

**XXXV олимпијада**

1. Нека  $m, n \in \mathbb{N}$ , а  $a_1, a_2, \dots, a_m$  се меѓусебно различни елементи од множеството  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ако  $a_i + a_j \leq n$  за некои  $i, j, 1 \leq i < j \leq m$ , тогаш постои  $k, 1 \leq k \leq m$ , таков што  $a_i + a_j = a_k$ . Докажи дека

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

**Решение.** Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за броевите  $a_1, a_2, \dots, a_n$  важи  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ . Ќе докажеме дека за секој  $i = 1, 2, \dots, m$  важи  $a_i + a_{m-i+1} \geq n+1$ .

Нека претпоставиме дека постои  $i$  таков што  $a_i + a_{m-i+1} \leq n$ . Тогаш,

$$a_{m-i+1} < a_{m-i+1} + a_1 < a_{m-i+1} + a_2 < \dots < a_{m-i+1} + a_i \leq n.$$

Според тоа, добивме  $i+1$  различни броеви кои припаѓаат на множеството  $\{a_{m-i+1}, a_{m-i+2}, a_{m-i+3}, \dots, a_m\}$  кое има  $i$  елементи, што е противречност. Значи, за секој  $i = 1, 2, \dots, m$  важи  $a_i + a_{m-i+1} \geq n+1$ .

Од претходно изнесеното следува дека

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) &= (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \dots + (a_{m-1} + a_2) + (a_m + a_1) \\ &\geq m(n+1), \end{aligned}$$

т.е.  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$ , што и требаше да се докаже.

2. Даден е  $\triangle ABC$ , со  $\overline{AB} = \overline{AC}$ . Нека
- $M$  е средина на страната  $BC$ , а  $O$  е точка на правата  $AM$  таква што  $OB$  е нормална на  $AB$ ,
  - $Q$  е произволна точка на страната  $BC$  различна од  $B$  и  $C$ .
  - $E$  се наоѓа на правата  $AB$  и  $F$  припаѓа на правата  $AC$  и притоа точките  $E, Q$  и  $F$  се различни и колинеарни.

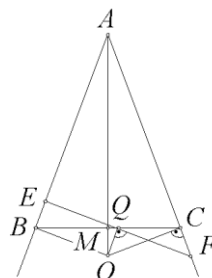
Докажи дека  $OQ$  е нормална на  $EF$  ако и само ако  $\overline{QE} = \overline{QF}$ .

**Решение.** Нека  $OQ \perp EF$  (цртеж десно). Без ограничување на општоста можеме да земеме дека  $Q \in MC$ .

Од

$$\angle OBE + \angle OQE = 180^\circ$$

следува дека четириаголникот  $OQEB$  е тетивен. Оттука следува дека  $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OAB$ . Од друга страна  $\angle FCO = \angle FQO = 90^\circ$ , што значи дека четириаголникот  $OFCQ$  е тетивен. Затоа



$$\angle QOF = 180^\circ - \angle FCQ = \angle BCA,$$

од што следува дека

$$\angle OFQ = 90^\circ - \angle QOF = \angle CAM = \angle QEO.$$

Според тоа,  $\triangle EOF$  е рамнокрак со висина  $OQ$ , од што следува  $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ .

Нека претпоставиме дека  $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ . Применуваме централна симетрија на  $B$  и  $E$  во однос на точката  $Q$ .

Нека  $B'$  е сликата на  $B$  при оваа централна симетрија.

