Питагорејска мистика чистих бројева

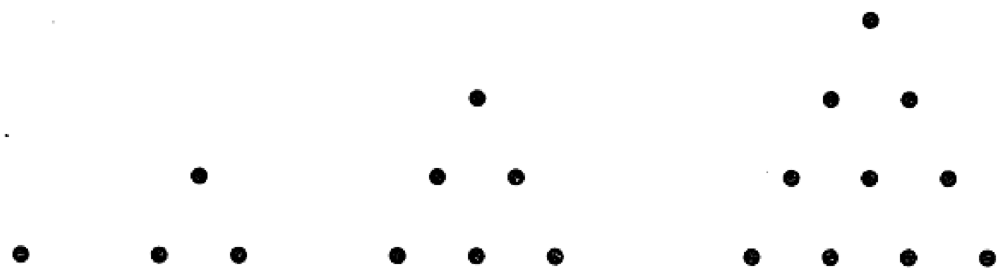
***мр Мирослава Михајлов,* Београд**

Познато је да су стари народи користили бројеве и имали симболе за њихово записивање. Најстарије примере писања бројева налазимо међу археолошким остацима Сумера, надареног народа који је живео на југу Месопотамије. На глиненим таблицама које потичу из 2 100. г. пре н. е. налазимо потпуно изграђен шездесетични позициони бројни систем. На пример, запис $\prec\prec\ \vee\vee\vee$ представља број $2 \cdot 60^1 + 3 \cdot 60^0 = 120 + 3 = 123$. Египћани су користили декадни непозициони бројни систем а бројеве су означавали хијероглифима.

О египатској математици тог раног периода сведоче нам Московски папирус из 1 850. г. пре н.е. и Рајндов папирус из (око) 1 650. г. пре н.е. у којима се појављују записи бројева помоћу назначених хијероглифа. Заједничка карактеристика египатске и месопотамске математике јесте њена практична примена - израчунавање количине жита у посуди, броја плоча потребних за поплочавање пода палате, броја камених блокова за зидање гробнице, за трговачке потребе итд. Дакле, стари народи су имали симболе за означавање бројева али су их користили само у практичне сврхе.

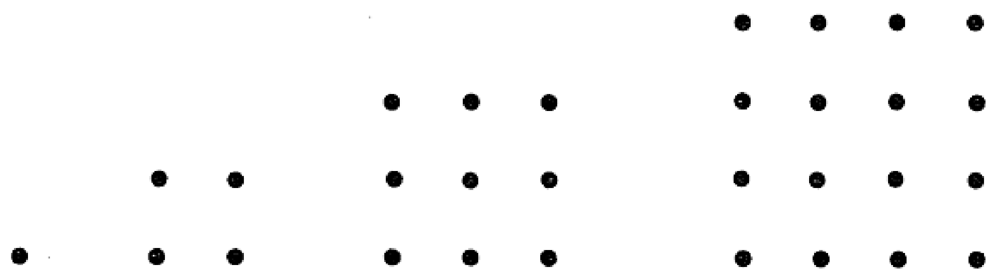
Питагора је први почео да разматра број као јединствен математички објекат. И пре њега, двадесет бикова и осамдесет бикова било је сто бикова, али Питагора је први издвојио чисте бројеве у $20 + 80 = 100$. Након тога било је могуће бавити се бројевима као јединственим објектима. Аристотел каже да су Питагора и Питагорејци започели превођење бројева у ликове троугла, квадрата, правоугаоника па су отуда они добили назив троугаони, квадратни и правоугаони бројеви.

Троугаони бројеви су:



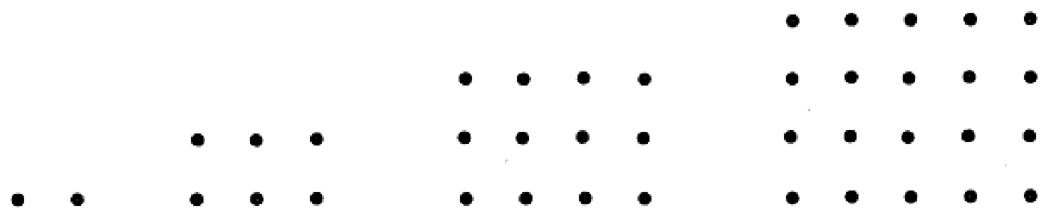
1 3 6 10 итд.

