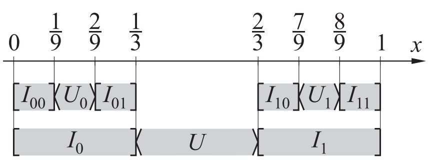
Cantorov trijadski skup[1]

Sibe Mardešić

U matematici se promatraju vrlo raznovrsni skupovi, npr. skup racionalnih brojeva, skup pozitivnih brojeva, skup rješenja neke jednadžbe, skup točaka u određenoj udaljenosti od neke zadane točke, skup vrhova nekog poligona, skup kružnica koje prolaze kroz dvije zadane točke itd. Elementi ili članovi ovih skupova jednom su brojevi, drugi put točke, kružnice, pravci itd. Od posebne su važnosti *skupovi točaka* na pravcu, u ravnini i u prostoru. Sam pravac, ravninu i prostor shvaćamo također kao posebne slučajeve skupova točaka.

U elementarnijim razmatranjima javljaju se obično dosta pravilni skupovi točaka, npr. konačni skupovi točaka, skup svih točaka na nekoj krivulji, skup svih točaka unutar neke kružnice ili unutar elipsoida itd. U općenitijim situacijama javljaju se i proučavaju mnogo složeniji skupovi. U ovom članku bismo posebno upozorili na jedan skup točaka s pravca, koji je uveo osnivač teorije skupova *Georg Cantor* (1845. – 1918.), a koji u mnogim razmatranjima igra važnu ulogu. Evo kako možemo opisati taj dosta složeni skup.



Uočimo na brojevnom pravcu X jedinični segment $I = [0, 1]$, tj. skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi nejednakost $0 \leq x \leq 1$. Razdijelimo I na tri jednaka dijela diobenim točkama $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$. Zadržat ćemo početnu i završnu trećinu i označiti ih s $I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $I_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$; preostalu srednju trećinu, bez krajnjih točaka, označimo s $U = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. *Uniju*[2] segmenata I_0 i I_1 označimo s $C_1 = I_0 \cup I_1$.

Sa svakom od dužina I_0 i I_1 postupimo na isti način, tj. rastavimo je u tri jednaka dijela i zadržimo krajnje dijelove. Tako od segmenta I_0 dobivamo dva nova segmenta $I_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right]$, $I_{01} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, a od I_1 dobivamo $I_{10} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $I_{11} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Unija svih segmenata tvori skup $C_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$. Izostavljene srednje intervale označujemo s $U_0 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $U_1 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Nastavljajući na isti način dobivamo od četiri segmenta I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11} osam novih segmenata: I_{000}, I_{001}, I_{010}, I_{011}, I_{100}, I_{101}, I_{110}, I_{111}. Nadalje dobivamo četiri intervala U_{00}, U_{01}, U_{10}, U_{11} i skup $C_3 = I_{000} \cup I_{001} \cup I_{010} \cup I_{011} \cup I_{100} \cup I_{101} \cup I_{110} \cup I_{111}$.

Produžujući opisani postupak u beskonačnost, dobivamo silazni niz skupova

$$I \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots^{3} \qquad (1)$$

---

[1] Prof. dr. Sibe Mardešić je objavio ovaj rad u Matematičko-fizičkom listu XIV (4), 1964. godine. Radi njegove važnosti, a i radi sjećanja na dragog profesora, donosimo ga ponovo. Radi toga što je od tada prošlo već više od pola stoljeća došlo je do malih promjena u nekim riječima.

[2] Unija $A \cup B$ skupova A i B je skup koji se sastoji od svih elemenata skupa A i svih elemenata skupa B.

[3] Simbol $A \supseteq B$ znači da je skup B dio skupa A; simbol $x \in X$ znači da je x element ili član skupa X.

