x-x_0,\qquad y'=y-y_0,$$

каде x и y се координатите на точката A во координатниот систем xOy, а x' и y' се координатите на точката A во новиот координатен систем $x'O_1y'$.

Формулите (4) ги нарекуваме **формули за трансформација** на координати при паралелен пренос на координатен систем.

2. Испитување на текот и скицирање на графикот на функцијата $y=x^3$

Функцијата $y=x^3$ е дефинирана за секој реален број x, т.е. $D_f=(-\infty,+\infty)$. При x=0 имаме y=0, што значи графикот на функцијата $y=x^3$ минува низ координатниот почеток. Од $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ следува дека функцијата е непарна, па затоа нијзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

Ќе докажеме дека функцијата монотоно расте на целата дефинициона област. Нека $x_1<x_2$. Од

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_2+\tfrac{1}{2}x_1)^2+\tfrac{3}{4}x_1^2>0$$

и

$$x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

добиваме

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3>0,$$

што значи дека функцијата монотоно расте на целата дефинициона област. Според тоа, функцијата $y=x^3$ нема ниту максимум, ниту минимум.

Да ја испитаме конвексноста (конкавноста) на функцијата $y=x^3$. За таа цел ќе ја разгледаме разликата $\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$, каде $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$, $\lambda_1+\lambda_2=1$. Имаме:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=\lambda_1x_1^3+\lambda_2x_2^3-(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)^3\\
&=\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)^2x_1^3+\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)^2x_2^3-(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)^3\\
&=\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1x_1^3+\lambda_2x_1^3+\lambda_1x_2^3+2\lambda_2x_2^3-3\lambda_2x_1x_2^2-3\lambda_1x_1^2x_2)\\
&=\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1x_1^3-2\lambda_1x_1^2x_2+\lambda_2x_1^3-\lambda_2x_1x_2^2+\lambda_1x_2^3-\lambda_1x_1^2x_2+2\lambda_2x_2^3-2\lambda_2x_1x_2^2)\\
&=\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1x_1^2(x_1-x_2)+\lambda_2x_1(x_1-x_2)(x_1+x_2)-\lambda_1x_2(x_1-x_2)(x_1+x_2)-2\lambda_2x_2^2(x_1-x_2))\\
&=\lambda_1\lambda_2(x_1-x_2)(2\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_1(x_1+x_2)-\lambda_1x_2(x_1+x_2)-2\lambda_2x_2^2)\\
&=\lambda_1\lambda_2(x_1-x_2)(\lambda_1x_1^2-\lambda_1x_2^2+\lambda_1x_1^2-\lambda_1x_1x_2+\lambda_{21}x_1^2-\lambda_2x_2^2+\lambda_2x_1x_2-\lambda_2x_2^2)\\
&=\lambda_1\lambda_2(x_1-x_2)^2((2\lambda_1+\lambda_2)x_1+(\lambda_1+2\lambda_2)x_2)\\
&=\lambda_1\lambda_2(x_1-x_2)^2((1+\lambda_1)x_1+(1+\lambda_2)x_2).
\end{aligned}$$

Според тоа, разликата $\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$ зависи од знакот на множителот $(1+\lambda_1)x_1+(1+\lambda_2)x_2$. Имаме $1+\lambda_1>0$, $1+\lambda_2>0$. Ако $x_1,x_2>0$, тогаш

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

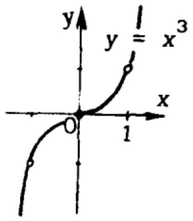
т.е функцијата $y = x^3$ е конвексна на интервалот $[0,\infty)$. Ако $x_1, x_2 < 0$ тогаш

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \leq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

т.е функцијата $y = x^3$ е конкавна на интервалот $(-\infty,0]$. Да забележиме дека на интервал од облик $[-a,a]$, $a > 0$ функцијата не е ниту конкавна ниту конвексна. Имено, ако земеме $x_1 = -a, x_2 = a$ добиваме

$$(1+\lambda_1)x_1 + (1+\lambda_2)x_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)a,$$

па за различни избори на λ_1 и λ_2 се добива еднаш $(\lambda_2 - \lambda_1)a > 0$, а друг пат $(\lambda_2 - \lambda_1)a < 0$.



Црт. 7

Од досега изнесеното следува дека, точката O(0,0) е превојна точка на функцијата.