Квадратни бројеви су:



1 4 9 16 итд.

Правоугаони бројеви су:



1×2 $\quad$ 2×3 $\quad$ 3×4 $\quad$ 4×5 $\quad$ итд.

Касније су Питагорејци проширили овај скуп фигуративних бројева увођењем петоугаоних и шестоугаоних бројева као и просторних фигуративних бројева. Фигуративан начин записивања бројева омогућио је Питагорејцима да запазе како сваки број садржи особине које га у општем случају разликују од свих осталих. Сваки троугаони број представља једнакостранични троугао образован тачкама којих има тачно онолико колико износи тај број. Наредни троугаони број формира се додавањем новог низа тачака којих има за један више него у основи претходног троугла. Број тачака које се додају $n-$том троугаоном броју је $n+1$. Бројеви $2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$ које треба додавати да би се неограничено продужавао троугаони низ, у питагорејском учењу о фигуративним бројевима зову се *гномони*.

Троугаони бројеви	1	3	6	10	15	$\cdots$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\cdots$
Гномони	2	3	4	5	6	$\cdots$	n	$\cdots$
Разлике мађу гномонима	1	1	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$

Квадратни бројеви	1	4	9	16	25	$\cdots$	n^2	$\cdots$
Гномони	3	5	7	9	11	$\cdots$	$2n+1$	$\cdots$
Разлике мађу гномонима	2	2	2	2	2	$\cdots$	2	$\cdots$

Петоугаони бројеви	1	5	12	22	35	$\cdots$	$\frac{n(3n-1)}{2}$	$\cdots$
Гномони	4	7	10	13	11	$\cdots$	$3n-2$	$\cdots$
Разлике мађу гномонима	3	3	3	3	3	$\cdots$	3	$\cdots$

Шестоугаони бројеви	1	6	15	28	45	$\cdots$	$n(2n-1)$	$\cdots$
Гномони	5	9	13	17		$\cdots$	$4n-3$	$\cdots$
Разлике мађу гномонима	4	4	4	4	4	$\cdots$	4	$\cdots$

Овде је интересантно приметити да важе и следеће законитости.

1) Троугаони бројеви представљају збирове узастопних природних бројева

$$
\begin{aligned}
1 &= 1,\\
3 &= 1+2,\\
6 &= 1+2+3,\\
10 &= 1+2+3+4,\\
15 &= 1+2+3+4+5,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

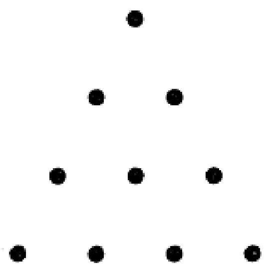
2) Квадратни бројеви представљају збирове узастопних непарних бројева:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1,\\
4 &= 1+3,\\
9 &= 1+3+5,\\
16 &= 1+3+5+7,\\
25 &= 1+3+5+7+9,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

3) Збир два узастопна троугаона броја је квадратни број:

$$
\begin{aligned}
1+3 &= 4,\\
3+6 &= 9,\\
6+10 &= 16,\\
10+15 &= 25,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Фигуративан начин приказивања бројева започео је увођењем *тетрактиса* у свет бројева. По предању откриће тетрактиса се приписује Питагори. То је лик облика:



Тврди се да су се Питагорејци заклињали у тетрактис. Јамблих је забележио „формулу“ заклетве:„Заклињем се оним који је нашој души открио Тетрактис, у коме су извор и корен вечне природе“[3].

