

Републички натпревар 2006

I година

1. Определи го најмалиот природен број чија половина е полн квадрат, третина е полн куб, а петтината е полн петти степен.

Решение. Бараниот број мора да е делив со 2,3 и 5 (од условот), па мора да е од облик $n = 2^x 3^y 5^z$. Ако има други множители нема да биде најмал. Од условот на задачата имаме:

$$\frac{n}{2} = 2^{x-1} 3^y 5^z \quad (1) \quad \frac{n}{3} = 2^x 3^{y-1} 5^z \quad (2) \quad \frac{n}{5} = 2^x 3^y 5^{z-1} \quad (3)$$

Од (1) следи дека $x-1, y, z$ мора да се парни. Од (2) следи дека $x, y-1, z$ мора да се деливи со три. Од (3) следи дека $x, y, z-1$ мора да се деливи со пет.

Значи x е непарен, делив со 3 и со 5, y е парен, делив со 5 и дава остаток 1 при делење со 3, z е парен, делив со 3 и дава остаток 1 при делење со 5. Бидејќи n е најмал, тогаш и x, y и z мора да се најмали, па имаме $x = 15, y = 15, z = 6$.

$$\text{Значи } n = 2^{15} 3^{10} 5^6 = 30\,233\,088\,000\,000.$$

2. Ако

$$\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \dots + \frac{a_n}{1+b_n} = \frac{A}{1+B} \text{ и } \frac{a_1(B-b_1)}{1+b_1} + \frac{a_2(B-b_2)}{1+b_2} + \dots + \frac{a_n(B-b_n)}{1+b_n} = 0,$$

докажи дека $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$.

Решение. Нека $k_i = \frac{a_i}{1+b_i}, i = 1, 2, \dots, n$, тогаш од првото равенство следи дека

$$A = (1+B)(k_1 + k_2 + \dots + k_n) = *.$$

Од второто равенство имаме

$$\begin{aligned} k_1(B-b_1) + k_2(B-b_2) + \dots + k_n(B-b_n) &= 0 \quad \Rightarrow \\ B(k_1 + k_2 + \dots + k_n) &= k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n \end{aligned}$$

Тогаш,

$$\begin{aligned} * &= k_1 + k_2 + \dots + k_n + B(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \\ &= k_1 + k_2 + \dots + k_n + k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n \\ &= k_1(1+b_1) + k_2(1+b_2) + \dots + k_n(1+b_n) \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

3. Нека $\triangle ABC$ е тапоаголен со тап агол кај темето A . Нека $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, h_a$ – висината спуштена од темето A и h_b – висината спуштена од темето B . Докажи дека $a + h_a > b + h_b$.

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$a > b > h_a \quad (1)$$

Според тоа

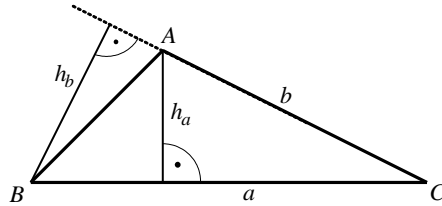
$$2P = bh_b = ah_a < ab \Rightarrow \frac{2P}{ab} < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2P}{ab}(a-b) < a-b \Rightarrow$$

$$\frac{2P}{b} - \frac{2P}{a} < a-b \Rightarrow$$

$$h_b - h_a < a-b \Rightarrow$$

$$b + h_b < a + h_a.$$



4. Градовите А, В и С се поврзани со праволиниски патишта. Покрај патот А-В се наоѓа квадратно поле со страна $0,5\overline{AB}$, а покрај патот В-С се наоѓа квадратно поле со страна \overline{BC} ; покрај патот А-С постои шума со правоаголна форма, чија должина е \overline{AC} , а ширина 4 километри. Најди ја плоштината на шумата, ако таа е за 20 километри поголема од збирот на плоштините на квадратните полиња.

