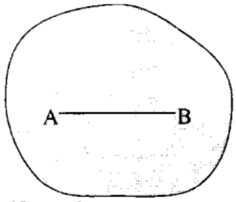
Ристо Малчески
Алекса Малчески

ТЕОРЕМА НА *HELLY* ЗА КОНВЕКСНИТЕ МНОЖЕСТВА ВО РАМНИНА

Теоријата на **конвексните множества** е "млада" математичка дисциплина. За нејзини основачи се сметаат швајцарскиот математичар *J.Steiner* (1796-1863) и германскиот математичар *G.Minkowski* (1864-1909), кој во математиката внел многу нови идеи.

Една од фундаменталните теореми во оваа теорија е онаа на *E.Helly* (1884-1943), што ја открил во 1913 год, како воен заробеник во Русија. Токму оваа теорема е предмет на нашата статија и истата ќе ја разгледаме за конвексните множества во рамнина.

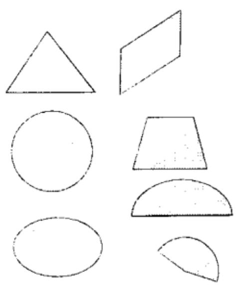
1. ПОИМ ЗА КОНВЕКСНО МНОЖЕСТВО



Црт. 1

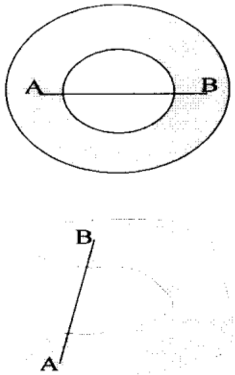
Дефиниција 1. За множеството точки во рамнината F, ќе велиме дека е **конвексно** ако заедно со секои две свои точки A и B ја содржи и отсечката AB (црт. 1).

Конвексни множества се, на пример: отсечката, правата, триаголникот, паралелограмот, кругот, елипсата, трапезот и др. (црт. 2). Примери на неконвексни множества се дадени на црт. 3.


Црт. 2

Теорема 1. Пресек на произволна фамилија конвексни множества е конвексно множество.

Доказ. Нека F_i, $i \in I$ е произволна фамилија конвексни множества. Ако точките $A, B \in \bigcap_{i \in I} F_i$, тогаш $A, B \in F_i, \forall i \in I$. Бидејќи за секој $i \in I$, F_i е конвексно множество добиваме дека отсечката $AB \in F_i$, $\forall i \in I$. Според тоа, отсечката $AB \in \bigcap_{i \in I} F_i$, т.е. $\bigcap_{i \in I} F_i$ е конвексно множество. ♦

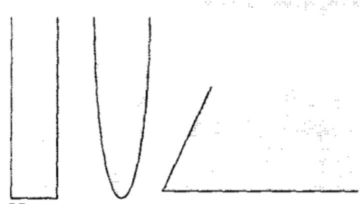


Црт. 3

Пред да преминеме на следните разгледувања ќе се потсетиме на поимите: отворен и затворен круг. Имено: множеството $\{X | \overline{OX} < R\}$ го нарекуваме **отворен круг** со центар во O и радиус R и го означуваме со $K(O,R)$, а множеството $\{X | \overline{OX} \leq R\}$ го нарекуваме **затворен круг** со центар во O и радиус R и го означуваме со $\overline{K}(O, R)$.

Дефиниција 2. Нека F е произволно множество точки во рамнината. Ќе велиме дека F е ***ограничено*** множество ако постои круг *K(O,R)* таков што $F \subseteq K(O,R)$.

Множествата од црт. 1, 2 и 3 се примери на ограничени множества, а множествата прикажани на црт. 4 не се ограничени множества.