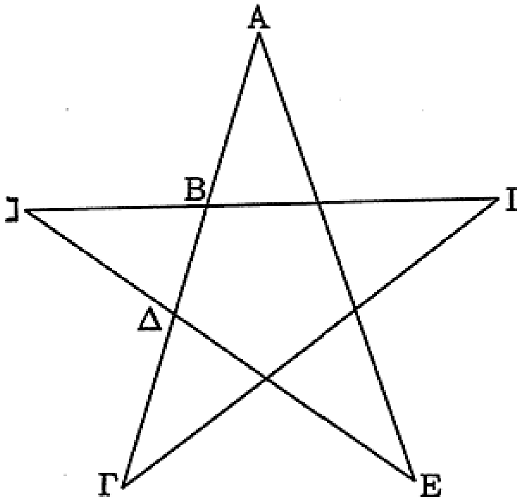
Ако мало проанализирамо овај лик видећемо да он има врло интересантне особине:

1) $1+2+3+4=10$;
2) декада садржи једнак број простих и сложених бројева (прости бројеви су 1, 2, 3, 5 и 7, а сложени 4, 6, 8, 9 и 10);
3) продужени тетрактис у модерној нотацији представљао би низ природних бројева: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$.

Због тога не чуди што је овај симбол био „свети симбол“ за Питагорејце. Осим заклетве коју су му посветили, забележена је и молитва тетрактису коју су Питагорејци често изговарали:„Благослови нас божански броју, ти који си створио богове и људе! О свети, свети Тетрактисе, ти који садржиш корен и извор вечног тока стварања! Јер божански број почиње чистим и дубоким јединством и досеже свето Четири, потом ствара мајку свега, која све повезује, свето Десет, које држи кључ свих ствари“[3]. Фигуративан начин записивања бројева омогућио је Питагорејцима да запазе како сваки број садржи особине које га у општем случају разликују од свих осталих.

1) Јединица или Монада је адитивни елемент чијим се додавањем производи читав низ природних бројева.
2) Број Два или Дијада је први паран и први женски број. Поседује својство дељивости деобом.

3) Број Три или Тријада је први непаран или први мушки број. Он показује свој значај кроз своју градитељску улогу у теорији фигуративних бројева.
4) Број Четири или Тетрада учествује са једне стране у карактеру Дијаде чији је она квадрат будући да је ултра-парна и ултра-дељива а са друге стране у карактеру Тетрактиса четвртог троугаоног броја.
5) Број Пет или Пентада значила је Питагорејцима скоро колико и Декада чија је половина и сажети одраз. Образована помоћу првог женског и првог мушког броја ($2 + 3 = 5$) она је за Грке представљала број Љубави, број Афродите. Пентада је такође број хармоније у здрављу и лепоте оличене у људском телу. Геометријски амблем Пентаде је Пентаграм, правилна петокрака звезда која је била геометријски симбол питагорејског братства. У музеју у Базелу чува се плоча од алабастера из александријске епохе која садржи знак Пентаграма са словима], Г, Е, I, А.



Дужи које настају пресецањем линија у Пентаграму су у златном пресеку. На пример,

$$A\Gamma : \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{B}\Gamma : \Delta\Gamma = 1,618... = F.$$

То важи и за остале дужи у Пентаграму што овај симбол чини врхунским симболом лепоте и савршенства.
6) Број Шест или Хексада изражава стабилност и равнотежу. Он је један од савршених бројева јер је једнак збиру својих делитеља $6 = 1 + 2 + 3$. (А такође је и $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.)
7) Бројеви Седам, Осам и Девет нису били посебно значајни за Питагорејце. Нагласимо да се круг не може поделити на седам једнаких делова еуклидском конструкцијом док је за све бројеве пре њега то могуће. Може се зато рећи да је Седам прапрви број и његова чистоћа је неоспорна.
8) Број Десет или Декада за Питагорејце је била *Светски број*. Она је за њих имала троструки квалитет:

- Она је двострука Пентада. У геометрији она понавља петоугаону симетрију и одражава златни пресек.
- Представља скуп тачака садржаних у Тетрактису.
- Као и Пентада она је симбол Космоса.