Решение. Нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AC} = x$. При тоа $a + b \geq x$. Според условот

$$4x = \frac{a^2}{4} + b^2 + 20$$

$$x = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 5$$

$$a + b \geq \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 5$$

$$16a + 16b \geq a^2 + 4b^2 + 80$$

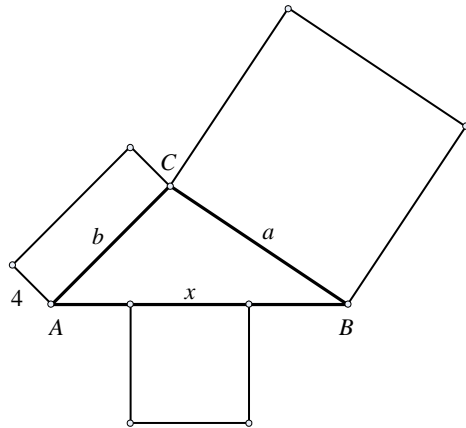
$$a^2 - 16a + 4b^2 - 16b + 80 \leq 0$$

$$(a-8)^2 + 4(b-2)^2 \leq 0$$

$$a = 8, b = 2$$

$$x = 10$$

$$P = 40\text{km}^2$$



III година

1. Најди го реалниот број m така што равенката

$$(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1))(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)) = 0$$

има точно три различни реални корени.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\begin{cases} x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1) = 0 \\ x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Дискриминантата на првата равенка е

$$D_1 = 4(5m^2 + 4),$$

а на втората

$$D_2 = 4(4 + 2m(m^2 + 1)).$$

Јасно е дека $D_1 > 0$. Тогаш, бидејќи првата равенка има секогаш два различни реални корени, можни се следниве случаи:

А) Втората равенка има точно еден реален корен, различен од корените на првата.

Б) Втората равенка има два различни реални корени, но еден од нив е еднаков со корен на првата равенка.

А) Во овој случај ја добиваме равенката

$$D_2 = m^3 + m + 2 = (m+1)(m^2 - m + 2) = 0$$

која во множеството реални броеви има едно решение $m = -1$. Тогаш решенија на првата равенка се 2 и -4 , а на втората решение е 2, односно

$$(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1))(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)) = 0$$

има две реални решенија. Значи $m = -1$ не е бараното решение.

Б) Нека x_0 е заедничкиот корен на равенките од системот. Тогаш ако од

$$x_0^2 - 2mx_0 - 4(m^2 + 1) = 0$$

ја одземеме

$$x_0^2 - 4x_0 - 2m(m^2 + 1) = 0$$

добиваме

$$(4 - 2m)x_0 = (m^2 + 1)(4 - 2m).$$

Ако $m = 2$ тогаш првата и втората равенка од системот се еднакви па

$$(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1))(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)) = 0$$

има точно два реални различни корени. Значи $m \neq 2$, а тогаш $x_0 = m^2 + 1$. Со замена на x_0 во првата равенка ја добиваме равенката $(m^2 + 1)(m^2 - 2m - 3) = 0$, а нејзини реални решенија се $m_1 = -1$ и $m_2 = 3$. Од дискусијата под А), $m = -1$ не е бараното решение. Ако $m = 3$ тогаш корени на првата равенка се 10 и -4 , а на втората -4 и -6 . Значи бараното решение е $m = 3$.

2. За кои вредности на реалниот параметар a , системот

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3a - 1} \\ x^2 + y^2 + z^2 = a \\ xy = z^2 \end{cases}$$

има различни реални решенија?

Решение. За системот да има решение треба $3a-1 \geq 0$ и $a \geq 0$, односно $a \geq \frac{1}{3}$. Втората равенка од системот е еквивалентна со равенката $(x+y)^2 - 2xy + z^2 = a$. Тогаш, со смена на $x+y$ и xy од првата и третата равенка, соодветно, ја добиваме равенката $(\sqrt{3a-1} - z)^2 - 2z^2 + z^2 = a$, која е еквивалентна со равенката $2\sqrt{3a-1}z = 2a-1$. Последната равенка има решение во реалните броеви ако $a \neq \frac{1}{3}$, па затоа $a > \frac{1}{3}$. Тогаш $z = \frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$. Со замена на $z = \frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}$ во првата и втората равенка на системот, го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y = \frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}} \\ xy = \left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2 \end{cases}$$