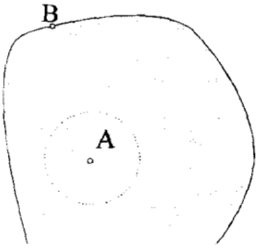


Црт. 4

Дефиниција 3. Нека F е произволно множество точки во рамнината. За точката $A \in F$ ќе велиме дека е ***внатрешна точка*** на F ако постои $\varepsilon > 0$ таков што $K(A,\varepsilon) \subseteq F$, т.е постои отворен круг со центар во A кој лежи во F (црт. 5). Множеството од сите внатрешни точки на F го нарекуваме ***внатрешност*** на F и го означуваме со F^o.

Комплементот на множеството F ќе го означуваме со ${}^cF$.

За точката B ќе велиме дека е ***гранична точка*** на F ако $K(B,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ и $K(B,\varepsilon) \cap {}^cF \neq \emptyset$, за секој $\varepsilon > 0$, т.е. секој круг со центар во B содржи како точки од F, така и точки кои не припаѓаат на F. Множеството гранични точки на F го нарекуваме ***граница на F*** и го означуваме со ∂F. Множеството $\overline{F} = F \cup \partial F$ го нарекуваме ***затворанач на*** F.

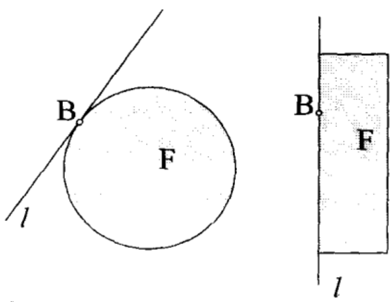


Црт. 5

Пример 1. Нека во рамнината е зададен декартов координатен систем xOy и нека го разгледаме множеството $F = \left\{(x,y) \mid \ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$. Јасно, F е круг со центар во координатниот почеток и радиус еднаков на 2, т.е $F \equiv \overline{K}(O,2)$. Лесно се гледа дека внатрешност на F е множеството $F^o = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 4\right\}$, а граница на F е множеството $\left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\right\}$. Јасно, $F \equiv \overline{F}$. ♦

Во понатамошното излагање ќе разгледуваме само конвексни и ограничени множества.

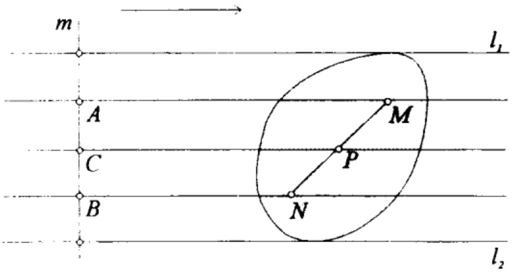
2. ПОТПОРНА ПРАВА, ШИРИНА И ДИЈАМЕТАР НА КОНВЕКСНО МНОЖЕСТВО



Црт. 6

Дефиниција 4. Нека B е гранична точка на конвексното множество F и нека правата l минува низ B. За l ќе велиме дека е ***потпорна права*** на F, ако F лежи во едната од двете полурамнини определени со правата l (црт. 6).

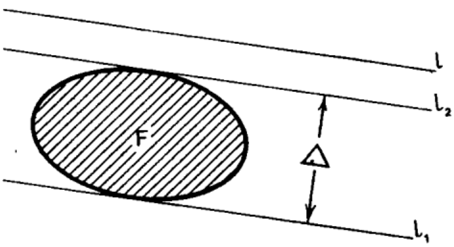
Теорема 2. За секое конвексно и ограничено множество постојат точно две потпорни прави, кои се паралелни со даден правец.



Црт. 7

Доказ. Нека m е права нормална на дадениот правец. Низ секоја точка од F повлекуваме прави нормални на m. Пресекот F_1 на тие прави со m е конвексно множество. Навистина, нека точките A и B припаѓаат на пресекот и нека C е точка од отсечката AB. Постојат точки M и N од F такви што правите што минуваат низ нив и се нормални на m, ја сечат m во A и B, соодветно. Правата низ C, која е нормална на m, очигледно ја сече MN. Пресечната точка ја означуваме со P. Но, F е конвексно множество, па затоа $P \in F$, што значи C е од разгледуваниот пресек F_1.