Значи можеме да констатираме дека функцијата $y = x^3$ секаде расте на $D_f = (-\infty,+\infty)$, таа е непарна и координатниот почеток е превојна точка на функцијата, бидејќи на $(-\infty,0]$ е конкавна, а е конвексна на $[0,\infty)$. Графикот на функцијата $y = x^3$ е даден на црт. 7 и истиот се нарекува **кубна парабола.**

3. Испитување на текот и скицирање на графикот на функцијата $y = x^3 + kx$

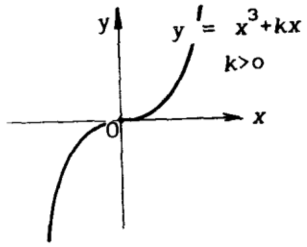
Функцијата $y = x^3 + kx$ е дефинирана за седој реален број x, т.е. $D_f = (-\infty,+\infty)$. Нејзиниот график поминува низ координатниот почеток. Бидејќи $f(-x) = (-x)^3 + k(-x) = -(x^3 + kx) = -f(x)$, следува дека функцијата е непарна и нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

Нека $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Имаме

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lambda_1(x_1^3 + kx_1) + \lambda_2(x_2^3 + kx_2) - \\ &\quad - [(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^3 + k(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (x_1 - x_2)^2 ((1+\lambda_1)x_1 + (1+\lambda_2)x_2).\end{aligned}$$

Од дискусијата во точка 2 имаме дека функцијата е конкавна на интервалот на $(-\infty,0]$, а е конвексна на интервалот $[0,\infty)$. Очигледно, точката $o(0,0)$ е превојна точка за функцијата $y = x^3 + kx$.

Останува да одредиме дали функцијата монотоно расте или монотоно опаѓа. За таа цел поодделно ќе ги разгледаме случаите кога $k>0$ и кога $k<0$.



Црт. 8

(1) Ако $k>0$, тогаш при $x_2 > x_1$ имаме $x_2^3 > x_1^3$ и $kx_2 > kx_1$, односно

$$f(x_2) = x_2^3 + kx_2 > x_1^3 + kx_1 = f(x_1).$$

Значи, при $k>0$, функцијата монотоно расте на целата дефинициона област.

Графикот на функцијата $y = x^3 + kx$, при $k>0$ е прикажан на црт. 8.

(2) Нека сега $k<0$. Веќе констатиравме дека точката O(0,0) е превојна точка за функцијата. Но, при $y=0$ имаме $x^3 + kx = 0$, т.е. $x(x^2 + k) = 0$, што значи $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-k}$. Според тоа, графикот на функцијата $y = x^3 + kx$, при $k<0$ ја сече x-оската во точките $A(-\sqrt{-k},0)$, $O(0,0)$, $B(\sqrt{-k},0)$. Исто така, констатиравме дека функцијата е непарна т.е. нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

Да ја одредиме монотоноста на функцијата. Земаме произволна точка $M(x_0,y_0)$, каде што $y_0 = x_0^3 + kx_0$, од графикот на функцијата. Проверуваме дали графикот на функцијата содржи и други точки со ордината y_0. За тие точки, ако ги има, важи $f(x) = y_0$. Според тоа, $x^3 + kx = x_0^3 + kx_0$, односно $(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2 + k) = 0$.

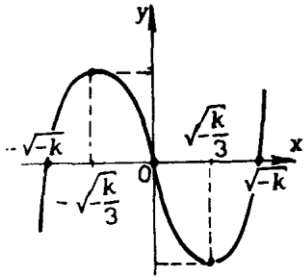
Ако точка со ордината y_0 има апциса различна од x_0 тогаш таа апциса е решение на равенката

(5) $$x^2 + xx_0 + x_0^2 + k = 0.$$

Корените на оваа равенка се $x_{1,2} = \frac{-x_0}{2} \pm \sqrt{\frac{-3x_0^2}{4} - k}$, и истите се реални ако дискриминантата на (5) е ненегативна, т.е. $\frac{-3x_0^2}{4} - k \geq 0$ или $x_0^2 \leq -\frac{4}{3}k$, т.е. $|x_0| \leq 2\sqrt{-\frac{k}{3}}$.