Тогаш x и y се решенија на квадратната равенка

$$t^2 - \frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}}t + \left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2 = 0.$$

Бидејќи системот треба да има различни реални решенија, треба

$$\left(\frac{4a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2 - 4\left(\frac{2a-1}{2\sqrt{3a-1}}\right)^2 > 0.$$

Последната неравенка е еквивалентна со неравенката $\frac{8a-3}{4(3a-1)} > 0$, а бидејќи именителот е позитивен следува дека $8a-3 > 0$. Оттука следува дека $a > \frac{3}{8}$. Конечно, за $a > \frac{3}{8}$ системот има различни реални решенија.

3. Даден е остроаголниот триаголник ABC со агол $\angle BAC = 45^\circ$. Нека \overline{BE} и \overline{CF} се висините на триаголникот, H е ортоцентарот, а M и K се средини на \overline{BC} и \overline{AH} , соодветно. Докажи дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.

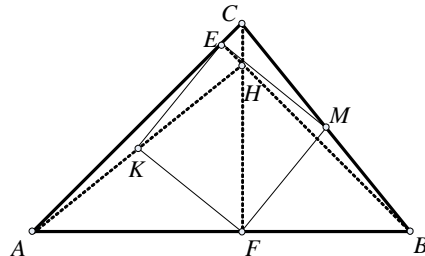
Решение. Триаголникот AHE е правоаголен, K е средина на неговата хипотенуза па затоа $\overline{KE} = \overline{KH} = \overline{KA}$. Бидејќи K е средина и на хипотенузата на правоаголниот триаголник AFH , следува $\overline{KF} = \overline{KH} = \overline{KA}$, Оттука добиваме

$$\overline{KE} = \overline{KF} \quad (1)$$

Слично, добиваме дека

$$\overline{ME} = \overline{MF} \quad (2)$$

Триаголниците ABE и HCE се рамнокраки правоаголни па важи $\overline{AE} = \overline{BE}$ и $\overline{HE} = \overline{CE}$. Тогаш триаголниците AHE и BCE се складни и оттука $\overline{AH} = \overline{BC}$. Затоа



$$\overline{EM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AH}}{2} = \overline{KE} \quad (3)$$

па од (1), (2) и (3) следува дека четириаголникот $KFME$ е ромб. Бидејќи

$$\angle KEM = \angle KEN + \angle NEM = \angle KNE + \angle NBM = \angle ANE + \angle EAN = 90^\circ,$$

добиваме дека четириаголникот $KFME$ е квадрат.

4. Дали постои квадратен трином $p(x) = ax^2 + bx + c$ каде што a, b, c се цели броеви, $a \neq 0$, така што за секој природен број n кој во својот десетичен запис има само единици, бројот $p(n)$ во својот десетичен запис има само единици?

Решение. Нека $n = \underset{k}{11\dots1}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогаш $9n + 2 = \underset{k-1}{100\dots01}$, $(9n + 2)n = \underset{2k}{11\dots11}$.

Според тоа, триномот $p(x) = 9x^2 + 2x$ го има бараното својство.

III година

1. Пресметај го збирот $S = S_1 + S_2$, каде што S_1 и S_2 се зададени со

$$S_1 = \frac{1}{\log_{\text{tg}1^\circ} 2} + \frac{2}{\log_{\text{tg}2^\circ} 2^2} + \dots + \frac{44}{\log_{\text{tg}44^\circ} 2^{44}} \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{46}{\log_{\text{tg}46^\circ} 2^{46}} + \frac{47}{\log_{\text{tg}47^\circ} 2^{47}} + \dots + \frac{89}{\log_{\text{tg}89^\circ} 2^{89}}$$

Решение. Користејќи го својството за логаритми $\log_x a^k = k \log_x a$, збирот

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{1}{\log_{\text{tg}1^\circ} 2} + \frac{2}{\log_{\text{tg}2^\circ} 2^2} + \dots + \frac{44}{\log_{\text{tg}44^\circ} 2^{44}} + \frac{46}{\log_{\text{tg}46^\circ} 2^{46}} + \frac{47}{\log_{\text{tg}47^\circ} 2^{47}} + \dots + \frac{89}{\log_{\text{tg}89^\circ} 2^{89}} \\ &= \frac{1}{\log_{\text{tg}1^\circ} 2} + \frac{1}{\log_{\text{tg}2^\circ} 2} + \dots + \frac{1}{\log_{\text{tg}44^\circ} 2} + \frac{1}{\log_{\text{tg}46^\circ} 2} + \frac{1}{\log_{\text{tg}47^\circ} 2} + \dots + \frac{1}{\log_{\text{tg}89^\circ} 2} \end{aligned}$$

Користејќи го својството $\frac{1}{\log_x a} = \log_a x$, збирот го доведуваме до облик

$$S = \log_2 \text{tg} 1^\circ + \dots + \log_2 \text{tg} 44^\circ + \log_2 \text{tg} 46^\circ + \dots + \log_2 \text{tg} 89^\circ$$

Ќе ги групираме собираците и од својствата на логаритмите и функциите $\text{tg} x$ и $\text{ctg} x$ добиваме

$$\begin{aligned} S &= \log_2 \text{tg} 1^\circ + \log_2 \text{tg} 89^\circ + \log_2 \text{tg} 2^\circ + \log_2 \text{tg} 88^\circ + \dots + \log_2 \text{tg} 44^\circ + \log_2 \text{tg} 46^\circ \\ &= \log_2 (\text{tg} 1^\circ \cdot \text{tg} 89^\circ) + \dots + \log_2 (\text{tg} 44^\circ \cdot \text{tg} 46^\circ) \\ &= \log_2 (\text{tg} 1^\circ \cdot \text{ctg} 1^\circ) + \dots + \log_2 (\text{tg} 44^\circ \cdot \text{ctg} 44^\circ) \\ &= 44 \log_2 1 = 44 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

2. Одреди ја најголемата вредност на функцијата $f(x) = 3 - 2x - x^2$ на множеството решенија на равенката $2 \cos^2 x + \cos 4x = 0$.

Решение. Да го одредиме прво множеството на решенија на равенката. Користејќи ја тригонометриската трансформација $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$, равенката се

сведува до облик $1 + \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$, односно $\cos 2x + 2\cos^2 2x = 0$. Последното е еквивалентно со $\cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$, а решенијата тогаш се добиваат од

$$1) \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \text{ за } k \in \mathbb{Z} \text{ или}$$

2) $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$. Последното може заради произволноста на $k \in \mathbb{Z}$ да се запише во облик $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

Значи множеството решенија на равенката е зададено со

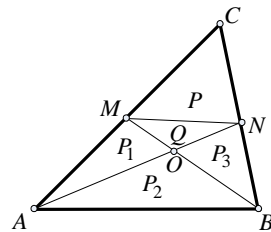
$$M = \{(2k+1)\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = 3 - 2x - x^2$. За неа е точно дека темето и е во точка $T(-1, 4)$, истата расте на интервалот $(-\infty, -1)$, а опаѓа на $(-1, \infty)$. Тогаш за најголемата вредност на множеството M , функцијата ќе ја разгледуваме како растечка функција на $M \cap (-\infty, -1)$, а потоа како опаднувачка на $M \cap (-1, \infty)$. На $M \cap (-\infty, -1)$, точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{3}$, а на $M \cap (-1, \infty)$ точка во која функцијата достигнува најголема вредност е $-\frac{\pi}{4}$. Останува да се споредат уште $f(-\frac{\pi}{3}) = 3 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4}$ и $f(-\frac{\pi}{4}) = 3 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$. Бидејќи $f(-\frac{\pi}{3}) > f(-\frac{\pi}{4})$, најголемата вредност на функцијата на множеството решенија на равенката се достигнува во $-\frac{\pi}{3}$ и изнесува $f(-\frac{\pi}{3}) = 3 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi^2}{4}$.

3. Во триаголникот ABC на страната AC е земена точка M , а на страната BC е земена точка N . Отсечките AN и BM се сечат во точката O . Површините на триаголниците AMO, ABO, BNO се еднакви на P_1, P_2, P_3 соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот CMN .

Решение. Плоштината на триаголникот CMN ќе ја означиме со P а плоштината на триаголникот MON ќе ја означиме со Q .

Триаголниците AMO и MON имаат еднакви висини кон AO и ON , соодветно, и триаголниците AOB и NOB имаат еднакви висини кон AO и ON , соодветно, па затоа $\frac{P_1}{Q} = \frac{AO}{ON} = \frac{P_2}{P_3}$.



Од последното равенство добиваме $Q = \frac{P_1 P_3}{P_2}$. Од парот триаголници CMN и BMN , и парот триаголници ANC и ANB , (секој пар има еднакви висини спуштени кон CN и NB , соодветно), добиваме: $\frac{P}{Q+P_3} = \frac{CN}{NB} = \frac{P_1+Q+P}{P_2+P_3}$.

Според тоа, $P(P_2 - Q) = Q^2 + QP_1 + QP_2 + P_1P_3$, т.е. $P = \frac{Q^2 + QP_1 + QP_2 + P_1P_3}{P_2 - Q}$, и ако во последното равенство замениме $Q = \frac{P_1P_3}{P_2}$, добиваме

$$P = \frac{\left(\frac{P_1P_3}{P_2}\right)^2 + \frac{P_1P_3}{P_2}P_1 + \frac{P_1P_3}{P_2}P_2 + P_1P_3}{P_2 - \frac{P_1P_3}{P_2}} = \frac{P_1P_3(P_1 + P_2)(P_2 + P_3)}{P_2(P_2^2 - P_1P_3)}$$

4. На табла се запишани броевите $2, 3, 4, \dots, n+1$. Потоа се запишуваат производите на секои два од нив, па се запишуваат производите на секои три од нив и постапката продолжува дури не се запише производот на сите броеви $2, 3, 4, \dots, n+1$. Пресметај го збирот на реципрочните вредности на сите броеви запишани на таблата.

Решение. Да го разгледаме производот $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \dots (1 + \frac{1}{n+1})$. Ако се извршат сите множења се добива бараниот збир на реципрочните вредности зголемен за 1. Според тоа бараниот збир е еднаков на

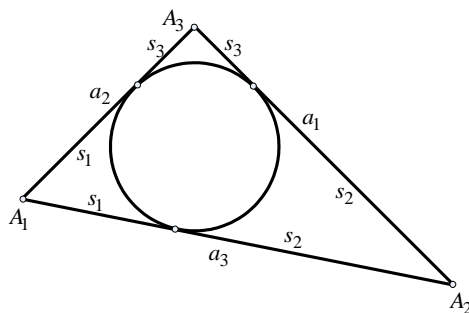
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+2}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{2} - 1 = \frac{n}{2}$$

IV година

1. Даден е триаголникот $A_1A_2A_3$, со страни $a_1 = \overline{A_2A_3}$, $a_2 = \overline{A_3A_1}$ и $a_3 = \overline{A_1A_2}$. Нека s_1, s_2, s_3 се должините на тангентните отсечки на впишаната кружница во триаголникот, што почнуваат од A_1, A_2, A_3 , соодветно. Докажи дека $\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \frac{s_3}{a_3} \geq \frac{3}{2}$. Кога важи равенство?

Решение. Од условите на задачата имаме $s_1 + s_2 = a_3$, $s_2 + s_3 = a_1$ и $s_3 + s_1 = a_2$, па оттука

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1), \\ s_2 &= \frac{1}{2}(a_3 + a_1 - a_2) \text{ и} \\ s_3 &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3). \end{aligned}$$



Затоа

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \frac{s_3}{a_3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 + a_3 - a_1}{a_1} + \frac{a_3 + a_1 - a_2}{a_2} + \frac{a_1 + a_2 - a_3}{a_3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} \right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \right) - 3 \right) \\ &\geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Неравенството следува од познатото неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$, за секој $x > 0$.