Од  $\overline{EQ} = \overline{FQ}$  следува дека  $F$  е сликата на  $E$ . Од

$B'F \parallel BE$  следува дека триаголниците  $ABC$  и  $FB'C$

се слични, па затоа  $\overline{CF} = \overline{B'F} = \overline{BE}$ . Од

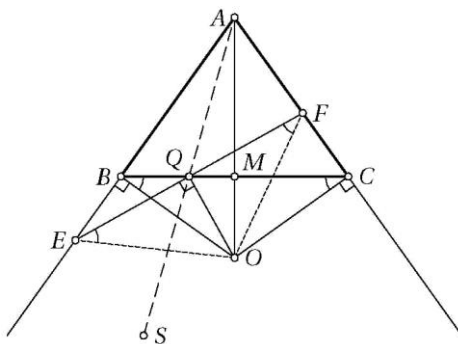
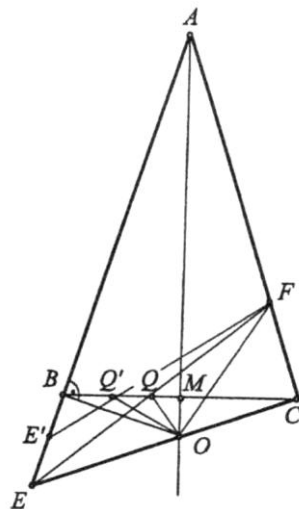
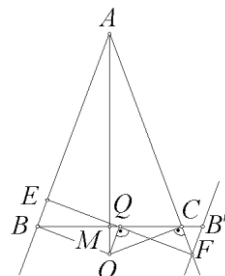
$$\angle EBO = 90^\circ = \angle FCO, \overline{OB} = \overline{OC} \text{ и } \overline{BE} = \overline{CF}$$

следува дека  $\triangle OEB \cong \triangle OFC$  па затоа  $\overline{OE} = \overline{OF}$ . Според тоа,  $\triangle OFE$  е рамнокрак со основа  $EF$  и тежишна линија  $OQ$ , па затоа  $OQ \perp EF$ .

*Забелешка.* Импликацијата: Од  $\overline{QE} = \overline{QF}$  следува  $OQ \perp EF$ , може да се докаже и на следниов начин.

*Втор начин.* Нека  $\overline{QE} = \overline{QF}$ . На отсечката  $BC$  земаме точка  $Q'$  таква што  $\angle OQ'F = 90^\circ$ , цртеж десно. Нека  $FQ' \cap AB \equiv E'$ . Бидејќи  $OQ' \perp FE'$ , од претходно докажаното следува  $\overline{Q'E'} = \overline{Q'F}$ . Од друга страна, по претпоставка  $\overline{QE} = \overline{QF}$ . Оттука следува дека мора да е  $Q' \equiv Q$ , бидејќи во спротивно добиваме  $QQ' \parallel AB$ , што е противречност. Освен тоа и  $E' \equiv E$ , па затоа  $OQ \perp FE$ .

*Трет начин.* Нека  $\overline{QE} = \overline{QF}$  и нека точката  $S$  е симетрична на точката  $A$  во однос на точката  $Q$ . Тогаш четириаголникот  $AESF$  е паралелограм. Од друга страна, ако нормалата на точката  $Q$  на правата  $OQ$  ги сече правите  $AB$  и  $AC$  соодветно во точкките  $E'$  и  $F'$ , тогаш од претходно дока-



жаното следува дека  $\overline{Q'E'} = \overline{Q'F'}$ , па затоа  $AE'SF'$  е паралелограм, од каде што следува  $E' \equiv E$ ,  $F' \equiv F$  и  $OQ \perp FE$ .

3. За секој  $k \in \mathbb{N}$  со  $f(k)$  да го означиме бројот на елементите од множеството  $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$  кои запишани во броен систем со основа 2 имаат точно три единици.

а) Докажи дека за секој  $m \in \mathbb{N}$ , постои барем еден  $k \in \mathbb{N}$  таков што  $f(k) = m$ .

б) Најди ги сите природни броеви  $m$  за кои постои точно еден број  $k$  таков што  $f(k) = m$ .