Од досега изнесеното можеме да заклучиме, дека на интервалот $\left[-2\sqrt{-\frac{k}{3}}, 2\sqrt{-\frac{k}{3}}\right]$ за секоја точка $M(x_0,y_0)$ од графикот, имаме барем уште една точка со ордината y_0. Притоа, во крајните точки имаме точно уште една точка со ордината y_0, а во останатите точки имаме точно уште две точки со ордината y_0.

Да ги разгледаме крајните точки на интервалот $\left[-2\sqrt{-\frac{k}{3}}, 2\sqrt{-\frac{k}{3}}\right]$. Ако $x_0 = 2\sqrt{-\frac{k}{3}}$, тогаш дискриминантата на равенката (5) е еднаква на нула и според тоа, на кривата постои точно уште една точка со ордината y_0, тоа е точката $M_1\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}},-\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$. Ако $x_0=-2\sqrt{-\frac{k}{3}}$, тогаш дискриминантата на равенката (5) повторно е еднаква на нула и повторно постои точно уште една точка со ордината y_0, тоа е точката $M_2\left(\sqrt{-\frac{k}{3}},\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$. Ќе подажеме дека на интервалот $\left[-\sqrt{-\frac{k}{3}},\sqrt{-\frac{k}{3}}\right]$ функцијата монотно опаѓа.



Црт. 9

Нека $x_1,x_2\in\left[-\sqrt{-\frac{k}{3}},\sqrt{-\frac{k}{3}}\right]$ и $x_1<x_2$.
Притоа имаме $x_1^2\le-\frac{k}{3}$, $x_2^2\le-\frac{k}{3}$ и $x_2x_1\le-\frac{k}{3}$.
Ако ги собереме последните три неравенства, во две од нив имаме стриктни неравенства, добиваме

(6) $$x_1^2+x_1x_2+x_2^2+k<0.$$

Од $x_2-x_1>0$ и од неравенството (6) имаме

$$(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+k)<0,$$

т.е. $x_2^3+kx_2<x_1^3+kx_1$, што значи $f(x_2)<f(x_1)$.

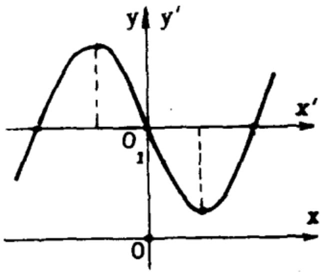
Според тоа, на разгледуваниот интервал $\left[-\sqrt{-\frac{k}{3}},\sqrt{-\frac{k}{3}}\right]$ функцијата монотоно опаѓа. На слечин начин се покажува дека на интервалите $\left(-\infty,-\sqrt{-\frac{k}{3}}\right]$ и $\left[\sqrt{-\frac{k}{3}},\infty\right)$ функцијата монотоно расте (обидете се сами.)

Точките $M_1\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}},-\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ и $M_2\left(\sqrt{-\frac{k}{3}},\frac{2}{3}k\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ се точки на максимум и минимум, соодветно. Имено, ако земеме $\varepsilon=\sqrt{-\frac{k}{3}}$, тогаш за секој $x\in\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}}-\varepsilon,-\sqrt{-\frac{k}{3}}+\varepsilon\right)$ добиваме $f(x)<f\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$, а за секој $x\in\left(\sqrt{-\frac{k}{3}}-\varepsilon,\sqrt{-\frac{k}{3}}+\varepsilon\right)$ добиваме $f(x)>f\left(\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$.

Графикот на функцијата $y=x^3+kx$, при $k<0$ е скициран на црт. 9.

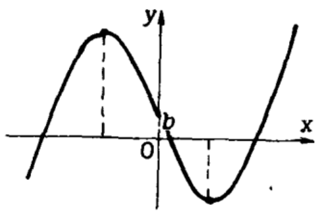
4. Испитување на текот и скицирање на графикот на функцијата $y=x^3+kx+b$

Нека е дадена функцијата $y=x^3+kx+b$ и координатен систен xOy. Со помош на трансформационите формули $x'=x$, $y'=y-b$ координатниот систем xOy паралелно го пренесуваме во координатен систем $x'O_1y'$. Притоа, за функцијата $y = x^3 + kx + b$ во координатниот систем $x'O_1y'$ имаме $y' = y - b = x^3 + kx = x'^3 + kx'$. Во новиот координатен систем, користејќи ја постапката од претходната точка, го скицираме графикот на функцијата $y' = x'^3 + kx'$ (црт. 10).