Равенство важи ако и само ако $x = 1$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = 1, \frac{a_2}{a_1} = 1, \frac{a_1}{a_3} = 1$. Значи, $a_1 = a_2 = a_3$, па триаголникот е рамностран. Ако триаголникот е рамностран, јасно е дека важи равенство.

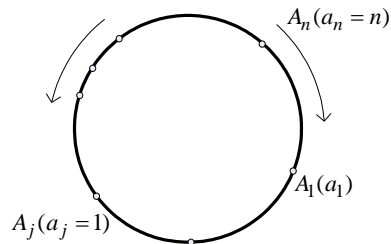
2. Некои членови од аритметичките прогресии $a_n = 4n + 13$ и $b_n = 5n + 11$, $n \in \mathbb{N}$, се еднакви. Докажи дека збирот на првите p еднакви членови е еднаков на $p(10p + 11)$.

Решение. Од условот $a_n = b_m$ добиваме $4n + 13 = 5m + 11$, т.е. $n = m + \frac{m-2}{4}$. Бидејќи n е природен број следува дека $k = \frac{m-2}{4} \in \mathbb{N}$. Значи, $m = 4k + 2$, па општиот член на заедничкиот дел од низите е $x_k = 20k + 21$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Притоа $x_k - x_{k-1} = 20$. Значи (x_k) е аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Првите p членови се добиваат за $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$. За бараниот збир добиваме

$$S_p = \frac{p}{2}(42 + 20(p-1)) = \frac{p}{2}(20p + 22) = p(10p + 11).$$

3. Дадени се n точки на кружница. Броевите $1, 2, \dots, n$ се запишани во произволен распоред покрај дадените точки (по еден број покрај секоја точка). За секој пар соседни точки е определена апсолутната вредност на разликата на броевите запишани покрај точките. Докажи дека збирот на овие апсолутни вредности е поголем или еднаков на $2(n-1)$.

Решение. Точките на кружницата ги означуваме по ред со A_i , ($1 \leq i \leq n$) движејќи се во позитивна насока така што со A_n ќе биде означена точката покрај која е запишан бројот n . Нека со A_j е означена точката покрај која е запишан бројот 1. Движејќи се од A_n кон A_j , првиот пат во позитивна а вториот пат во негативна насока, добиваме



$$\begin{aligned} |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \dots + |a_{j+1} - a_j| &\geq \\ &\geq (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{j+1} - a_j) \quad (1) \\ &= a_n - a_j = n - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_n - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{j-1} - a_j| &\geq \\ &\geq (a_n - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_{j-1} - a_j) \quad (2) \\ &= a_n - a_j = n - 1 \end{aligned}$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1| \geq 2(n-1),$$

што требаше да се докаже.

4. Докажи дека постојат бесконечно многу подредени двојки од цели броеви (x, y) кои се решенија на равенката $(x-1)^x = x(1-y) - 1$.

Решение. Равенката ја доведуваме во обликот

$$(x-1)^x + xy - (x-1) = 0. \tag{1}$$

Нека p е произволен прост број. Бидејќи $(p, p-1) = 1$, користејќи ја малата теорема на Ферма се добива $(p-1)^p \equiv (p-1) \pmod{p}$. Значи, за произволен прост број p , постои природен број k_p така што

$$(p-1)^p = k_p p + (p-1) \tag{2}$$

За $x = p$ и користејќи го (2), равенката (1) се сведува на

$$k_p p + (p-1) + py - (p-1) = 0,$$

односно се добива

$$p(k_p + y) = 0 \tag{3}$$

Од $p \neq 0$ следува $k_p + y = 0$, односно $y = -k_p$. Значи секој подреден пар $(p, -k_p)$, каде p е прост број, а k_p се добива со горенаведената конструкција е решение на равенката (1). Од бесконечноста на множеството на прости броеви следува дека постојат бесконечно парови што ја задоволуваат равенката.