**Решение.** *Прв начин.* Нека  $M$  е множеството од сите природни броеви во чиј бинарен запис има точно три единици. Природен број  $n$  во својот бинарен запис има точно три единици ако  $n = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma$ , каде  $\alpha, \beta, \gamma$  се различни ненегативни цели броеви. Според тоа,

$$M = \{n \mid n = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma, \alpha > \beta > \gamma \geq 0\}.$$

Ако  $n \in M$ , тогаш

$$2n = 2(2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma) = 2^{\alpha+1} + 2^{\beta+1} + 2^{\gamma+1},$$

па затоа  $2n \in M$ . Ако  $2n \in M$ , тогаш

$$2n = 2^{\alpha+1} + 2^{\beta+1} + 2^{\gamma+1}$$

и притоа  $\alpha > \beta > \gamma \geq 0$ , од што следува дека

$$n = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma,$$

каде  $\alpha, \beta, \gamma$  се различни ненегативни цели броеви. Според тоа,

$$n \in M \text{ ако и само ако } 2n \in M. \tag{1}$$

Нека  $B_k = \{1, 2, \dots, k\} \cap M$  и  $A_k = \{k+1, k+2, \dots, 2k\} \cap M$ . Тогаш,  $f(k) = |A_k|$ .

Ако ставиме  $g(k) = |B_k|$ , тогаш  $f(k) = g(2k) - g(k)$ , бидејќи  $A_k = B_{2k} \setminus B_k$ .

Ако  $k = 2^t$ , тогаш  $B_k = \{n \mid n = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma, t > \alpha > \beta > \gamma \geq 0\}$ , па затоа  $g(k)$  е еднаков на бројот на сите тројки  $(\alpha, \beta, \gamma)$  за кои важи  $t > \alpha > \beta > \gamma \geq 0$ , а такви тројки вкупно се  $\binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{6}$ . Според тоа,

$$f(2^t) = g(2 \cdot 2^t) - g(2^t) = \binom{t+1}{3} - \binom{t}{3} = \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}.$$

Да ги разгледаме множествата  $A_k$  и  $A_{k+1}$ , т.е. множествата

$$\{k+1, k+2, \dots, 2k\} \cap M \text{ и } \{k+2, \dots, 2k, 2k+1, 2k+2\} \cap M.$$

Бидејќи тие се разликуваат само во тоа дали  $k+1, 2k+1, 2k+2 \in M$ , од  $2k+2 = 2(k+1)$  и од (1) следува дека дека:

$$\text{ако } 2k+1 \in M, \text{ тогаш } A_{k+1} = A_k \cup \{2k+1\}, \text{ и} \tag{2}$$

$$\text{ако } 2k+1 \notin M, \text{ тогаш } A_{k+1} = A_k, \quad (3)$$

па затоа

$$\text{ако } 2k+1 \in M, \text{ тогаш } f(k+1) = f(k)+1, \text{ и} \quad (4)$$

$$\text{ако } 2k+1 \notin M, \text{ тогаш } f(k+1) = f(k). \quad (5)$$

Од  $f(2^t) = \binom{t}{2}$  следува дека за секој  $m$  постои  $t$ , таков што  $f(2^t) > m$ . Сега од  $f(1) = f(2) = f(3) = 0$  и  $f(4) = 1$  следува дека за секој  $m$  постои  $k$ , таков што  $f(k) = m$ , со што е докажано тврдењето под а).

Понатаму, нека за природниот број  $m$  постои точно еден природен број  $k$  таков што  $f(k) = m$ . Од (4) и (5) следува  $f(k-1) = m-1$  и  $f(k+1) = m+1$ . Понатаму, од (2) и (3) следува  $2(k-1)+1 \in M$  и  $2k+1 \in M$ .