Cantorov skup C je, po definiciji, skup svih točaka $x \in I$ koje su zajedničke svim skupovima u nizu (1), tj. Cantorov skup je *presjek*[4]

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \cap \ldots \tag{2}$$

Točke iz segmenta I, koje ne leže u C, tvore skup koji označujemo s $I - C$ i koji je upravo unija svih izostavljenih srednjih intervala

$$I - C = U \cup U_0 \cup U_1 \cup U_{00} \cup U_{01} \cup U_{10} \cup U_{11} \cup \ldots \tag{3}$$

Skup C sadrži beskonačno mnogo točaka, to su npr. svi krajevi srednjih intervala U, U_0, $U_1 \ldots$, dakle, točke $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}, \ldots$ Ima i drugih točaka u C. U stvari, svaku točku $x \in I$ možemo prikazati u obliku beskonačnog reda

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \ldots, \tag{4}$$

gdje brojevi α_1, $\alpha_2, \ldots$, $\alpha_n, \ldots$. poprimaju vrijednosti 0, 1, 2. Skupu C pripadaju one i samo one točke $x \in I$, koje je moguće prikazati u obliku (4) upotrebljavajući za koeficijente α_n samo brojeve 0 i 2. Svaka točka $x \in C$ je posve karakterizirana jednim nizom nula i dvojki. Npr. nizu 0, 2, 2, 0, 2, $0, \ldots$ odgovara točka

$$x_0 = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + \ldots, \tag{5}$$

koja se dobije iz (4) uzimajući za niz α_1, $\alpha_2, \ldots$ upravo niz 0, 2, 2, 0, 2, $0, \ldots$. Ako u razvoju (4), počevši od nekog mjesta, dolaze same nule ili same dvojke kao koeficijenti α_n, onda to znači da se radi o lijevom, odnosno desnom, kraju nekog srednjeg intervala $U_{ijk\ldots}$.

Poznato je da se pored dekadskog sustava, koji je baziran na broju 10, upotrebljavaju i drugi brojevni sustavi za pisanje brojeva. Napose je važan binarni ili dijadski sustav, baziran na broju 2 (upotrebljava se kod elektronskih računskih strojeva); u ovom sustavu se svi brojevi pišu samo uz pomoć dvije znamenke: 0 i 1. Cantorov trijadski skup C može se zgodno opisati u sustavu s bazom 3, tzv. *trijadskom sustavu*, gdje dolaze samo znamenke 0, 1 i 2. Tada se broj $x \in I$ koji ima prikaz (4) naprosto bilježi kao beskonačni "trijadski" razlomak $x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$; npr. točka x_0 iz (5) ima zapis $x_0 = 0.022020\ldots$.

Cantorov skup tvore, dakle, oni i samo oni brojevi x iz segmenta $I = [0, 1]$ koji se u trijadskom sustavu mogu napisati samo uz pomoć znamenaka 0 i 2, tj. bez upotrebe znamenke 1.

Cantorov trijadski skup C ima mnoga važna svojstva. C je *omeđen*, tj. ne proteže se u beskonačnost. C je *zatvoren*, pa ako neki niz brojeva $x \in C$ konvergira prema broju x, tada x nužno pripada skupu C. Nadalje, oko svake točke skupa C gomila se beskonačno točaka iz C, pa se govori da je skup C u sebi *gust*. Skup koji je istodobno zatvoren i u sebi gust naziva se *savršenim*. Cantorov skup je, dakle, savršen. Daljnje svojstvo skupa C da ne sadrži ni jedan interval s brojevnog pravca, te u skupu C nema povezanih komada osim samih točaka. Skup C je, dakle, *posve nepovezan* ili isprekidan (pokušaj se uvjeriti da C ima zaista sva navedena svojstva!).

Skup C je vrlo rijetko posut po segmentu $I = [0, 1]$. U stvari njegova ukupna duljina ili *mjera* $m(C)$ jednaka je nuli. Da se to utvrdi, dovoljno je znati da je mjera (duljina)

[4] Presjek $A \cap B$ skupova A i B je skup koji se sastoji od elemenata koji istodobno pripadaju i skupu A i skupu B.