Бидејќи пресекот F_1 на правата m со разгледуваните прави е конвексно и ограничено множество, а единствени конвексни и ограничени множества на правата се интервалите (зошто?) заклучуваме дека F_1 е интервал. Нормалните прави l_1 и l_2 на m кои минуваат низ краевите на интервалот F_1 се бараните потпорни прави. ♦



Црт. 8

Дефиниција 5. Растојанието Δ меѓу потпорните прави l_1 и l_2 на конвексното множество F, паралелни со дадена правец l, го нарекуваме **ширина на F во правец нормален на l** (црт. 8). Инфимумот од ширините на F во правците нормални на сите прави l го нарекуваме **ширина на конвексното множество F**.

Дефиниција 6. Дијаметар на ограниченото множеството F ќе го нарекуваме бројот $d = \sup\limits_{A,B \in F} \overline{AB}$.

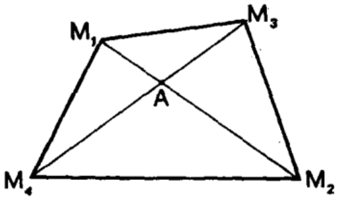
Пример 2. Лесно се гледа дека ширината Δ на рамностран триаголник T со страна a е еднаква на неговата висина, т.е. на $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а неговиот дијаметар d е еднаков на a. Слично, за квадрат со страна a ширината Δ е еднаква на a, а неговиот дијаметар d на $a\sqrt{2}$. Од друга страна, кај круг со радиус r, ширината и дијаметарот се меѓусебно еднакви и притоа важи $d=\Delta=2r$, а додека кај елипса чии оски се со должини a и b, $b<a$, ширината е еднаква на $2b$, а дијаметарот е еднаков на $2a$. ♦

3. ТЕОРЕМА НА *HELLY*

Во овој дел ќе ја презентираме теоремата на *Helly* и две нејзини последици.

Теорема 3 (*Helly*). Нека $n > 3$. Ако $F_i, i = 1,2,\dots,n$ се конвексни множества во рамнината, такви што секои три од нив имаат заедничка точка, тогаш $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$.

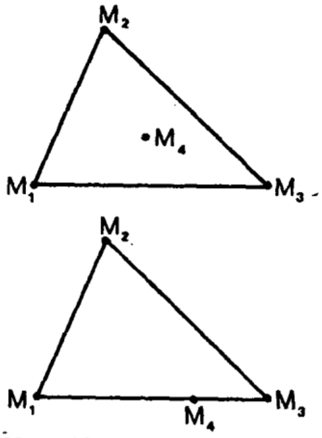
Доказ. Тврдењето на теоремата ќе го докажеме со индукција по бројот на множествата n.



Црт. 9

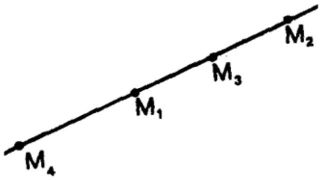
i) Нека n=4, т.е. нека во рамнината се дадени множествата F_1, F_2, F_3, F_4 такви што секои три од нив имаат заедничка точка. Со M_1, M_2, M_3, M_4 да ги означиме заедничките точка на F_2, F_3, F_4; F_1, F_3, F_4; F_1, F_2, F_4; F_1, F_2, F_3, соодветно. Точките M_1, M_2, M_3 и M_4 можат да се наоѓаат во следните три заемни положби:

а) M_1, M_2, M_3 и M_4 се темиња на конвексен четириаголник (црт. 9). Во овој случај со A да го означиме пресекот на дијагоналите на четириаголникот $M_1M_2M_3M_4$. Од $M_2, M_3, M_4 \in F_1$ следува $A \in F_1$. Слично се докажува дека $A \in F_i, i = 2,3,4$. Значи, $A \in \bigcap_{i=1}^{4} F_i$, т.е. $\bigcap_{i=1}^{4} F_i \neq \emptyset$.