Од  $2k+1 \in M$  следува  $2k = 2^\alpha + 2^\beta$ , за  $\alpha > \beta \geq 1$ . Од  $2k-1 \in M$  следува  $\beta \neq 1$ . Ако  $\beta > 2$ , тогаш  $2k-1 = 2^\alpha + 2^{\beta-1} + 2^{\beta-2} + \dots + 2+1 \notin M$ , па затоа  $\alpha > \beta = 2$ . Според тоа  $2k = 2^\alpha + 2^2$ , т.е.  $k = 2^{\alpha-1} + 2$ , за  $\alpha-1 \geq 2$ .

Значи  $f(k) = m$  има единствено решение ако и само ако  $k = 2^{\alpha-1} + 2$ , за  $\alpha-1 \geq 2$  и тогаш

$$\begin{aligned} m = f(k) &= g(2k) - g(k) = g(2^\alpha + 4) - g(2^{\alpha-1} + 2) \\ &= 1 + g(2^\alpha) - g(2^{\alpha-1}) = 1 + \binom{\alpha}{3} - \binom{\alpha-1}{3} = 1 + \binom{\alpha-1}{2} \end{aligned}$$

Последното равенство е исполнето бидејќи

$$B_{2^t+2} = B_{2^t+1} = B_{2^t}, \text{ т.е. } g(2^t+2) = g(2^t)$$

и

$$\begin{aligned} B_{2^t+4} &= B_{2^t+2^2} = B_{2^t+2^1+2^0} = B_{2^t+2} \cup \{2^t+2+1\} \text{ т.е.} \\ g(2^t+4) &= g(2^t+2)+1 = g(2^t)+1. \end{aligned}$$

Конечно, решението под б) е  $m = f(k) = 1 + \binom{t}{2}$ ,  $t \geq 2$ .

*Втор начин.* а) Со  $b_n$  да го означиме бројот на единиците во бинарниот запис на природниот број  $n$ . Бидејќи  $b_{2k+2} = b_{k+1}$  и  $b_{2k+1} = b_k + 1$ , важи

$$f(k+1) = \begin{cases} f(k)+1, & \text{ако } b_k = 2, \\ f(k), & \text{во спротивно.} \end{cases} \quad (1)$$

Исто така,  $f(1) = 0$ . Бидејќи  $b_k = 2$  важи за бесконечно многу вредности  $k$ , функцијата  $f$  е неограничена, па затоа нејзината слика е целото множество  $\mathbb{N}_0$ .

б) Бидејќи функцијата  $f$  е растечка,  $k$  е единствено решение на равенката  $f(k) = m$  ако и само ако  $f(k-1) < f(k) < f(k+1)$ . Според (1), последното е

еквивалентно со  $b_{k-1} = b_k = 2$ , а ова е можно ако и само ако  $k = 2^t + 2$  за некој природен број  $t > 1$ . Тогаш множеството  $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$  го содржи бројот  $2^{t+1} + 3 = 10\dots 011_2$  и уште  $\binom{t}{2}$  бинарни  $(t+1)$ -цифрени броеви со три единици. Затоа,  $m = f(k) = 1 + \binom{t}{2}$ ,  $t \geq 2$ .

4. Определи ги подредени парови природни броеви  $(m, n)$  такви што  $\frac{n^3+1}{mn-1} \in \mathbb{N}$ .

**Решение.** *Прв начин.* Нека  $\frac{n^3+1}{mn-1} = k$ , за  $m, n, k \in \mathbb{N}$ . Тогаш,  $n^3 + 1 = mnk - k$ , т.е.  $n(mk - n^2) = k + 1$ . Значи,  $k + 1 = np$ , т.е.  $k = np - 1$ , за  $p \in \mathbb{N}$ . Според тоа,  $n^3 + 1 = mn^2p - mn - np + 1$  од што следува  $n(n^2 - mnp + m + p) = 0$  и како  $n \in \mathbb{N}$  добиваме  $n^2 - mnp + m + p = 0$ . Последната равенка разгледувана како квадратна равенка по  $n$  мора да има решение во  $\mathbb{N}$ , па затоа

$$(pm)^2 - 4(m+p) = a^2,$$

за некој  $a \in \mathbb{N}$  и како  $(pm)^2 - 4(m+p) < (pm)^2$  добиваме  $a < pm$ . Од

$$(pm)^2 - 4(m+p) - (pm-1)^2 = -4(m+p) + 2pm - 1 \neq 0$$

следува  $a \neq pm - 1$ . Понатаму, од

$$a^2 = (pm-2)^2 + 4pm - 4 - 4(m+p) = (pm-2)^2 + 4(p-1)(m-1) - 8$$

и  $a \leq pm - 2$  следува дека  $(p-1)(m-1) \leq 2$ .

Ако  $p = 1$ , тогаш од  $a^2 = m^2 - 4m - 4 = (m-2)^2 - 8$  следува дека

$$8 = (m-2)^2 - a^2 = (m-2-a)(m-2+a).$$

Ако  $m-2-a=2$ ,  $m-2+a=4$  или  $m-2-a=4$ ,  $m-2+a=2$ , тогаш  $2m-4=6$ , т.е.  $m=5$ . Ако  $m-2-a=8$ ,  $m-2+a=1$  или  $m-2-a=1$ ,  $m-2+a=8$ , тогаш  $2m-4=9$ , што не е можно. Слично, ако  $m=1$ , тогаш  $p=5$ .

Ако  $p \geq 2$  и  $m \geq 2$ , тогаш  $(p-1)(m-1) \leq 2$  е можно само ако  $m = p = 2$ ,  $p = 2, m = 3$  или  $p = 3, m = 2$ .

За  $p = 1, m = 5$ , од  $n^2 - 5n + 6 = 0$  следува  $n = 2$  или  $n = 3$ .

За  $p = 5, m = 1$ , од  $n^2 - 5n + 6 = 0$  следува  $n = 2$  или  $n = 3$ .

За  $p = m = 2$ , од  $n^2 - 4n + 4 = 0$  следува  $n = 2$ .

За  $p = 3, m = 2$ , од  $n^2 - 6n + 5 = 0$  следува  $n = 1$  или  $n = 5$ .

За  $p = 2, m = 3$ , од  $n^2 - 6n + 5 = 0$  следува  $n = 1$  или  $n = 5$ .

Според тоа, бараните подредени парови се

(2, 5); (3, 5); (2, 1); (3, 1); (2, 2); (1, 3); (1, 2); (5, 3); (5, 2) .

*Втор начин.* Бидејќи  $mn-1$  и  $m^3$  се заемно прости, добиваме дека  $mn-1$  е делител на  $n^3+1$  ако и само ако  $mn-1$  е делител на

$$m^3(n^3+1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1 = (mn-1)(m^2n^2 + mn + 1) + m^3 + 1$$

ако и само ако  $mn-1$  е делител на  $m^3+1$ . Според тоа, подредениот пар  $(n, m)$  е решение на задачата ако и само ако подредениот пар  $(m, n)$  е решение на задачата.

i) Ако  $m = n$ , тогаш  $\frac{n^3+1}{n^2-1} = \frac{n^2-n+1}{n-1} = n + \frac{1}{n-1}$  е природен број ако и само ако  $n = 2$ .

ii) Нека  $m > n$ . Ако  $n = 1$ , тогаш  $\frac{2}{m-1}$  е природен број ако и само ако  $m = 2$  или  $m = 3$ .

Понатаму, нека  $n \geq 2$ . Тогаш, како и во решението според првиот начин имаме  $\frac{n^3+1}{mn-1} = pn-1$ , од што заедно со  $m > n$  добиваме

$$pn-1 = \frac{n^3+1}{mn-1} < \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1},$$

па затоа  $n(p-1) < 1 + \frac{1}{n-1} \leq 2$ . Но,  $n \geq 2$  па затоа од последното неравенство следува дека  $p = 1$ . Сега од

$$n^3 + 1 = (n-1)(mn-1) = n^2m - n - mn + 1 \text{ и } n \in \mathbb{N}$$

следува  $n^2 - mn + m + 1 = 0$ , т.е.

$$m = \frac{n^2+1}{n-1} = n + 1 + \frac{2}{n-1}.$$

Но,  $m \in \mathbb{N}$  па затоа од последното равенство следува дека  $n = 2$  или  $n = 3$ , при што и во двата случаи  $m = 5$ .

Конечно, (2, 5); (3, 5); (2, 1); (3, 1); (2, 2); (1, 3); (1, 2); (5, 3); (5, 2) .

5. Нека  $S$  е множество од сите реални броеви поголеми од  $-1$ . Определи ги сите функции  $f : S \rightarrow S$  кои ги задоволуваат условите:

а)  $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ , за секои  $x, y \in S$ ;

б) Функцијата  $\frac{f(x)}{x}$  е строго растечка во секој од интервалите  $-1 < x < 0$  и  $x > 0$ .

**Решение.** Од условот б) следува дека равенката  $f(x) = x$  има најмногу три решенија и тоа: едно за  $x \in (-1, 0)$ , едно за  $x = 0$  и едно за  $x \in (0, +\infty)$ .

Нека  $f(a) = a$ , за некој  $a > 0$ . Ако ставиме  $x = y = a$ , тогаш од а) добиваме

$$f(2a + a^2) = f(a + f(a) + af(a)) = a + f(a) + af(a) = 2a + a^2.$$

Тогаш, бидејќи  $2a+a^2 > 0$  следува дека и  $2a+a^2$  е решение на  $f(x) = x$ , при  $x > 0$ . Според тоа,  $2a+a^2 = a$  т.е.  $a(a+1) = 0$ , што не е можно за  $a > 0$ . Значи, за секој  $a > 0$  важи  $f(a) \neq a$ .

Слично, за секој  $a \in (-1, 0)$  важи  $f(a) \neq a$ .

Бидејќи, за  $x = y \in S$  од  $a$ ) добиваме  $f(x+f(x)+xf(x)) = x+f(x)+xf(x)$ , единствена можност е  $x+f(x)+xf(x) = 0$ . Според тоа,  $f(x) = -\frac{x}{1+x}$  за секој

$x \in S$ . Лесно се проверува дека  $\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}$  строго монотono расте на интервалите  $(-1, 0)$  и  $(0, +\infty)$ . Понатаму,

$$\begin{aligned} y + f(x) + yf(x) &= y - \frac{x}{1+x} - \frac{yx}{1+x} = \frac{y-x}{1+x} = -\frac{x-y}{1+x} = -\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}} \\ &= f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = f(x+f(y)+yf(y)). \end{aligned}$$

6. Докажи дека постои подмножество  $A$  од множеството природни броеви со следното својство: за секое бесконечно множество  $S$  од прости броеви постојат два природни броја  $m \in A$  и  $n \notin A$  такви што секој од нив е производ на  $k$  различни елементи од множеството  $S$  за некој  $k \geq 2$ .

**Решение.** Нека  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$  е множеството од сите прости броеви. Дефинираме  $A = \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k$ , каде што  $A_k = \{q_1 \dots q_k \mid q_i \in P, p_{k-1} \neq q_1, q_2, \dots, q_k\}$ .

Нека  $S$  е бесконечно множество прости броеви и  $p_k \in S$ . Тогаш, множеството  $S \setminus \{p_k\}$  е бесконечно, па постојат  $q_1, q_2, \dots, q_{k+1} \in S \setminus \{p_k\}$  и притоа ако

$$m = q_1 q_2 \dots q_k q_{k+1} \text{ и } n = q_1 q_2 \dots q_k p_k$$

добиваме  $m \in A$  и  $n \notin A$ . Ако  $p_k \notin S$ , тогаш егзистенцијата на броевите  $m$  и  $n$  е очигледна.