

Približna trisekcija ugla

Hasan Smajić^a

^aJU OŠ "Malešići", Malešići

Sažetak: U ovome radu su prezentirane dvije konstrukcije približne trisekcije ugla od 60° , inspirisane Arhimedovom konstrukcijom. Također je pokazano da su obje konstrukcije izvedene s veoma malom pogreškom.

1. Uvod

Starogrčka Platonova akademija postavila je pitanje trisekcije ugla (podijeliti ugao na tri jednaka dijela) pomoću šestara i nebaždarenog lenjira (služi samo za povlačenje linije-spajanje dvije tačke) koje je dugo vremena zadavalo glavobolje matematičarima. Napokon došlo se do zaključka da se euklidskim konstrukcijama ne može riješiti trisekcija svakog ugla (moguće su trisekcije uglova $\alpha_n = \frac{360^\circ}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$). U ovome radu pokazaćemo približnu konstrukciju trisekcije ugla od 60° pomoću šestara i dva nebaždarena trougla. No prije toga ćemo pokazati da je tu konstrukciju nemoguće izvesti samo pomoću šestara i nebaždarenog lenjira. Za to nam je neophodan sljedeći teorem o kubnoj jednažbi (koji navodimo bez dokaza, v. [3]).

Teorem 1.1. *Ako su koeficijenti kubne jednažbe*

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

racionalni brojevi i nijedno rješenje jednažbe (1) nije racionalno, tada su sva ta rješenja nekonstruktibilni brojevi.

Kako je

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \end{aligned}$$

uzimajući da je $\theta = 60^\circ$, dobijamo

$$\cos \theta = 4 \cos^3 \frac{\theta}{3} - 3 \cos \frac{\theta}{3}.$$

Neka je $x = \cos \frac{\theta}{3}$, te kako je $\cos \theta = \frac{1}{2}$, to onda dobijemo kubnu jednažbu

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Ciljna skupina: srednja škola

Ključne riječi: trisekcija ugla, Arhimedova konstrukcija

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Rad preuzet: 30.09.2022.

Uvodeći smjenu $u = 2x$, posljednja jednačba poprima oblik

$$u^3 - 3u - 1 = 0. \quad (2)$$

Vidimo da je (2) kubna jednačba s racionalnim koeficijentima. Pretpostavimo da je u racionalan broj, to jest da je $u = \frac{r}{s}$, pri čemu je $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$. Tada iz jednačbe (2) dobijamo kubnu jednačbu

$$r^3 - 3rs^2 - s^3 = 0,$$

iz koje onda slijedi

$$r(r^2 - 3s^2) = s^3 \implies r|s^3 \implies r|s \stackrel{(r,s)=1}{\implies} r \in \{-1, 1\},$$

kao i

$$r^3 = s(3rs + s^2) \implies s|r^3 \implies s|r \stackrel{(r,s)=1, s \in \mathbb{N}}{\implies} s = 1.$$

Dakle, možemo zaključiti da je $u = \frac{r}{s} \in \{-1, 1\}$. Provjerimo sada jesu li $u = 1$ i/ili $u = -1$ rješenja jednačbe (2).

i) $u = -1$

$$(-1)^3 - 3(-1) - 1 = -1 + 3 - 1 = 1 \neq 0,$$

to jest $u = -1$ nije rješenje jednačbe (2).

ii) $u = 1$

$$1^3 - 3 \cdot 1 - 1 = 1 - 3 - 1 = -3 \neq 0,$$

to jest $u = 1$ nije rješenje jednačbe (2).

Budući da niti jedno rješenje jednačbe (2) nije racionalno, možemo zaključiti da su sva rješenja nekonstruktibilni brojevi pa i $2x$, odnosno, $x = \cos \frac{\theta}{3}$ je nekonstruktibilan broj. Dakle, trisekcija posmatranog ugla od 60° nije moguća.