Никомах из Герасе у свом делу Theologumena aritmeticae каже: „Првобитни хаос, лишен реда и облика и свега што разврстава према категоријама квалитета, квантитета итд. организован је и уређен на основу Броја". Даље тврди: „Управо је у Декади постојала природна равнотежа између скупа и његових елемената. Зато се Бог који уређује вештином, руковођен својим умом, послужио Декадом као законом за све ... и зато су целине и делови свих ствари Неба и Земље односи склада"[3]. Присетимо се да је однос склада у десетоуглу, геометријској слици Декаде, управо пропорција златног пресека која доминира и у пентаграму, тајном симболу Питагорејства. Због тога се број F назива и *божанском пропорцијом*.

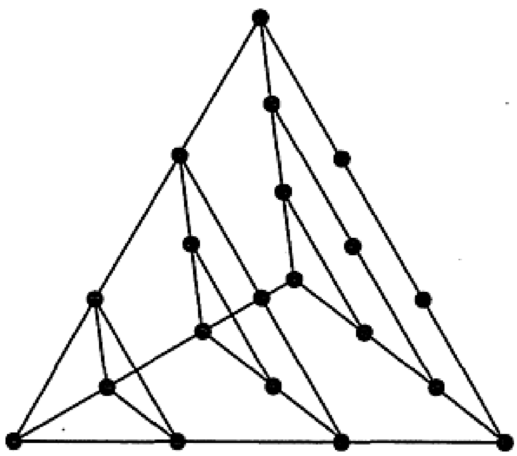
Фигуративни бројеви веома добро илуструју везу између бројева и облика. У равни, полигонални бројеви одговарају бројевима тачака распоређених тако да представљају хомотетично растуће форме, тј. сличне фигуре правилних полигона. У простору са три димензије имамо просторне фигуративне бројеве (или полиедарске бројеве) које су Питагорејци такође проучавали. Декарт се такође бавио овом проблематиком и своја достигнућа изложио је у свом делу Progumnasmata de Solidum Elementis. Он је формулисао закон образовања гномона за правилне полиедре. Знамо да правилних полиедара има само пет без обзира што правилних многоуглова има бесконачно много, и то су:

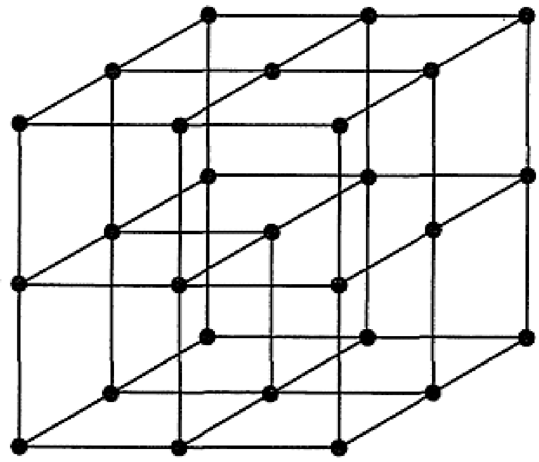
Назив	Број темена (t)	Број ивица (i)	Број страна (s)
Татраедар	4	6	4 једнакостранична троугла
Хексаедар	8	12	6 квадрата
Октаедар	6	12	8 једнакостраничних троуглова
Додекаедар	20	30	12 правилних петоуглова
Икосаедар	12	30	20 једнакостраничних троуглова

Број темена, ивица и страна повезује Ојлерова формула: $t + s = i + 2$.

Тетраедарски бројеви су: $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots, \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}, \ldots.$

Гномони су: $3, 6, 10, 15, 21, \ldots$, а то су управо троугаони бројеви.