$m(I) = 1$, dok je mjera ostatka $I - C$ također jednaka 1. Zaista

$$\begin{aligned} m(I - C) &= m(U) + m(U_0) + m(U_1) + m(U_{00}) + \ldots + m(U_{11}) + \ldots \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \ldots \\ &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right) + \ldots + 2^n \cdot \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) + \ldots = 1, \end{aligned}$$

jer se radi o beskonačnom geometrijskom redu s početnim članom $a_1 = \dfrac{1}{3}$ i kvocijentom $q = \dfrac{2}{3}$.

Jednakosti $m(C) = 0$, $m(I) = 1$ govore nam, da je vjerojatnost da neka nasumce izabrana točka iz I padne u C jednaka nuli, toliko je skup C rijedak. Zato je tim čudnije što u skupu C ima isto toliko točaka koliko i na čitavom segmentu I (o uspoređivanju beskonačnih skupova vidi članak "Veličina beskonačnosti", MFL XIV (1,2)).

Da bismo ovu tvrdnju dokazali, definirat ćemo jedno preslikavanje f Cantorovog skupa C na segment I, tj. definirat ćemo funkciju, koja svakoj točki $x \in C$ dodjeljuje jednu točku y segmenta I i to tako da se iscrpe sve točke iz I. Ako ovakva funkcija f postoji, onda jasno slijedi da je broj $k(C)$ točaka u skupu C veći ili barem jednak broju $k(I)$ točaka na I, jer svakoj točki $y \in I$ odgovara bar jedna točka x skupa C za koju je $f(x) = y$. Dobiva se, dakle, nejednakost

$$k(C) \geq k(I). \tag{6}$$

Obrnuta nejednakost

$$k(C) \leq k(I) \tag{7}$$

je očita, jer je C dio od I. Iz (6) i (7) zaključuje se da vrijedi

$$k(C) = k(I). \tag{8}$$

(Ispravnost ovog posljednjeg zaključka treba posebno dokazati; to je tzv. *Cantor-Bernsteinov teorem.*)

Funkciju f definiramo ovako. Točku $x \in C$ prikažemo u obliku (4). Svako α_n je pri tome 0 ili 2. Za $f(x)$ uzimamo broj

$$f(x) = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{2^n} + \ldots, \tag{9}$$

gdje je $\beta_n = 0$, ako je $\alpha_n = 0$, dok je $\beta_n = 1$, ako je $\alpha_n = 2$.

Nije teško utvrditi da je $f(x) \in I$ i da se svaka točka $y \in I$ može dobiti na ovaj način kao f-slika bar jedne točke $x \in C$. Uzmimo npr. točku

$$y = \frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} + \ldots \tag{10}$$

Za točku

$$x = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \ldots + \frac{2}{3^{2n}} + \ldots = \frac{1}{4} \tag{11}$$

imamo koeficijente

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = 0, \qquad \alpha_2 = \alpha_4 = \ldots = 2, \tag{12}$$

te je

$$\beta_1 = \beta_3 = \ldots = 0, \qquad \beta_2 = \beta_4 = \ldots = 1. \tag{13}$$

Stoga je

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}. \tag{14}$$

Pobliže razmatranje dokazuje da je preslikavanje f skupa C na segment I neprekidno, što znači da pri preslikavanju f dovoljno bliske točke skupa C prelaze u po volji bliske točke segmenta I. Zaključujemo, dakle, da je segment I moguće dobiti kao *neprekidnu sliku* Cantorovog skupa C. Što više, i kvadrat, pa i svaki omeđeni zatvoreni skup u ravnini ili prostoru moguće je dobiti kao neprekidnu sliku Cantorovog skupa C. Ovu činjenicu dokazao je 1926. godine ruski matematičar *P. S. Aleksandrov*.