Црт. 10

Од $x' = x$ добиваме дека апцисите на локален максимум, превој и локален миниму не се менуваат. Единствено имаме промена во апцисите на пресекот со x-оската. Притоа, ако $|b| > \frac{-2k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}}$, тогаш графикот на функцијата $y = x^3 + kx + b$ ја сече x-оската само во една точка. Ако го квадрираме последното неравенство добиваме $\frac{b^2}{4} + \frac{k^3}{27} > 0$.

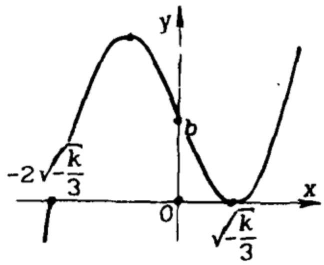


Црт. 11

Според тоа,

(1) Ако $\frac{b^2}{4} + \frac{k^3}{27} > 0$, тогаш графикот на функцијата $y = x^3 + kx + b$ ја сече x-оската во една точка, т.е. равенката $x^3 + kx + b = 0$ има едно реално решение (црт. 10).

(2) Ако $\frac{b^2}{4} + \frac{k^3}{27} < 0$, тогаш графикот на функцијата $y = x^3 + kx + b$ ја сече x-оската во три точка, т.е. равенката $x^3 + kx + b = 0$ има три реални решенија (црт. 11).



Црт. 12

(3) Ако $\frac{b^2}{4} + \frac{k^3}{27} = 0$, тогаш графикот на функцијата $y = x^3 + kx + b$ ја сече x-оската во една точка и ја допира во друга точка, т.е. равенката $x^3 + kx + b = 0$ има три реални решенија, од кои две се совпаѓаат (црт. 12). Решенија на равенката $x^3 + kx + b = 0$ се $x_{1,2} = \sqrt{\frac{-k}{3}}$, $x_3 = -2\sqrt{\frac{-k}{3}}$.

Постапката за одредување на корените на равенката $x^3 + kx + b = 0$ во случаите (1) и (2) е посложена и истата нема да ја презентираме.

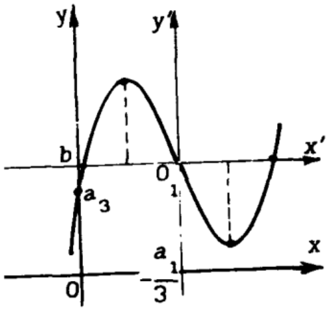
5. ИСПИТУВАЊЕ НА ТЕКОТ И СКИЦИРАЊЕ НА ГРАФИКОТ НА ФУНКЦИЈАТА $y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,\ a_0 \neq 0$

Прво да ја разгледаме функцијата

(7) $$y = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

во координатен систен xOy. Со цел да го елиминираме квадратниот член ги воведуваме трансформационите формули $x' = x + \frac{a_1}{3}$, $y' = y - \left(a_3 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2a_1^3}{27}\right)$, при што паралелно го пренесуваме координатниот систем xOy во кординатен систем $x'O_1y'$. Притоа за функцијата $y = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ во кординатниот систем $x'O_1y'$ имаме

(8) $$y' = x'^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)x'.$$



Црт. 13

Во координатниот систем $x'O_1y'$ го конструираме графикот на функцијата (8). Но, тоа значи дека сме го конструирале графикот на функцијата (7) во координатниот систем xOy. Случајот кога $a_2 - \frac{a_1^2}{3} < 0$ е презентиран на црт. 13. Соодветната анализа на бројот на решенијата на равенката $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ може да се изврши на начин како во претходната точка и притоа

$$k = a_2 - \frac{a_1^2}{3},\ b = a_3 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2a_1^3}{27}.$$

На крајот, да ја разгледаме функцијата

(9) $$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,\ a_0 \neq 0$$

Прво, со помош на претходно опишаната постапка, ќе го конструираме графикот на функцијата

(10) $$y = x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3,\ A_i = \frac{a_i}{a_0},\ i = 1,2,3.$$

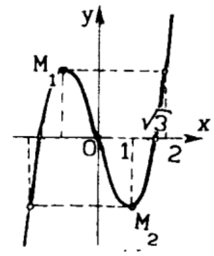
Од графикот на функцијата (10) графикот на функцијата (9) можеме да го добиеме ако секоја ордината ја помножиме со a_0. Ова особено се однесува на локалните екстреми и на превојната точка.