Хексаедарски бројеви су: $1, 8, 27, 64, 125, \ldots, n^3, \ldots.$

Гномони су: $7, 19, 37, 61, \ldots, 3n^2 - 3n + 1, \ldots.$

Октаедарски бројеви су: $1, 6, 19, 44, 85, \ldots, \dfrac{n(2n^2+1)}{3}, \ldots.$

Гномони су: $5, 13, 25, 41, \ldots, 2n^2 - 2n + 1, \ldots.$

Додекаедарски бројеви су: $1, 20, 84, 220, 455, \ldots, \dfrac{n(9n^2-9n+2)}{2}, \ldots.$

Гномони су: $19, 64, 136, 225, \ldots, \dfrac{27n^2 - 45n + 20}{2}, \ldots.$

Икосаедарски бројеви су: $1, 12, 48, 124, 255, \ldots, \dfrac{n(5n^2 - 5n + 2)}{2}, \ldots.$

Гномони су: $11, 36, 76, 131, \ldots, \dfrac{15n^2 - 25n + 12}{2}, \ldots.$

За пет низова правилних полиедарских бројева, Декарт је сачинио логичке законе образовања.

Тетраедарски:

$$\begin{array}{r|l} 1 - 0 + 0 & +0 = 1 \\ 3 - 0 + 0 & +1 = 4 \\ 6 - 0 + 0 & +4 = 10 \\ 10 - 0 + 0 & +10 = 20 \\ 15 - 0 + 0 & +20 = 35 \end{array}$$

Хексаедарски:

$$\begin{array}{r|l} 1^2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 + 1 & +0 = 1 \\ 2^2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 1 & +1 = 8 \\ 3^2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 1 & +8 = 27 \\ 4^2 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 1 & +27 = 64 \end{array}$$

Октаедарски:

$$\begin{array}{r|l} 1 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2^2 + 1 & +0 = 1 \\ 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^2 + 1 & +1 = 6 \\ 6 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 + 1 & +6 = 19 \\ 10 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^2 + 1 & +19 = 44 \end{array}$$

Додекаедарски:

$$\begin{array}{r|l} 1 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2 + 10 & +0 = 1 \\ 5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^2 + 10 & +1 = 20 \\ 12 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3^2 + 10 & +20 = 84 \\ 22 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3^2 + 10 & +84 = 220 \end{array}$$

Икосаедарски:

$$\begin{array}{r|l} 15 \cdot 1 - 1 \cdot 20 + 6 & +0 = 1 \\ 15 \cdot 3 - 2 \cdot 20 + 6 & +1 = 12 \\ 15 \cdot 6 - 3 \cdot 20 + 6 & +12 = 48 \\ 15 \cdot 10 - 4 \cdot 20 + 6 & +48 = 124 \end{array}$$

Ове таблице нам јасно казују колико је прецизности и студиозности било потребно да би се извршиле анализе тих низова полиедарских бројева.

Примећује се да се у формирању тетраедарских, октаедарских и икосаедарских бројева јавља вертикално низ троугаоних бројева (1, 3, 6, 10, 15, ...) док се у формирању додекаедарских појављује низ петоугаоних бројева (1, 5, 12, 35, ...) а у формирању хексаедарских бројева појављује се низ квадрата природних бројева. Даље, низ природних бројева се појављује у формирању хексаедарских, октаедарских и икосаедарских бројева док се код додекаедарских појављује низ парних бројева. Приметимо још да су гномони тетраедарског низа управо чланови троугаоног низа: $1, 3, 6, 10, \ldots, \dfrac{n(n+1)}{2}, \ldots.$ За додекаедарске бројеве $1, 20, 84, 220, 455 \ldots \dfrac{n(9n^2-9n+2)}{2}, \ldots$, примећује се да се могу извести из петоугаоних бројева $1, 5, 12, 22, 35, \ldots, \dfrac{n(3n-1)}{2}, \ldots$, када се они помноже својим гномонима $1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 3n-2, \ldots$.

Може се још приметити да је низ разлика Δ_i

- за петоугаоне бројеве: $1, 5, 12, 22, 35, 51, \ldots$
  Δ_1: $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$
  Δ_2: $3, 3, 3, 3, \ldots$
  Δ_3: $0, 0, 0, \ldots$

- за додекаедарске бројеве: $1, 20, 84, 220, 455, 816, \ldots$
  Δ_1: $19, 64, 136, 235, 361, \ldots$
  Δ_2: $45, 72, 99, 126, \ldots$
  Δ_3: $27, 27, 27, \ldots$
  Δ_4: $0, 0, \ldots$

- за икасаедарске бројеве: $1, 12, 48, 124, 255, 456 \ldots$
  Δ_1: $11, 36, 76, 131, 201, \ldots$
  Δ_2: $25, 40, 55, 70, \ldots$
  Δ_3: $15, 15, 15, \ldots$
  Δ_4: $0, 0, \ldots$

Осим фигуративног начина записивања бројева, Питагорејци су увели класе бројева: парни, непарни, парно - парни, парно - непарни, непарно - парни, непарно - непарни, прости, сложени, савршени, пријатељски. (Дефиниције ових класа бројева наводи и Еуклид у VII књизи својих Елемената.) Интересантно је још напоменути да су Питагорејци (пре Архита из Тарента) јединицу издвајали из скупа бројева. За њих, јединица није била број. „Један јесте то што јесте ", говорили су Питагорејци, а „умноженост припада подручју бројева." И Еуклид наводи следеће дефиниције (у VII књизи Елемената):
1. Јединица је оно помоћу чега се сваки предмет који постоји назива једно.
2. Број је множина састављена од јединица.

Претходне дефиниције јасно показују да Грци нису јединицу третирали као број. Архит (чувени математичар - Питагорејац из Тарента) је први почео да јединицу сврстава међу бројеве. „Јединица је број", говорио је Архит, „први свакако али ипак модалитет количине као и остали бројеви". Ово схватање Питагорејаца произилази из њихове филозофије броја, тј. тврђења да светом владају односи бројева и да се све законитости у природи могу свести на односе бројева. За њих је на пример тачка била јединица положаја, тако да се кретање састојало од низа јединица положаја. Основна питагорејска догма била је **„Све је број"**. Питагора нам овом крилатицом саопштава да светом владају законитости независно од нас посматрача, а да је задатак посматрача да уочи те законитости и да их изрази помоћу бројева. Питагорејци су се у почетку бавили искључиво природним бројевима, да би касније, разматрајући односе два природна броја, почели да разматрају самерљиве величине (тј. рационалне бројеве) што их је довело до открића да страница и дијагонала квадрата нису самерљиве (тј. до открића ирационалних бројева). У разматрању односа међу бројевима, Питагорејци су створили пропорцију као једнакост односа. (Како је ово врло интересантна и доста опширна тема, биће посебно обрађена у наредном броју Тангенте.)

На основу свега изложеног може се закључити да су Питагора и Питагорејци поставили темеље теорији бројева још у 6. веку пре н. е.

ЗАДАЦИ

1. Доказати да се у пентаграму странице секу у односу златног пресека, тј. да је

$$A\Gamma : \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{B}\Gamma : \Delta\Gamma = F.$$

2. Израчунати однос полупречника описаног круга око правилног десетоугла (R) и његове странице (a).

3. Извести формулу за $t-$угаоне бројеве и њихове гномоне ($t = 3, 4, 5, \ldots$).

4. Ако би се центри страна 5 правилних полиедара узели за темена нових тела, која тела би настала?

ЛИТЕРАТУРА

[1] МИЛАН БОЖИЋ, *Преглед историје и филозофије математике*, Завод за удбенике и наставна средства, Београд, 2002.

[2] ЛАНСЕЛОТ ХОГБЕН, *Све о математици*, Младост , Загреб 1970.

[3] МАТИЛА ГИКА, *Филозофија и мистика броја*, Књижевна заједница Новог Сада, Нови Сад, 1987.

[4] *Еуклидови Елементи*, Научна књига, Београд 1949.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година