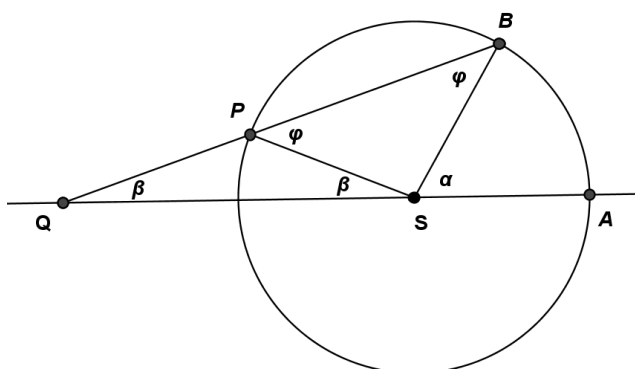
2. Arhimedova konstrukcija - trisekcija ugla pomoću trake papira

Poznato je da se problem trisekcije ugla ipak može riješiti, ali uz upotrebu nekih pomagala. U arapskom djelu "Knjiga lema", koja se pripisuje Arhimedu, opisana je konstrukcija trisekcije ugla uz pomoć šestara, ravnala i trake, [1].

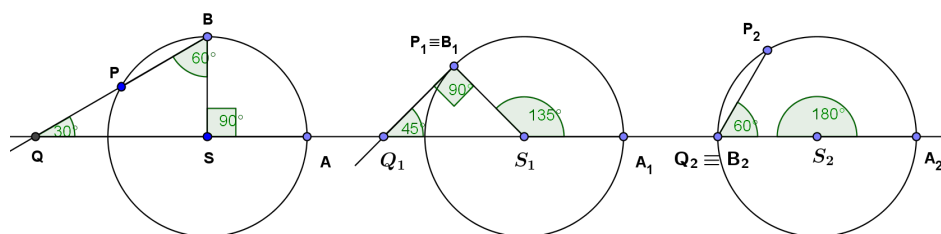
Neka je tačka S tjeme ugla $\alpha = \angle ASB$. Šta je trećina tog ugla? Opišimo kružnicu poluprečnika r sa centrom u tački S . Tačke presjeka te kružnice i krakova ugla α označimo sa A i B . Nanesimo na rub trake papira tačke Q i P tako da je $|QP| = r$. Položimo tu traku papira na ravan crteža tako da joj tačka Q bude u pravcu SA i rub stalno prolazi tačkom B sve dok tačka P ne padne na kružnicu. Pomjeranjem trake tačka Q stalno ostaje na pravcu SA . Tvrdimo da je tada ugao $\beta = \angle PQS = \frac{1}{3}\alpha$. Vidjeti Sliku 1.

Zaista, trouglovi $\triangle BPS$ i $\triangle QSP$ su jednakokraki pa je $\angle PBS = \angle BPS = \varphi$ i $\angle PQS = \angle PSQ = \beta$. Ugao $\varphi = \angle BPS$ je vanjski ugao trougla $\triangle PQS$ pa je $\varphi = \beta + \beta = 2\beta$, a ugao $\alpha = \angle ASB$ je vanjski za trougao $\triangle BSQ$ pa je $\alpha = \beta + \varphi$. Zamjenom $\varphi = 2\beta$ u posljednjoj jednakosti dobijamo da je $\alpha = 3\beta$, odnosno vrijedi $\beta = \angle PQS = \frac{1}{3}\alpha$ što je i trebalo dokazati.

Na Slici 2 pokazana je trisekcija uglova 90° , 135° i 180° na Arhimedov način. U ovom radu koristit ćemo ih za približnu konstrukciju nekih uglova.



Slika 1: Arhimedova konstrukcija trisekcije ugla α



Slika 2: Arhimedova konstrukcija trisekcije uglova 90° , 135° i 180°

3. Trisekcije uglova 27° , 36° , 54° , 72° , 81° i 108° .

Izračunajmo trigonometrijske vrijednosti ugla 36° . Posmatrajmo jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je ugao nad osnovicom 36° i povucimo simetralu ugla $\angle BAC = 72^\circ$ (v. Sliku 3).