6. Решени примери

Пример 1. Испитајте го и скицирајте го графикот на функцијата $y = x^3 - 3x$.

Решение. Од анализата во точка 3 при $k<0$ имаме

-графикот на функцијата ја сече x-оската во точки $A(-\sqrt{3},0)$, $B(\sqrt{3},0)$, $O(0,0)$, при што координатниот почеток е превојна точка;



Црт. 14

-при $x>0$ функцијата е конвексна, а при $x<0$ функцијата е конкавна. Во точката

$$M_1\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}},-\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right) = M_1(-1,2)$$

функцијата има локален максимум, а во точкта

$$M_2\left(\sqrt{-\frac{k}{3}},\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right) = M_2(1,-2)$$

функцијата има локален минимум.

-од

$$y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x),$$

следува дека функцијата е непарна и нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток;

-на интервалот $\left[-\sqrt{-\frac{k}{3}},\sqrt{-\frac{k}{3}}\right] = [-1,1]$ функцијата монотоно опаѓа, а на интервалите $(-\infty,-1]$; $[1,\infty)$ таа монотоно расте.

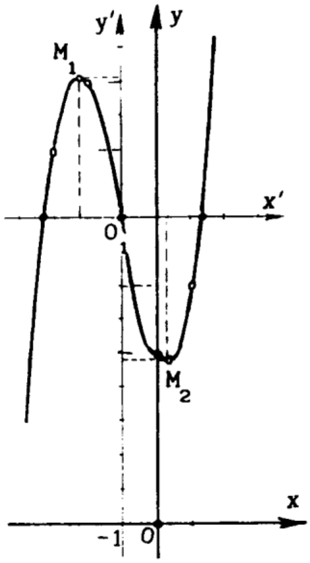
Графикот на функцијата е даден на црт. 14.

Пример 2. Испитајте го и скицирајте го графикот на функцијата $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$.

Решение. Од анализата во точка 5, со помош на трансформационите формули $x' = x + 1$; $y' = y - 9$ паралелно го пренесуваме координатниот систем xOy во координатниот систем $x'O_1y'$ со координатен почеток $O_1(-1,9)$ и притоа во новиот координатен систем за функцијата имаме $y' = x'^3 - 5x'$. Од анализата во точка 3 во новиот координатен систем имаме:

-графикот на функцијата ја сече x'-оската во точки $A(-\sqrt{5},0)$, $B(\sqrt{5},0)$, $O_1(0,0)$, при што точката O_1 е превојна точка;

-при $x'>0$ функцијата е конвексна, а при $x'<0$ функцијата е конкавна. Во однос на координатниот систем $x'O_1y'$ во точката $M_1\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ функцијата има локален максимум, а во точката $M_2\left(\sqrt{\frac{5}{3}},-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ функцијата има локален минимум.



Црт. 15

-функцијата y' е непарна и нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток;

-на интервалот $\left[-\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$ функцијата монотоно опаѓа, а на интервалите $(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{3}}]$; $(\sqrt{\frac{5}{3}},\infty]$ таа монотоно расте.

Графикот на функцијата е даден на црт. 15.

Според тоа, во координатниот систем xOy функцијата расте на интервалите $(-\infty,-1-\sqrt{\frac{5}{3}}]$; $(-1+\sqrt{\frac{5}{3}},\infty]$, а опаѓа на интервалот $\left[-1-\sqrt{\frac{5}{3}},-1+\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$. Функцијата има локален максимум во точката $M_1\left(-1-\sqrt{\frac{5}{3}},9+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ и локален минимум во точката $M_2\left(-1+\sqrt{\frac{5}{3}},9-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. Графикот на функцијата е симетричен во однос на точката $O_1(-1,9)$, која е точка на превој и функцијата е конкавна на интервалот $(-\infty,-1]$, а е конвексна на интервалот $[1,\infty)$. На крајот да забележиме дека функцијата $y=x^3+3x^2-2x+5$ не е ниту парна, ниту непарна, иако функцијата $y'=x'^3-5x'$ во однос на координатниот систем $x'O_1y'$ е непарна.

Пример 3. Испитајте го и скицирајте го графикот на функцијата $y=2x^3-6x^2+x+1$.