Црт. 10

б) Три од точките, на пример, M_1, M_2, M_3 се темиња на триаголник, а четвртата M_4 лежи во внатрешноста на триаголникот или е негова рабна точка и лежи на една од страните, на пример M_1M_3, (црт. 10). Во овој случај, од $M_1, M_2, M_3 \in F_4$ следува дека $\Delta M_1M_2M_3 \subseteq F_4$, па значи $M_4 \in F_4$. По конструкција $M_4 \in F_i$, $i = 1,2,3$, па затоа $\bigcap_{i=1}^{4} F_i \neq \emptyset$.



Црт. 11

в) Сите четири точки лежат на една права (црт. 11). Во овој случај M_1 припаѓа на отсечката M_2M_4. Но, $M_2 \in F_1 \cap F_3 \cap F_4$ и $M_4 \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$, па затоа $M_1 \in M_2M_4 \subseteq F_1$. Од друга страна $M_1 \in F_2 \cap F_3 \cap F_4$ па затоа $M_1 \in \bigcap_{i=1}^{4} F_i$, т.е. $\bigcap_{i=1}^{4} F_i \neq \emptyset$.

ii) Нека претпоставиме дека тврдењето е докажано за $n=k$ конвексни множества, каде што $k \geq 4$. Ќе докажеме дека тоа важи и за $k+1$ конвексно множество $F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}$. Да означиме со: $P_1 = F_1 \cap F_{k+1}$, $P_2 = F_2 \cap F_{k+1}, \dots$, $P_k = F_k \cap F_{k+1}$. Добиваме k конвексни множества $P_1, P_2, \dots, P_k$, при што секои три од нив имаат заедничка точка. Навистина, на пример, дека P_1, P_2, P_3 имаат заедничка точка следува од $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_{k+1}$, $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \varnothing$, $F_1 \cap F_2 \cap F_{k+1} \neq \varnothing$, $F_1 \cap F_3 \cap F_{k+1} \neq \varnothing$, $F_2 \cap F_3 \cap F_{k+1} \neq \varnothing$ и доказот под *i)*. Од индуктивната претпоставка следува $\bigcap_{i=1}^{k} P_i \neq \varnothing$, т.е. $\bigcap_{i=1}^{k+1} F_i \neq \varnothing$. ♦

Забелешка 1. За неконвексни множества *Helly*-та теорема не важи. Тоа може да се види од следниот пример:

$$F_1 = \left\{(x,y) \middle|\ x^2+y^2 \geq 1 \wedge x^2+y^2 \leq 4\right\}, F_2 = \left\{(x,y) \middle|\ (x-2)^2+y^2 \leq 4\right\},$$

$$F_3 = \left\{(x,y) \middle|\ (x+2)^2+y^2 \leq 4\right\},\ F_4 = \left\{(x,y) \middle|\ x^2+(y-2)^2 \leq 4\right\}.$$

Имено, за множествата $F_i, i=1,2,3,4$ се исполнети условите од теорема 3, но $\bigcap_{i=1}^{4} F_i = \varnothing$, бидејќи $\bigcap_{i=2}^{4} F_i = \{(0,0)\}$ и $(0,0) \notin F_1$. ♦

Забелешка 2. За бесконечно многу конвексни множества во рамнината *Helly*-та теорема не важи. Имено, во рамнината да ги разгледаме множествата $F_i = \left\{(x,y) \middle| x \geq i\right\}$, $i=1,2,3,\dots$. Секоја тројка од овие множества има непразен пресек, но $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$. Навистина, $F_i \cap F_j \cap F_k = F_t$, каде $t = \max\{i,j,k\}$ но бидејќи за секој $x \in R$ постои $i \in N$ таков што $i > x$, заклучуваме дека за секоја точка *M(x,y)* постои F_i таков што $M \notin F_i$, што значи $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \varnothing$.