Sada je ugao $\angle BDA = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$. Trouglovi $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ su jednakokraki pa je $|AD| = |CD| = a$. Kako simetrala ugla dijeli suprotnu stranicu u omjeru u kome se odnose stranice koje obrazuju taj ugao vrijedi:

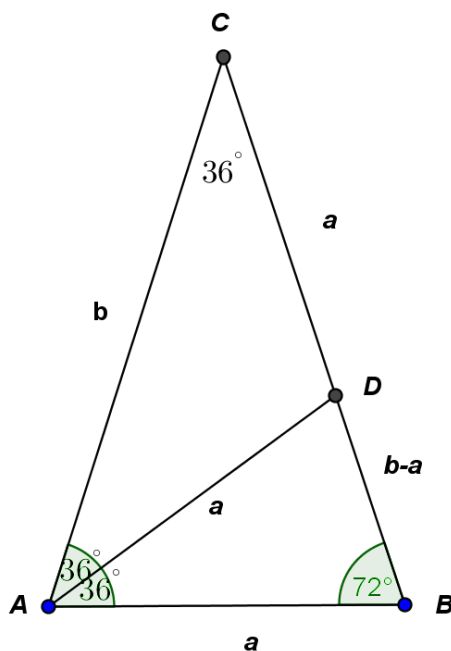
$$a : (b - a) = b : a \iff a^2 = b^2 - ab \iff a^2 + ab - b^2 = 0 \iff a_{\pm} = \frac{-b \pm b\sqrt{5}}{2}.$$

Budući da je $a_- = \frac{(-1-\sqrt{5})b}{2} < 0$, to je $a = a_+ = \frac{(-1+\sqrt{5})b}{2}$. Za $b = 1$ (jedinica mjere) dobijamo da je $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Primjenom kosinusnog teorema na trougao $\triangle ABC$, dobije se

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos 36^\circ \iff \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos 36^\circ \\ \iff \frac{6-2\sqrt{5}}{4} &= 2 - 2 \cos 36^\circ \iff 3 - \sqrt{5} = 4 - 4 \cos 36^\circ \iff 4 \cos 36^\circ = \sqrt{5} + 1, \end{aligned}$$

odnosno

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$



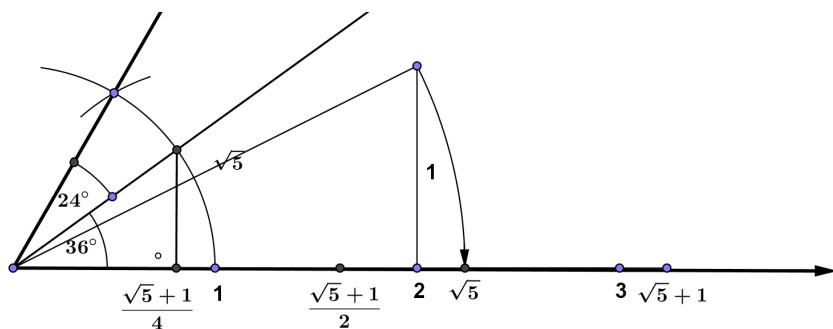
Slika 3: Trigonometrijske vrijednosti ugla 36°

Sada je

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - (\sqrt{5} + 1)^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Koristeći Sliku 4 daćemo kratku uputu kako uraditi trisekciju uglova 27° , 36° , 54° , 72° , 81° i 108° . To slijedi iz jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}27^\circ &= 9^\circ = \frac{1}{4}36^\circ, & \frac{1}{3}36^\circ &= 12^\circ = \frac{1}{2}24^\circ, & \frac{1}{3}54^\circ &= 18^\circ = \frac{1}{2}36^\circ, \\ \frac{1}{3}72^\circ &= 24^\circ, & \frac{1}{3}81^\circ &= 27^\circ = \frac{3}{4}36^\circ, & \frac{1}{3}108^\circ &= 36^\circ. \end{aligned}$$