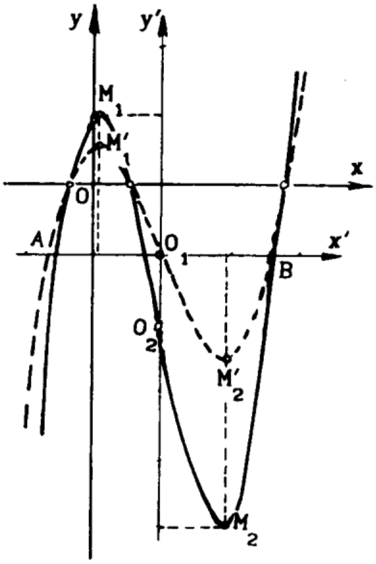
Решение. Да ја разгледаме функцијата $y_1=x^3-3x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, која се добива од дадената, ако десната страна ја поделиме со $a_0=2$. Од анализата во точка 5, со помош на трансформационите формули $x'=x-1$; $y'=y+1$ паралелно го пренесуваме координатниот систем xOy во координатниот систем $x'O_1y'$ во нов координатен систем и притоа во новиот координатен систем за функцијата имаме $y'=x'^3-\frac{5}{2}x'$. Тогаш, според точка 3 имаме:

-графикот на функцијата y' ја сече x'-оската во точки $A(-\sqrt{\frac{5}{2}},0)$, $B(\sqrt{\frac{5}{2}},0)$, $O_1(0,0)$, при што точката O_1 е превојна точка;

-во однос на координатниот систем $x'O_1y'$ функцијата y' е непарна и нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток;

-при $x'>0$ функцијата е конвексна, а при $x'<0$ функцијата е конкавна. Во однос на координатниот систем $x'O_1y'$ во точката $M_1'\left(-\sqrt{\frac{5}{6}},\frac{10}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ функцијата има локален максимум, а во точката $M_2'\left(\sqrt{\frac{5}{6}},-\frac{10}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ функцијата има локален минимум.

-на интервалот $\left[-\sqrt{\frac{5}{6}},\sqrt{\frac{5}{6}}\right]$ функцијата монотоно опаѓа, а на интервалите $(-\infty,-\sqrt{\frac{5}{6}}]$; $(\sqrt{\frac{5}{6}},\infty]$ таа монотоно расте.



Црт. 16

Графикот на функцијата y' е даден на црт. 16 (со испрекината линија).

Според тоа, во координатниот систем xOy функцијата y_1 расте на интервалите $(-\infty,1-\sqrt{\frac{5}{6}}]$; $(1+\sqrt{\frac{5}{6}},\infty]$, а опаѓа на интервалот $\left[1-\sqrt{\frac{5}{6}},1+\sqrt{\frac{5}{6}}\right]$. Функцијата има локален максимум во точката $M_1'\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}},-1+\frac{10}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ и локален миниму во точката $M_2'\left(1+\sqrt{\frac{5}{6}},-1-\frac{10}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$. Графикот на функцијата y_1 е симетричен во однос на точката $O_1(1,-1)$, која што е превојна точка. Истиот е конкавен за $x<1$, а е конвексен за $x>1$.

Конечно, од $y=2y_1$ добиваме дека графикот на функцијата $y=2x^3-6x^2+x+1$ може да се добие од конструираниот график на функцијата $y_1=x^3-3x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, на тој начин што ординатите ги множиме со 2, во координатниот систем xOy. Значи, $M_1\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}},-2+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ е точка на локален максимум, а $M_2'\left(1+\sqrt{\frac{5}{6}},-2-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ е точка на локален минимум. Графикот на функцијата е симетричен во однос на точката $O_2(1,-2)$. Останатите елементи се исти како и за функцијата $y_1=x^3-3x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, во координатниот систем xOy.

Графикот на функцијата е даден на црт. 16 (со полна линија).

7. Задачи за вежбање

1. Да се испитаат и скицираат графиците на функциите

   а) $y = x^3 - 4x$; б) $y = x^3 - 5x + 4$.

2. Да се испитаат и скицираат графиците на функциите

   а) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$; б) $y = x^3 + 6x^2 + 7x + 8$.

3. Да се испитаат и скицираат графиците на функциите

   а) $y = 2x^3 - 7x + 4$; б) $y = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 4$.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија