Републички натпревар 2010

I година

1. Определи ги сите целобројни решенија на равенката $x^3+y^3=2013$.

Решение. Бидејќи a^3 при делење со 9 може да има остаток 0,1 и 8, x^3+y^3 може да има остаток 0, 1, 2, 7 и 8. Бидејќи $2013=9\cdot 223+6$ добиваме дека равенката $x^3+y^3=2013$ нема решенија во множеството цели броеви.

2. Докажи дека $e+f<2a+h$, каде што e и f се должини на дијагоналите на некој ромб, а a е должина на страната на ромбот а h е должината на висината на ромбот.

Решение. Од формулата за плоштина на ромб имаме $\frac{ef}{2}=ah \Rightarrow ef=2ah.$ Од Питагоровата теорема меѓу страната и дијагоналите на ромбот, имаме

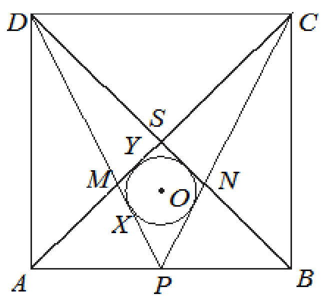
$$(\tfrac{e}{2})^2+(\tfrac{f}{2})^2=a^2, \text{ т.е. } e^2+f^2=4a^2,$$

па,

$$(e+f)^2=e^2+2ef+f^2=4a^2+2ef=4a^2+4ah<4a^2+4ah+h^2=(2a+h)^2,$$

од каде (заради $e+f>0$ и $2a+h>0$) следува дека $e+f<2a+h.$

3. Даден е квадратот $ABCD$. Дијагоналите на квадратот се сечат во точка S и P е средина на страната AB. Нека M е пресечна точка на AC и PD а N на BD и PC. Во четириаголникот $PMSN$ е впишана кружница. Докажи дека радиусот на таа кружница е еднаков на $\overline{MP}-\overline{MS}$.



Решение. Важи $OY\perp MS$, $\measuredangle YSO=\measuredangle ASP=45^\circ$ (SP е симетрала на $\measuredangle MSN$). Тогаш, $\triangle SYO\sim\triangle SPA$, па $\triangle SYO$ е правоаголен и рамнокрак и оттука следува дека $\overline{SY}=\overline{YO}=r$. Триаголниците OXP и PAD се слични бидејќи

$$\measuredangle OXP=\measuredangle DAB=90^\circ, \measuredangle OPX=\measuredangle PDA.$$

Од сличноста имаме

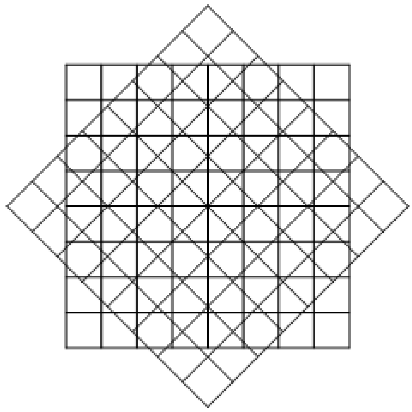
$$\overline{XP}:\overline{XO}=\overline{AD}:\overline{AP}=2\Rightarrow\overline{XP}=2r.$$

Бидејќи X и Y се допирни точки на тангентата на кружницата повлечени од точката M имаме $\overline{MY}=\overline{MX}$. Конечно,

$$\overline{MP}-\overline{MS}=(\overline{MX}+\overline{XP})-(\overline{MY}+\overline{YS})=\overline{XP}-\overline{YS}=2r-r=r.$$

4. Две еднакви шаховски табли (8×8 полиња) имаат заеднички центар и едната од нив потполно ја покрива другата (поставени се една над друга). Едната од нив се ротира околу центарот за 45° . Одреди ја плоштината на пресекот на сите црни полиња на едната табла со сите црни полиња на другата табла ако плоштината на едно поле е 1.

Решение. Нека означиме со S_{cc} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и црните полиња на долната табла (т.е. тоа што се бара да се пресмета во задачата), со S_{cb} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и белите полиња на долната табла, со S_{bc} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и црните полиња на долната табла и со S_{bb} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и белите полиња на долната табла.



Тогаш, $S=S_{cc}+S_{cb}+S_{bc}+S_{bb}$, каде што S е плоштина на правилниот осумаголник кој е пресек на двете табли кога ќе се изврши ротирањето на горната табла за 45° како на цртежот. Нека оваа положба на таблите е почетна.

Ако горната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па затоа $S_{cc}=S_{bc}$ и $S_{cb}=S_{bb}$

Ако долната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па имаме $S_{cc}=S_{cb}$ и $S_{bc}=S_{bb}$. Значи, $S_{cc}=S_{cb}=S_{bc}=S_{bb} \Rightarrow S_{cc}=\frac{1}{4}S$

Исто така важи дека плоштината на заедничкиот осумаголник се добива кога од плоштината на целата табла ќе се одземе плоштината на четирите правоаголни триаголници што се наоѓаат на краевите на таблата, т.е. $S=64-4P$. Останува уште да ја пресметаме плоштината P. Триаголникот е рамнокрак правоаголен и ако со a ја обележиме хипотенузата, а со h висината спуштена спрема хипотенузата, имаме дека $a=2h.$ Ако пак со d ја означиме дијагоналата на таблата, тогаш имаме $d=2h+8$, т.е. $h=\frac{d-8}{2}=\frac{8\sqrt{2}-8}{2}=4(\sqrt{2}-1)$. Тогаш за плоштината на триаголникот добиваме: $P=\frac{ah}{2}=h^2=16(\sqrt{2}-1)^2=16(3-2\sqrt{2})$ т.е.

$$S=64-4P=128(\sqrt{2}-10, \quad S_{cc}=32(\sqrt{2}-1).$$

II година

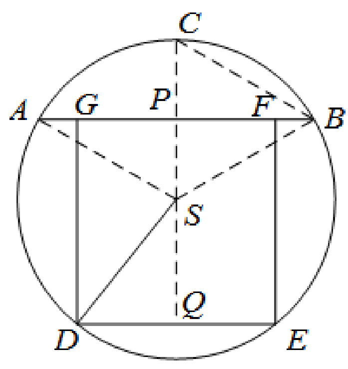
1. За коефициентите a, b, c на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ важи равенството $2b^2-9ac=0$, ако и само ако едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Докажи!

Решение. Нека x_1 и x_2 се двата корени на равенката $ax^2+bx+c=0$. Од условот $2b^2-9ac=0$, дискриминантата на равенката е $b^2-4ac=b^2-4\frac{2b^2}{9}=\frac{b^2}{9}$ и затоа корените на равенката се $x_{1/2}=\frac{-b\pm\frac{|b|}{3}}{2a}=\frac{-3b\pm|b|}{6a}$. Ако $b>0$ добиваме $x_1=\frac{-2b}{6a}=-\frac{b}{3a}$ и $x_2=\frac{-4b}{6a}=-2\frac{b}{3a}$. Тогаш, $x_2=2x_1$. Слично добиваме и ако $b<0$. Ако $b=0$ од равенството $2b^2-9ac=0$ добиваме дека $c=0$ (заради $a\neq 0$), па само $x=0$ е корен на равенката. Следува дека трдењето важи за $b=0$.

Обратно, нека едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Да претпоставиме дека $x_2=2x_1$. Тогаш $x_1+x_2=3x_1=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=2x_1^2=\frac{c}{a}$. Значи, $\frac{c}{2a}=x_1^2=(-\frac{b}{3a})^2=\frac{b^2}{9a^2}$ и оттука $2b^2-9ac=0$.

2. Тетивата AB ја дели една кружница со радиус r на два лаци во однос $1:2$. Во поголемиот дел впишан е квадрат чија една страна лежи на таа тетива. Изрази ја должината на страната на квадратот преку радиусот r.

Решение. Исто како што тетивата AB ја дели кружницата на два лаци во однос $1:2$ така и соодветните централни агли се однесуваат во однос $1:2$, т.е. едниот е 120°, а другиот е 240°. Нека со S го означиме центарот на кружницата. Нека C е точка од омалиот лак така што $SC\perp AB$, $SC\cap AB=\{P\}$ и $SC\cap DE=\{Q\}$. Тогаш имаме $\measuredangle ASB=120^\circ$, а $\measuredangle CSB=60^\circ$. Од тоа што триаголникот CSB е рамностран ($\overline{SB}=\overline{SC}=r$, а аголот меѓу нив е 60°) следува дека BP е висина во овој триаголник и ја дели страната SC на половина, т.е. $\overline{SP}=\frac{r}{2}$, а заради ова $\overline{SQ}=a-\frac{r}{2}$, каде што со a е означена страната на квадратот $DEFG$.



Од правоаголниот $\triangle SDQ$ со примена на Питагоровата теорема, имаме:

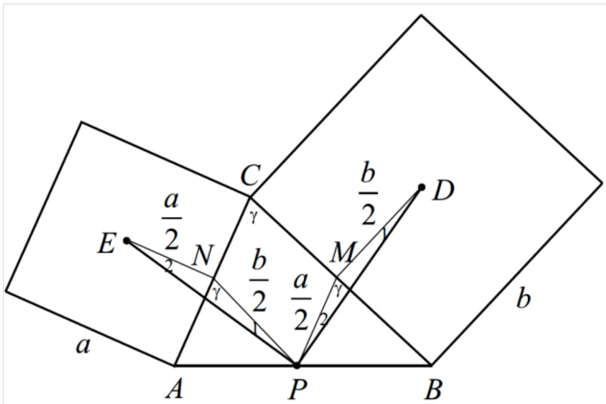
$$r^2=(\tfrac{a}{2})^2+(a-\tfrac{r}{2})^2 \quad \text{т.е.} \quad 5a^2-4ar-3r^2=0.$$

Бидејќи $a>0$ се добива $a=\frac{4r+\sqrt{16r^2+60r^2}}{10}$, т.е. $a=\frac{2+\sqrt{19}}{5}r$

3. Од надворешноста на страните AC и BC во триаголникот ABC, се конструирани квадрати (со страни AC и BC) и со центри D и E. Нека P е средина на страната AB. Докажи дека отсечките PD и PE се еднакви и заемно нормални.

Решение. Нека M и N се средини на страните BC и AC и аголот при темето C е γ. Тогаш $\triangle PEN \cong \triangle DPM$, бидејќи имаат по една страна со должина $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, а аглите меѓу тие страни се еднакви на $90^\circ+\gamma$ ($\overline{PN}=\frac{b}{2}$ како средна линија, $\overline{MD}=\frac{b}{2}$, $\overline{NE}=\frac{a}{2}$ и $\overline{PM}=\frac{a}{2}$ како средна линија,

$$\measuredangle PNE = 90^\circ + \measuredangle PNA = 90^\circ+\gamma \text{ и } \measuredangle PMD = 90^\circ + \measuredangle PMB = 90^\circ+\gamma).$$



Следува отсечките PD и PE се еднакви. Исто така $\measuredangle EPN = \measuredangle PDM$ и $\measuredangle PEN = \measuredangle DPM$.

Бидејќи четириаголникот $MPNC$ е паралелограм, следува дека $\measuredangle MPN = \gamma$, од каде

$$\measuredangle EPD = \measuredangle EPN + \gamma + \measuredangle MPD = \measuredangle EPN + \gamma + \measuredangle NEP = \gamma + (180^\circ - (90^\circ+\gamma)) = 90^\circ .$$

4. Реши ја равенката $\sqrt{5-x} = x^2-5$.

Решение. Дефиниционата област на равенката е множеството $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$. За $x\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$ дадената равенка е еквивалентна со равенката $5-x=(x^2-5)^2$. Ќе ја запишеме равенката како квадратна по бројот 5, т.е. $5^2-(1+2x^2)5+x^4+x=0$. Оттука ги добиваме равенките:

$$5=\frac{(1+2x^2)+(1-2x)}{2} \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \text{ и } 5=\frac{(1+2x^2)-(1-2x)}{2} \Leftrightarrow x^2+x-5=0 .$$

Со директна проверка забележуваме дека само $x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ припаѓаат на дефиниционата област.

III година

1. Докажи дека ако $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$ тогаш $|ac\text{-}bd|\le 1$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $a,b,c,d\in[-1,1]$ следува дека постојат реални броеви α,β такви што $a=\sin\alpha, b=\cos\alpha, c=\sin\beta, d=\cos\beta$.

Тогаш

$$ac-bd=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\cos(\alpha+\beta),$$

па следува дека $|ac-bd|=|-\cos(\alpha+\beta)|\le 1$.

Втор начин. Од $(|a|-|c|)^2\ge 0$ и $(|b|-|d|)^2\ge 0$ следува дека $|ac|\le\frac{a^2+c^2}{2}$ и $|bd|\le\frac{b^2+d^2}{2}$. Користејќи го неравенството на триаголник и горните неравенства добиваме

$$|ac-bd|\le|ac|+|d|\le\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+b^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

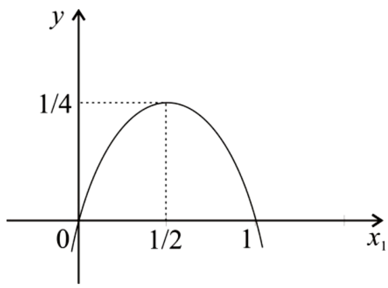
2. Докажи дека за секој реален број x важи неравенството

$$\cos(\sin x)>\sin(\cos x).$$

3. За $x_1,x_2>0,\ x_1+x_2=1$, докажи дека $(x_1+\frac{1}{x_1})^2+(x_2+\frac{1}{x_2})^2\ge\frac{25}{2}$.

Решение. *Прв начин.* Нека

$$y=x_1x_2=x_1(1-x_1).$$



За $x_1>0$, разгледувајќи го y како квадратна функција, заклучуваме дека функцијата е растечка на интервалот $[0,\frac{1}{2}]$ со максимум во $x_1=\frac{1}{2}$ и тогаш $y=\frac{1}{4}$. Јасно, како функција по x_1, $y\le\frac{1}{4}$. Ќе го средиме изразот

$$L=(x_1+\tfrac{1}{x_1})^2+(x_2+\tfrac{1}{x_2})^2-\tfrac{25}{2}.$$

Имено,

$$L=x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4-\frac{25}{2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}+4-\frac{25}{2}$$

$$=-(2y-\frac{1-2y}{y^2}+\frac{15}{2})=-\frac{4y^3+15y^2+4y-2}{2y^2}$$

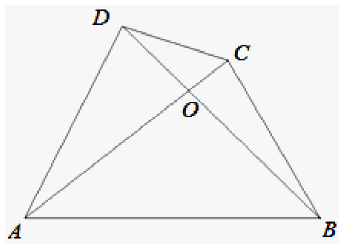
За $y\le\frac{1}{4}$ имаме $4y^3+15y^2+4y-2\le\frac{4}{4^3}+\frac{15}{4^2}+1-2=0$, па $L\ge 0$ што требаше и да се докаже.

Втор начин. Изразот на левата страна од неравенството е еднаков на $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4$. Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина за позитивните броеви x_1 и x_2 добиваме $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\geq\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$, односно $x_1^2+x_2^2\geq\frac{1}{2}$ Исто така важи и $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}$ Бидејќи $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geq 0$ следува дека $x_1x_2\leq(\frac{x_1+x_2}{2})^2=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{x_1x_2}\geq 4.$ Според тоа, $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}\geq\frac{1}{2}\cdot 16=8$. На крај имаме $x_1^2+x_2^2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+4\geq\frac{1}{2}+8+4=\frac{25}{2}$.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник во кој должините на сите страни и дијагонали се рационални броеви. Ако O е пресекот на дијагоналите, докажи дека $\overline{AO}$ е рационален број.

Решение. Ќе означиме $\beta_1=\measuredangle ABO$, $\beta_2=\measuredangle CBO$, $\beta=\measuredangle ABC$, $\delta_1=\measuredangle AOB$ и $\delta_2=\measuredangle BOC$. Да забележиме дека $\sin\delta_1=\sin\delta_2$. Од синусна теорема за триаголниците ABO и CBO, имаме $\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\delta_1}$ и $\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}=\frac{\sin\delta_1}{\sin\beta_2}$. Од овие равенства добиваме $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$. Од косинусна теорема за триаголниците ABC, ABD и DBC, бидејќи сите страни и дијагонали на четириаголниот се рационални броеви, следува дека $\cos\beta$, $\cos\beta_1$ и $\cos\beta_2$ се рационални броеви. Да забележиме дека

$$\cos\beta=\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2$$



од што следува дека и $\sin\beta_1\sin\beta_2$ е рационален број. Па сега

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{\sin^2\beta_2}=\frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{1-\cos^2\beta_2}$$

од што добиваме дека и $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}$ е рационален број. Но, тогаш и $\frac{\overline{OC}}{\overline{AO}}+1=\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}}$ е рационален број. Конечно, бидејќи $\overline{AC}$ е рационален број добиваме дека и $\overline{AO}$ е рационален број.

IV година

1. Докажи дека за сите реални броеви $x, y>1$ важи неравенството

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8.$$

Решение. *Прв начин.* Земаме смени $a=x-1$ и $b=y-1.$ Од условот на задачата следува дека a и b се позитивни реални броеви. Неравенството кое треба да го докажеме е еквивалентно со неравенството $\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq 8$. Од неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви a и 1 важи $a+1\geq 2\sqrt{a}$ т.е. $(a+1)^2\geq 4a.$

На ист начин добиваме дека важи $(b+1)^2\geq 4b.$ Сега имаме

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq \frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}=4(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8.$$

Втор начин. Од неравенство меѓу геометриска и хармониска средина за позитивните броеви x и $\frac{x}{y-1}$ добиваме $\sqrt{x\cdot\frac{x}{y-1}}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{y-1}{x}}=2\cdot\frac{x}{y}$, т.е. $\frac{x^2}{y-1}\geq 4\cdot\frac{x^2}{y^2}$. На ист начин се добива дека $\frac{y^2}{x-1}\geq 4\cdot\frac{y^2}{x^2}$. Со собирање на последните две неравенства имаме $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 4(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2})\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}}=8.$

2. Нека k е природен број. Докажи дека аритметичка прогресија чија разлика е природен број или не содржи ниту еден член кој е k-ти степен на природен број или содржи бесконечно многу.

Решение. Нека a е првиот член на аритметичката прогресија и d е нивната разлика $(d\in\mathbb{N})$. Ако a не е природен број тогаш тврдењето важи бидејќи прогресијата не содржи ниеден природен број. Нека a е природен број и нека b^k (за некој b природен број) е член на прогресијата. Јасно, постои природен број n така што $b^k=a+nd.$ Тогаш, сите броеви од облик $(b+md)^k, m\in\mathbb{N},$ исто така се членови на таа аритметичка прогресија, бидејќи важи

$$(b+md)^k=b^k+kb^{k-1}md+\binom{k}{2}b^{k-2}m^2d^2+...+m^kd^k,$$

па оттука следува дека $(b+md)^k=b^k+dt=a+nd+dt=a+d(n+t),$ каде t е некој природен број. Со тоа доказот е завршен.

3. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x^2+f(y))=y-x^2.$$

Решение. Ако ставиме $x=0$, добиваме $f(f(y))=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Па, затоа за $x,y\in\mathbb{R}$ имаме

$$f(y-x^2)=f(f(x^2+f(y))=x^2+f(y).$$

Ако замениме $y=x^2$ во последното равенство имаме:

$$f(x^2-x^2)=f(0)=x^2+f(x^2),$$

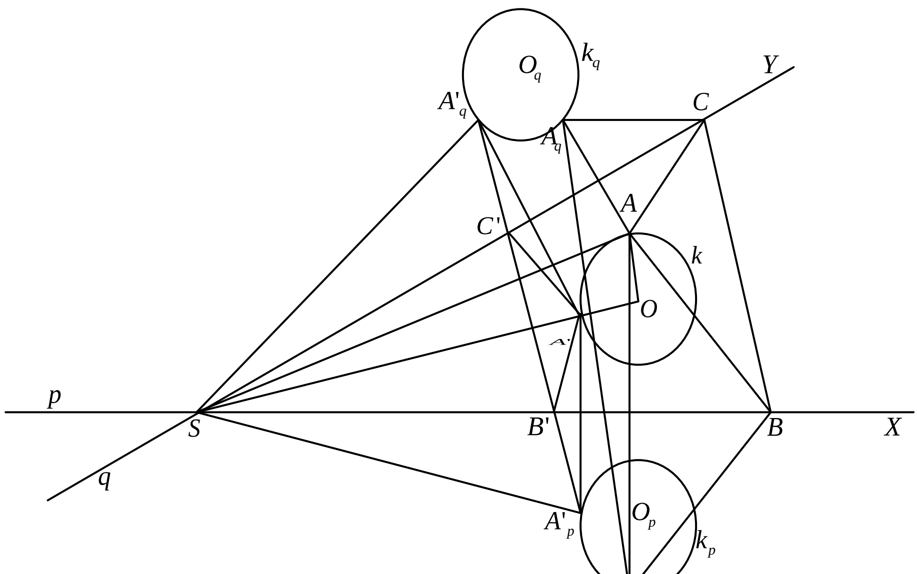
односно $f(x^2)=f(0)-x^2$. Ако замениме $y=0$ добиваме $f(-x^2)=x^2+f(0)$. Одовде можеме да заклучиме дека $f(x)=-x+C$, за секој реален број x, каде $C=f(0)$. Навистина, сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+C$, $C\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата:

$$f(x^2+f(y))=f(x^2-y+C)=-(x^2-y+C)+C=y-x^2.$$

4. Нека е даден $\measuredangle XSY=\alpha<90^\circ$ и $k(O,r)$ е кружница која целосно се наоѓа во α. Нека ABC е триаголник таков што A е на k, B е на правата $p\equiv SX$ и C е на правата $q\equiv SY$. Ако $s=\overline{SO}$, пресметај ја најмалата вредност која може да ја достигне периметарот на ваков ΔABC.

Решение. Нека A' е пресечната точка на SO со k, које е меѓу S и O, $k_p(O_p,r)$, $k_q(O_q,r)$ се кружници осносиметрични на k во однос на p и q соодветно, A'_p и A'_q се сликите на A', при осните симетрии и B' и C' се пресечни точки на $A'_pA'_q$ со p и q соодветно. Ќе докажеме дека $\triangle A'B'C'$ има најмал периметар од бараните. Нека $\triangle ABC$ е произволен ваков триаголник и нека A_p и A_q се сликите на A, при осните симетрии, тогаш

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{A_pB}+\overline{BC}+\overline{CA_q}\geq\overline{A_pA_q}.$$



Од друга страна

$$\measuredangle A_p S A_q = \measuredangle A_p S A + \measuredangle A S A_q = 2(\measuredangle XSA + \measuredangle ASY) = 2\measuredangle XSY = 2\alpha ,$$

па аголот $\measuredangle A_p S A_q$ не зависи од изборот на точките A, B и C. Исто така од осните симетрии следува дека $\overline{SA_p} = \overline{SA} = \overline{SA_q}$, па $\Delta A_p A_q S$ е рамнокрак. Од оценката:

$$\begin{aligned} L_{\Delta ABC} &\geq \overline{A_p A_q} = 2\overline{SA_p}\sin\alpha = 2\overline{SA}\sin\alpha = 2((\overline{SA} + \overline{AO}) - \overline{AO})\sin\alpha \\ &\geq 2(\overline{SO} - \overline{A'O})\sin\alpha = 2\overline{SA}'\sin\alpha = L_{\Delta A'B'C'} \end{aligned}$$

следува дека $\Delta A'B'C'$ достигнува најмал можен периметар и тој е еднаков на $L_{\Delta A'B'C'} = 2(\overline{SO} - \overline{A'O})\sin\alpha = 2(s - r)\sin\alpha$.

Забелешка: Од условот на задачата мора $s > r$.