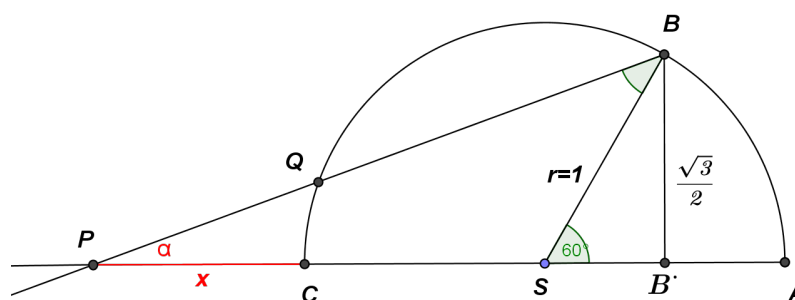
Slika 4: Konstrukcija uglova 36° i 24°

U nastavku data je tabela trigonometrijskih vrijednosti nekih značajnih uglova koja može pomoći kod trisekcije nekih uglova uz napomenu da neke vrijednosti mogu imati i drugu formu, [2].

| Ugao α | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\tan \alpha$ | $ctg \alpha$ |
|------------------|---|---|--|--|
| 0° | 0 | 1 | 0 | $\pm\infty$ |
| 9° | $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}}{4}$ | $\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ | $\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ |
| 15° | $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$ | $2 - \sqrt{3}$ | $2 + \sqrt{3}$ |
| 18° | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{8}$ | $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ |
| 22.5° | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ | $\sqrt{2} - 1$ | $\sqrt{2} + 1$ |
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 36° | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ | $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{8}$ |
| 37.5° | $\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$ | $\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$ | $\sqrt{15 - 6\sqrt{6} - 8\sqrt{3} + 10\sqrt{2}}$ $= \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$ | $\sqrt{15 + 6\sqrt{6} - 8\sqrt{3} - 10\sqrt{2}}$ $= 2 + 2\sqrt{6} - \sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 52.5° | $\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$ | $\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$ | $\sqrt{15 + 6\sqrt{6} - 8\sqrt{3} - 10\sqrt{2}}$ $= 2 + 2\sqrt{6} - \sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ | $\sqrt{15 - 6\sqrt{6} - 8\sqrt{3} + 10\sqrt{2}}$ $= \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$ |
| 54° | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{8}$ | $\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 67.5° | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | $\sqrt{2} + 1$ | $\sqrt{2} - 1$ |
| 72° | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ | $\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{8}$ |
| 75° | $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$ | $2 + \sqrt{3}$ | $2 - \sqrt{3}$ |
| 81° | $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}}{4}$ | $\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ | $\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ |
| 90° | 1 | 0 | $\pm\infty$ | 0 |

4. Približna trisekcija ugla od 60° .

Neka je riješena približna trisekcija ugla od 60° kao na Slici 5. Tada je $\alpha \approx 20^\circ$.



Slika 5: Približna trisekcija ugla od 60°

Odredimo koliko je približno udaljena tačka P od tačke C . Označimo sa x traženu udaljenost. Sa Slike 5 očito je

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} + x} = \frac{\sqrt{3}}{2x + 3}, \quad \text{te je} \quad 2x + 3 = \frac{\sqrt{3}}{\tan \alpha}.$$

Odavde je

$$x = \frac{\sqrt{3} - 3 \tan \alpha}{2 \tan \alpha},$$

pa koristeći da je $\tan \alpha \approx \tan 20^\circ \approx 0.3639702342662$ (prema savremenim trigonometrijskim mjerenjima) dobijamo

$$x \approx \frac{\sqrt{3} - 3(0.3639702342662)}{2(0.3639702342662)} \approx 0.87938524157182\dots$$

Uzmimo sada da je $x \approx 0.88 = \frac{88}{100} = \frac{22}{25}$ i izračunajmo pogrešku. Dakle, ako je $x = 0.88$ tada je

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 0.88 + 3} \approx 0.3638762200775,$$

te je

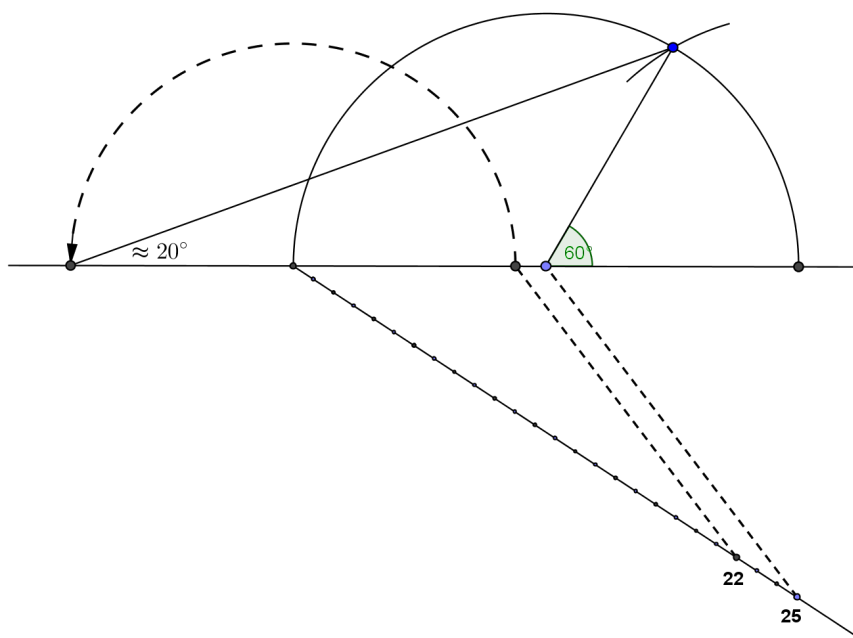
$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.3638762200775) = 19.9952433544587^\circ \approx 19.995^\circ.$$

Može se reći da je pogreška približno

$$-\left(\frac{5}{1000}\right)^\circ - \frac{5}{1000} \cdot 3600'' = -18''$$

(u sekundama) ili u procentima 0.025% (iz jednakosti $19.995^\circ = 20^\circ \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ dobijamo da je $p = 0.025\%$).

Na Slici 6 prikazana je konstrukcija ugla od 20° sa pogreškom $p = 0.025\%$.