Pozabavit ćemo se slučajem preslikavanja skupa C na kvadrat Q, koji možemo zamisliti kao kvadrat u ravnini XY određen pravcima $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$. Ovaj kvadrat rastavimo na četiri jednaka kvadrata Q_{00}, Q_{01}, Q_{10}, Q_{11} koji se dobiju iz Q, ako se Q raskomada pravcima $x=\frac{1}{2}$ i $y=\frac{1}{2}$. Nad svakim od ovih kvadrata izvršimo analognu diobu na četiti sitnija kvadrata. Tako ćemo npr. iz kvadrata Q_{00} dobiti nove kvadrate Q_{0000}, Q_{0001}, Q_{0010}, Q_{0011}. Postupak komadanja nastavimo bez kraja. Sada definiramo preslikavanje g Cantorovog skupa C na kvadrat na ovaj način. Svakoj točki $x \in C$ pripada prikaz oblika (4), gdje su svi koeficijenti α_n, brojevi 0 ili 2. Točki x pridružimo silazni niz kvadrata

$$Q \supseteq Q_{\beta_1\beta_2} \supseteq Q_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} \supseteq \dots \tag{15}$$

Lako se vidi da postoji jedna i samo jedna točka iz Q, koju sadrže svi kvadrati navedenog niza. Tu točku uzimamo za $g(x)$. Može se pokazati da se pri preslikavanju g dobivaju sve točke kvadrata Q i da je preslikavanje g neprekidno.

Kvadrat Q je, dakle, slika i to neprekidna slika Cantorovog skupa C, iako je skup C tako rijedak. Zaključujući kao kod izvoda jednakosti (8), možemo sada dobiti jednakost

$$k(C) = k(Q), \tag{16}$$

koja zajedno s (8) daje

$$k(I) = k(Q). \tag{17}$$

Dužina i kvadrat imaju, dakle, jednako mnogo točaka!

Opisano preslikavanje g Cantorovog skupa C na kvadrat Q možemo lako proširiti do neprekidnog preslikavanja h koje će prevoditi segment I na čitav kvadrat Q. Za točke $x \in C$ uzimamo $h(x) = g(x)$, pa treba samo definirati h na skupu $I - C$, tj. na izostavljenim srednjim intervalima $U_{ijk\dots}$. Uočimo neki interval $U_{ijk\dots}$. Krajeve ovog intervala već znamo preslikati, jer oni pripadaju skupu C. Pri preslikavanju h ovi krajevi prelaze u dvije točke A i B kvadrata Q. Tada je posve određena dužina $\overline{AB}$ i ona je sadržana u kvadratu Q. Po definiciji uzimamo da preslikavanje h prevodi $U_{ijk\dots}$ na dužinu $\overline{AB}$. Slično postupimo i s ostalim intervalima $U_{ijk\dots}$ iz $I - C$. Može se pokazati da je ovako dobiveno preslikavanje h zaista neprekidno.

Tako smo došli do poznatog rezultata talijanskog matematičara *G. Peana*, koji je 1890. godine začudio matematičare svojim otkrićem da je moguće neprekidno preslikati segment na kvadrat. Ako pomišljamo na I kao na vremenski interval, a na $h(x)$ kao na položaj u času x točke koja se neprekidno giba, onda navedeni rezultat dokazuje da postoji i takvo gibanje kod kojeg staza ispunjava čitavi kvadrat. Ranija definicija krivulje, da je to trag kojeg opiše točka koja se neprekidno giba, nije se više mogla održati nakon Peanovog otkrića, jer bi po toj definiciji i kvadrat bio krivulja. Pitanje *što je krivulja?* bilo je ponovno postavljeno. Jedan od odgovora dala je nova matematička disciplina – teorija dimenzije, koju su izgradili poslije 1922. godine nezavisno ruski matematičar *P. Urison* i austrijski matematičar *K. Menger*. Odgovor, koji daje teorija dimenzije glasi: krivulja je svaki skup dimenzije 1. Što je to dimenzija i kada ona iznosi 1, objašnjava se u navedenoj teoriji. Problemi u vezi s pojmom dimenzije, s pojmom krivulje i u vezi s preslikavanjima koja mogu povećati dimenziju, danas se živo istražuju u posebnom dijelu geometrije koji se zove topologija, a bavi se izučavanjem neprekidnosti.