Следниот едноставен пример покажува дека во случај на бесконечно многу конвексни множества кога се исполнети условите на теоремата на *Helly* можно е пресекот на множествата да е непразен. Имено, ако

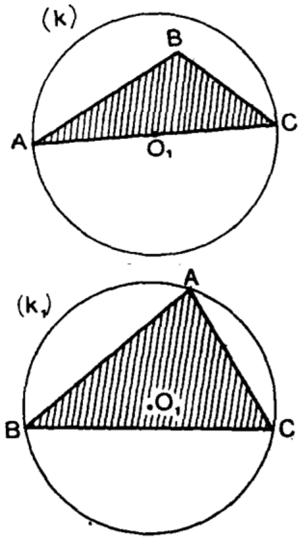
$$F_i = \left\{(x,y) \middle| x \geq 1 - \tfrac{1}{i}\right\},\ i = 1,2,3,\dots,$$

тогаш

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \left\{(x,y) \middle| x \geq 1\right\} \neq \varnothing. \ ♦$$

Helly-та теорема има голема примена, како во геометријата, така и во другите математички дисциплини. Со помош на теоремата на *Helly* можат да се докажат две интересни теореми кои ги докажале англискиот математичар *N.W.Yonng* (1882-1946) и германскиот математичар *J.W.Blaschke* (1885-1962).

Теорема 4. ***(Yonng)*** За секое конвексно множество *F*, во рамнина, важи неравенството $R \leq \frac{d}{\sqrt{3}}$, каде што *R* е радиусот на опишаната кружница околу множеството *F*, а *d* е дијаметарот на *F*.



Црт. 12

Доказ. Неравенството $R \le \frac{d}{\sqrt{3}}$ е еквивалентно на тврдењето: постои точка O центар на опишаната кружница околу F, таква што $\overline{OX} \le \frac{d}{\sqrt{3}}$, $\forall X \in F$, односно на тврдењето: сите кругови со радиуси $\frac{d}{\sqrt{3}}$ чии центри се точки од F имаат заедничка точка која припаѓа на F. Користејќи ја теоремата на *Helly* доволно е да докажеме дека секоја тројка од разгледуваните кругови има заедничка точка.

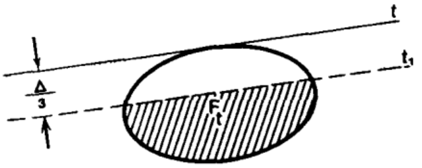
За таа цел да претпоставиме дека A,B и C се три произволни точки од F. Притоа, $\overline{AB} \le d$, $\overline{BC} \le d$, $\overline{CA} \le d$. Ако ΔABC е тапоаголен или правоаголен, тогаш тој лежи внатре во кружницата (K) конструирана над најголемата страна како над дијаметар. Јасно, радиусот ρ на оваа кружница не е поголем од $\frac{d}{2}$. Затоа постои точка O_1, центарот на кружницата (K), која е оддалечена од точките A,B и C не повеќе од $\frac{d}{2}$, што значи точката O_1 припаѓа на пресекот на круговите чии радиуси се еднакви на $\frac{d}{2}$, а центрите се во точките A,B и C. Според тоа, O_1 припаѓа на пресекот на круговите чии радиуси се еднакви на $\frac{d}{\sqrt{3}}$ а центрите се во точките A,B и C.

Ако триаголникот ABC е остроаголен, тој се наоѓа во кружница (K_1) опишана околу него (црт. 12). Според тоа, ако $\angle A$ е најголемиот агол на ΔABC, тогаш $\angle A \ge 60^o$ и $\sin\angle A \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$. Затоа, ако ρ е радиусот на кружницата (K_1), од синусната теорема имаме $2\rho = \frac{\overline{AB}}{\sin\angle A} \le \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ т.е. $\rho \le \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Според тоа, постои точка O_1, центарот на (K_1), која е оддалечена од сите точки A,B и C за најмногу $\frac{d}{\sqrt{3}}$, т.е. и во овој случај кругови со радиуси $\frac{d}{\sqrt{3}}$ и центри A,B и C имаат заедничка точка. ♦

Теорема 5. ***(Blaschke)*** За секое конвексно множество во рамнината важи неравенството $\Delta \le 3r$, каде што Δ е ширината на конвексното множество, а r е радиусот на впишаната кружница во него.