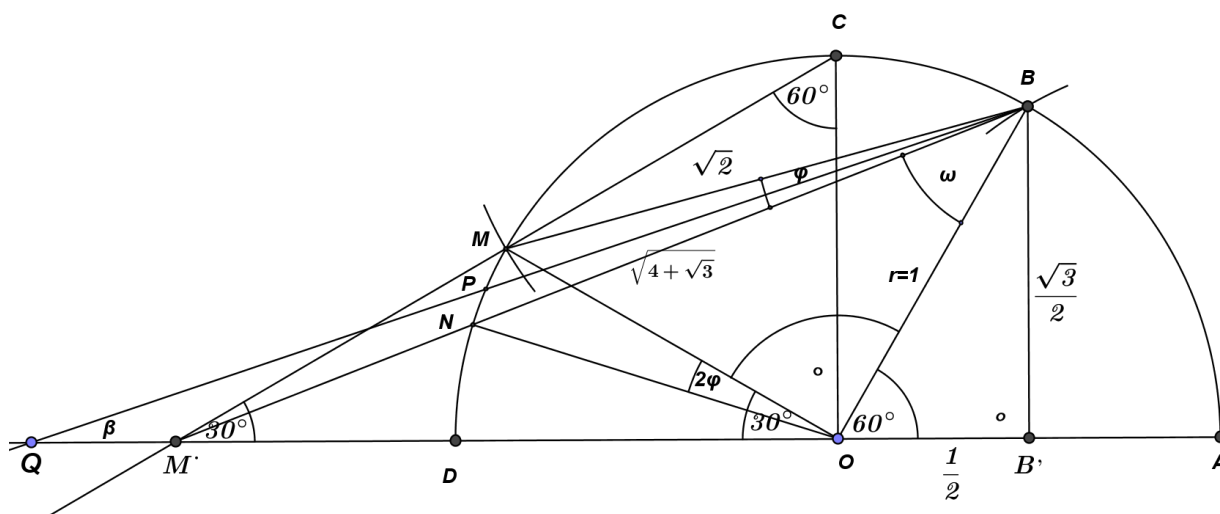


Slika 6: Konstrukcija ugla od 20° sa greškom od 0.025%.

5. Približna trisekcija ugla od 60° pomoću trisekcije ugla 90° .

Pretpostavimo da je riješena približna trisekcija ugla od 60° pomoću trisekcije ugla 90° .

Neka je $r = 1$ poluprečnik polukružnice sa centrom u O , \overline{AD} prečnik i $\angle AOB = 60^\circ$ čiju približnu trisekciju na Arhimedov način treba odrediti. Neka je $\beta = \angle OQB$ trisekcija ugla 60° ($\beta \approx 20^\circ$). Vidjeti Sliku 7. Tačke M i M' dobijemo konstrukcijom trisekcije ugla od 90° Arhimedovom metodom. Tačka B' je presjek normale povučene iz tačke B na poluprečnik OA . Jasno je da je $|BB'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ visina, a $|OB| = \frac{1}{2}$ (polovina osnovice jednakostraničnog trougla $\triangle AOB$).



Slika 7: Približna trisekcija ugla od 60° pomoću trisekcije ugla 90° .

Pokazat ćemo da je $|QM'| \approx 0.68 \cdot |M'N| = \frac{17}{25} |M'N|$.

Pravougli trougao $\triangle OM'C$ je specijalan pa je $|OM'| = \sqrt{3}$. Primjenom Pitagorinog teorema na pravougli trougao $\triangle BB'M'$ dobijamo

$$|BM'| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{12 + 4\sqrt{3} + 1}{4}} = \sqrt{4 + \sqrt{3}}.$$

Pravougli trougao $\triangle OBM$ je jednakokraki pa je $\angle OBM = 45^\circ$. Želimo pronaći vezu između dužina tetive \overline{MN} i duži \overline{QM} . Ugao $\varphi = \angle MBN$ je periferijski ugao nad tetivom \overline{MN} pa je $2\varphi = \angle MON$ njen centralni ugao. Ako primijenimo kosinusnu teoremu na trougao $\triangle BB'M'$, tada dobijamo

$$(\sqrt{3})^2 = \left(\sqrt{4 + \sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 - 2\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \cos \omega,$$

odnosno

$$3 = 4 + \sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{4 + \sqrt{3}} \cdot \cos \omega.$$

Dakle,

$$\cos \omega = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}} \approx 0.779403831,$$

te je

$$\omega \approx 38.7939769^\circ.$$

Sada je

$$\varphi = 45^\circ - \omega \approx 45^\circ - 38.7939769^\circ = 6.206023095^\circ.$$

Koristeći da je $2\varphi \approx 12.41204619^\circ$ primjenom kosinusne teoreme na trougao $\triangle MNO$ dobijamo

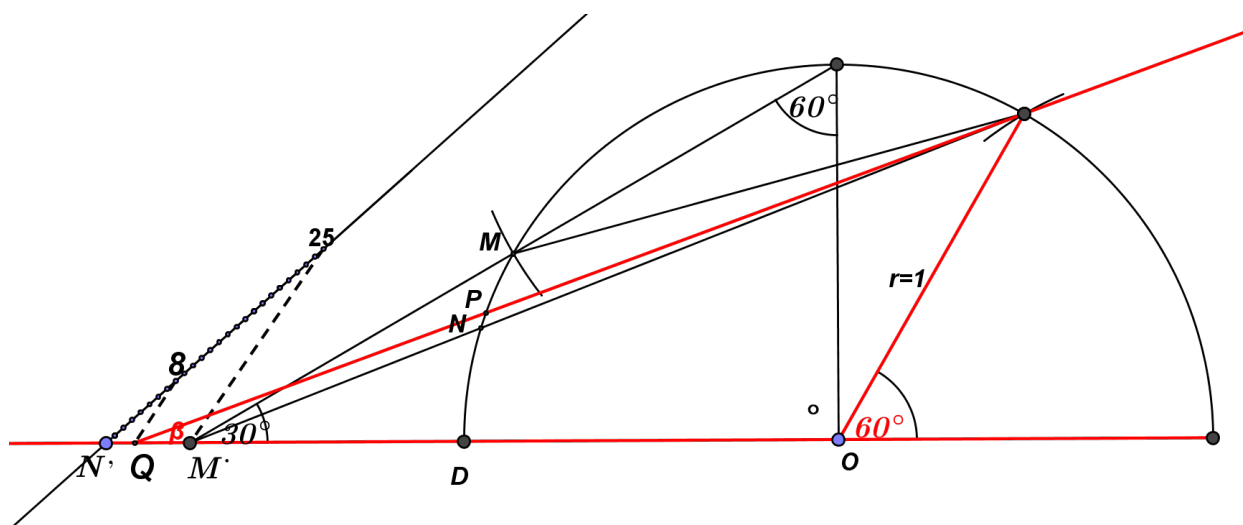
$$|\overline{MN}| \approx \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(12.41204619^\circ)} \approx 0.216207726.$$

Neka je $|\overline{QM}| = k \cdot |\overline{MN}|$. Iz pravouglog trougla $\triangle BB'Q$ je

$$\tan \beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \sqrt{3} + k \cdot |\overline{MN}|} = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3} + 2k \cdot |\overline{MN}|}, \quad (3)$$

pa je

$$k = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\tan \beta} - 1 - 2\sqrt{3}}{2|\overline{MN}|}.$$



$$\begin{aligned} M \cdot N' &= MN \quad \beta \approx 20^\circ \\ M \cdot Q &= \frac{17}{25} MN \end{aligned}$$

Slika 8: Konstrukcija ugla od 20° sa greškom od 0.01%.

Kako je $\tan \beta = \tan 20^\circ \approx 0.363970234$, $\sqrt{3} \approx 1.732050808$ i $|\overline{MN}| \approx 0.216207726$ dobijamo da je $k \approx 0.681448523$. Ako uzmemo sada da je $k \approx 0.68 = \frac{68}{100} = \frac{17}{25}$ to bi značilo da tetivu \overline{MN} bez velikih teškoća možemo podijeliti na Arhimedov način (dva nebaždarena trougla i šestara) u omjeru 17 : 25. Izračunajmo sada pogrešku približne trisekcije ugla od 60° . Zamjenom $k = 0.68$ u (3) dobijamo da je

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3} + 2(0.68)(0.216207726)} \approx 0.364018147,$$

odnosno

$$\beta \approx 20.00242403^\circ.$$

Ako uzmemo da je $\beta \approx 20.002^\circ$ pogreška iznosi $+\left(\frac{2}{1000}\right)^\circ = \frac{1}{500} \cdot 3600'' = 7.2''$ ili u procentima 0.01% (iz jednakosti $20.002^\circ = 20^\circ \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ dobijamo da je $p = 0.01\%$).

Na Slici 8 prikazana je konstrukcija ugla od 20° sa pogreškom $p = 0.01\%$.

Literatura

- [1] Franka Miriam Brückler, *Povijest matematike I*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.
- [2] Hasan Smajić, *Tabela trigonometrijskih vrijednosti značajnih uglova*, Didaktički putokazi, Zenica, decembar 2016.
- [3] Mehmed Nurkanović, *Elementarna matematika sa stanovišta više matematike*, Skripta, 2016.