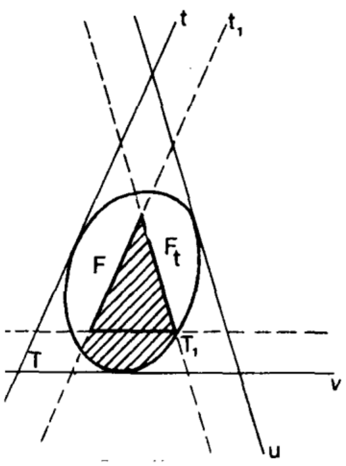
Доказ. Треба да докажеме дека внатре во секое конвексно множество F со ширина Δ се наоѓа кружница со радиус $\frac{\Delta}{3}$. Со други зборови, треба да докажеме дека во внатрешноста на F постои точка O, центарот на впишаната кружница, која е оддалечена од секоја потпорна права t на F не помалку од $\frac{\Delta}{3}$.



Црт. 13

Множеството од сите точки на F, кои се оддалечени од правата t, на растојание поголемо или еднакво од $\frac{\Delta}{3}$ формира ново множество F_t, коешто е пресек на F и полурамнината Σ_t, која е ограничена со правата t_1, (црт.13).

Така, ако точката O е оддалечена од сите потпорни прави на F за не помалку од $\frac{\Delta}{3}$, таа припаѓа на пресекот на сите конвексни множества F_t, кои соодветствуваат на сите потпорни прави t на F. Треба да докажеме дека таква точка постои, т.е. дека сите множества F_t имаат заедничка точка. Од теоремата на *Helly* следува дека сите множества имаат заедничка точка ако и само ако секоја тројка множе-ства има заедничка точка. Значи, доволно е да докажеме дека постои точка која припаѓа на множествата F_t, F_u и F_v, каде t, u и v се три потпорни прави на множеството F.

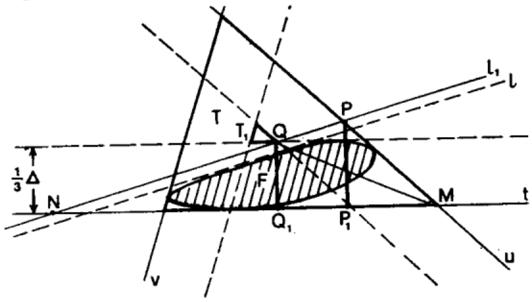


Црт. 14

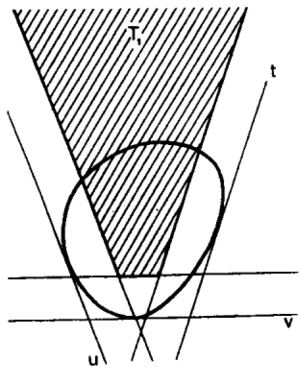
Можни се следните случаи:

i) потпорните прави t, u и v формираат триаголник T во чија внатрешност се наоѓа множеството F (црт. 14). Нека на страната t е спуштена висината h_t. Јасно должината на висината h_t не е помала од Δ. Сега од триаголникот T да отсечиме лента паралелна на страната t и со ширина $\frac{\Delta}{3}$, (црт. 14). Бидејќи тежиштето C на триаголникот T е оддалечено од страната t на растојание $\frac{h_t}{3}$, тоа припаѓа на делот од триаголникот T кој останува после споменатото отсекување. Точката C припаѓа исто така и на деловите од триаголникот T кои се добиваат после отсекување на ленти паралелни и ограничени со страните u и v и чија ширина е $\frac{\Delta}{3}$. Затоа триаголникот T_1, кој се добива од T со поместување на секоја страна за растојание $\frac{\Delta}{3}$ кон внатрешноста на T постои, бидејќи ја содржи, на пример, точката C. Сега треба да докажеме дека постои точка од множеството F која е оддалечена од сите страни на триаголникот за растојание поголемо или еднакво на $\frac{\Delta}{3}$, т.е. дека множеството F се сече со T_1.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека $F \cap T_1 = \varnothing$. Тогаш постои права l која ги раздвојува F и T_1, т.е. F и T_1 се наоѓаат на различни страни од l. Нека паралелно ја поместиме правата l така што таа да ја допира контурата на триаголникот T_1. Новата положба на l да ја означиме со l_1. Притоа или l_1 е паралелна со една од страните на триаголникот T, на пример со t или формира со страните на овој триаголник, на пример со t и u триаголник τ, во чија внатрешност лежи целото множество F. Ако $l_1 \| t$, тогаш целото множество лежи во внатрешноста на лента со ширина $\frac{\Delta}{3}$ која е формирана од t и l_1, што не е можно.



Црт. 15



Црт. 16

Ќе докажеме дека и кога l_1, t и u формираат триаголник τ добиваме противречност. Темињата на триаголникот τ да ги означиме со M,N и P, а темето на триаголникот T_1 кое припаѓа на страната NP на триаголникот τ со Q (црт. 15).

Бидејќи точката Q е оддалечена од правите t и u за едно исто растојание, добиваме дека пра-вата MQ е симетрала на $\angle MNP$. Од $\overline{NM} \geq \overline{PM}$ и $\frac{\overline{NQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{PM}}$ следува $\overline{NQ} \geq \overline{PQ}$. Од точките P и Q спуштаме нормали PP_1 и QQ_1 на правата t.

Бидејќи $\overline{QQ}_1 = \frac{\Delta}{3}$, добиваме

$$\overline{PP}_1 = \overline{QQ}_1 \cdot \frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}} = \frac{\Delta}{3} \cdot \frac{\overline{NQ} + \overline{PQ}}{\overline{NQ}} = \frac{\Delta}{3}\left(1 + \frac{\overline{PQ}}{\overline{NQ}}\right) \leq \frac{\Delta}{3} \cdot 2 < \Delta.$$

Значи, должината на висината PP_1 на триаголни-кот τ е помала од Δ, па затоа множеството F со ширина Δ не може да биде содржано во внатрешноста на тој триаголник.

ii) Ако потпорните прави t, u и v не формираат триаголник опишан околу Φ (црт. 16), тогаш доказот е доста поеноставен. Во тој случај точките кои се оддалечени од секоја потпирна права t, u и v за не помалку од $\frac{\Delta}{3}$ формираат неограничено конвексно множество T_1, чија егзистенција се констатира без посебно да се разгледува некоја точка, како што беше случајот со тежиштето во *i)*. Конечно, ако триаголникот T_1 од доказот под *i)* се замени со неограничената фигура T_1, тогаш доказот во суштина останува ист. ♦

Забелешка 3. На крајот да забележиме дека за евклидовиот простор важи аналогна теорема на *Helly* и таа гласи: Ако $F_i, i = 1,2,\dots,n$ се конвексни множества во евклидовиот простор, такви што секои четири од нив имаат заедничка точка, тогаш $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$.

ЛИТЕРАТУРА

1. АЛЕКСАНДРОВ Д.А.: Випуклие многогранники, Москва, 1950
2. D-r DEVIDE Vladimir: Konveksni likovi-Izabrana poglavlja iz matematike II, "Matematička biblioteka " br. 22, Beograd, 1962
3. ХАДВИНГЕР Г.; ДЕБРУННЕР Г.: Комбинаторнаја геометрија на равни, Москва, 1975

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